Variétés abéliennes et théorème de Minkowski-Hlawka

Pascal Autissier

14 septembre 2015

Abstract : A classical theorem of Minkowski and Hlawka states that there exists a lattice in $\mathbb{R}^n$ with packing density at least 2^{1-n}. Buser and Sarnak proved the analogue of this result in the context of complex abelian varieties. Here we give an improvement of this analogue; this shows a conjecture of Muetzel.

Résumé : Un théorème classique de Minkowski et Hlawka montre l'existence d'un réseau de $\mathbb{R}^n$ à densité d'empilement $\geq 2^{1-n}$. Buser et Sarnak ont établi l'analogue de ce résultat dans le cadre des variétés abéliennes complexes. On donne ici une amélioration de cet analogue; cela prouve une conjecture de Muetzel.

2010 Mathematics Subject Classification : 11H31, 14K20.

1 Introduction

Un problème important de la Géométrie des Nombres est l'étude de la plus grande densité d'empilement des réseaux d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$. Rappelons que si Γ est un réseau de E de premier minimum $\lambda_1(\Gamma)$, sa densité d'empilement $\Delta(\Gamma)$ est la densité de l'empilement de boules de rayon $\dfrac{\lambda_1(\Gamma)}{2}$ centrées en les points de Γ. Le problème en question est alors d'estimer $\Delta_n = \sup\{\Delta(\Gamma)\ ;\ \Gamma \text{ réseau de } E\}$.

La valeur exacte de Δ_n n'est établie que pour certains petits entiers n, et le comportement asymptotique de Δ_n lorsque n tend vers $+\infty$ reste mystérieux. Le fameux théorème de Minkowski-Hlawka donne l'inégalité $\Delta_n \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$. La meilleure minoration générale connue (à la valeur de la constante c près) est due à Rogers [8] en 1947 :

Théorème (Rogers) : *En posant* $c = \dfrac{2}{e}$, *on a* $\Delta_n \geq \dfrac{cn}{2^n}$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

La constante c a été améliorée successivement par Davenport-Rogers [4], Ball [1], Venkatesh [12] (voir aussi Vance [11]). Ce dernier obtient $\Delta_n \geq \dfrac{c'n}{2^n}$ pour tout n assez grand, avec $c' = 65963$. Dans le même article, il montre également le résultat suivant :

Théorème (Venkatesh) : *Il existe une infinité d'entiers* $n \geq 3$ *vérifiant l'inégalité* $\Delta_n \geq \dfrac{n}{2^{n+1}} \ln \ln n$.

À titre de comparaison, la meilleure majoration générale connue est celle de Kabatyanskii et Levenshtein [6], qui est de la forme $\Delta_n \leq C^n$ pour tout n assez grand, avec $C = 0,661$.

On s'intéresse dans ce travail à l'analogue de ce problème dans le contexte des variétés abéliennes complexes.

Soit $(A; L)$ une variété abélienne complexe de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. Posons $T_A = \Gamma(A; \Omega_{A/\mathbb{C}})^\vee$ et désignons par Γ_A le réseau des périodes de A (on a donc un isomorphisme $A(\mathbb{C}) \simeq T_A/\Gamma_A$ de groupes analytiques). La polarisation L induit une forme de Riemann $\langle \ ; \ \rangle$ sur T_A, *i.e.* un produit scalaire hermitien sur T_A tel que $\mathrm{Im}\langle \gamma_1; \gamma_2 \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $(\gamma_1; \gamma_2) \in \Gamma_A^2$.

Définition : Le **volume d'injectivité** $V(A; L)$ de $(A; L)$ est la densité d'empilement du réseau Γ_A dans l'espace euclidien $(T_A; \mathrm{Re}\langle \ ; \ \rangle)$. De manière équivalente, $V(A; L)$ est le plus grand volume d'une boule ouverte de T_A qui s'injecte dans A (le volume est normalisé de sorte que Γ_A soit de covolume 1).

Étant donné un entier $g \geq 1$, on note $\mathcal{A}_g$ l'espace de modules (grossier) des schémas abéliens de dimension relative g et principalement polarisés. On cherche ici à minorer $V_g = \sup\{V(A; L) \ ; \ (A; L) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})\}$. On a trivialement l'inégalité $V_g \leq \Delta_{2g}$. Buser et Sarnak [3] ont montré l'équivalent du théorème de Minkowski-Hlawka dans ce cadre :

Théorème (Buser, Sarnak) : *Pour tout entier $g \geq 1$, on a $V_g \geq \dfrac{1}{2^{2g-1}}$.*

On se propose ici de raffiner ce résultat pour certaines valeurs de g. On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler.

Théorème 1.1 : *Soit m un entier ≥ 3 ; posons $g = \varphi(m)$. On a la minoration $V_g \geq \dfrac{m}{4^g}$.*

Tirons quelques conséquences du théorème 1.1. Muetzel conjecture dans [7] (voir sa conjecture 2.5) l'estimation $4^g V_g \geq 2g$ lorsque g est une puissance de 2. On obtient ici une version améliorée de cet énoncé :

Corollaire 1.2 : (α) *Soit g un entier ≥ 2 qui est une puissance de 2. On a $4^g V_g \geq 3g$.*
(β) *Soit g un entier de la forme $g = \varphi(n)$ pour un entier $n \geq 3$. On a $4^g V_g \geq 2g + 2$.*

Ce résultat suggère que V_g admet peut-être une minoration semblable à celle de Rogers :

Question : Si g est un entier ≥ 2, a-t-on $4^g V_g \geq 2g + 2$?

On déduit aussi de l'énoncé 1.1 un analogue (ou plutôt un raffinement, au vu de la majoration $V_g \leq \Delta_{2g}$) du théorème de Venkatesh :

Corollaire 1.3 : *Notons ici γ la constante d'Euler. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers g tels que $4^g V_g \geq e^\gamma g \ln\ln g - \varepsilon g$.*

La démonstration du théorème 1.1 repose sur un argument de valeur moyenne sur un certain espace de réseaux, inspiré de la méthode classique de Minkowski-Hlawka. Plus précisément, on considère des réseaux $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ munis d'une action libre d'un groupe cyclique d'ordre m et tels que $\mathbb{C}^g/\Gamma$ soit une variété abélienne ayant un anneau d'endomorphismes de rang $\geq \dfrac{g}{2}$ (voir remarque 4.1).

Je remercie Renaud Coulangeon pour m'avoir fourni la référence [12]. Je remercie également Bjoern Muetzel et Gaël Rémond pour leurs commentaires sur ce travail. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses suggestions avisées.

2 Rappels

Soit n un entier ≥ 1. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle, notée $\| \ \|$, et de la mesure de Lebesgue. On désigne par v_n le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $v_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$.

Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^n$ de covolume 1. Le premier minimum de Γ est par définition le réel $\lambda_1(\Gamma) = \min\limits_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \|\gamma\|$. La densité d'empilement $\Delta(\Gamma)$ de Γ est la densité de l'empilement de boules de rayon $\dfrac{\lambda_1(\Gamma)}{2}$ centrées en les points de Γ. On a donc la formule $\Delta(\Gamma) = \dfrac{v_n}{2^n}\lambda_1(\Gamma)^n$.

Soit g un entier ≥ 1. On considère maintenant $\mathbb{C}^g$ muni du produit scalaire hermitien standard ($\mathbb{C}$-linéaire à gauche par convention) noté $\big\langle \ ; \ \big\rangle$, et de la mesure de Lebesgue.

Soit Γ un réseau (de rang $2g$) de $\mathbb{C}^g$ tel que $\mathrm{Im}\big\langle \gamma ; \gamma' \big\rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $(\gamma ; \gamma') \in \Gamma^2$. Le tore $\mathbb{C}^g/\Gamma$ est alors une variété abélienne complexe, et la forme de Riemann $\big\langle \ ; \ \big\rangle$ induit une polarisation L sur $\mathbb{C}^g/\Gamma$. Posons $\Gamma' = \{\gamma' \in \mathbb{C}^g \mid \forall \gamma \in \Gamma \ \mathrm{Im}\big\langle \gamma ; \gamma' \big\rangle \in \mathbb{Z}\}$; c'est un réseau de $\mathbb{C}^g$ contenant Γ. Si $\Gamma' = \Gamma$, alors la polarisation L est principale et Γ est de covolume 1.

Pour des précisions sur les polarisations, on pourra consulter [2] pages 69-74.

3 Préliminaires

Soient m un entier ≥ 3 et $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine m-ième primitive de l'unité. On pose $g = \varphi(m)$ et on plonge $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ dans $\mathbb{C}^g$ via les g plongements complexes de K. On désigne par E le sous-espace vectoriel <u>réel</u> de $\mathbb{C}^g$ engendré par K. Observons que E est en fait un sous-anneau de $\mathbb{C}^g$ identifié à $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, et que $\mathbb{C}^g = E \oplus iE$.

Pour tout $z = (z_1 ; \cdots ; z_g) \in \mathbb{C}^g$, on note $\bar{z} = (\bar{z_1} ; \cdots ; \bar{z_g})$ son conjugué complexe. Remarquons que K, O_K et E sont stables par cette conjugaison (car $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$). En outre, le produit scalaire hermitien standard $\langle\ ;\ \rangle$ sur $\mathbb{C}^g$ est à valeurs réelles sur E^2, donc fait de E un espace euclidien. Plus précisément, on a $\langle a; b\rangle = \mathrm{Tr}(a\bar{b})$ pour tout $(a; b) \in K^2$, où $\mathrm{Tr} : K \to \mathbb{Q}$ désigne la trace.

Notons G le sous-groupe (cyclique d'ordre m) de O_K^* engendré par ζ. On définit une action $\mathbb{R}$-linéaire de G sur $\mathbb{C}^g = E \oplus iE$ par $g * (x + iy) = gx + i\bar{g}y$ pour tout $(g; x; y) \in G \times E^2$. Cette action est libre sur $\mathbb{C}^g - \{0\}$.

Lemme 3.1 : *Soient $g \in G$ et $z \in \mathbb{C}^g$. On a $\|g * z\| = \|z\|$.*

Démonstration : Écrivons $z = x + iy$ avec x et y dans E. On a alors $\|z\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(i\langle y; x\rangle) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. En utilisant l'égalité $|\sigma(g)| = 1$ pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on obtient $\|gx\|^2 = \|x\|^2$. On en conclut que
$\|g * z\|^2 = \|gx + i\bar{g}y\|^2 = \|gx\|^2 + \|\bar{g}y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|z\|^2$. $\square$

Désignons par I la codifférente de O_K, c'est-à-dire l'idéal fractionnaire défini par $I = \{a \in K \mid \mathrm{Tr}(aO_K) \subset \mathbb{Z}\}$. On sait que $\{b \in K \mid \mathrm{Tr}(bI) \subset \mathbb{Z}\} = O_K$ et que I est un réseau de E. En outre, on voit aisément que I est stable par conjugaison complexe.

Lemme 3.2 : *Soit $f : E \to E$ une application $\mathbb{R}$-linéaire symétrique. Soit r un réel > 0. Considérons le réseau*

$$\Gamma = rI + \Big(rf + \frac{i}{r}\mathrm{Id}\Big)(O_K) = \Big\{ra + rf(b) + \frac{i}{r}b\ ;\ (a; b) \in I \times O_K\Big\} \text{ de } \mathbb{C}^g.$$

(α) *Le tore $\mathbb{C}^g/\Gamma$ est une $\mathbb{C}$-variété abélienne principalement polarisée.*

(β) *Soit $x \in E$. Si f est l'application $\begin{array}{c} E \to E \\ y \mapsto x\bar{y}\end{array}$, alors f est symétrique, et Γ est stable sous l'action de G.*

Démonstration : (α) Vérifions que $\langle\ ;\ \rangle$ est une forme de Riemann. Soient $(a; a'; b; b') \in I^2 \times O_K^2$; posons $\gamma = ra + rf(b) + \frac{i}{r}b$ et $\gamma' = ra' + rf(b') + \frac{i}{r}b'$. On a alors

$$\mathrm{Im}\langle\gamma; \gamma'\rangle = \langle b; a'\rangle + \langle b; f(b')\rangle - \langle a; b'\rangle - \langle f(b); b'\rangle = \mathrm{Tr}(b\bar{a'}) - \mathrm{Tr}(a\bar{b'}) \in \mathbb{Z}\ . \qquad (*)$$

Le quotient $\mathbb{C}^g/\Gamma$ est donc une variété abélienne polarisée.

Montrons que la polarisation est principale. Posons $\Gamma' = \{\gamma' \in \mathbb{C}^g \mid \forall\gamma \in \Gamma\ \mathrm{Im}\langle\gamma; \gamma'\rangle \in \mathbb{Z}\}$. Le réseau Γ est d'indice fini dans Γ', ce qui implique $\Gamma' \subset \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soit $\gamma' \in \Gamma'$; il existe donc $(a'; b') \in K^2$ tel que $\gamma' = ra' + rf(b') + \frac{i}{r}b'$.

Pour tout $b \in O_K$, on a $\mathrm{Tr}(a'b) = \mathrm{Im}\langle rf(\bar{b}) + \frac{i}{r}\bar{b}; \gamma'\rangle \in \mathbb{Z}$ par un calcul similaire à $(*)$, donc $a' \in I$. De même, on a $\mathrm{Tr}(b'a) = -\mathrm{Im}\langle r\bar{a}; \gamma'\rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in I$, ce qui donne $b' \in O_K$. D'où $\gamma' \in \Gamma$. On a bien prouvé que $\Gamma' = \Gamma$, *i.e.* que la polarisation est principale.

(β) On suppose maintenant que f est l'application qui à $y \in E$ associe $x\bar{y}$. Soit $(y;z) \in E^2$. En écrivant par coordonnées les vecteurs x, y et z de $\mathbb{C}^g$, on trouve

$$\langle y; f(z) \rangle = \langle f(z); y \rangle = \sum_{k=1}^{g} x_k \bar{z}_k \bar{y}_k = \langle f(y); z \rangle \quad .$$

Ainsi f est-elle symétrique. Soient $g \in G$ et $(a;b) \in I \times O_K$; on pose $\gamma = ra + rf(b) + \frac{i}{r}b$. On a $g * \gamma = g(ra + rx\bar{b}) + \frac{i}{r}\bar{g}b = rga + rf(\bar{g}b) + \frac{i}{r}\bar{g}b \in \Gamma$. D'où la G-stabilité de Γ. $\square$

On choisit un domaine fondamental F du réseau I dans E, et un domaine fondamental F' de O_K. Désignons par ν la mesure de Lebesgue sur E, normalisée de sorte que la boule unité dans E soit de volume v_g. Avec cette normalisation, la mesure image de $\nu \times \nu$ par l'application $h : \begin{array}{c} E^2 \to \mathbb{C}^g \\ (x;y) \mapsto x + iy \end{array}$ s'identifie à la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{C}^g$.

Regardons le réseau Γ du lemme 3.2 avec $f = 0$: ce réseau $\Gamma = h(rI \times \frac{1}{r}O_K)$ est de covolume $\nu(rF)\nu(\frac{1}{r}F')$ d'une part, et de covolume 1 d'autre part. On en déduit que $\nu(F)\nu(F') = 1$.

Lemme 3.3 : *Soient $b \in O_K - \{0\}$, $z \in \mathbb{C}^g$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\chi : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ une application telle que la fonction $E \to \mathbb{C}$ qui à x associe $\chi(x+z)$ soit intégrable et à support compact. On a l'égalité*

$$\int_F \sum_{a \in I} \chi(ra + rxb + z) \mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{r^g} \int_E \chi(x+z) \mathrm{d}\nu(x) \quad .$$

Démonstration : L'application $\psi : E \to \mathbb{C}$ qui à x associe $\sum_{a \in I} \chi(ra + rx + z)$ est I-périodique, et la multiplication par b induit un revêtement $E/I \to E/I$. La formule de changement (linéaire) de variable donne $\int_{E/I} \psi(bx)\mathrm{d}\nu(x) = \int_{E/I} \psi(x)\mathrm{d}\nu(x)$. On en déduit que

$$\int_F \psi(xb)\mathrm{d}\nu(x) = \sum_{a \in I} \int_F \chi(ra+rx+z)\mathrm{d}\nu(x) = \int_E \chi(rx+z)\mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{r^g} \int_E \chi(x+z)\mathrm{d}\nu(x) \,.$$

D'où le résultat. $\square$

4 Démonstration du théorème 1.1

On conserve les notations de la partie 3. Soit ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < m$. On va prouver l'existence d'une $\mathbb{C}$-variété abélienne principalement polarisée $(A;L)$ telle que $V(A;L) > \frac{m-\varepsilon}{4^g}$. Lorsque $z \in \mathbb{C}^g$, on pose $\chi(z) = 1$ si $v_{2g}\|z\|^{2g} \leq m - \varepsilon$ et $\chi(z) = 0$ sinon. Pour tout réel $r > 0$, on pose

$$J(r) = \frac{\nu(F')}{r^g} \sum_{b \in O_K - \{0\}} \int_E \chi\Big(x + \frac{i}{r}b\Big)\mathrm{d}\nu(x) \quad .$$

$J(r)$ est une somme de Riemann, donc $J(r)$ converge vers $\int_E \int_E \chi(x+iy)\mathrm{d}\nu(x)\mathrm{d}\nu(y) = m-\varepsilon$ lorsque r tend vers $+\infty$. En particulier, il existe un réel $r_0 > 0$ vérifiant $J(r_0) < m$ et $v_{2g}(r_0\lambda_1(I))^{2g} > m-\varepsilon$.

On définit une application $N : \mathbb{R}^g \to \mathbb{N}$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^g \qquad N(x) = \sum_{b \in O_K - \{0\}} \sum_{a \in I} \chi\Big(r_0 a + r_0 x\bar{b} + \frac{i}{r_0} b\Big) \quad .$$

Grâce au lemme 3.3, on a la relation $\int_F N(x)\mathrm{d}\nu(x) = \dfrac{J(r_0)}{\nu(F')}$. Il existe donc un $x_0 \in F$ tel que $N(x_0) \leq \dfrac{J(r_0)}{\nu(F)\nu(F')} < m$.

Notons $f : E \to E$ l'application $y \mapsto x_0\bar{y}$ et posons $\Gamma = r_0 I + \Big(r_0 f + \dfrac{i}{r_0}\mathrm{Id}\Big)(O_K)$. D'après le lemme 3.2, le quotient $A = \mathbb{C}^g/\Gamma$ est une variété abélienne naturellement munie d'une polarisation L principale.

Il reste à minorer $V(A;L)$. Soit $\gamma = r_0 a + r_0 f(b) + \dfrac{i}{r_0} b \in \Gamma - \{0\}$. Si $b \neq 0$, le lemme 3.1 permet d'obtenir $m\chi(\gamma) = \sum_{g \in G} \chi(g * \gamma) \leq N(x_0) < m$, ce qui implique $v_{2g}\|\gamma\|^{2g} > m - \varepsilon$. Et si $b = 0$, on a directement $v_{2g}\|\gamma\|^{2g} \geq v_{2g}(r_0\lambda_1(I))^{2g} > m - \varepsilon$.

On a donc montré que $V(A;L) = \dfrac{v_{2g}}{4^g}\lambda_1(\Gamma)^{2g} > \dfrac{m-\varepsilon}{4^g}$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 4.1 : Considérons le sous-corps totalement réel $K' = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ de K. Soit $b \in O_{K'}$; notons $j(b) : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$ la multiplication par b. Le réseau Γ du lemme 3.2.β est alors stable par $j(b)$. Cela induit un endomorphisme $j(b) : \mathbb{C}^g/\Gamma \to \mathbb{C}^g/\Gamma$. On vient ainsi de construire un morphisme injectif d'anneaux $j : O_{K'} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^g/\Gamma)$.

En posant $W_{K'} = \sup\{V(A;L)\ ;\ (A;L) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \text{ et } O_{K'} \text{ s'injecte dans } \mathrm{End}(A)\}$, la démonstration ci-dessus prouve en fait l'inégalité $W_{K'} \geq \dfrac{m}{4^g}$.

5 Démonstration des corollaires

Démonstration de 1.2 : (α) Il suffit d'appliquer le théorème 1.1 avec $m = 3g$.

(β) Si n est pair sans être une puissance de 2, on a $4^g V_g \geq n \geq 2g+2$. Si n est impair, on a $\varphi(2n) = g$ donc $4^g V_g \geq 2n \geq 2g+2$. $\square$

Démonstration de 1.3 : Soit x un réel ≥ 3. Prenons m égal au produit des nombres premiers $p \leq x$, et posons $g = \varphi(m)$. D'après le théorème de Mertens raffiné (voir théorème 7 de [9]), on a $\dfrac{m}{g} = \prod_{p \leq x}\Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big)^{-1} = e^\gamma \ln x + O\Big(\dfrac{1}{\ln x}\Big)$. Le théorème des nombres premiers donne $\ln g \leq \ln m = x + O\Big(\dfrac{x}{\ln x}\Big)$, ce qui implique $\ln\ln g \leq \ln x + O\Big(\dfrac{1}{\ln x}\Big)$. On en conclut que $4^g V_g \geq m \geq e^\gamma g \ln\ln g - O\Big(\dfrac{g}{\ln\ln g}\Big)$. $\square$

Références

[1] *K. Ball :* A lower bound for the optimal density of lattice packings. International Math. Research Notices **10** (1992), 217-221.

[2] *C. Birkenhake, H. Lange :* Complex abelian varieties (second edition). Grundlehren der math. Wissenschaften **302** (2004).

[3] *P. Buser, P. Sarnak :* On the period matrix of a Riemann surface of large genus. Inventiones Math. **117** (1994), 27-56.

[4] *H. Davenport, C.A. Rogers :* Hlawka's theorem in the geometry of numbers. Duke Math. Journal **14** (1947), 367-375.

[5] *P. Gaborit, G. Zémor :* On the construction of dense lattices with a given automorphisms group. Annales de l'Institut Fourier **57** (2007), 1051-1062.

[6] *G.A. Kabatyanskii, V.I. Levenshtein :* Bound for packings on a sphere and in space. Problems of Information Transmission **14** (1978), 1-17.

[7] *B. Muetzel :* A new lower bound for Hermite's constant for symplectic lattices. International J. of Number Theory **8** (2012), 1067-1080.

[8] *C.A. Rogers :* Existence theorems in the geometry of numbers. Annals of Math **48** (1947), 994-1002.

[9] *J.B. Rosser, L. Schoenfeld :* Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois Journal of Math. **6** (1962), 64-94.

[10] *G. Tenenbaum :* Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Cours spécialisés de la S.M.F. **1** (1995).

[11] *S. Vance :* Improved sphere packing lower bounds from Hurwitz lattices. Advances in Math. **227** (2011), 2144-2156.

[12] *A. Venkatesh :* A note on sphere packings in high dimension. International Math. Research Notices **7** (2013), 1628-1642.

Pascal Autissier. I.M.B., université de Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

pascal.autissier@math.u-bordeaux1.fr