FEUILLE D'EXERCICES N^o 3

Exercice 1

(a) Montrer que les normes

$$N_1((x,y)) = |x| + |y|, \quad N_2((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad N_\infty((x,y)) = \max(|x|,|y|)$$

sont métriquement équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. Est-ce qu'elles sont topologiquement équivalentes ?
(b) On désigne par d_1 la distance associée à N_1. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{2^n}, \cos(\frac{1}{n})\right)$ converge dans $(\mathbb{R}^2, d_1)$ mais pas dans $(\mathbb{R}^2, d_{discrete})$. Est-ce que les topologies d_1 et $d_{discrete}$ sont équivalentes ?

Exercice 2

Soit d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble E. Montrer que $\mathrm{Id} : (E,d_1) \to (E,d_2)$ est un homéomorphisme si et seulement si

$$x_n \to x \text{ dans } (E,d_1) \iff x_n \to x \text{ dans } (E,d_2).$$

Exercice 3

Soient X et Y des espaces topologiques et soit A, B deux parties de X telles que $X = A \cup B$. On considère une application $f : X \to Y$ dont les restrictions $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues.

1. f est-elle nécessairement continue ?

2. Si A et B sont fermés (resp. ouverts), prouver que f est continue.

Exercice 4

1. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to J$ est strictement croissante et bijective, alors f est un homéomorphisme de I sur J.
2. Montrer que l'application $(r,t) \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ est un homéomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0);\, x \le 0\}$. Montrer que l'application $(r,t) \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ est une bijection de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi]$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, mais que ce n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 5

Soient X et Y deux espaces topologiques. Si A (resp. B) est une partie de X (resp. de Y) prouver que

$$\partial(A \times B) = \partial A \times \overline{B} \;\cup\; \overline{A} \times \partial B.$$

Exercice 6

Soit X un espace topologique.

1. Prouver que la diagonale $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$ est homéomorphe à X.

2. Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale Δ est fermée dans $X \times X$.

Exercice 7

Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et soit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. On pose

$$d(\underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, d_n(x_n, x_n')), \qquad \underline{x} = (x_n), \underline{x}' = (x_n') \in X.$$

1. Prouver que d est une distance sur le produit X.

2. On prend $X_n = \{0,1\}$ muni de la distance discrète (pout tout $n \in \mathbb{N}$) et on pose $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2-a. Prouver que l'ensemble S des suites stationnaires est dénombrable et dense dans K.

2-b. Montrer que K n'a aucun point isolé.