Feuille d'exercices n^o 2

Exercice 1

Soit X un ensemble infini. Parmi les ensembles de parties suivants, lesquels sont des topologies ? Justifier la réponse.

1. $\mathcal{T}_1 = \{U \subseteq X : U \text{ est fini}\}$.
2. $\mathcal{T}_2 = \{U \subseteq X : U \text{ est vide ou infini}\}$.
3. Soit $x \in X$. On pose $\mathcal{T}_3 = \{U \subseteq X : x \in U \text{ ou } X \setminus U \text{ est fini}\} \bigcup \{\emptyset\}$
4. Soit $p > 0$ un entier. On pose $X = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{T}_4 = \{p^n\mathbb{Z} : n \geq 0\} \bigcup \{\emptyset\}$.
5. $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_5 = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \bigcup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Pour chaque ensemble de parties qui est une topologie, dire quels sont les points fermés et quels sont les points ouverts.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) L'intersection d'une famille arbitraire d'ouverts est un ouvert.
   (ii) L'union d'une famille arbitraire de fermés est un fermé.
   (iii) La famille $\mathcal{F} = \{V \subseteq X : V \text{ est fermé}\}$ est une topologie sur X.
2. Montrer que si $(X, \mathcal{T})$ satisfait les assertions précédentes et si tous les points de X sont fermés, alors la topologie considérée est la topologie discrète.
3. Donner un exemple dans lequel ces trois assertions sont fausses et un autre dans lequel elles sont vraies.

Exercice 3

Soit X un ensemble non vide muni d'un ordre total $\prec$. Soit $\mathcal{E} = \big\{\{y : \ y \prec x\} : \ x \in X\big\}$. Vérifier qu'il s'agit d'une base d'ouverts pour une topologie. La topologie engendrée est appelée la *topologie de l'ordre à gauche* sur X. Quelle est la topologie de l'ordre à gauche sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ avec l'ordre naturel ?

Exercice 4

(Examen Avril 2017) – Sur $X = \mathbb{R}$, soit $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \pi \in U\} \bigcup \{\emptyset\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$, appelée la topologie VIP (un sigle pour "Very Important π").
2. Soient
$$E = [-2, 2] \quad \text{et} \quad F = [-4, 4].$$
   Les parties E et F, sont-elles ouvertes dans la topologie VIP de $\mathbb{R}$? Sont-elles fermées ?
3. Prouver qu'avec cette topologie, toute partie non vide et propre de $\mathbb{R}$ est soit ouverte, soit fermée.

Topologies induites

Exercice 5

Soit $A =]0, 1] \cup \{2\}$. Est-ce que A est ouvert ou fermé dans $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle) ? Les parties suivantes sont-elles ouvertes ou fermées dans A : $]0, 1]$, $\{2\}$, $]0, 1[\cup\{2\}$, $\{1\}\cup\{2\}$?

Exercice 6

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subseteq X$ une partie fermée, munie de la topologie induite. Montrer que si $A \subseteq Y$ est fermé dans Y, alors A est fermé dans X.

Exercice 7

1. Montrer qu'un sous-espace A d'un espace topologique X est discret (i.e. la topologie induite est discrète) si et seulement si tout point de A est isolé. On rappelle que $x \in A$ est un *point isolé* de A s'il admet un voisinage V dont l'intersection avec A est réduit à x.

2. Les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) sont-ils discrets : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{1/n; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$?

Exercice 8

Soit X un espace topologique et soit Y un sous-espace de X. Établir une condition nécessaire et suffisante sur Y pour que tout ouvert (resp. fermé) de Y soit un ouvert (resp. fermé) de X.

Intérieurs, adhérences, frontières

Exercice 9

On considère l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de la topologie des compléments finis (voir exercice 16) notée $\mathcal{T}_1$.

1. Soient $A_1 = \{1, 4\}, A_2 = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
Trouver les points intérieurs et les points adhérents de A_1 et A_2 dans $\mathcal{T}_1$. En déduire leurs adhérences et intérieurs.

2. Soit $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}_{k=1}^{\infty}, \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathcal{T}_2$ définit une topologie sur $\mathbb{N}$ et trouver les adhérences et intérieurs de A_1 et A_2 dans $(E, \mathcal{T}_2)$.

Exercice 10

Dans un espace topologique X avec une partie $A \subseteq X$ fixée, comparer les quatre parties

$$\overline{X \setminus A}, \qquad \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}, \qquad X \setminus \overset{\circ}{A}, \qquad X \setminus \overline{A}$$

Exercice 11

Soient X un espace topologique et A et B des parties de X. Montrer que $\partial(A)$ contient $\partial(\overset{\circ}{A})$. Que peut-on dire de $\partial(A \cup B)$ d'un côté et de $\partial(A)$ et $\partial(B)$ de l'autre ?

Exercice 12

Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, déterminer la frontière des parties suivantes :

$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{Q}^{\complement}, \qquad]-1, 1[\cup]1, 2[, \qquad \{\tfrac{1}{n} : n \geq 1\}$$

Exercice 13

Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X et A une partie de Y. Soit $\overset{\circ}{A}_X$ l'intérieur de A dans X et soit $\overset{\circ}{A}_Y$ l'interieur de A dans Y. Quelle relation a-t-on entre $\overset{\circ}{A}_X$ et $\overset{\circ}{A}_Y$?

Exercice 14

Soit X un espace topologique et soient $Y_1, Y_2 \subset X$ deux ouverts (resp. fermés) tels que $X = Y_1 \cup Y_2$. Prouver que $A \subset X$ est un ouvert (resp. fermé) de X si et seulement si $A \cap Y_i$ est ouvert (resp. fermé) relativement à Y_i pour $i = 1, 2$. Peut-on généraliser à une réunion quelconque $X = \cup_{i \in I} Y_i$?

Espaces séparés

Exercice 15

1. Donner toutes les topologies sur un ensemble à 3 éléments, en indiquant si elle sont séparées ou non. Les comparer.

2. Soit X un espace topologique séparé. Montrer que les points sont fermés.

3. Prouver que la seule topologie séparée sur un ensemble fini est la topologie discrète.

Exercice 16 *(topologie des compléments finis)*

Soit X un ensemble. On pose $\mathcal{T} = \{U \subset X ; U = \emptyset \text{ ou } X \setminus U \text{ fini}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

2. Décrire $\mathcal{T}$ pour X fini.

3. Prouver que $\mathcal{T}$ est séparée si et seulement si X est fini.

Exercice 17

Soit X un espace topologique séparé. On rappelle qu'un *point d'accumulation* de $A \subset X$ est un point $x \in X$ dont tout voisinage intersecte $A \setminus \{x\}$.

Montrer que pour tout $A \subset X$, l'ensemble des points d'accumulation A' de A est fermé. Montrer que cette affirmation est fausse si X non séparé.

Suites convergentes

Exercice 18

Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^N$ converge pour la distance euclidienne si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, N$ la suite des coordonnées $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 19

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites qui convergent vers x et y respectivement, alors la suite $(d(x_n, y_n))_{n\geq 0}$ converge vers $d(x, y)$ dans la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
2. On dit qu'une suite (x_n) est bornée si et seulement si il existe $y \in E$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sup_n d(x_n, y) < M$. Est-ce que une suite bornée est toujours convergente (démonstration ou contre-exemple) ? Est-ce que une suite convergente est toujours bornée ?

Exercice 20

Décrire les suites convergentes dans $\mathbb{R}$ muni de la distance triviale.

Exercice 21

Soit dans un espace métrique (X, d) une suite (x_n) telle que les trois sous-suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge.

Exercice 22

Soit (F_n) une suite décroissante de fermés dans un espace topologique X, et soit $\ell \in X$ uns limite d'une suite (x_n) dans X telle que pour chaque n, $x_n \in F_n$. Vérifier que $\ell \in \cap F_n$. Que peut-on dire si la suite de fermés n'est plus décroissante ?

Exercice 23

Soit un ensemble non dénombrable muni de la topologie codénombrable : les ouverts sont le vide et les parties de complémentaire au plus dénombrable. Montrer que :

— les suites convergentes sont les suites stationnaires,

— les parties denses sont les parties non dénombrables,

— aucun point de cet espace n'admet une base dénombrable de voisinages.