INTRODUCTION
À
L'ANALYSE COMPLEXE
À
PLUSIEURS VARIABLES

Philippe Charpentier

Université Bordeaux I

Septembre 2009

PHILIPPE CHARPENTIER
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES
351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE
Adresse électronique: philippe.charpentier@math.u-bordeaux1.fr

PRÉFACE

Ce cours est une introduction à l'analyse complexe en plusieurs variable suivie d'une introduction à la théorie du problème $\bar{\partial}$-Neumann.

Les quatre premiers chapitres sont essentiellement extraits du livre de L. Hörmander [H73]. Après des rappels sur la théorie des fonctions holomorphes en une variable, le Chapitre II introduit les fonctions holomorphes en plusieurs variables ainsi que l'équation de Cauchy-Riemann. Dans le Chapitre III on défini les notions d'ouverts d'holomorphie et pseudo-convexes, leur introduction étant justifiée par les résultats classiques de prolongement de Hartogs et S. Bochner. Dans la Section III.3, on introduit la notion d'ouvert strictement pseudo-convexe et on donne un certain nombre de résultats liés aux fonctions définissantes des domaines pseudo-convexes.

Le Chapitre IV est consacré à la résolution L^2 à poids de l'équation $\bar{\partial} u = f$ due à L. Hörmander. Dans la Section IV.4 nous indiquons, sans démonstration, deux résultats d'estimations L^2 dans certaines métriques.

Le dernier chapitre est consacré à une introduction du problème $\bar{\partial}$-Neumann. L'étude approfondie de ce problème dépasse largement le cadre de ce cours. Après une présentation précise de l'opérateur de Neumann associé au $\bar{\partial}$, nous définisson précisément le problème et donnons, sans démonstration, les principaux résultats connus aujourd'hui. La Section V.3 est consacrée aux projecteurs de Bergman et Szegö. Nous y donnons un résultat de D. Catlin qui donne un équivalent du noyau de Bergman sur la diagonale et l'appliquons aux domaines strictement pseudo-convexes ainsi qu'aux domaines pseudo-convexes de type fini de $\mathbb{C}^2$. Enfin, nous donnons, sans démonstration, les principales estimations connues sur les projecteurs de Bergman et Szegö.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Le contenu de ce chapitre est tout à fait classique et ne prétend pas être exhaustif. Les principaux résultats présentés ici sont contenus dans [H73]. Le lecteur voulant une théorie plus complète consultera un ou plusieurs des nombreux livres la traitant en détails (par exemple [AM04, Con78, Nar85, NN01, Yge01, Rud87]).

I.1 FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans toute la suite, nous utiliserons les notations standard suivantes :

$dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $du = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, $\partial u = \frac{\partial u}{\partial z}dz$, $\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, de sorte que $du = \partial u + \bar{\partial} u$.

DÉFINITION I.1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est holomorphe si $\bar{\partial} u = 0$.

PROPOSITION I.1.1 (Formule de Cauchy-Pompeïu).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ à frontière de classe $\mathscr{C}^1$. Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\bar{\Omega}$. Alors

$$u(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial z}(z)\frac{1}{z-\zeta}dz \wedge d\bar{z}.$$

Cette formule se montre en appliquant le formule de Stokes à la forme $\frac{u(z)}{z-\zeta}dz$ sur l'ouvert $\Omega \setminus B(\zeta, \varepsilon)$, puis en faisant tendre ε vers 0.

PROPOSITION I.1.2.

Soit μ une mesure à support compact dans $\mathbb{C}$. Alors la formule

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{C}}\frac{d\mu(z)}{z-\xi}$$

défini une fonction holomorphe en dehors du support de μ. De plus dans tout ouvert ω où $\mu = \frac{1}{2i\pi}\varphi dz \wedge d\bar{z}$, avec

$\varphi \in \mathscr{C}^k(\omega)$, on a $\hat{\mu} \in \mathscr{C}^k(\omega)$ et $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{\xi}}(\xi) = \varphi(\xi)$.

Démonstration. Il est clair que $\hat{\mu}$ est holomorphe en dehors du support de μ. Supposons tout d'abord $\mu = \frac{1}{2i\pi}\varphi dz \wedge d\bar{z}$, avec $\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{C})$. Alors

$$\hat{\mu}(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\int \varphi(z+\xi)\frac{1}{z}dz \wedge d\bar{z},$$

et donc

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z+\xi)\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

Comme φ est à support compact, $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{\xi}}(\xi) = \varphi(\xi)$ se voit en appliquant le formule de Cauchy-Pompeïu. Pour le cas général, on considère $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support compact dans ω valant 1 au voisinage de ξ ; en écrivant $\mu = \chi\mu + (1-\chi)\mu$, on obtient que $\widehat{(1-\chi)\mu}$ est holomorphe au voisinage de ξ et $\widehat{\chi\mu} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C})$ et donc, au voisinage de ξ, $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial(\widehat{\chi\mu})}{\partial \bar{\xi}} = \xi\varphi = \varphi$. □

PROPOSITION I.1.3.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de Ω et ω un voisinage ouvert de K dans Ω. Alors, pour tout entier $j \geq 0$ il existe une constante C_j telle que, pour toute fonction holomorphe u dans Ω, on a

$$\sup_{z\in K}\left|u^{(j)}(z)\right| \leq C_j \|u\|_{L^1(\omega)},$$

où $u^{(j)}$ désigne la i-ème dérivée de u.

Démonstration. En effet, soit $\psi \in \mathscr{D}(\omega)$ une fonction valant identiquement 1 sur un voisinage de K. La formule de Cauchy-Pompeïu donne, pour $z \in K$,

$$\psi(z)u(z) = \frac{1}{2i\pi}\int u(\zeta)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Comme ψ vaut identiquement 1 au voisinage de K, $\zeta \mapsto |\zeta - z|$ est minorée sur le support de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}$, d'où l'inégalité pour $j = 0$. L'inégalité pour j quelconque s'obtient en dérivant la formule ci-dessus. □

THÉORÈME I.1.1 (Théorème de Runge).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Toute fonction holomorphe au voisinage de K est limite uniforme sur K d'une suite de fonctions holomorphes dans Ω.*
2. *$\Omega \setminus K$ n'a pas de composantes connexes relativement compactes dans Ω ;*
3. *pour tout $z \in \Omega \setminus K$, il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle que $|f(z)| > \sup_K |f|$.*

Démonstration. Supposons 2. faux. Il existe donc une composante connexe non vide O de $\Omega \setminus K$ dont la frontière est contenue dans K. Par le principe du maximum, ceci contredit 3. Ainsi 3. implique 2. De plus, si $\xi \in O$, la fonction $f(z) = \frac{1}{z-\xi}$ est holomorphe au voisinage de K, et, si on suppose 1. vrai, elle est limite uniforme, sur K, d'une suite $(f_n)_n$ de fonction holomorphes dans Ω, et le principe du maximum montre que cette suite converge uniformément sur l'adhérence de O vers une fonction F holomorphe dans O continue sur $\bar{O}$. Comme $(z-\xi)F(z) \equiv 1$ sur $\partial O \subset K$, le principe du maximum donne $(z-\xi)F(z) \equiv 1$ sur O ce qui est absurde. Donc on a montré que 1. implique 2.

Montrons maintenant que 2. implique 1. Par le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que si μ est une mesure sur K telle que $\int_K h d\mu = 0$ pour toute fonction h holomorphe dans Ω, alors, pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K on a aussi $\int_K f d\mu = 0$. Pour le voir, considérons le fonction φ, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$, définie par

$$\varphi(\zeta) = \int_K \frac{d\mu(z)}{z-\zeta}.$$

Par hypothèse, si $\zeta \in \mathbb{C}\setminus K$, on a $\varphi^{(k)}(\zeta) = k!\int_K (z-\zeta)^{-k-1}\, d\mu(z) = 0$, ce qui montre que φ est nulle sur toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ qui rencontre $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Par ailleurs, comme $\int_K z^n d\mu(z) = 0$, par hypothèse, le développement en série entière de $\frac{1}{z-\zeta}$ montre que, pour $|\zeta| > \sup_K |z|$, φ est nulle sur toute composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors 2. entraîne que φ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$. Soit alors f une fonction holomorphe dans un voisinage ω de K, et soit $\psi \in \mathscr{D}(\omega)$ une fonction valant 1 sur un voisinage de K. Pour $z \in K$ la formule de Cauchy-Pompeïu donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} f(\zeta)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z},$$

et comme $\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}$ est nulle au voisinage de K, en intégrant par rapport à μ il vient

$$\int f(z)\,d\mu(z) = -\frac{1}{2i\pi}\int f(\zeta)\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta = 0.$$

Il ne reste plus qu'a voir que 2. implique 3. Soit $z\in\Omega\setminus K$. Soit D un disque fermé centré en z et contenu dans $\Omega\setminus K$. Il est clair que $K\cup D$ vérifie aussi 2. donc aussi 1. d'après ce qui précède. Alors une fonction valant 0 sur un voisinage de K et 1 sur un voisinage de D est limite uniforme sur $K\cup D$ de fonctions holomorphes dans Ω ce qui montre qu'il existe une telle fonction f telle que $\left|f\right|<1/2$ sur K et $\left|f-1\right|<1/2$ sur D. □

DÉFINITION I.1.2.

Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On appelle *enveloppe d'holomorphie de K relativement à* Ω l'ensemble $\hat K^\Omega = \hat K$ défini par :

$$\hat K = \left\{ z\in\Omega \text{ tels que } \left|f(z)\right| \le \sup_{\zeta\in K}\left|f(\alpha)\right|, \text{ pour toute fonction } f \text{ holomorphe dans } \Omega \right\}.$$

Lorsque $K=\hat K^\Omega$ on dit que K est *holomorphiquement convexe* dans Ω.

PROPOSITION I.1.4.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. *Soit K un compact de Ω.*
   (a) *La distance de $\hat K$ au complémentaire de Ω est égale à celle de K à ce complémentaire. En particulier $\hat K$ est compact dans Ω ;*
   (b) $\hat{\hat K} = \hat K$.
2. *Il existe une suite strictement croissante $\left(K_j\right)_j$ de compacts de Ω possédant les propriétés suivantes :*
   (a) *Pour tout j, K_j est holomorphiquement convexe (dans Ω) ;*
   (b) *tout compact de Ω est contenu dans l'un des K_j.*

Démonstration. Le 1. (a) se voit en considérant les fonction $\frac{1}{z-\zeta}$, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, les autres propriétés sont presque immédiates. □

THÉORÈME I.1.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Alors il existe $u\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial\bar z}=f$.

Démonstration. En effet, soit $\left(K_j\right)_j$ une suite de compacts de Ω ayant les propriétés décrites au 2. de la Proposition précédente. Pour tout j soit $\psi_j\in\mathscr{D}(\Omega)$ une fonction valant 1 sur K_j. Posons $\varphi_1=\psi_1$, et, $\varphi_j=\psi_j-\psi_{j-1}$, de sorte que φ_j est identiquement nulle sur K_{j-1} et $\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\equiv 1$ sur Ω. La Proposition I.1.2 donne, pour tout j, une fonction $u_j\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $\frac{\partial u_j}{\partial\bar z}=\varphi_j f$. Ainsi u_j est holomorphe au voisinage de K_{j-1} et le Théorème de Runge montre qu'il existe une fonction holomorphe dans Ω, v_j, telle que $\left|u_j-v_j\right|\le 2^{-j}$ sur K_{j-1}. La fonction cherchée est alors $u=\sum_{j=1}^\infty\left(u_j-v_j\right)$. En effet, comme $\left(u_j-v_j\right)$ est holomorphe au voisinage de K_l pour $j\ge l+1$, $\sum_{j=l+1}^\infty\left(u_j-v_j\right)$ est holomorphe au voisinage de K_l et, par suite, u est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω et, dans $\mathring{K}_l$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial\bar z}=\sum_1^l\frac{\partial u_j}{\partial\bar z}=\sum_1^l\varphi_l f=\psi_l f=f,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque I.1.1. Si $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C})$ est à support compact, il n'existe pas, en général, de fonction u à support compact dans $\mathbb{C}$ telle que $\frac{\partial u}{\partial\bar z}=f$.

En effet, si tel était le cas, la formule de Stokes appliquée sur un grand disque D_R contenant les supports donnerait

$$0=\int_{\partial D_R}u\,dz=\int_{D_R}f\,dz\wedge d\bar z=\int_{\mathbb{C}}f\,d\lambda,$$

alors que l'on peut avoir $\int_{\mathbb{C}}f\,d\lambda\neq 0$.

THÉORÈME I.1.3 (Weierstrass).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $\left(z_j\right)_{j\geq 1}$ une suite de points de Ω et $\left(n_j\right)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers relatifs. Alors il existe une fonction méromorphe f dans Ω telle que, pour tout $j \geq 1$, $\left(z-z_j\right)^{-n_j} f(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans un voisinage de z_j et qui est holomorphe sans zéros dans $\Omega \setminus \left\{z_j,\ j\geq 1\right\}$.

Démonstration.

Lemme. *Dans les conditions du Théorème, il existe une suite de chemins continus injectifs γ_j tels que, pour tout j, $\gamma_j(0) = z_j$, $\gamma_j(1) \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$, et, pour $j \neq k$, $\gamma_j([0,1]) \cap \gamma_k([0,1]) = \emptyset$.*

Démonstration. En considérant, pour tout entier k les ensembles $\Omega_k = \Omega \cap B(0,k)$ et

$$E_k = \left\{z \in \Omega_k \text{ tels que } d(z, \mathbb{C}\setminus\Omega_k) \geq 1/2k\right\},$$

on construit aisément ces chemins par récurrence sur k. □

Démontrons maintenant le Théorème. Les chemins γ_i étant injectifs et deux à deux disjoints, il existe, pour chaque i, des voisinages ouverts V_i et W_i de $\gamma_i([0,1])$ tels que, $W_i \subset V_i$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier k, $W_i \cap \{|z| \leq k\} \cap \{d(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) > \varepsilon\}$ est relativement compact dans V_i, $V_i \setminus W_i$ est simplement connexe, et, pour $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Pour chaque i, soit $\chi \in \mathscr{D}(V_i)$, $0 \leq \chi \leq 1$, une fonction valant identiquement 1 sur un voisinage de l'adhérence de W_i dans V_i. Comme $V_i \setminus V_i$ est simplement connexe, on choisit $\log(z-z_i)$ une détermination continue du logarithme dans cet ouvert et, pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_i,\ i\geq 1\}$, on pose

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_i)^{n_i} & \text{dans } W_i \setminus \{z_i\}, \\ \exp\left(\chi_i(z) n_i \log(z-z_i)\right) & \text{dans } V_i \setminus W_i, \\ 1 & \text{dans } \mathbb{C}\setminus \bigcup_i V_i. \end{cases}$$

Clairement $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}\setminus\{z_i,\ i\geq 1\})$. Considérons enfin la fonction

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)}\frac{\partial g}{\partial \bar z} & \text{si } z \in \Omega \setminus \bigcup_i W_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La définition de g montre aussitôt que cette fonction est bien définie sur Ω et y est $\mathscr{C}^\infty$. Par suite, le Théorème I.1.2 donne une fonction $R \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial R}{\partial \bar z} = \omega$. Posons alors $f(z) = g(z)e^{-R(z)}$, $z \in \Omega\setminus\{z_i,\ i\geq 1\}$. La construction donne $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = e^{-R(z)}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) - g(z)\frac{\partial R}{\partial \bar z}(z)\right) \equiv 0$ sur $\Omega\setminus\{z_i,\ i\geq 1\}$. Comme $f(z)(z-z_i)^{-n_i} = e^{-R(z)}$ est holomorphe sur un disque $D(z_i, r_i)\setminus\{z_i\}$ et y est bornée, elle est holomorphe dans $D(z_i, r_i)$ et ne s'y annule pas. □

I.2 FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES

DÉFINITION I.2.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. u est semi-continue supérieurement (i.e. pour tout réel s, $\{u(z) < s\}$ est ouvert dans Ω) ;
2. pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction h continue sur K et harmonique dans $\mathring{K}$, si $u \leq h$ sur ∂K alors $u \leq h$ sur K.

Par définition la fonction identiquement égale à $-\infty$ est sous-harmonique.

PROPOSITION I.2.1.

1. *Si u est sous-harmonique, pour toute constante $c > 0$, cu est sous-harmonique.*
2. *Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une famille de fonctions sous-harmoniques et soit $u = \sup_\alpha u_\alpha$. Alors u est sous-harmonique si elle est $< +\infty$ et semi-continue supérieurement.*
3. *Soit $(u_i)_{i\geq 1}$ une suite **décroissante** de fonctions sous-harmoniques. Alors $u = \lim_{i\to+\infty} u_i$ est sous-harmonique.*

Démonstration. 1. et 2. sont évidents et 3. se montre facilement : $\{u(z) < s\} = \bigcup_i \{u_i(z) < s\}$ est ouvert, donc u est semi-continue supérieurement. Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$ et h une fonction continue sur K harmonique dans $\mathring{K}$ telle que $u \le h$ sur ∂K, les ensembles $\{z \text{ tels que } u_i(z) \ge h(z) + \varepsilon,\, z \in \partial\Omega\}$ forment une suite décroissante de fermés d'intersection vide et il existe i_0 tel que $\{z \text{ tels que } u_{i_0}(z) \ge h(z) + \varepsilon,\, z \in \partial\Omega\} = \emptyset$, donc $u_{i_0} \le h + \varepsilon$ sur K ce qui conclut. □

PROPOSITION I.2.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *u est sous-harmonique.*
2. *Si D est un disque fermé contenu dans Ω et f une fonction holomorphe dans $\mathring{D}$ continue dans D telle que $u \le \Re\mathrm{e} f$ sur ∂D, alors $f \le \Re\mathrm{e} f$ dans D.*
3. *Pour tout $\delta > 0$, soit $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \text{ tels que } d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \delta\}$. Alors pour toute mesure positive μ sur $[0, \delta]$ et tout $z \in \Omega_\delta$ on a*
$$2\pi u(z) \int d\mu \le \int_0^{2\pi} \left(\int u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\mu \right) d\vartheta.$$
4. *Pour chaque $\delta > 0$ et tout $z \in \Omega_\delta$, il existe une mesure μ positive à support dans $[0, \delta]$, distincte de la masse de Dirac en 0, telle que la formule du 3. ci-dessus soit vraie.*

Démonstration. Les seules implications à vérifier sont 2. entraîne 3. et 4. entraîne 1. Montrons tout d'abord la première. Soient $z \in \Omega$, $r \in]0, \delta[$ et $D = \{z \text{ tels que } |\zeta - z| \le r\}$ un disque contenu dans Ω. Soit $\varphi_1 = \sum a_k e^{ik\vartheta}$ un polynôme trigonométrique réel tel que $u\left(z + re^{i\vartheta}\right) \le \varphi_1(\vartheta)$, pour tout ϑ. Posons $f(\zeta) = a_0 + \sum_{k \ge 1} a_k \frac{(\zeta - z)^k}{r^k}$. On a donc $u(\zeta) \le \Re\mathrm{e} f(\zeta)$ sur ∂D et l'hypothèse implique $u \le \Re\mathrm{e} f$ dans D. En particulier, au point z ceci donne $u(z) \le a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\vartheta) d\vartheta$. D'autre part, si φ est une fonction continue telle que $u\left(z + re^{i\vartheta}\right) \le \varphi(\vartheta)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique φ_1 tel que $\varphi \le \varphi_1 \le \varphi + \varepsilon$, et, par suite $u(z) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) d\vartheta + \varepsilon$. Ainsi on a $u(z) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta$ et, pour conclure, il suffit d'intégrer par rapport à $d\mu(r)$.

Montrons maintenant que 4. implique 1. Soient K un compact dans Ω et h une fonction continue sur K harmonique sur $\mathring{K}$ telle que $u \le h$ sur ∂K. Supposons $\sup_K (u - h) = M > 0$. Alors, par semi-continuité, l'ensemble $F = \{u - h = M\}$ est un compact non vide contenu dans $\mathring{K}$. Soit $z_0 \in F$ tel que $d(z_0 \partial K) = d(F, \partial K)$, et soit $\delta \in]0, d(z_0, \partial K)[$. Alors, pour tout $r \le \delta$, le cercle centré en z_0 et de rayon r contient un point z où $u(z) - h(z) < M$, et, par semi-continuité, cette inégalité reste vraie sur un arc ouvert de ce cercle. Comme la mesure μ n'est pas la masse de Dirac en 0, ceci implique
$$\int \int (u - h)\left(z_0 + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta d\mu(r) < M 2\pi \int d\mu(r) = (u - h)(z_0) 2\pi \int d\mu(r),$$
et la formule de la moyenne pour les fonction harmoniques permet de conclure. □

COROLLAIRE.

1. *La somme de deux fonctions sous-harmonique est sous-harmonique.*
2. *La sous-harmonicité est une propriété locale.*
3. *Si f est une fonction holomorphe dans Ω alors $\log|f|$ est sous-harmonique.*
4. *Soit φ une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \varphi(x)$. Si u est sous-harmonique alors $\varphi(u)$ l'est aussi. En particulier, si f est holomorphe dans Ω alors $|f|$ et $|f|^p$, $p > 0$, sont sous-harmonique.*

Démonstration. Le 3. est une conséquence immédiate du principe du maximum appliqué à l'inégalité $|f| \le \left|e^P\right|$. Démontrons 4. Par convexité, pour tout x_0 fixé, il existe une constante k telle que $\varphi(x) \ge \varphi(x_0) + k(x - x_0)$. Donc
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(u\left(z + re^{i\vartheta}\right)\right) d\vartheta \ge \varphi(x_0) + k\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta - x_0\right],$$
et, en prenant $x_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta$, il vient
$$\varphi(u(z)) \le \varphi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta\right) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(u\left(z + re^{i\vartheta}\right)\right) d\vartheta.$$
□

PROPOSITION I.2.3.

Soit u une fonction sous-harmonique dans Ω non identiquement égale à $-\infty$ sur une composante connexe de Ω. Alors u est localement intégrable dans Ω.

Démonstration. En effet, si en un point z de Ω on a $u(z) > -\infty$ et si D est un disque compact centré en z et contenu dans Ω, comme la semi-continuité de u implique qu'elle est majorée sur D, la propriété de sous-moyenne (Proposition I.2.2) montre que u est intégrable sur D. Comme D est de rayon arbitraire, ceci implique que si E est l'ensemble des points de Ω au voisinage desquels u est intégrable, u est nécessairement identiquement égale à $-\infty$ dans un voisinage de chaque point de $\Omega \setminus E$. Donc E et $\Omega \setminus E$ sont ouverts ce qui signifie que $\Omega \setminus E$ est une réunion de composantes connexes de Ω et contredit l'hypothèse. □

PROPOSITION I.2.4.

Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que u n'est pas identiquement nulle sur une composante connexe de Ω. Alors pour toute fonction positive v ce classe $\mathscr{C}^2$ à support compact dans Ω, on a

$$\int_\Omega u \triangle v \, d\lambda \geq 0.$$

Démonstration. En effet, soient $r \in \left]0, d\left(\operatorname{Supp} v, \mathbb{C} \setminus \Omega\right)\right[$ et $z \in \operatorname{Supp} v$. L'inégalité de la moyenne (Proposition I.2.2) pour u donne en intégrant contre v et en faisant le changement de variables $z + re^{i\vartheta} = \zeta$,

$$2\pi \int u(z)v(z)\,d\lambda(z) \leq \int_0^{2\pi} \left(\int v\left(\zeta - re^{i\vartheta}\right) u(\zeta)\,d\lambda(\zeta \right) d\vartheta = \int u(\zeta) \left(\int v\left(\zeta - re^{i\vartheta}\right) d\vartheta \right) d\lambda(\zeta),$$

c'est-à-dire

$$\int u(\zeta) \left[\int_0^{2\pi} v\left(\zeta - re^{i\vartheta}\right) d\vartheta - 2\pi v(\zeta) \right] d\lambda(\zeta) \geq 0.$$

Alors un développement de Taylor à l'ordre 2 de v au voisinage de ζ donne $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \left[\int_0^{2\pi} v\left(\zeta - re^{i\vartheta}\right) d\vartheta - 2\pi v(\zeta) \right] = \pi \triangle v(\zeta)$, ce qui conclut. □

THÉORÈME I.2.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit u une fonction localement intégrable dans Ω vérifiant la propriété de la Proposition précédente. Alors il existe une unique fonction U sous-harmonique sur Ω égale presque partout à u. De plus, si φ est une fonction positive radiale à support compact intégrable, pour tout $z \in \Omega$ on a

$$U(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int u(z - \delta\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}.$$

Démonstration. Si U existe, la propriété de sous-moyenne donne

$$U(z) \leq \frac{\int U(z - \delta\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)},$$

et, en faisant tendre δ vers 0, par semi-continuité, la limite du membre de droite de l'inégalité précédente est $\leq U(z)$ ce qui montre la formule du théorème et l'unicité de U.

Montrons son existence. Supposons tout d'abord u de classe $\mathscr{C}^2$ et montrons donc que u est sous-harmonique. L'hypothèse faite sur u donne, en intégrant par parties (page ci-contre), $\int (\triangle u) v \, d\lambda \geq 0$ pour toute $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ ce qui implique $\triangle u \geq 0$. En écrivant le laplacien en polaires on a donc

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta \geq 0$$

pour tout point z tel que $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > r$. En posant $M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta$, cette inégalité s'écrit $M''(r) + \frac{1}{r} M'(r) \geq 0$, autrement dit, $rM'(r)$ est croissante. Comme $rM'(r)$ tends vers 0 quand $r \to 0$, on a $M'(0) \geq 0$ et donc $M(0) \leq M(r)$, ce qui montre que u est sous harmonique d'après la Proposition I.2.2.

Traitons maintenant le cas général. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ une fonction positive à support compact dans le disque unité centré en 0 radiale et d'intégrale 1. Pour $\delta > 0$ la fonction

$$u_\delta = \int u(z - \delta\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega_\delta = \left\{\xi \in \Omega \text{ tels que } d(\xi, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \delta\right\}$ et u_δ tends vers u en norme L^1 sur les compacts de Ω quand $\delta \to 0$. De plus, il est clair que u_δ vérifie, sur Ω_δ, la même hypothèse que u et le premier cas montre que u_δ est sous-harmonique dans Ω_δ ce qui implique que

$$\varepsilon \mapsto \int u_\delta(z - \varepsilon\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)$$

décroît quand ε décroît vers 0. Alors, en faisant tendre δ vers 0, on conclut $u_\varepsilon(z)$ décroît quand ε décroît vers 0. Ainsi $U = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$ existe et est sous-harmonique. Enfin, comme u_ε tends vers u dans L^1_{loc} on a $U = u$ presque partout. □

Remarque I.2.1. Ce qui précède montre qu'une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ est sous-harmonique si et seulement si $\triangle u \geq 0$. Lorsque $\triangle u > 0$ on dit que u est ***strictement sous-harmonique***.

PROPOSITION I.2.5.

Soit $f : \Omega \to \Omega'$ une fonction holomorphe. Si u est sous-harmonique dans Ω' alors $u \circ f$ est sous-harmonique dans Ω.

Démonstration. En effet, ceci est éident si u est de classe $\mathscr{C}^2$ (puisque $\frac{\partial^2 u \circ f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$). Le cas général s'obtient en utilisant la suite décroissante de la preuve du Théorème I.2.1 ci-dessus. □

PROPOSITION I.2.6 (Hartogs)**.**

Soit $(v_k)_k$ une suite de fonctions sous-harmoniques sur un ouvert Ω. On suppose que cette suite est uniformément majorée sur tout compact de Ω et que $\overline{\lim}_{k\to\infty} v_k(z) \leq C$ pour tout $z \in \Omega$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact K de Ω, il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$ et $z \in K$ on a $v_k(z) \leq C + \varepsilon$.

Démonstration. Quitte à remplacer Ω par un ouvert relativement compact dans Ω et contenant K, on peut supposer que $v_k \leq 0$ dans Ω pour tout k. Soit alors $r > 0$ tel que $K \subset \Omega_{3r}$. La formule de la sous-moyenne donne, pour $z \in K$,

$$\pi r^2 v_k(z) \leq \int_{\{|z-\zeta|<r\}} v_k(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

Le Lemme de Fatou montre que la limite supérieure, quand $k \to \infty$, du membre de droite est $\leq \pi C r^2$, et, pour chaque $z \in K$ il existe un entier $k_0(z)$ tel que, pour $k \geq k_0(z)$ on a

$$\int_{\{|z-\zeta|<r\}} v_k(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \leq \pi r^2 (C + \varepsilon/2).$$

Pour $|z - w| < \delta < r$, comme précédement, on a

$$\pi (r+\delta)^2 v_k(w) \leq \int_{\{|\zeta - w|<r+\delta\}} v_k(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \leq \int_{\{|z-\zeta|\leq r\}} v_k(\zeta)\, d\lambda(\zeta),$$

la dernière inégalité provenant du fait que v_k est négative. On en conclut, pour $k \geq k_0(z)$, que $v_k(w) \leq (C + \varepsilon/2) \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^2 \leq C + \varepsilon$, pour δ assez petit et $|z - w| < \delta$. La conclusion résulte alors de la compacité de K, en recouvrant ce dernier par un nombre fini de disques $\{|z - w| < \delta < r\}$. □

ANNEXE

Rappelons rapidement la formule d'intégration par parties dans $\mathbb{R}^m$:

PROPOSITION.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ à bord de classe $\mathscr{C}^1$. Soit ρ une fonction définissante de Ω (i.e. $\Omega = \{\rho < 0\}$ et $\nabla\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$) telle que $|\nabla\rho| = 1$ sur $\partial\Omega$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\bar{\Omega}$. Alors, pour $1 \leq i \leq m$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, d\lambda = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\lambda + \int_{\partial\Omega} uv \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\, d\sigma.$$

Démonstration. Considérons la forme différentielle $\omega = dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m$. La formule de Stokes donne pour w une fonction de $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_1}\, d\lambda = \int_{\partial\Omega} w\omega = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\, d\sigma.$$

En effet, par un calcul direct, on voit que, sur $\partial\Omega$, $\omega = \frac{\partial \rho}{\partial x_1} d\sigma$, où $d\sigma$ est la mesure euclidienne sur $\partial\Omega$ (ceci se montre en utilisant le théorème des fonctions implicites qui ramène le calcul au cas où $\Omega = \{x_1 < 0\}$ et $\partial\Omega = \{x_1 = 0\}$). Il suffit donc d'appliquer la formule précédente à $w = uv$. □

Chapitre II

FONCTIONS HOLOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES

Ce chapitre est entièrement extrait du livre de Lars Hörmander [H73]. Le lecteur voulant des compléments pourra consulter ce livre ainsi que ceux de Christine Laurent-Thiébaut [LT97], R. Michael Range [Ran86] et Steve Krantz [Kra82].

II.1 Notations générales et Définition

Fixons tout d'abord les notations générales. Les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ sont notées $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$, et on note $dz_j = dx_j + dy_j$, $dz = \sum_{j=1}^n dz_j$, $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$, $d\bar{z} = \sum_{j=1}^n d\overline{z_j}$, $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$. Ainsi, si u est une distribution sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, en posant $\partial u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j$ et $\bar{\partial} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$, on a $du = \partial u + \bar{\partial} u$.

Bien que l'utilisation des formes différentielles ne sera pas systématique dans ce chapitre, pour des raisons de commodité, nous les introduisons dès maintenant. Avec les notations précédentes, les formes différentielles $dz^I \wedge d\bar{z}^J$ où $I = (i_1, \dots i_p)$, $1 \leq p \leq n$, $J = (j_i, \dots j_q)$, $1 \leq q \leq n$, $dz^I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}^J = d\overline{z_{j_1}} \wedge \dots \wedge d\overline{z_{j_q}}$ forment une base de l'espace des formes différentielles. On appelle alors *forme différentielle de type (ou bidegré)* (p,q) une forme différentielle f qui s'écrit

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q} a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

où les coefficients a_{IJ} sont des distributions sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. L'écriture de la formule si-dessus n'est évidement pas unique. Pour palier à cet inconvénient on introduit le symbole $\sum'$ qui signifie que la somme est prise sur les multiindices I et J strictement croissants. Ainsi l'écriture

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q}' a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

est unique pour une forme différentielle de type (ou bidegré) (p,q).

On étends ensuite les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ aux formes différentielles formellement : si $f = \sum f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$, on pose

$$\partial f = \sum \partial f_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J, \text{ et } \bar{\partial} f = \sum \bar{\partial} f_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

de sorte que $df = \partial f + \bar{\partial} f$. Si f est de type (p,q) ∂f est de type $(p+1,q)$ et $\bar{\partial} f$ de type $(p,q+1)$. Comme $0 = d^2 f =$

$\partial^2 f + (\partial\bar\partial + \bar\partial\partial) f + \bar\partial^2 f$, pour des raisons de bidegré, on a

$$\partial^2 = \bar\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0.$$

En particulier ceci montre que si f est une forme différentielle de bidegré (p,q), $q \geq 1$, pour qu'il existe une forme différentielle u telle que $\bar\partial u = f$ il faut que $\bar\partial f = 0$.

Soient u une application ce classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^\nu$ et $f = \sum f_{IJ} dz^I \wedge d\bar z^J$ une forme différentielle définie sur un voisinage ouvert de l'image de u. On appelle *image réciproque de f par u* la forme différentielle $u^* f$ sur Ω définie par la formule

$$u^* f = \sum f_{IJ}(u(z)) du^I \wedge d\bar u^J,$$

où, si $u = (u_1, \ldots, u_\nu)$, $du_j = \sum \frac{\partial u_j}{\partial z_p} dz_p + \sum \frac{\partial u_j}{\partial \bar z_p} d\overline{z_p}$, $d\overline{u_j} = \sum \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial z_p} dz_p + \sum \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial \bar z_p} d\overline{z_p}$, et, $du^I = du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p}$, si $I = (i_1, \ldots i_p)$, $d\bar u^J = d\overline{u_{j_1}} \wedge \ldots d\overline{u_{j_q}}$, si $J = (j_1, \ldots j_q)$. En particulier, si $\frac{\partial u_j}{\partial \bar z_p} = 0$ pour tous j et p, du^I est de type $(1,0)$ et $d\bar u^J$ de type $(0,1)$, donc $du^I \wedge d\bar u^I$ est de type (p,q) ; ainsi, sous cette hypothèse, si f est une forme de type (p,q) il en est de même de $u^* f$.

De plus, on vérifie aisément que $d(u^* f) = u^*(df)$ ce qui implique $\partial(u^* f) = u^*(\partial f)$ et $\bar\partial(u^* f) = u^*(\bar\partial f)$.

Donnons maintenant la définition des fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ en toute généralité :

DÉFINITION II.1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On dit qu'une distribution $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ est holomorphe si $\bar\partial f = 0$.

Remarque. On montre facilement en théorie des distributions que l'opérateur $\bar\partial$ est elliptique. Ceci implique qu'une distribution holomorphe est automatiquement une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Nous n'utiliserons pas ce résultat dans cet exposé.

PROPOSITION II.1.1 (Théorème des fonctions implicites holomorphe)**.**

Soient $f_j(w,z)$, $1 \leq j \leq m$, des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ holomorphes dans un voisinage d'un point (w^0, z^0) de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. On suppose que $f_j(w^0, z^0) = 0$, $1 \leq j \leq m$, et que $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}(w^0, z^0)\right)_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq k\leq m}} \neq 0$. Alors l'équation $f_j(w,z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, a une solution unique $w(z)$ holomorphe au voisinage de z^0 telle que $w(z^0) = w^0$.

Démonstration. L'existence de w résulte du Théorème des fonctions implicites usuel. L'holomorphie des fonctions $w = (w_1, \ldots, w_m)$ résulte de l'équation

$$0 = \sum \frac{\partial f_j}{\partial w_k} dw_k + \sum \frac{\partial f_j}{\partial z_l} dz_l$$

qui peut être résolue par hypothèse ce qui montre que les dw_k sont des combinaisons linéaires des dz_l, $1 \leq l \leq n$. □

II.2 LA FORMULE DE CAUCHY DANS UN POLYDISQUE

Dans $\mathbb{C}^n$, on appelle *polydisque* (ouvert) un produit $D = \prod_{j=1}^n D_j$ de disque D_j de $\mathbb{C}$ c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$D = \left\{ z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } \forall j, \left| z_j - z_j^0 \right| < r_j \right\} = \prod_{j=1}^n D\left(z_j^0, r_j\right)$$

où $z_j^0 \in \mathbb{C}$ et $r_j > 0$, $1 \leq j \leq n$. Le fermé $\partial_0 D = \left\{ z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } \forall j, \left| z_j - z_j^0 \right| = r_j \right\}$ s'appelle la *frontière distinguée* de D. Le point $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ s'appelle le centre du polydisque et les nombres r_j sont parfois appelés les multi-rayons du polydisque.

PROPOSITION II.2.1 (Formule de Cauchy dans un polydisque)**.**

Soient D un polydisque de $\mathbb{C}^n$ et $u : \bar D \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui est holomorphe par rapport à chaque variable les autres étant fixées. Alors, pour tout $z \in D$ on a

$$u(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\partial_0 D} \frac{u(\zeta_1, \ldots, \zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n.$$

En particulier $u \in \mathscr{C}^\infty(D)$ et est holomorphe.

Cette formule est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable complexe.

COROLLAIRE 1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit $u \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ une fonction holomorphe. Alors $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et toutes les dérivées de u sont holomorphes.

Démonstration. En effet, il suffit de dériver la formule de la Proposition précédente pour obtenir une formule analogue pour les dérivées de u, et le membre de droite de la formule obtenue est clairement holomorphe. □

COROLLAIRE 2.

Soit $(u_k)_k$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction u. Alors u est holomorphe dans Ω.

Démonstration. En effet, par passage à la limite, la fonction u vérifie la formule de Cauchy dans tout polydisque relativement compact dans Ω, ce qui montre qu'elle est holomorphe dans ce polydisque. □

COROLLAIRE 3 (Formule de la moyenne)**.**

Soit u une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Soit $z \in \Omega$, notons $\delta(z)$ la distance de z au complémentaire de Ω et soit $0 < \delta < \delta(z)$, de sorte que la boule $B(z,\delta)$ de centre z et de rayon δ est contenue dans Ω. Soit ω_{2n} le volume d'une boule de rayon 1 dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Alors

$$u(z) = \frac{1}{2n\omega_{2n}\delta^{2n-1}} \int_{\partial B(z,\delta)} u(\zeta)\, d\sigma = \frac{1}{\omega_{2n}\delta^{2n}} \int_{B(z,\delta)} f(\zeta)\, d\lambda(z).$$

En particulier, pour $p \in [1,+\infty[$, on a $|u(z)| \leq \frac{1}{\left(\omega_{2n}\delta^{2n}\right)^{1/p}} \|u\|_{L^p(B(z,\delta))}$.

Démonstration. En effet, puisque u est $\mathscr{C}^\infty$, elle est harmonique, et on sait que les fonctions harmoniques sont caractérisées par la propriété de la moyenne. □

Il est clair que l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est une algèbre. Dans toute la suite, nous noterons $A(\Omega)$ cette algèbre.

PROPOSITION II.2.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, K un compact de Ω et ω un voisinage ouvert de K dans Ω. Alors pour tout multiindice α il existe une constante C_α telle que, pour toute fonction $u \in A(\Omega)$ on a

$$\sup_{z\in K} \left|\partial^\alpha u(z)\right| \leq C_\alpha \|u\|_{L^1(\omega)}.$$

Démonstration. En effet, ceci résulte de la Proposition I.1.3 appliquée à un polydisque coordonnées par coordonnées puis en recouvrant K par un nombre fini de polydisques contenus dans ω. □

COROLLAIRE.

Soit $(u_k)_k$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Si la suite $(|u_k|)_k$ est uniformément bornée sur les compacts de Ω alors il existe une sous-suite $\left(u_{k_p}\right)_p$ de la suite $(u_k)_k$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction de $A(\Omega)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition qui montre que la suite $(u_k)_k$ est équicontinue sur tout compact de Ω et du théorème d'Ascoli. □

PROPOSITION II.2.3.

Soit u une fonction holomorphe dans le polydisque $D = \left\{\left|z_j\right| < r_j,\, 1 \leq j \leq n\right\}$. Alors u se développe en série entière, la convergence étant uniforme sur tout compact de D : $u(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!} z^\alpha$, $z \in D$.

Démonstration. On peut supposer u continue sur $\bar{D}$ de sorte que l'on peut écrire la formule de Cauchy de la Proposition II.2.1. Alors, il suffit de développer en série entière $\frac{1}{\prod_j(\zeta_j - z_j)}$ et de remarquer que la convergence est normale dans $(\partial_0 D) \times rD$, $0 < r < 1$. Les coefficients $\frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!}$ s'obtiennent aussitôt en dérivant la formule de Cauchy. □

COROLLAIRE.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$. Si u est une fonction holomorphe dans Ω qui est nulle sur un ouvert non vide de Ω alors u est identiquement nulle.

Démonstration. En effet l'ensemble des points de Ω au voisinage desquels u est nulle est à la fois ouvert (par définition) et fermé dans Ω (par la Proposition, puisque toutes les dérivées de u sont holomorphes donc continues). □

PROPOSITION II.2.4 (Inégalités de Cauchy)**.**

Soit u une fonction holomorphe dans le polydisque $D = \{|z_j| < r_j, 1 \le j \le n\}$. Si $|u| \le M$ dans D alors, pour tout multiindice α, on a $|\partial^\alpha u(0)| \le M\alpha! r^{-\alpha}$.

C'est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy (Proposition II.2.1).

THÉORÈME II.2.1 *(*Théorème d'Hartogs*).*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que u est holomorphe par rapport à chaque variable les autres étant fixées. Alors u est holomorphe dans Ω.

Remarque. On notera que, dans cet énoncé, on ne fait aucune hypothèse de régularité sur u, en particulier, on ne suppose pas que u est une distribution sur Ω.

Démonstration. L'énoncé étant local, il suffit de démontrer l'holomorphie de u dans un polydisque

$$D = \{|z_j| < r_j, 1 \le j \le n\}$$

relativement compact dans Ω, et alors, par la formule de Cauchy (Proposition II.2.1), il suffit de montrer que u est continue dans $\bar{D}$. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer qu'elle est localement bornée :

Lemme 1. *Si u est localement bornée alors elle est continue, et, par suite, holomorphe.*

Démonstration du Lemme 1. L'énonce étant local il suffit de montrer que u est continue sur un polydisque contenu dans Ω, et, par translation, on peut supposer que ce polydisque est $D = \prod_{j=1}^n D(0, r_j)$. On suppose donc u définie au voisinage de $\bar{D}$ avec les propriétés de l'énoncé et que $|u| \le M$ sur D. Écrivons alors, pour z et ζ deux points de D

$$u(z) - u(\zeta) = \sum_{j=1}^n u(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \dots, z_n) - u(\zeta_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n).$$

La fonction $U_j(\xi) = u(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \xi, \dots, z_n) - u(\zeta_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$ est, en module majorée par $2M$, et, le Lemme de Schwarz appliqué à la fonction $V(w) = \frac{1}{2M} U_j\left(\varphi_j^{-1}(w)\right)$, où $\varphi_j(v) = r_j \frac{v - \zeta_j}{r_j^2 - v\bar{\zeta}_j}$, donne $\left|V(\varphi(z_j))\right| = \frac{1}{2M}\left|U_j(z_j)\right| \le r_j \left|\frac{z_j - \zeta_j}{r_j^2 - z_j\bar{\zeta}_j}\right|$, et montre la continuité de u dans D. □

Nous faisons maintenant la démonstration du Théorème par récurrence sur la dimension n. On suppose donc le Théorème vrai dans $\mathbb{C}^p$ avec $p \le n-1$ et nous le démontrons pour un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 2. *Soit $D = \prod_{j=1}^n D_j$ un polydisque fermé (i.e. les disques D_j sont fermés) contenu dans Ω. Soit $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les hypothèses du Théorème. Alors il existe des disque $D'_j \subset D_j$, $1 \le j \le n$, de rayons > 0 tels que u est bornée dans $D' = \left(\prod_{j=1}^{n-1} D'_j\right) \times D_n$. En particulier u est holomorphe dans D' (Lemme 1 ci-dessus).*

Démonstration. Pour tout entier M posons

$$E_M = \left\{ z' \in \prod_{j=1}^{n-1} D_j \text{ tels que } \left|u(z', z_n)\right| \le M \text{ pour tout } z_n \in D_n \right\}.$$

L'hypothèse de récurrence montre que E_M est une intersection de fermés donc est fermé. De plus, comme $z_n \mapsto u(z', z_n)$ est holomorphe au voisinage de D_n, elle y est bornée et on a donc $\bigcup_{M=1}^\infty E_M = \prod_{j=1}^{n-1} D_j$. Le Théorème de Baire implique alors que l'un des E_M est d'intérieur non vide ce qui prouve le Lemme. □

Lemme 3. *Soit $D = \prod_{j=1}^n D\left(z_j^0, R\right)$ un polydisque centré au point z^0 et de multi-rayons R. Soit u une fonction de D dans $\mathbb{C}$. On suppose :*

1. *Pour chaque $z_n \in D(z_n^0, R)$ fixé, $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto u(z', z_n)$ est holomorphe dans $\prod_{i=1}^{n-1} D\left(z_j^0, R\right)$;*
2. *Il existe $r > 0$ tel que u est holomorphe et bornée dans le polydisque $\left(\prod_{j=1}^{n-1} D\left(z_j^0, r\right)\right) \times D(z_n^0, R)$.*

Alors u est holomorphe dans D.

Démonstration. Pour simplifier les notations nous supposons dans le preuve que $z^0 = 0$. Soient $0 < R_1 < R_2 < R$. Pour chaque $z_n \in D\left(z_n^0, R\right)$ fixé, soit $u(z) = \sum_\alpha a_\alpha(z_n)\, z'^\alpha$ le développement en série entière de $z' \mapsto u(z', z_n)$. Comme $a_\alpha = \frac{\partial^\alpha u}{\partial z'^\alpha}(0, z_n)$, $z_n \mapsto a_\alpha(z_n)$ est, par l'hypothèse 2., holomorphe dans $D\left(z_n^0, R\right)$, si $\sup_{\left(\prod_{j=1}^{n-1} D\left(z_j^0, r\right)\right)\times D(z_n^0,R)} |u| \leq M$, les inégalités de Cauchy (Proposition II.2.4) on a $|a_\alpha(z_n)\, r^\alpha| \leq M$. Ainsi les fonctions sous-harmoniques $v_\alpha(z_n) = \frac{1}{\alpha}\log\left|a_\zeta(z_n)\right|$ sont uniformément majorées pour $|z_n| < R$. D'autre part, l'hypothèse 1. implique $\lim_{|\alpha|\to\infty}\left|a_\alpha(z_n)\, R_2^{|\alpha|}\right| = 0$ pour tout $|z_n| < R$ donc $\overline{\lim}_{|\alpha|\to\infty} v_\alpha(z_n) \leq \log(1/R_2)$. Alors la Proposition I.2.6 montre que, pour $|\alpha|$ assez grand, on a

$$v_\alpha(z_n) \leq \log(1/R_1) \text{ pour } |z_n| < R_1,$$

c'est-à-dire $|a_\alpha(z_n)|\, R_1^{|\alpha|} \leq 1$ ce qui implique que la série $\sum_\alpha a_\alpha(z_n)\, z'^\alpha$ est normalement convergente dans D. □

Achevons maintenant la démonstration du Théorème. Soit $\zeta \in \Omega$. Soit $R > 0$ tel que le polydisque $\prod_{j=1}^n D\left(\zeta_j, 2R\right)$ soit contenu dans Ω. Le Lemme 2 montre qu'il existe un point z^0, $\max_j\left|z_j^0 - \zeta_j\right| < R$ tel que les hypothèses du Lemme 3 sont satisfaites pour un $r > 0$, et ce Lemme montre donc que u est holomorphe au voisinage de ζ. □

II.3 ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

Dans cette Section, nous présentons une étude simple de l'équation de Cauchy-Riemann

$$\bar\partial u = f,$$

dans un polydisque de $\mathbb{C}^n$, où f est une forme qui, comme nous l'avons déjà noté, doit vérifier la condition $\bar\partial f = 0$. Commençons tout d'abord par les $(0,1)$-formes à support compact :

PROPOSITION II.3.1.

> *Soit $f = \sum_{j=1}^n f_j\, d\overline{z_j}$ une $(0,1)$-forme à coefficients $f_j \in \mathscr{C}_c^k(\mathbb{C}^n)$ (i.e. de classe $\mathscr{C}^k$ et à support compact), $k \geq 1$, $n \geq 2$, telle que $\bar\partial f = 0$. Alors il existe une fonction $u \in \mathscr{C}_c^k(\mathbb{C}^n)$ telle que $\bar\partial u = f$.*

Remarque. Comme nous l'avons déjà vu (Remarque I.1.1) ce résultat est *faux* en dimension 1.

Démonstration. Posons

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f_1(\zeta, z_1, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f_1(z_1 - \zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta.$$

Remarquons que $u \in \mathscr{C}^k(\mathbb{C}^n)$ et que $u = 0$ lorsque $\sum_{j=2}^n \left|z_j\right|$ est grand. D'autre part, d'après la Proposition I.1.2 on a $\frac{\partial u}{\partial \overline{z_1}} = f_1$. Par ailleurs, puisque $\bar\partial f = 0$ on a $\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_k}} = \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_1}}$, et la formule de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.1.1) (et le fait que f est à support compact) donne

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z_k}}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\frac{\partial f_k}{\partial \overline{\zeta_1}}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta = f_k(z_1, \ldots z_n).$$

Ainsi on a $\bar\partial u = f$ et u est donc holomorphe en dehors du support de f, et comme elle est nulle pour $\sum_{j\geq 2}\left|z_j\right|$ grand, elle est à support compact. □

Ce résultat à pour conséquence un surprenant théorème dû à Hartogs qui est, bien sûr, tout à fait faux en dimension 1 :

THÉORÈME II.3.1 (Hartogs).

> *Soient K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, tel que $\Omega \setminus K$ soit connexe. Alors toute fonction holomorphe dans $\Omega \setminus K$ est la restriction à $\Omega \setminus K$ d'une fonction holomorphe dans Ω.*

Démonstration. Soit u une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus K$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ valant 1 sur un voisinage de K. Posons $u_0 = \left(1 - \varphi\right) u$. D'après la Proposition précédente, l'équation $\bar\partial v = -u\bar\partial\varphi$ a une solution, v, à support compact. v est donc nulle sur la composante connexe non bornée du complémentaire de Suppφ. Ainsi $u = u_0 = u_0 - v$ sur un ouvert non vide de $\Omega \setminus K$, et comme $u_0 - v$ est holomorphe dans Ω, on a $u = u_0 - v$ dans $\Omega \setminus K$, ce qui termine la preuve. □

S. Bochner a donné un énoncé analogue où la fonction est seulement définie sur le bord du domaine Ω. Supposons que Ω soit borné et à bord de classe $\mathscr{C}^1$ et soit ρ une fonction définissante de Ω (i.e. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n$ tels que $\rho(z) < 0\}$et $\nabla\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$). Soit $u \in \mathscr{C}^1\left(\bar{\Omega}\right)$. Supposons qu'il existe $U \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ une fonction holomorphe dans Ω telle que $u = U$ sur $\partial\Omega$. Alors $U - u = h\rho$ où $h \in \mathscr{C}\left(\bar{\Omega}\right)$. Par suite, $\bar\partial U - \bar\partial u = h\bar\partial\rho$ sur $\partial\Omega$, et donc $\bar\partial u \wedge \bar\partial\rho = 0$ sur $\partial\Omega$. Précisément, cette condition, appelée « *condition de Cauchy-Riemann tangentielle* » s'écrit $\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}\frac{\partial\rho}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial u}{\partial \bar z_k}\frac{\partial\rho}{\partial \bar z_j} = 0$ sur $\partial\Omega$, pour tous $j \neq k$, ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial u}{\partial \bar z_j}(z) = 0 \text{ si } \sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial\rho}{\partial \bar z_j}(z) = 0,\ z \in \partial\Omega.$$

THÉORÈME II.3.2 (S. Bochner).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathscr{C}^4$ tel que $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ est connexe. Soit ρ une fonction définissante de Ω. Soit $u \in \mathscr{C}^4\left(\bar{\Omega}\right)$ une fonction telle que $\bar\partial u \wedge \bar\partial\rho = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une fonction $U \in \mathscr{C}^1\left(\bar{\Omega}\right)$, holomorphe dans Ω telle que $U = u$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration. L'hypothèse sur u implique que l'on peut écrire $\bar\partial u = h_0\bar\partial\rho + \rho h_1$ avec $h_0 \in \mathscr{C}^3\left(\bar{\Omega}\right)$ et $h_1 \in \mathscr{C}^2_{(0,1)}\left(\bar{\Omega}\right)$, ce qui donne $\bar\partial\left(u - h_0\rho\right) = \rho\left(h_1 - \bar\partial h_0\right) = \rho h_2$. On a donc $\bar\partial\left(\rho h_2\right) = 0$ c'est-à-dire $\bar\partial\rho \wedge h_2 + \rho\bar\partial h_2 = 0$, ce qui montre que $\bar\partial\rho \wedge h_2$ est nulle sur $\partial\Omega$ et on peut donc écrire $h_2 = h_3\bar\partial\rho + \rho h_4$ avec $h_3 \in \mathscr{C}^2\left(\bar{\Omega}\right)$ et $h_4 \in \mathscr{C}^1\left(\bar{\Omega}\right)$.

Posons alors $U_0 = u - h_0\rho - h_3\frac{\rho^2}{2}$. Il vient alors $\bar\partial U_0 = \rho^2\left(h_4 - \frac{\bar\partial h_3}{2}\right)$. Ainsi $U_0 = u$ sur $\partial\Omega$ et $\bar\partial U_0 = \mathrm{O}\left(\rho^2\right)$. Si on considère alors la forme f qui vaut 0 sur $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ et $\bar\partial U_0$ sur Ω, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}^n$ et a un si=support compact. D'après la Proposition II.3.1 il existe une fonction $v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{C}^n)$ à support compact telle que $\bar\partial v = f$. Comme v est holomorphe dans le complémentaire de Ω (qui est connexe par hypothèse) elle y est donc nulle ce qui implique que $U = U_0 - v$ est égale à u sur $\partial\Omega$. □

Comme nous l'avons déjà dit, ces phénomènes sont faux en dimension 1 (de plus les conditions de Cauchy-Riemann tangentielles n'ont pas de sens). Précisément :

PROPOSITION II.3.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors il existe une fonction u holomorphe dans Ω qui ne se prolonge à aucun ouvert contenant strictement Ω.

Démonstration. En effet, si $(z_k)_k$ est une suite discrète de points de Ω, par le théorème de Weierstrass (Théorème I.1.3) il existe une fonction holomorphe u dans Ω qui s'annule aux points de la suite $(z_k)_k$ et qui ne s'annule pas ailleurs. Alors si on construit (ce qui est possible) la suite $(z_k)_k$ de sorte que pour tout point $\zeta \in \partial\Omega$ il existe une sous-suite $\left(z_{k_p}\right)_p$ qui converge vers ζ, si la fonction u se prolonge holomorphiquement au voisinage d'un point $\zeta \in \partial\Omega$, elle a un zéro d'ordre infini en ce point et elle est identiquement nulle sur une composante connexe de Ω contrairement à la définition de u. □

Lorsque la forme n'est plus à support compact, la résolution de l'équation $\bar\partial u = f$ est beaucoup plus complexe comme nous le verrons ultérieurement. Par exemple, on ne peut pas, en général, résoudre cette équation avec régularité $\mathscr{C}^\infty$ pour un ouvert quelconque : ceci est lié à la notion de pseudo-convexité que nous introduirons dans le chapitre suivant. Le résultat simple qui suit peut être utilisé pour résoudre le problème en utilisant un théorème de Runge approprié ou bien en développant la cohomologie de Dolbeault, mais nous adopterons un point de vue différent (dû à L. Hörmander) dans cet exposé.

PROPOSITION II.3.3.

Soit D un polydisque ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty_{(p,q+1)}(D)$ une forme (de bidegré (p,q)), $q \geq 0$, telle que $\bar\partial f = 0$. Alors si D' est un polydisque relativement compact dans D, il existe une forme $u \in \mathscr{C}^\infty_{(p,q)}(D')$ telle que $\bar\partial u = f$.

Démonstration. Nous allons faire la démonstration par récurrence sur $k \geq 1$ pour les $(p,q+1)$-formes $f = \sum' f_{IJ}dz^I \wedge d\bar z^J$ telles que la somme ne porte que sur les multi-indices $J \in \{1,\dots,k-1\}^{q+1}$. Le résultat est trivial lorsque $k = 1$ puisqu'alors, f étant de bidegré $(p,q+1)$, $q \geq 0$, on doit avoir $f = 0$. Supposons donc le résultat vrai pour k et soit $f = \sum'_{\substack{|I|=p,|J|=q+1\\ J\in\{1,\dots,k\}^{q+1}}} f_{IJ}dz^I \wedge d\bar z^J$ telle que $\bar\partial f = 0$. Écrivons $f = d\overline{z_k} \wedge g + h$ où $g = \sum'_{\substack{|I|=p,|J|=q\\ J\in\{1,\dots,k-1\}^{q}}} g_{IJ}dz^I \wedge d\bar z^J$ et $h = \sum'_{\substack{|I|=p,|J|=q+1\\ J\in\{1,\dots,k-1\}^{q+1}}} h_{IJ}dz^I \wedge d\bar z^J$. Comme $\bar\partial f = 0$, on doit avoir $\frac{\partial g_{IJ}}{\partial \bar z_j} = 0$ pour $j > k$.

Si $D = \prod D_j$ et $D' = \prod D'_j$, soit D''_k un disque ouvert contenu dans D_k et contenant l'adhérence de D'_k. Soit, de plus $\psi_k \in \mathscr{D}(D_k)$ une fonction valant 1 au voisinage de D''_k. Pour tous I et J tels que $|I| = p$, $|J| = q$ et $J \in \{1,\dots,k-1\}^q$, considérons la fonction

$$G_{IJ}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_k(\tau)g_{IJ}(z_1,\dots,z_{k-1},\tau,z_{k+1},\dots z_n)}{\tau - z_k}d\tau\wedge d\bar\tau = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_k(z_k-\tau)\,g_{IJ}(z_1,\dots,z_{k-1},z_k-\tau,z_{k+1},\dots z_n)}{\tau}d\tau\wedge d\bar\tau.$$

Il est clair que $G_{IJ} \in \mathscr{C}^\infty(D)$ et que, si D'' désigne un polydisque relativement compact dans D, contenant l'adhérence de D', et dont la k-ième composante est D''_k, on a $\frac{\partial G_{IJ}}{\partial \overline{z_k}} = g_{IJ}$ dans D'' (Proposition I.1.2). De plus, nous avons vu que, pour $j > k$, $\frac{\partial G_{IJ}}{\partial \overline{z_j}} = 0$. Posons alors

$$G = \sum_{\substack{|I|=p,|J|=q \\ J\in\{1,\dots,k-1\}^q}}' G_{IJ}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Alors, on a $\bar{\partial} G = d\overline{z_k} \wedge g + h_1$, où $h_1 = \sum'_{\substack{|I|=p,|J|=q \\ J\in\{1,\dots,k-1\}^q}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial G_{IJ}}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$. Alors, $h - h_1 = f - \bar{\partial} G$ est une forme $\bar{\partial}$-fermée à laquelle nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $v \in \mathscr{C}^\infty\left(D'\right)$ telle que $\bar{\partial} v = f - \bar{\partial} G$, et la forme $u = v + G$ est solution de $\bar{\partial} u = f$ dans D'. $\square$

CHAPITRE III

DOMAINES D'HOLOMORPHIE ET DOMAINES PSEUDO-CONVEXES

Les Sections III.1 et III.2 sont essentiellement extraites du chapitre II du livre de Lars Hörmander [H73]. Le lecteur pourra utilement compléter ce cours par la lecture du chapitre de ce livre. La Section III.3 traite des domaines strictement pseudo-convexes ainsi que de quelque résultats classiques que l'on trouve difficilement dans les livres. Toutefois, les livres [LT97] et [Ran86] apporteront des connaissances supplémentaires utiles.

Comme nous l'avons vu avec les Théorèmes de Hartogs et Bochner, pour certains ouverts de $\mathbb{C}^n$ toute fonction holomorphe se prolonge automatiquement à un ouvert strictement plus grand. Ce phénomène, absent en dimension 1 montre que tout ouvert de $\mathbb{C}^n$ n'est pas un ouvert « naturel » de définition des fonctions holomorphes. Les ouverts « naturels » sont ceux pour lesquels il existe des fonctions holomorphes qui ne se prolongent pas à un ouvert plus grand (comme en dimension 1 (Proposition II.3.2)) ; on les appelle les « domaines d'holomorphie ».

III.1 DOMAINES D'HOLOMORPHIE

DÉFINITION III.1.1.

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, est appelé un *domaine d'holomorphie* si il n'existe pas d'ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que :

1. $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$,
2. Ω_2 est connexe et $\Omega_2 \not\subseteq \Omega$,
3. $\forall\, u$ holomorphe dans Ω, il existe v holomorphe dans Ω_2 telle que $u = v$ sur Ω_1.

De façon plus vague, un domaine est d'holomorphie s'il existe une fonction holomorphe qui ne se prolonge pas à un ouvert strictement plus grand. Cette propriété qui est bien connue pour un ouvert quelconque du plan complexe n'est pas satisfaite en général en dimension supérieure comme nous l'avons vu.

Remarque. Il est naturel de se demander si tout ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est contenu dans un domaine d'holomorphie $\widetilde{\Omega}$ auquel toute fonction holomorphe sur Ω s'étende. Si on reste dans $\mathbb{C}^n$, la réponse est, en général non. Par contre si on s'autorise à étendre Ω dans une variété complexe, la réponse est oui : c'est la théorie d'Oka que nous n'aborderons pas ici (c.f. [H73]).

DÉFINITION III.1.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de Ω. On appelle « *enveloppe d'holomorphie* » de K (dans Ω) l'ensemble

$$\widehat{K_\Omega} = \left\{ z \in \Omega \text{ tels que } f \in A(\Omega), \left|f(z)\right| \leq \sup_{\zeta \in K} \left|f(\zeta)\right| \right\}.$$

Remarque. Il est clair (considérer la fonction $f(z) = e^{\langle z, \zeta \rangle}$) que $\widehat{K_\Omega}$ est contenu dans l'enveloppe convexe de K. En particulier, $\widehat{K_\Omega}$ est borné et fermé dans Ω. Mais, en général $\widehat{K_\Omega}$ n'est pas relativement compact dans Ω.

PROPOSITION III.1.1.

Soit Ω un domaine d'holomorphie. Soit $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\delta(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$ et $\delta(tz) = |t| \delta(z)$, $t \in \mathbb{C}$. Soit K un compact de Ω, soit f une fonction holomorphe dans Ω et soit w un point de $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$. Alors la relation

$$\left|f(z)\right| \leq \delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) := \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \delta(z - w), \forall z \in K$$

implique

$$\left|f(\zeta)\right| \leq \delta\left(\zeta, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right), \forall \zeta \in \widehat{K_\Omega}.$$

En particulier (prendre pour f une fonction constante)

$$\inf_{\substack{z \in K \\ w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega}} \delta(z - w) = \delta\left(K, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \delta\left(\widehat{K_\Omega}, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \inf_{\substack{z \in \widehat{K_\Omega} \\ w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega}} \delta(z - w).$$

Démonstration. Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit D un polydisque centré en 0 et soit $\triangle_\Omega^D(z) = \sup\left\{r \geq 0 \text{ tels que } z + rD \subset \Omega\right\}$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω telle que, $\forall z \in K$, $\left|f(z)\right| \leq \triangle_\Omega^D(z)$. Alors, pour $\zeta \in \widehat{K_\Omega}$ et u une fonction holomorphe dans Ω, la série de Taylor de u en ζ, $\sum \frac{(z-\zeta)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(\zeta)$, converge dans le polydisque $\zeta + \left|f(\zeta)\right| D$. En particulier, si Ω est d'holomorphie, ce polydisque est contenu dans Ω.*

Démonstration du Lemme. Notons $D = \prod_j \left\{\left|z_j\right| < r_j\right\}$. L'hypothèse $\left|f(w)\right| \leq \triangle_\Omega^D(w)$, pour $w \in K$, donne que, pour $t \in]0,1[$, l'ensemble

$$\left\{\left|z_j - w_j\right| < t r_j \left|f(w)\right|, 1 \leq j \leq n\right\}$$

est relativement compact dans Ω. Si $|u|$ est majorée par M sur cet ensemble, les inégalité de Cauchy donnent

$$\left|\partial^\alpha u(w)\right| t^{|\alpha|} r^\alpha \left|f(w)\right|^{|\alpha|} \leq \alpha! M.$$

Comme $(\partial^\alpha u) f^{|\alpha|}$ est holomorphe dans Ω, les même inégalités sont vraies dans $\widehat{K_\Omega}$ ce qui prouve la convergence de la série. La dernière remarque est conséquence de la définition de domaine d'holomorphie qui implique qu'il existe une fonction holomorphe dans Ω qui ne se prolonge à aucun ouvert strictement plus grand. □

Démontrons maintenant la Proposition. Tout d'abord, on vérifie facilement que

$$\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \sup_{\substack{w \in \mathbb{C}^n, \delta(w) \leq 1 \\ a \in \mathbb{C}, |a| < r}} \left\{r \text{ tels que } z + aw \in \Omega\right\},$$

de sorte que si l'on pose, pour $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\delta_w\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \sup_{a \in \mathbb{C}, |a| < r} \left\{r \text{ tels que } z + aw \in \Omega\right\},$$

on a $\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n, \delta(w) < 1} \delta_w\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$, et il suffit de montrer la Proposition pour $\delta = \delta_w$, $w \in \mathbb{C}^n$, et, par changement de variable, il suffit de le faire pour δ_{w_0} où $w_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Alors, si on pose $D_k = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \text{ tels que } |z_1| < 1, \text{ et } \left|z_j\right| < 1/k, 2 \leq j \leq n\right\}$, la suite $k \to \triangle_\Omega^{D_k}(z)$ converge, en croissant, vers $\delta_{w_0}\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$ quand $k \to +\infty$ en croissant. Alors, le Théorème de Dini (et l'hypothèse faite sur f dans l'énoncé) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\left|f(z)\right| \leq (1 + \varepsilon) \triangle_\Omega^{D_k}(z)$ pour $k \geq k(\varepsilon)$ et $z \in K$. Puisque Ω est d'holomorphie, le Lemme entraîne que, pour tout $\zeta \in \widehat{K_\Omega}$, le polydisque $\zeta + \frac{|f(\zeta)|}{1+\varepsilon} D_k$ est contenu dans Ω, ce qui signifie que $\left|f(\zeta)\right| \leq (1 + \varepsilon) \triangle_\Omega^{D_k}(\zeta)$, pour $k \geq k(\varepsilon)$ et $\zeta \in \widehat{K_\Omega}$, et termine la preuve, en passant à la limite quand $k \to +\infty$. □

THÉORÈME III.1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Ω est un domaine d'holomorphie ;*
2. *Pour tout compact K de Ω son enveloppe d'holomorphie $\widehat{K_\Omega}$ est compacte dans Ω, et, avec les notation de la Proposition précédente, pour toute fonction f holomorphe dans Ω on a*
$$\sup_{z\in K}\frac{|f(z)|}{\delta(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)}=\sup_{\zeta\in\widehat{K_\Omega}}\frac{|f(\zeta)|}{\delta(\zeta,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)};$$
3. *Pour tout compact K de Ω son enveloppe d'holomorphie $\widehat{K_\Omega}$ est compacte dans Ω.*
4. *il existe une fonction f holomorphe dans Ω qui ne peut être prolongée à un ouvert strictement plus grand, c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas deux ouverts Ω_1 et Ω_2 et f_2 une fonction holomorphe dans Ω_2, tels que $\Omega_1\neq\emptyset$, $\Omega_1\subset\Omega_2\cap\Omega$, Ω_2 est connexe et distinct de Ω et $f=f_2$ dans Ω_1.*

Démonstration. Le 4. est une simple reformulation de la définition de domaine d'holomorphie. Compte tenu de la Proposition précédente, il nous faut seulement démontrer que 3. implique 4. Soit D un polydisque ouvert centré en 0. Pour tout $z\in\Omega$, nous notons D_ζ le plus grand polydisque de la forme $\zeta+rD$ contenu dans Ω. Soit M un sous ensemble dénombrable dense dans Ω. Pour démontrer l'implication, nous allons construire une fonction f holomorphe dans Ω qui ne peut s'étendre à aucun voisinage de $\overline{D_\zeta}$, $\forall\zeta\in M$.

Soit $(\zeta_j)_{j\geq1}$ une suite contenant une infinité de fois chaque point de M. Soit $(K_j)_{j\geq1}$ une suite exhaustive de compacts de Ω telle que, pour tout j, K_j rencontre toute composante connexe de Ω. Pour tout j soit z_j un point de D_{ζ_j} qui n'est pas contenu dans $\widehat{K_{j\Omega}}$ (un tel point existe par l'hypothèse 3.). Par définition de l'enveloppe d'holomorphie, pour chaque j, il existe donc une fonction f_j holomorphe dans Ω telle que $f_j(z_j)=1$ et $\sup_{K_j}|f_j|<1$, et, quitte à la remplacer par une de ses puissances, on peut supposer $\sup_{K_j}|f_j|<2^{-j}$. Posons alors $f=\prod_{j=1}^\infty(1-f_j)^j$: ce produit infini converge uniformément sur chaque K_l, et f est donc holomorphe sur Ω. De plus, par construction des K_j, f n'est pas identiquement 0 sur une composante connexe de Ω, et, pour $|\alpha|<j$, $\partial^\alpha f(z_j)=0$.

Ainsi, pour tout $\zeta\in M$ et tout entier N, il existe un point de D_ζ où $\partial^\alpha f$ s'annule pour tout $|\alpha|\leq N$. Si f se prolongeait au voisinage de $\overline{D_\zeta}$, elle aurait donc un zéro d'ordre infini et serait donc nulle dans D_ζ donc dans une composante connexe de Ω contrairement à la construction. □

Exemple. Tout domaine convexe est un domaine d'holomorphie (c.f. Remarque suivant la Définition III.1.2).

PROPOSITION III.1.2.

1. *Soient Ω_α, $\alpha\in A$ une famille de domaines d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$. Alors $\Omega=\bigcap_{\alpha\in A}\Omega_\alpha$ est d'holomorphie.*
2. *Soit Ω un domaine d'holomorphie et soient f_j, $1\leq j\leq N$ des fonction holomorphes dans Ω. Alors $\Omega_f=\{z\in\Omega$ tels que $|f_j(z)|<1,1\leq j\leq N\}$ est un domaine d'holomorphie.*
3. *Soient $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ et $\Omega'\subset\mathbb{C}^m$ deux domaines d'holomorphie. Soit $u=(u_1,\ldots,u_m)$ une application holomorphe de Ω dans Ω' (i.e. les u_j sont holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$). Alors $\Omega_u=u^{-1}(\Omega)=\{z\in\Omega$ tesl que $u(z)\in\Omega\}$ est un domaine d'holomorphie.*

Démonstration. Le 1. est presque immédiat puisque $\widehat{K_\Omega}\subset\widehat{K_{\Omega_\alpha}}$ pour tout α donc $d(\widehat{K_\Omega},\mathbb{C}^n\setminus\Omega_\alpha)\geq d(K,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$. Le 2. est aussi très simple : si K est un compact de Ω_f, on a $|f_j|<r<1$ sur K pour tout j, et ces inégalités sont donc aussi vraies sur $\widehat{K_\Omega}$; donc $\widehat{K_\Omega}$ est contenu dans Ω_f et comme $\widehat{K_{\Omega_f}}\subset\widehat{K_\Omega}$, $\widehat{K_\Omega}$ est compact dans Ω_f. Vérifions maintenant le 3. Soit K un compact de Ω_u. Comme $\widehat{K_{\Omega_u}}\subset\widehat{K_\Omega}$, il suffit de voir que $\widehat{K_{\Omega_u}}$ est fermé dans Ω_u. Comme $u(K)$ est compact dans Ω', il en est de même de $\widehat{u(K)_{\Omega'}}$. Or, pour tout $\zeta\in\widehat{K_{\Omega_u}}$, si f est holomorphe dans Ω' (donc $f\circ u$ est holomorphe dans Ω_u), $|f(u(\zeta))|\leq\sup_K|f\circ u|=\sup_{u(K)}|f|$ donc $u(\zeta)\in\widehat{u(K)_{\Omega'}}$, ce qui montre que si ξ est un point adhérent à $\widehat{K_{\Omega_u}}$ on a $u(\xi)\in\widehat{u(K)_{\Omega'}}$ soit $\xi\in\Omega_u$. □

La Proposition qui suit introduit naturellement la Section suivante :

PROPOSITION III.1.3.

Soit Ω un domaine d'holomorphie. En utilisant les notations de la Proposition III.1.1, pour tous z et w dans $\mathbb{C}^n$, la fonction
$$\tau\mapsto-\log\delta(z+\tau w,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$$
est sous-harmonique là où elle est définie.

Démonstration. En effet, soient $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$, $r > 0$ et $D = \{z_0 + \tau w, \tau \in \mathbb{C}, |\tau| \leq r\}$. Supposons $D \subset \Omega$. Soit $f(\tau)$ un polynôme holomorphe tel que

$$-\log \delta \left(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) \leq \Re e f(\tau), \text{ pour } |\tau| = r.$$

Un changement de variables affine montre qu'il existe un polynôme holomorphe F dans $\mathbb{C}^n$ tel que $F(z_0 + \tau w) = f(\tau)$. Alors $\left|e^{-F(z)}\right| \leq \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ sur ∂D, et comme $\widehat{\partial D_\Omega} \supset D$ (par le principe du maximum), la Proposition III.1.1 donne $\left|e^{-F(z)}\right| \leq \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ sur D c'est-à-dire

$$-\log \delta \left(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) \leq \Re e f(\tau), \text{ pour } |\tau| \leq r,$$

ce qui montre la Proposition, celle-ci étant triviale si $w = 0$. □

III.2 Domaines pseudo-convexes

La dernière Proposition de la section précédente nous conduit à introduire la notion de fonction pluri-sousharmonique :

Définition III.2.1.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est pluri-sousharmonique si :

1. u est semi-continue supérieurement ;
2. pour tous z et w dans $\mathbb{C}^n$, la fonction $\tau \mapsto u(z + \tau w)$ est sous-harmonique là où elle est définie.

Par exemple (c.f. Corollaire de la Proposition I.2.2) si f est holomorphe, $\log|f|$ est pluri-sousharmonique, si φ est convexe croissante et u pluri-sousharmonique, $\varphi \circ u$ est pluri-sousharmonique, et, en particulier, si f est holomorphe dans Ω, pour tout $p > 0$, $|f|^p$ est pluri-sousharmonique.

Proposition III.2.1.
Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Alors u est pluri-sousharmonique si et seulement si

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z) w_j w_k \geq 0, \text{ pour tous } z \in \Omega \text{ et } w \in \mathbb{C}^n.$$

*De plus, on dit que u est **strictement pluri-sousharmonique** si la forme quadratique $w \mapsto \langle \mathscr{H} u; w, \bar{w} \rangle := \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z) w_j w_k$ est définie positive.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Remarque I.2.1 appliqué à la fonction $u(z + \tau w)$. □

Proposition III.2.2.
Soit u une fonction pluri-sousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, non identiquement égale à $-\infty$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ une fonction multi-radiale, identiquement nulle sur l'ensemble $\{|z| > 1\}$ et d'intégrale 1. Pour $\varepsilon > 0$ posons

$$u_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon \zeta) \varphi(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Alors u_ε est définie, pluri-sousharmonique et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left\{z \in \Omega \text{ tels que } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > \varepsilon\right\}$ et $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ tends en décroissant vers u quand $\varepsilon \searrow 0$.

De plus, toute limite d'une suite décroissante de fonctions pluri-sousharmoniques est pluri-sousharmonique.

Démonstration. Le fait que $u_\varepsilon \geq u$ et que $u_\varepsilon \searrow u$ quand $\varepsilon \searrow 0$ résulte, par récurrence sur la dimension, du Théorème I.2.1, de sa preuve et de la semi-continuité de u. Enfin, comme u_ε est $\mathscr{C}^\infty$, la pluri-souharmonicité de u_ε résulte de la Remarque I.2.1.

La dernière assertion de la Proposition résulte d son analogue en dimension 1 (Proposition I.2.1). □

Proposition III.2.3.
Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \Omega' \subset \mathbb{C}^m$ une application holomorphe. Si u est pluri-sousharmonique dans Ω' alors $u \circ f$ est pluri-sousharmonique dans Ω.

Démonstration. La preuve est la même qu'en dimension 1. Supposons tout d'abord $u \in \mathscr{C}^2(\Omega')$. Alors

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(f(z))}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_j \overline{\zeta_k}} g_j \overline{g_k} \geq 0,$$

avec $g_j = \sum_i w_i \frac{\partial f_j}{\partial z_i}$, de sorte que $u \circ f$ est pluri-sousharmonique. Pour conclure dans le cas général, il suffit d'utiliser la Proposition précédente et d'appliquer ce qui précède aux fonctions u_ε. □

Avec les Définitions que nous venons d'introduire, la dernière Proposition de la Section précédente est le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME III.2.1.

Soit Ω un domaine d'holomorphie. Avec la notation introduite à la Proposition III.1.1, la fonction $z \mapsto -\log \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ est pluri-sousharmonique et continue.

Nous verrons au chapitre suivant que la réciproque de ce Théorème est vraie.

DÉFINITION III.2.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de Ω. On appelle **enveloppe pluri-sousharmonique** de K dans Ω l'ensemble

$$\widehat{K_\Omega^P} = \left\{ z \in \Omega \text{ tels que } \forall u \text{ pluri-sousharmonique dans } \Omega,\ u(z) \leq \sup_{\zeta \in K} u(\zeta) \right\}.$$

THÉORÈME III.2.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Avec les notations de la Proposition III.1.1, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$-\log \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ est pluri-sousharmonique dans Ω ;*
2. *il existe une fonction u pluri-sousharmonique continue dans Ω telle que, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\Omega_u^c = \{z \in \Omega \text{ tels que } u(z) < c\}$ est relativement compact dans Ω ;*
3. *Pour tout compact K de Ω, $\widehat{K_\Omega^P}$ est compact dans Ω.*

*Un domaine de $\mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions ci-dessus est appelé un **domaine pseudo-convexe**. Tout domaine d'holomorphie est pseudo-convexe (Théorème III.2.1 ci-dessus).*

Démonstration. On peut naturellement supposer $\Omega \neq \mathbb{C}^n$, car les propriétés sont évidentes dans ce cas (pour 2. et 3. considérer $u(z) = |z|^2$). Pour voir que 1. implique 2., prenons $u(z) = |z|^2 - \log \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$. La seule chose à vérifier est que Ω_u^c est borné. Or, puisque $\delta(z) = |z| \delta\left(\frac{z}{|z|}\right)$, on a $\delta(z) \leq C|z|$, donc $\delta(z - w) \leq C|z| + C|w|$ ce qui implique $\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) \leq A|z| + B$ (car $\Omega \neq \mathbb{C}^n$). Les points de Ω_u^c vérifient donc

$$|z|^2 \leq \log \delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) + c \leq \log(A|z| + B) + c,$$

ce qui est impossible si Ω_u^c n'est pas borné.

Comme 2. entraîne trivialement 3., démontrons que 3. implique 1. Soient $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, et $r > 0$ tel que $D = \{z_0 + \tau w, \text{ tels que } |\tau| \leq r\}$ est contenu dans Ω. Soit $f(\tau)$ un polynôme holomorphe tel que $-\log \delta(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) \leq \Re e f(\tau)$, pour $|\tau| = r$, c'est-à-dire

$$\delta\left(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) \geq \left| e^{-f(\tau)} \right|, |\tau| = r. \tag{III.2.1}$$

Soit $a \in \mathbb{C}^n$ tel que $\delta(a) < 1$. Pour $0 \leq \lambda \leq 1$, soit $f_\lambda(\tau) = z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}$, $|\tau| \leq r$. Notons $D_\lambda = f_\lambda(\{|\tau| \leq r\})$ de sorte que $D_0 = D$.

Soit $\Lambda = \{\lambda \text{ tels que } D_\lambda \subset \Omega\}$. Il est clair que $0 \in \Lambda$ et, par continuité, Λ est ouvert. Montrons que Λ est fermé. Remarquons que

$$K = \left\{ z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \text{ tels que } |\tau| = r \text{ et } 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

est un compact contenu dans Ω (le contraire contredirait (III.2.1)). Si $\lambda \in \Lambda$, pour toute u pluri-sousharmonique dans Ω, $\tau \mapsto u\left(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}\right)$ est sous-harmonique au voisinage de $\{|\tau| \leq r\}$ et on a donc, pour $|\tau| \leq r$

$$u\left(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}\right) \leq \sup_K u,$$

ce qui montre que $D_\lambda \subset \widehat{K_\Omega^P}$. L'hypothèse 3. montre donc que Λ est fermé. Ainsi $D_1 \subset \Omega$ ce qui implique $\delta(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) \geq \left| e^{-f(\tau)} \right|$, $|\tau| \leq r$, c'est-à-dire

$$-\log \delta\left(z_0 + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) \leq \Re e f(\tau),$$

$|\tau| \leq r$, ce qui termine la preuve. □

PROPOSITION III.2.4.

1. *Soit Ω_α, $\alpha \in A$, une famille d'ouverts pseudo-convexes. Alors $\overbrace{\bigcap_{\alpha\in A}\Omega_\alpha}^{\circ}$ est pseudo-convexe.*
2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si pour tout $\zeta \in \partial\Omega$ il existe un ouvert ω_ζ tel que $\Omega \cap \omega_\zeta$ est pseudo-convexe, alors Ω est pseudo-convexe.*

Démonstration. Le 1. vient du fait qu'un sup de fonctions pluri-sousharmoniques est pluri-sousharmonique quand il est semi-continu supérieurement (c.f. Proposition I.2.1). Démontrons le 2. Chaque point $z \in \partial\Omega$ possède un voisinage ω tel que $\omega\cap\Omega$ est pseudo-convexe, donc comme, au voisinage de z, $\delta(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega) = \delta(z,\mathbb{C}^n\setminus(\Omega\cap\omega))$, $-\log\delta(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$ est pluri-sousharmonique au voisinage de z. Ainsi il existe un fermé F dans Ω tel que $-\log\delta(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$ est pluri-sousharmonique dans $\Omega\setminus F$. Alors si φ est une fonction pluri-sousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ qui vérifie $\varphi(z) > -\log\delta(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$ dans F (prendre une fonction φ de la forme $\psi\left(|z|^2\right)$ avec ψ convexe croissante assez grande), la fonction

$$u(z) = \sup\left(\varphi(z), -\log\delta\left(z,\mathbb{C}^n\setminus\Omega\right)\right)$$

est pluri-sousharmonique dans Ω et vérifie la condition 2. du Théorème III.2.2. □

PROPOSITION III.2.5.

Soient Ω un ouvert pseudo-convexe, K un compact de Ω et ω un voisinage ouvert de $\widehat{K}^P_\Omega$ relativement compact dans Ω. Alors il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que :

1. *u est strictement pluri-sousharmonique ;*
2. *$u < 0$ sur K et $u > 0$ dans $\Omega\setminus\omega$;*
3. *pour tout réel c, l'ensemble $\left\{z \in \Omega \text{ tels que } u(z) < c\right\}$ est relativement compact dans Ω.*

Démonstration. Construisons tout d'abord une fonction pluri-sousharmonique continue v satisfaisant 2. et 3. Soit u_0 une fonction pluri-sousharmonique continue vérifiant les conditions du 2. du Théorème III.2.2 ; quitte à lui rajouter une constante, nous pouvons supposer $u_0 < 0$ sur K. Considérons les compacts

$$K' = \left\{z\in\Omega \text{ tels que } u_0(z) \le 2\right\} \text{ et } L = \left\{z\in\Omega\setminus\omega \text{ tels que } u_0 \le 0\right\}.$$

Le choix de ω fait que, pour chaque $z \in L$ il existe une fonction w, pluri-sousharmonique dans Ω, telle que $w < 0$ dans K et $w(z) > 0$. Par régularisation (Proposition III.2.2), on obtient une fonction pluri-sousharmonique continue w_1 au voisinage de K', < 0 sur K et > 0 dans un voisinage de z. Comme L est compact, on en déduit l'existence d'une fonction pluri-sousharmonique continue dans un voisinage de K' w_2 qui est < 0 sur K et > 0 sur un voisinage de L. Si C est le maximum de w_2 sur K', on pose

$$v(z) = \begin{cases} \max\{w_2(z), Cu_0(z)\} & \text{si } u_0(z) < 2 \\ Cu_0(z) & \text{si } u_0(z) > 1. \end{cases}$$

Comme les deux définitions coïncident lorsque $1 < u_0(z) < 2$, on obtient une fonction pluri-sousharmonique continue dans Ω qui satisfait 2. et 3. de la Proposition.

Pour tout entier j soit $\Omega_j = \left\{z\in\Omega \text{ tels que } v(z) < j\right\} \Subset \Omega$, et, avec les notations de la Proposition III.2.2, posons

$$v_j(z) = \int_{\Omega_{j+1}} v(\zeta)\frac{\varphi(z-\zeta)}{\varepsilon_j}\varepsilon_j^{-2n}\,d\lambda + \varepsilon_j|z|^2,$$

où ε_j est choisi suffisamment petit de sorte que v_j soit $\mathscr{C}^\infty$, $> v$ et strictement pluri-sousharmonique dans un voisinage de Ω_j. De plus, par les choix des ε_j, on peut obtenir $v_0 < 0$ et $v_1 < 0$ sur K, et, $v_j < v+1$ dans Ω_j. On considère maintenant une fonction convexe $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\chi'(t) > 0$ pour $t > 0$. Alors la fonction $\chi\left(v_j + 1 - j\right)$ est strictement pluri-sousharmonique au voisinage de $\Omega_j\setminus\Omega_{j-1}$, et on peut choisir des nombres $a_1, a_2, \dots$ tels que la fonction $u_m = v_0 + \sum_{j=1}^m a_j\chi\left(v_j + 1 - j\right)$ soit $> v$ et strictement pluri-sousharmonique dans Ω_m. Comme $u_m = u_l$ dans Ω_j si l et m sont $> j$, la fonction $u = \lim_{m\to+\infty} u_m$ est une fonction strictement pluri-sousharmonique $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω, et comme $u = v_0 < 0$ sur K et $u > v$, elle satisfait les conditions de la Proposition. □

Remarque III.2.1. La Proposition III.2.5 montre que dans le Théorème III.2.2on peut remplacer, dans le 2. *u pluri-sousharmonique continue* par *u pluri-sousharmonique $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω*.

THÉORÈME III.2.3.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathscr{C}^2$. Soit ρ une fonction définissante de Ω (c.f. notations précédent le Théorème II.3.2) de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $\bar{\Omega}$. Alors Ω est pseudo-convexe si et seulement si, pour tout point $z \in \partial\Omega$, on a :

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(z)}{\partial z_j\partial\overline{z_k}} w_j\overline{w_k} \ge 0 \text{ pour tout } w\in\mathbb{C}^n \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j} w_j = 0.$$

*Cette condition s'appelle la **condition de Levi**.*

Avant de faire la preuve de ce théorème, nous faisons quelques remarques. L'ensemble des points $w \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j} w_j = 0$ est un espace vectoriel complexe de dimension $n-1$ qui est appelé ***l'espace complexe tangent au point*** $z \in \partial\Omega$, et généralement noté $T_{0,1}^{\mathbb{C}}(z)$.

Si $w = (w_j)_j = \left(x_j^w + i y_j^w\right)_j \in T_{0,1}^{\mathbb{C}}(z)$, l'équation qui défini w s'écrit, en réel,

$$\sum_j \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_j} x_j^w + \frac{\partial\rho}{\partial y_j} y_j^w\right) = 0$$
$$\sum_j \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_j} x_j^w + \frac{\partial\rho}{\partial x_j} y_j^w\right) = 0,$$

et donc les vecturs (réels) $w = \left(x_j^w, y_j^w\right)_j$ et $iw = \left(-y_j^w, x_j^w\right)_j$ (multiplication complexe par i) sont des vecteurs tangents à $\partial\Omega$ au point z. La propriété « w et iw sont tangents à $\partial\Omega$ en z » caractérise les vecteurs de $T_{0,1}^{\mathbb{C}}(z)$.

La condition de Levi dit donc que la restriction de la hessienne complexe $\mathscr{H}\rho = \partial\bar\partial\rho(z)$ de ρ au point z au plan complexe tangent est une forme hermitienne positive. De plus, soit z_0 un point de $\partial\Omega$, et supposons qu'en ce point on a $\frac{\partial\rho}{\partial z_n}(z_0) \neq 0$. Alors les champs de vecteurs $L_i(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)}{\frac{\partial\rho}{\partial z_n}(z)} \frac{\partial}{\partial z_n}$ $1 \leq i \leq n-1$, sont $\mathscr{C}^1$ dans un voisinage V de z_0, et, en tout point z de $V \cap \partial\Omega$ l'espace vectoriel $T_{0,1}^{\mathbb{C}}(z)$ est engendré par ces vecteurs : plus précisément, en tout point z de V, ces vecteurs engendrent l'espace vectoriel (de dimension complexe $n-1$) formé par les vecteurs w qui vérifient $\sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j} w_j = 0$.

Remarquons aussi que la condition de Levi est indépendante de la fonction définissante ρ : en effet si ρ_1 est une autre fonction définissante, on a $\rho_1 = h\rho$ où h est > 0 sur un voisinage de $\partial\Omega$. En particulier, la condition de Levi est une propriété intrinsèque locale de l'hypersurface $\{\rho = 0\}$ et peut donc se définir localement sur des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$.

Démonstration duThéorème III.2.2. Montrons maintenant que, si Ω est pseudo-convexe, on peut choisir une fonction définissante vérifiant la condition de Levi. Soit δ la métrique euclidienne et définissons ρ par

$$\rho(z) = \begin{cases} -\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) & \text{si } z \in \Omega, \\ \delta(z, \Omega) & \text{si } z \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{III.2.2}$$

Le théorème des fonctions implicites montre que ρ est $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $\partial\Omega$. De plus, d'après le Théorème III.2.2, $-\log(-\rho)$ est pluri-sousharmonique dans Ω ce qui se traduit par

$$-\sum \left(-\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)^{-1} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} + \delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)^{-2} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} \frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_k}}\right) w_j \overline{w_k} \geq 0,$$

et s'écrit $\langle \mathscr{H}\rho; w, \bar w\rangle \geq 0$ si $\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j = 0$. Le résultat voulu (i.e. au bord de Ω) s'obtient donc par continuité (c.f. remarques précédent la preuve).

Réciproquement, si la condition de Levi est satisfaite pour une fonction définissante de Ω, on peut supposer qu'elle l'est pour ρ définie par (III.2.2). Il nous faut montrer que $-\log\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$ est pluri-sousharmonique dans $U \cap \Omega$ où U est un voisinage de $\partial\Omega$ où ρ est de classe $\mathscr{C}^2$. Raisonnons par l'absurde. Si cela est faux, il existe $z \in \Omega$ voisin de $\partial\Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$c = \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar\tau} \log\delta\left(z + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) > 0 \text{ en } \tau = 0.$$

La formule de Taylor donne alors

$$\log\delta\left(z + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = \log\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) + \Re\mathrm{e}\left(A\tau + B\tau^2\right) + c|\tau|^2 + \mathrm{o}\left(|\tau|^2\right).$$

Soit $a \in \mathbb{C}^n$ tel que $\delta(a) = \delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$ et $z + a \in \partial\Omega$. Posons $z(\tau) = z + \tau w + a e^{A\tau + B\tau^2}$. Alors, pour τ petit on a

$$\begin{aligned} \delta\left(z(\tau), \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) &\geq \delta\left(z + \tau w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) - \delta(a)\left|e^{A\tau + B\tau^2}\right| \\ &\geq \delta(a)\left(e^{\frac{c|\tau|^2}{2}} - 1\right)\left|e^{A\tau + B\tau^2}\right|. \end{aligned}$$

Comme $\delta\left(z(0), \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right) = 0$, la fonction $\tau \mapsto \delta\left(z(\tau), \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$ a un minimum en 0 ce qui implique $\frac{\partial}{\partial\tau}\delta\left(z(\tau), \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)_{|\tau=0} = 0$, et, par la formule de Taylor, la minoration précédente donne $\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar\tau}\delta\left(z(\tau), \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)_{|\tau=0} > 0$. Avec la notation $\rho(z) = -\delta\left(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega\right)$, ceci s'écrit

$$\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j} z_j'(0) = 0 \text{ et } \sum_{j,k} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} z_j'(0) \overline{z_k'(0)} < 0,$$

car $z(\tau)$ est holomorphe, ce qui contredit la condition de Levi. □

Remarque. La première partie de la preuve ci-dessus montre que l'on peut choisir la fonction définissante ρ d'un domaine pseudo-convexe à bord régulier de sorte que, pour $0 \le \delta \le \delta_0$, δ_0 assez petit, le domaines $\{\rho < -\delta\}$ sont pseudo-convexes. On pourra comparer ce fait avec la Proposition III.3.2.

L'énoncé qui suit dit que lorsqu'une hypersurface de $\mathbb{C}^n$ ne vérifie pas la condition de Levi en un point, toute fonction vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann tangentielles (c.f. page 14) se prolonge automatiquement d'un côté de l'hypersurface (comparer avec le Théorème II.3.2) :

PROPOSITION III.2.6.

Soit ρ une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ dans un voisinage ouvert ω de $z_0 \in \mathbb{C}^n$ telle que $\rho(z_0) = 0$ et $\nabla\rho(z_0) \neq 0$. On suppose que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z_0)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} < 0 \text{ pour un } w \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(z_0)}{\partial z_j} w_j = 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert ω' de z_0 contenu dans ω tel que, pour toute fonction $u \in \mathscr{C}^4(\omega')$ vérifiant les équation de Cauchy-Riemann tangentielles, $\bar\partial u \wedge \bar\partial\rho = 0$, sur $\{z \in \omega' \text{ tels que } \rho(z) = 0\}$, il existe une fonction $U \in \mathscr{C}^1(\omega')$ telle que $U = u$ sur $\{z \in \omega' \text{ tels que } \rho(z) = 0\}$ et $\bar\partial U = 0$ sur $\omega'_+ = \{z \in \omega' \text{ tels que } \rho(z) > 0\}$.

Esquisse de la démonstration. Par un changement linéaire de coordonnées, on se ramène au cas où $z_0 = 0$ et $\rho(z) = \Im\mathrm{m} z_n + A(z) + \mathrm{O}(|z|^3)$, où A est une forme quadratique. La formule de Taylor donne

$$A(z) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} z_j \overline{z_k} + \Re\mathrm{e} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \partial z_k} z_j z_k.$$

Le changement de variables $z'_j = z_j$, pour $1 \le j \le n-1$, $z'_n = z_n + i\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j \partial z_k} z_j z_k$, ramène le développement de Taylor de ρ à

$$\rho = \Im\mathrm{m} z'_n + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} z'_j \overline{z'_k} + \mathrm{O}\left(\left|z'\right|^3\right).$$

Ainsi, on peut supposer que les coordonnées originales ont été choisies de sorte que

$$\rho = \Im\mathrm{m} z_n + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} z_j \overline{z_k} + \mathrm{O}\left(|z|^3\right),$$

où (A_{jk}) est une matrice hermitienne sur laquelle porte l'hypothèse de la Proposition. Alors, un autre changement de coordonnées ramène cette hypothèse à $A_{11} < 0$. Comme $\rho(z_1, 0, \ldots, 0) = A_{11}|z_1|^2 + \mathrm{O}(|z_1|^3)$, on peut choisir $\delta > 0$ puis $\varepsilon > 0$ de sorte que $\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}} < 0$ dans $\omega' = \left\{z \text{ tels que } |z_1| < \delta, \text{ et } \sum_{j=2}^{n} |z_j| < \varepsilon\right\}$ et $\rho < 0$ sur $\{|z_1| = \delta\}$. Enfin, on remarque que, pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés, $\sum_{j=2}^{n} |z_j| < \varepsilon$, l'ensemble des z_1 où $\rho < 0$ est connexe. Alors, on peut reproduire la démonstration de la Proposition II.3.1 et obtenir que, pour toute forme $f \in \mathscr{C}^k_{(0,1)}(\omega')$ vérifiant $\bar\partial f = 0$ et nulle en dehors de ω'_+, il existe une solution $u \in \mathscr{C}^k(\omega')$ de l'équation $\bar\partial u = f$ qui est nulle en dehors de ω'_+. Pour conclure, il suffit alors de refaire la preuve du Théorème de Bochner (Théorème II.3.2). Les détails sont laissés au lecteur. □

III.3 COMPLÉMENTS ET NOTES

DÉFINITION III.3.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathscr{C}^2$. Soit ρ une fonction définissante de Ω.

1. On dit que Ω est ***strictement pseudo-convexe en*** $z^0 \in \partial\Omega$ s'il existe $c > 0$ tel que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z^0)}{\partial z_j \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} \ge c|w|^2 \text{ pour tout } w \text{ tel que } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(z^0)}{\partial z_j} w_j = 0,$$

   c'est-à-dire si la forme de Levi de Ω est définie positive en z^0.

2. Si Ω est de plus borné, on dit que Ω est ***strictement pseudo-convexe*** si il est strictement pseudo-convexe en tout point de son bord (auquel cas la constante c du 1. peut être choisie indépendante du point du bord).

Remarque. On notera que la condition du 1. est indépendante de la fonction définissante choisie (à l'exeption faite de la valeur de la constnte c).

PROPOSITION III.3.1.

Soit Ω un domaine borné à frontière de classe $\mathscr{C}^2$ strictement pseudo-convexe. Alors Ω possède une fonction définissante strictement pluri-sousharmonique.

Démonstration. En effet, soit ρ_0 une fonction définissante de Ω. Vérifions tout d'abord que, pour $A>0$ assez grand, la fonction $\rho_A = e^{A\rho_0}-1$ est strictement pluri-sousharmonique dans un voisinage U assez petit de $\partial\Omega$. Il est clair que ρ_A est une fonction définissante de Ω. Un calcul direct montre que

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} = A e^{A\rho_0}\left(A \left| \sum_j \frac{\partial \rho_0}{\partial z_j} w_j \right|^2 + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} \right). \tag{III.3.1}$$

Si K est le compact formé des points (z,w) de $\partial\Omega \times \{|w|=1\}$ tels que $\sum_{j,k} \frac{\partial^2\rho_0}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z) w_j \overline{w_k} \leq 0$, la stricte pseudo-convexité de Ω montre que $\left|\sum_j \frac{\partial \rho_0}{\partial z_j} w_j\right| \geq C > 0$ sur K, donc sur un voisinage de K dans $\partial\Omega\times\{|w|=1\}$. Il en résulte que l'on peut choisir A de sorte que l'expression entre parenthèses du second membre de (III.3.1) soit uniformément minorée par une constante strictement positive sur $\partial\Omega\times\{|w|=1\}$. Par continuité, ρ_A est strictement pluri-sousharmonique sur un voisinage U de $\partial\Omega$.

Reste à modifier ρ_A pour avoir une fonction définissante strictement pluri-sousharmonique au voisinage de $\overline{\Omega}$. Soient $0>\delta_2>\delta_1$ tels que l'ensemble $\{\delta_1<\rho_A(z)<\delta_2\}$ soit relativement compact dans $U\cap\Omega$. Soit $\chi(t)\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe croissante constante pour $t\leq\delta_1$, égale à t pour $t\geq\delta_2$ et telle que $\chi'(t)>0$ et $\chi''(t)>0$ pour $t\in]\delta_1,\delta_2[$. Soit $\delta_3\in]\delta_1,\delta_2[$. Soit η une fonction de $\mathscr{D}\left(\{\rho_A<\delta_3\}\right)$, $0\leq\eta\leq1$ valant identiquement 1 sur un voisinage V de $\{\rho_A\leq\delta_1\}$. D'après ce qui précède, la fonction $\chi\circ\rho_A$ a un hessien uniformément minoré par une constante strictement positive sur un voisinage de $U\cap(\Omega\setminus V)$. On voit alors immédiatement qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que la fonction $\rho(z) = \chi\circ\rho_A(z)+\varepsilon\eta(z)\,|z|^2$ est strictement pluri-sousharmonique sur $U\cup\Omega$. □

COROLLAIRE (Narasimhan).

En tout point du bord d'un domaine strictement pseudo-convexe borné il existe une voisinage V et un difféomorphisme holomorphe Φ tel que $\Phi(V\cap\Omega)$ soit un domaine strictement convexe.

Démonstration. En effet, soit ρ une fonction définissante de Ω strictement pluri-sousharmonique et soit z^0 un point de $\partial\Omega$. La formule de Taylor appliquée à ρ au point z^0 donne, pour z dans un voisinage de z^0,

$$\rho(z) = \Re\mathrm{e} F\left(z,z^0\right) + \sum_{j,k}\frac{\partial^2\rho\left(z^0\right)}{\partial z_j\partial\overline{z_k}}\left(z_j-z_j^0\right)\overline{\left(z_k-z_k^0\right)} + \mathrm{o}\left(\left|z-z^0\right|^2\right) = \Re\mathrm{e} F\left(z,z^0\right) + \left\langle \mathscr{H}\rho\left(z^0\right), z-z^0\right\rangle + \mathrm{o}\left(\left|z-z^0\right|^2\right),$$

avec $F\left(z,z^0\right) = 2\sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z^0)}{\partial z_j}\left(z_j-z_j^0\right) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(z^0)}{\partial z_j\partial z_k}{}_j\left(z_j-z_j^0\right)\left(z_k-z_k^0\right)$. Quitte à effectuer une rotation sur les coordonnées, nous pouvons supposer $\frac{\partial\rho(z^0)}{\partial z_n}\neq0$ et l'application $\Phi(z) = \left(z_1-z_1^0,\dots z_{n-1}-z_{n-1}^0, F\left(z,z^0\right)\right)$ est alors un biholomorphisme d'un voisinage U de z^0 sur un voisinage V de l'origine. On considère alors $\tilde\rho = \rho\circ\Phi^{-1}$. On a donc $\tilde\rho(\zeta) = \Re\mathrm{e} F\left(\Phi^{-1}(\zeta),z^0\right) + \left\langle\mathscr{H}\rho\left(z^0\right),\Phi^{-1}(\zeta)\right\rangle + \mathrm{o}\left(\left|\Phi^{-1}(\zeta)\right|^2\right)$, et comme $F\left(\Phi^{-1}(\zeta),z^0\right)=\zeta_n$, $\tilde\rho(\zeta) = \Re\mathrm{e}\zeta_n + \left\langle\mathscr{H}\rho\left(z^0\right),\Phi^{-1}(\zeta)\right\rangle + \mathrm{o}\left(\left|\Phi^{-1}(\zeta)\right|^2\right)$. Alors, si Ψ désigne la différentielle de Φ^{-1} à l'origine, on a $\tilde\rho(\zeta) = \Re\mathrm{e}\zeta_n + \left\langle\mathscr{H}\rho\left(z^0\right),\Psi(\zeta)\right\rangle + \mathrm{o}\left(|\zeta|^2\right)$, et, comme Ψ est un isomorphisme, la forme $\zeta\mapsto\left\langle\mathscr{H}\rho\left(z^0\right),\Psi(\zeta)\right\rangle$ est définie positive, ce qui montre que la hessienne réelle de $\tilde\rho$ en 0 est définie positive, et, par continuité, elle l'est dans un voisinage de 0. En d'autres termes, $\tilde\rho$ est strictement convexe au voisinage de l'origine. □

Il est alors naturel de se demander si tout domaine pseudo-convexe est, au bord, localement biholomorphe à un domaine convexe : la réponse est non même si le domaine est borné à bord régulier.

De même, Il est naturel de se demander si tout domaine pseudo-convexe borné (à bord régulier) peut être défini par une fonction pluri-sousharmonique en tout point de son bord : la réponse est non aussi. Toutefois, on a le résultat suivant (qui améliore la remarque qui suit la preuve du Théorème III.2.3) :

PROPOSITION III.3.2.

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathscr{C}^3$ de fonction définissante ρ. Alors il existe une constante $M>0$ telle que, pour tout $\delta>0$ assez petit les domaines $\Omega_\delta = \left\{z\in\Omega \text{ tels que } \rho_\delta(z) = \rho(z)+\delta\, e^{M|z|^2}<0\right\}$ sont strictement pseudo-convexes. Autrement dit, la fonction $\tilde\rho(z) = \rho(z)e^{-M|z|^2}$ est une fonction définissante de Ω dont les surfaces de niveaux $\{\tilde\rho=-\delta\}$, δ assez petit, sont strictement pseudo-convexes.

Cette Proposition montre que, pour tout compact K contenu dans Ω il existe un domaine strictement pseudo-convexe Ω_K contenu dans Ω et contenant K : on peut « approcher » Ω par l'intérieur avec des domaines strictement pseudo-convexes. Par contre, en général, un domaine pseudo-convexe ne possède pas de base de voisinages pseudo-convexes.

Comme il est assez difficile de trouver cet énoncé dans la littérature, en voici une démonstration :

Démonstration. Soit $V = V(\partial\Omega)$ un voisinage de $\partial\Omega$. Notons que si V est assez petit, $\partial\Omega$ étant compact, on peut supposer que le gradient de ρ est uniformément minoré en module sur V, et, par suite, on peut choisir $\delta_0 > 0$ de sorte que le gradient de ρ_δ ne s'annule pas dans V. Fixons $\delta_0 \geq \delta > 0$ et $M > 0$ grand et soit $z \in V \cap \partial\Omega_\delta$ (notation de l'énoncé). Soit $\left(a_j\right)_j$ un vecteur tangent à $\partial\Omega_\delta$ au point z (i.e. $\sum_j a_j \frac{\partial\rho_\delta}{\partial z_j} = 0$). Soit $\pi(z) = \tilde{z}$ la projection suivant la normale réelle à ρ de z sur $\partial\Omega$. Soit $a = \widetilde{a_\tau} + \widetilde{a_\nu}$ la décomposition de a en partie tangente et normale à Ω au point $\tilde{z}$ (i.e. $\widetilde{a_\nu} = \frac{\sum_j a_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(\tilde{z})}{|\nabla\rho(\tilde{z})|^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_j}}(\tilde{z})\right)_j$).

La pseudo-convexité de Ω donne $\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(\tilde{z})\widetilde{a_\tau^i}\overline{\widetilde{a_\tau^j}} \geq 0$, et la régularité $\mathscr{C}^3$ de ρ implique donc

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(z)\widetilde{a_\tau^i}\overline{\widetilde{a_\tau^j}} \geq -C\,|\widetilde{a_\tau}|^2\left|\rho(z)\right| = -C\delta\, e^{M|z|^2}\left|\widetilde{a_\tau}^2\right|,$$

où C ne dépends que de ρ, la dernière égalité venant du fait que $z \in \partial\Omega_\delta$, et on a ainsi

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(z)a_i\overline{a_j} \geq -C\delta\, e^{M|z|^2}\left|\widetilde{a_\tau}^2\right| + \mathrm{O}\left(|\widetilde{a_\nu}|\,|\widetilde{a_\tau}| + |\widetilde{a_\nu}|^2\right). \tag{III.3.2}$$

En écrivant $\left|\nabla\rho(\tilde{z})\right| |\widetilde{a_\nu}| = \left|\sum_j a_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(\tilde{z})\right| \leq \left|\sum_j a_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\right| + \left|\sum_j a_j\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_j}(\tilde{z}) - \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\right)\right|$, la régularité de ρ donne une constante C, ne dépendant que de ρ telle que

$$\left|\nabla\rho(\tilde{z})\right| |\widetilde{a_\nu}| \leq \delta M e^{M|z|^2}\left|\sum_j a_j\overline{z_j}\right| + C\,|a|\,\delta\, e^{M|z|^2}, \tag{III.3.3}$$

puisque la relation $\sum_j a_j \frac{\partial\rho_\delta}{\partial z_j}(z) = 0$ s'écrit $\sum_j a_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z) = -\delta M e^{M|z|^2}\left(\sum a_j\overline{z_j}\right)$.

Comme $\sum_{i,j} \frac{\partial^2\left(e^{M|z|^2}\right)}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(z)a_i\overline{a_j} = Me^{M|z|^2}\,|a|^2 + M^2 e^{M|z|^2}\left|\sum_i a_i\overline{z_i}\right|^2$, de (III.3.2) et (III.3.3) on tire

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho_\delta}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(z)a_i\overline{a_j} &\geq -C\delta e^{M|z|^2}\,|\widetilde{a_\tau}|^2 + M\delta e^{M|z|^2}\,|a|^2 + \delta M^2 e^{M|z|^2}\left|\sum_i a_i\overline{z_i}\right|^2 - C\left(|\widetilde{a_\nu}|\,|\widetilde{a_\tau}| + |\widetilde{a_\nu}|^2\right)\\
&\geq \delta e^{M|z|^2}\,|a|^2\,(M-C) + \delta M^2 e^{M|z|^2}\left|\sum_i a_i\overline{z_i}\right|^2 - C\left(|\widetilde{a_\nu}|\,|\widetilde{a_\tau}| + |\widetilde{a_\nu}|^2\right)\\
&\geq \delta M^2 e^{M|z|^2}\left|\sum_i a_i\overline{z_i}\right|^2\left(1 - C\delta e^{M|z|^2}\right) + \delta e^{M|z|^2}\,|a|^2\left(M - C - C\delta e^{M|z|^2}\right) - C\left(|\widetilde{a_\nu}|\,|\widetilde{a_\tau}|\right).
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant $|\widetilde{a_\nu}|\,|\widetilde{a_\tau}| \leq \varepsilon|\widetilde{a_\tau}|^2 + \frac{C}{\varepsilon}|\widetilde{a_\nu}|^2$ $(C = 1/4)$, $\varepsilon > 0$, il vient (en utilisant à nouveau (III.3.3))

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho_\delta}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(z)a_i\overline{a_j} \geq \delta M^2 e^{M|z|^2}\left|\sum_i a_i\overline{z_i}\right|^2\left(1 - \frac{C}{\varepsilon}\delta e^{M|z|^2}\right) + \delta e^{M|z|^2}\,|a|^2\left(M - C - \frac{C\varepsilon}{\delta e^{M|z|^2}} - \frac{C}{\varepsilon}\delta e^{M|z|^2}\right),$$

la constante C ne dépendant que de ρ (en particulier elle ne dépends pas du point z). On choisit alors $K > 0$ ne dépendant que de ρ tel que, en prenant $\varepsilon = K\delta e^{M|z|^2}$ on ait $1 - \frac{C}{\varepsilon}\delta e^{M|z|^2} = 1 - \frac{C}{K} \geq 0$. Alors $M - C - \frac{C\varepsilon}{\delta e^{M|z|^2}} - \frac{C}{\varepsilon}\delta e^{M|z|^2} = M - C(1+K) - \frac{C}{K}$ et on choisit M assez grand pour avoir $M - C(1+K) - \frac{C}{K} > 0$. □

On notera que la fonction définissant $\tilde{\rho}$ de la Proposition précédente n'est pas, en général, strictement pluri-sousharmonique. Un résultat célèbre lié à cette question est dû à K. Diederich et J. E. Fornaess :

THÉORÈME III.3.1 *(*K. Diederich & J. E. Fornaess [DF77]*).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^r$. Il existe une réel $\eta \in]0,1]$ et une fonction définissante ρ de Ω, de classe $\mathscr{C}^r$, tels que la fonction ρ^η soit strictement pluri-sousharmonique dans Ω.

Des exemples, dûs à ces auteurs, montrent que le meilleur η possible dans cet énoncé peut être aussi proche de 0 que l'on veut. Le cas particulier $\eta = 1$ est celui des domaines admettant une fonction définissante pluri-sousharmonique. Nous reviendrons sur ce résultat par la suite (c.f. Théorème V.2.7, Théorème V.2.8).

CHAPITRE IV

ESTIMATIONS L^2 ET THÉORÈMES D'EXISTENCE POUR L'OPÉRATEUR $\overline{\partial}$

Les Sections (IV.1), (IV.2) et (IV.3) sont extraites du chapitre IV du livre de Lars Hörmander [H73]. La Section IV.4 présente, sans démonstrations, deux résultats plus récents sur cette théorie.

IV.1 COMPLÉMENTS À LA THÉORIE DES OPÉRATEURS NON BORNÉS

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit T une application linéaire d'un sous-espace de H_1 dans H_2. On appelle ***domaine*** de T, et on notera D_T le plus grand sous-espace vectoriel de H_1 sur le quel T est défini (pour simplifier les notations on dira alors que T est un *opérateur à domaine* de H_1 dans H_2). L'image de T, c'est-à-dire $T(D_T)$ sera noté R_T. On dit que T est ***à domaine dense*** si $\overline{D_T} = H_1$. On dit que T est ***fermé*** si son graphe dans $H_1 \times H_2$ est fermé (i.e. si $(x_n, T(x_n))$ tends vers (y, z) quand $n \to +\infty$ alors $z = T(y)$).

Soit T un opérateur à domaine dense de H_1 dans H_2. Supposons qu'il existe un opérateur à domaine dense T^* de H_2 dans H_1 tel que

$$\left\langle T(\zeta), y\right\rangle + \left\langle \zeta, -T^*(y)\right\rangle = 0, \text{ pour tous } \zeta \in D_T \text{ et } y \in D_{T^*}.$$

Alors (y, z) appartient au graphe G_{T^*} de T^* si et seulement si $\left\langle T(\zeta), -y\right\rangle + \langle \zeta, z\rangle = 0$, $\forall \zeta \in D_T$, c'est-à-dire si et seulement si $(z, -y)$ est orthogonal au graphe G_T de T. Si on défini $V : H_1 \times H_2 \to H_1 \times H_2$ par $V((x, y)) = (x, -y)$ et $U : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ par $U((x, y)) = (y, x)$, cette condition s'écrit $(y, z) \in U \circ V\left(G_T^{\perp}\right)$.

Ainsi pour que T^* existe il faut et il suffit que $U \circ V\left(G_T^{\perp}\right)$ soit un graphe, c'est-à-dire que $(y, x) \in U \circ V\left(G_T^{\perp}\right)$ et $(y, z) \in U \circ V\left(G_T^{\perp}\right)$ implique $x = z$. Or ces conditions s'écrivant $\langle \zeta, x\rangle = \left\langle T(\zeta), y\right\rangle$ et $\langle \zeta, z\rangle = \left\langle T(\zeta), y\right\rangle$, on a $\langle \zeta, x - z\rangle = 0$, c'est-à-dire $x - z \in D_T^{\perp}$, et ceci doit impliquer $x = y$ ce qui équivaut à $D_T^{\perp} = \{0\}$ c'est-à-dire D_T est dense.

En appliquant de plus cela à T^* (lorsque T est dense), on obtient la Proposition suivante :

PROPOSITION IV.1.1.

Soit T un opérateur à domaine d'un espace de Hilbert H_1 dans un autre H_2. Soit G_T la graphe de T. Alors $U \circ V\left(G_T^{\perp}\right)$

est le graphe d'un opérateur à domaine T^* de H_2 dans H_1 si et seulement si T est à domaine dense. De plus, dans ce cas T^* est fermé (car $G_T^\perp$ est fermé) et T^* est dense si et seulement si $(U\circ V)\left[\left(U\circ V\left(G_T^\perp\right)\right)^\perp\right] = \overline{G_T}$ est le graphe d'un opérateur à domaine T^{**} de H_1 dans H_2 qui est le plus petit opérateur fermé prolongeant T.

En particulier, si T est fermé alors $T^{**}=T$, T^* est à domaine dense et on a (en notant N_T (resp. N_{T^*}) le noyau de T (resp. T^*)) :

$$N_T = R_{T^*}^\perp \text{ et } N_{T^*} = R_T^\perp,$$

ainsi que les décompositions hilbertiennes suivantes

$$H_1 = N_T \oplus \overline{R_{T^*}} \text{ et } H_2 = N_{T^*}\oplus \overline{R_T}.$$

Démonstration. Vérifions les dernières assertions : y est dans le noyau de T^* si $(y,0)\in U\circ V\left(G_T^\perp\right)$ c'est-à-dire $\langle T(\zeta),y\rangle = 0$ pour tout $\zeta\in D_T$, c'est-à-dire $y\in R_T^\perp$. Ainsi, $N_{T^*} = R_T^*$ et on a $H_2 = \overline{R_T}\oplus N_{T^*}$, et, de même en échangeant les rôles de T et T^* (puisque $T^{**}=T$) $H_1 = N_T\oplus\overline{R_{T^*}}$. □

Dans la suite, on supposera toujours que T est fermé.

PROPOSITION IV.1.2.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur à domaine dense fermé. Soit F un sous-espace fermé de H_2 contenant l'image R_T de T. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$R_T = F$;*
2. *il existe une constante $c>0$ telle que, pour tout $f\in F\cap D_{T^*}$ on a $\|f\|_{H_2}\le c\|T^*f\|_{H_1}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que 2. entraîne 1. Soit $g\in F$. On cherche $u\in D_T$ tel que $Tu = g = T^{**}u$. Comme T^* est à domaine dense, cette égalité équivaut à $\langle T^*f,u\rangle = \langle f,g\rangle$ pour tout $f\in D_{T^*}$. Alors, si on montre que

$$|\langle f,g\rangle| \le c\|g\|_{H_2}\|T^*f\|_{H_1}, \text{ pour tout } f\in D_{T^*}, \tag{IV.1.1}$$

le Théorème de Hahn-Banach et le théorème sur le dual d'un espace de Hilbert donnent l'existence de $u\in D_{T^{**}} = D_T$, vérifiant $Tu=g$, tel que $\|u\|_{H_1}\le c\|g\|_{H_2}$.

Montrons donc (IV.1.1). Si $f\perp F$, l'inégalité est évidente (de plus, dans ce cas, puisque $R_T\subset F$, on a $f\in R_T^\perp = N_{T^*}$ et $f\in D_{T^*}$ et $T^*f=0$), et suffit donc de la voir si $f\in F\cap D_{T^*}$, mais alors c'est exactement l'hypothèse.

Vérifions maintenant que 1. implique 2. Il faut voir que l'ensemble $B=\left\{f\in F\cap D_{T^*} \text{ tels que } \|T^*f\|_{H_1}\le 1\right\}$ est borné, et, pour cela, il suffit de voir qu'il est faiblement borné dans F, c'est-à-dire que $\forall g\in F$, il existe une constante c_g telle que $\forall f\in B$, $|\langle f,g\rangle|\le c_g$. Or, par hypothèse il existe $u\in D_T$ tel que $Tu=g$, alors $\langle f,g\rangle = \langle T^*f,u\rangle$, d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle f,g\rangle|\le\|T^*f\|_{H_1}\|u\|_{H_1}\le\|u\|_{H_1} = c_g$. □

PROPOSITION IV.1.3.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1\to H_2$ un opérateur à domaine dense fermé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$R_T = \overline{R_T}$;*
2. *il existe une constante $c>0$ tell que, pour $f\in D_{T^*}\cap\overline{R_T}$, $\|f\|_{H_2}\le c\|T^*f\|_{H_1}$;*
3. *$R_{T^*} = \overline{R_{T^*}}$;*
4. *il existe une constante $c>0$ telle que, pour $g\in D_T\cap\overline{R_{T^*}}$, $\|g\|_{H_1}\le c\|Tg\|_{H_2}$.*

Démonstration. D'après la Proposition précédente, il suffit de voir que 4. implique 2. Or, pour $g\in D_T\cap\overline{R_{T^*}}$, on a

$$|\langle f,Tg\rangle| = |\langle T^*f,g\rangle| \le \|T^*f\|_{H_1}\|g\|_{H_1}\le c\|T^*f\|_{H_1}\|Tg\|_{H_2}.$$

Comme $\overline{R_{T^*}}^\perp = N_T$, $\left\{Tg \text{ où } g\in D_T\cap\overline{R_{T^*}}\right\} = R_T$, donc, pour tout $h\in R_T$, on a $|\langle f,h\rangle|\le c\|T^*f\|_{H_1}\|h\|_{H_2}$, d'où le résultat, puisque $f\in\overline{R_T}$. □

IV.2 Résolution de l'équation $\bar{\partial} u = f$

IV.2.1 Notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Soit φ une fonction continue sur Ω. On note $L^2_{p,q}(\Omega,\varphi)$ l'espace vectoriel des formes f de bidegré (p,q), $f = \sum'_{|I|=p,|J|=q} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ telles que, pour tous I et J, $f_{I,J}$ (que l'on notera parfois f_{IJ}) est une fonction mesurable telle que $\int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$ ($d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$). Sur $L^2_{p,q}(\Omega,\varphi)$ on défini un produit scalaire, noté $\langle f,g\rangle_\varphi$, par

$$\langle f,g\rangle_\varphi = \sum{}' \int_\Omega f_{I,J}\overline{g_{I,J}} e^{-\varphi} d\lambda,$$

qui fait de cet espace un espace de Hilbert dont la norme est $\|f\|^2_\varphi = \sum' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda$. De plus, on pose $|f|^2 = \sum'_{I,J} |f_{I,J}|^2$.

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues sur Ω. On défini un opérateur à domaine $T : L^2_{p,q}(\Omega,\varphi_1) \to L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi_2)$ de la manière suivante : $u \in D_T$ si $\bar{\partial} u = \sum'_{IJ} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z_j} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$ appartient à $L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi_2)$, les dérivées $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j}$ étant comprises au sens des distributions. Il est alors clair que D_T est dense dans $L^2_{p,q}(\Omega,\varphi)$ et que T est fermé (continuité au sens des distributions).

Si φ_3 est une troisième fonction continue sur Ω, on défini $S : L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi_2) \to L^2_{p,q+2}(\Omega,\varphi_3)$ exactement de la même manière. Alors, si F est l'espace fermé (la continuité dans l'espace de Hilbert impliquant la continuité dans l'espace des distributions) des formes f de $L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi_2)$ telles que $\bar{\partial} f = 0$ au sens des distributions, on a $F \subset D_S$ et $F = N_S$.

Le but principal de ce chapitre est de résoudre l'équation $Tu = f$ pour $f \in F$. Pour cela on va appliquer les résultats des Propositions de la Section IV.1 : comme $R_T \subset F$ et que F est fermé, cela revient à montrer une estimation de la forme $\|f\|_{\varphi_2} \leq c \|T^* f\|_{\varphi_1}$ pour $f \in F \cap D_{T^*}$. Nous allons montrer cette estimation en calculant $T^* f$ pour des formes suffisamment régulières, et pour conclure, il nous faudra montrer que ces formes régulières sont denses dans $F \cap D_T$ ou dans $D_S \cap D_{T^*}$. Ces deux résultats font l'objet de la Section suivante :

IV.2.2 Deux Propositions préliminaires

Lemme IV.2.1. *Si $f = \sum'_{I,J} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$, on a*

$$\bar{\partial} f = \sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z_j} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

et

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J}{}' \sum_j \left|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 - \sum_{I,K}{}' \sum_{j,l=1}^n \left(\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_{jk}}\right)\overline{\left(\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar{z}_j}\right)}, \tag{IV.2.1}$$

où la somme $\sum'_{I,K}$ est étendue à tous les multiindices croissants I de longueur p et K de longueur $q-1$, en définissant $f_{I,J}$ pour tout J comme fonction antisymétrique de J.

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J,L}{}' \sum_{j,l=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j}\right)\overline{\left(\frac{\partial f_{IL}}{\partial \bar{z}_l}\right)} \varepsilon^{jJ}_{lL},$$

où $\varepsilon^{jJ}_{lL} = 0$ sauf si $j \notin J$, $l \notin L$ et $\{j\} \cup L = \{l\} \cup L$ auquel cas ε^{jJ}_{lL} est le signe de la permutation $\binom{jJ}{lL}$.

Si $j = l$, la définition de ε^{jJ}_{lL} montre que , dans (IV.2.1) il faut $J = L$ et $j \notin J$ pour avoir un terme non nul. La somme de ces termes est donc

$$\sum_{I,J}{}' \sum_{j \notin J} \left|\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2. \tag{IV.2.2}$$

Par contre, si $j \neq l$, il faut j$\in L$ et $l \in J$, c'est-à-dire qu'il existe K, $|K| = q$, tel que $\{j\} \cup K = L$, $\{l\} \cup K = J$ et $l, j \notin K$. De plus

$$\varepsilon^{jJ}_{lL} = \varepsilon^{jJ}_{jlK} \varepsilon^{jlK}_{ljK} \varepsilon^{ljK}_{lL} = -\varepsilon^{J}_{lK} \varepsilon^{jK}_{L}.$$

Alors, en définissant f_{IJ} pour tout J comme fonction anti-symétrique de J, on a $f_{IjK} = \varepsilon_L^{jK} f_{IL}$ et $f_{IlK} = \varepsilon_J^{lK} f_{IJ}$, et les termes correspondant à $j \neq l$ dans (IV.2.1) sont

$$-\sum_{I,K}{}' \sum_{j\neq l} \frac{\partial f_{IlK}}{\partial \overline{z_j}} \overline{\left(\frac{\partial f_{IjK}}{\partial \overline{z_l}}\right)}. \tag{IV.2.3}$$

Alors $|\bar\partial f|$ s'obtient en additionnant (IV.2.2) et (IV.2.3). De plus, si, dans (IV.2.2) on rajoute les termes $j \in J$ et dans (IV.2.3) les termes $j = l$, ces termes se détruisent. Ceci montre le Lemme. □

Lemme IV.2.2. *Avec les notations de la Section IV.2.1, soit $f = \sum'_{\substack{|I|=p\\|J|=q+1}} f_{IJ}\, dz^I \wedge d\bar z^J$ un élément de $D_{T^*} \subset L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi_2)$. Alors, en définissant f_{IJ} pour tous les J comme fonction anti-symétrique de J, on a*

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \left(\sum_{j=1}^n e^{\varphi_1} \frac{\partial \left(e^{-\varphi_2} f_{I,jK}\right)}{\partial z_j} \right) dz^I \wedge d\bar z^K.$$

En particulier, $e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^* = \vartheta + a$ où a est un opérateur d'ordre zéro et ϑ un opérateur d'ordre un à coefficients constants.

Démonstration. Soit $u = \sum'_{\substack{|I|=p\\|K|=q}} u_{IK}\, dz^I \wedge d\bar z^K$ une forme de $\mathscr{D}_{pq}(\Omega)$. L'expression de $\bar\partial u$ montre aussitôt que $\langle T^* f, u\rangle_{\varphi_1} = \langle f, Tu\rangle_{\varphi_2}$ s'écrit

$$\int \sum{}' (T^* f)_{IK} \overline{u_{IK}} e^{-\varphi_1}\, d\lambda = (-1)^p \int \sum_{IK}{}' \left(\sum_{j=1}^n f_{I,jK} \overline{\left(\frac{\partial u_{IK}}{\partial \overline{z_j}}\right)} e^{-\varphi_2} \right) d\lambda.$$

En intégrant par parties (voir page 7) le membre de droite de cette équation (compte tenu du fait que u est à support compact dans Ω) on trouve immédiatement l'expression du Lemme. □

Dans ce qui suit, on utilise, sans le rappeler, les notations introduites à la Section précédente et on suppose $\varphi_2 \in \mathscr{C}^1(\Omega)$. On suppose, de plus, que l'on a une suite $(\eta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout ν, $0 \le \eta_\nu \le 1$, et pour tout K compact dans Ω il existe ν_K tel que, pour $\nu \ge \nu_K$, on a $\eta_\nu \equiv 1$ sur K ;
2. pour $j = 1;2$ et $\nu \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{-\varphi_{j+1}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \overline{z_k}} \right|^2 \right) \le e^{-\varphi_j}. \tag{IV.2.4}$$

Remarquons que, les η_ν étant données vérifiant 1., sur chaque compact de Ω, les conditions de 2. sont en nombre fini, et on peut donc toujours trouver des fonctions continues φ_j qui les satisfont.

On a alors les deux résultats suivants :

PROPOSITION IV.2.1.

Avec les notation de ci-dessus, l'espace $\mathscr{D}_{p,q+1}(\Omega)$ des formes de bidegré $(p, q+1)$ et à coefficients dans $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $D_{T^*} \cap D_S$ pour la norme du graphe

$$f \mapsto \|f\|_{\varphi_2} + \|T^* f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}.$$

PROPOSITION IV.2.2.

Avec les notations de ci-dessus, soit ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dans Ω telle que $\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial \eta_\nu}{\partial \overline{z_k}}\right|^2 \le e^\psi$, $\nu \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ et posons $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$, $\varphi_2 = \varphi - \psi$ et $\varphi_3 = \varphi$. Supposons que

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} \ge c_0(z) \sum_{j=1}^n |w_j|^2,$$

pour $z \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}^n$ et $c_0 \in \mathscr{C}(\Omega)$, $c_0 > 0$. Alors :

1. *Pour toute $f \in \mathscr{D}_{p,q+1}(\Omega)$,*

$$\int \left(c_0(z) - 2|\partial\psi|^2\right) |f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le 2\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3};$$

2. *Si de plus $c_0 \ge 2\left(|\partial\psi|^2 + e^\psi\right)$, pour toute $f \in D_{T^*} \cap D_S$, on a*

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \le \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}.$$

Démonstration de la Proposition IV.2.1. Soit $f \in D_T \cap D_S$. Montrons tout d'abord que $\eta_\nu f$ tends vers f pour la norme du graphe. Par le théorème de convergence dominée, $\|\eta_\nu f - f\|_{\varphi_2} + \|\eta_\nu T^* f - f\|_{\varphi_1} + \|\eta_\nu S f - f\|_{\varphi_3}$ tends vers 0 quand ν tends vers $+\infty$, et il suffit donc de voir que $\|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} + \|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f\|_{\varphi_3}$ tends vers 0 quand ν tends vers $+\infty$.

Comme $f \in D_S$, $\eta_\nu f \in D_S$ et $S(\eta_\nu f) = \eta_\nu S f + \bar\partial \eta_\nu \wedge f$. Alors (IV.2.4)donne

$$\left|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f\right|^2 e^{-\varphi_3} \leq |f|^2 e^{-\varphi_2},$$

et le théorème de convergence dominé montre que $\|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f\|_{\varphi_3} \to 0$ quand $\nu \to +\infty$.

Remarquons maintenant que, si $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ est réelle, on a, pour $u \in D_T$, $\langle \eta f, Tu\rangle_{\varphi_2} = \langle \eta T^* f, u)\rangle_{\varphi_1} + \langle f, \eta T u - T(\eta u)\rangle_{\varphi_2}$, et comme $\eta T u - T(\eta u) = \bar\partial \eta \wedge u$, le fait que η est à support compact et la continuité des φ_j montre que $u \mapsto \langle \eta f, Tu\rangle_{\varphi_2}$ est continue pour la norme $\|u\|_{\varphi_1}$, et, par le théorème de Hahn-Banach, il existe $v \in L^2_{pq}(\Omega, \varphi_1)$ telle que $\langle \eta f, Tu\rangle_{\varphi_2} = \langle v, u\rangle_{\varphi_1}$, pour toute $u \in D_T$, ce qui signifie que $\eta f \in D_{T^*}$ et $T^*(\eta f) = v$. Appliquons cette remarque aux fonctions η_ν : $\eta_\nu f \in D_{T^*}$ et, pour $u \in D_T$,

$$\left\langle T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u\right\rangle_{\varphi_1} = \left\langle f, \eta_\nu T u - T(\eta_\nu u)\right\rangle_{\varphi_2}.$$

Comme $\eta_\nu T u - T(\eta_\nu u) = \bar\partial \eta_\nu \wedge u$, (IV.2.4) entraîne

$$\left|\eta_\nu T u - T(\eta_\nu u)\right| e^{-\varphi_2/2} \leq |u|\, e^{\varphi_1/2},$$

donc

$$\left|\left\langle T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u\right\rangle_{\varphi_1}\right| \leq \int |f|\, e^{-\varphi_2/2} |u|\, e^{-\varphi_1/2}, \text{ pour toute } u \in D_T.$$

Comme D_T est dense , on a $\left|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\right|^2 e^{-\varphi_1} \leq |f|\, e^{-\varphi_2}$, et le Lemme IV.2.2 et le théorème de convergence dominée montrent que $\|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} \to 0$ quand $\nu \to +\infty$.

Pour terminer la preuve de la Proposition, il nous reste à montrer que l'on peut approximer les formes à support compact de $D_{T^*} \cap D_S$ par des formes à coefficients dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Ceci se fait par régularisation. Soit donc $f \in D_{T^*} \cap D_S$ une forme à support compact et $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ une fonction à support dans la boule unité $B(0,1)$ et d'intégrale égale à 1. Pour $\varepsilon > 0$ petit, posons $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2n} \chi(x/\varepsilon)$. Alors, pour ε petit, $f * \chi_\varepsilon$ est une $(p, q+1)$-forme à coefficients dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Il est clair que $\|f - f * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_2} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, et, comme $S(f * \chi_\varepsilon) = (Sf) * \chi_\varepsilon$, on a aussi $\|S(f * \chi_\varepsilon) - Sf\|_{\varphi_3} \to 0$. Enfin, pour voir que $\|T^*(f * \chi_\varepsilon) - T^* f\|_{\varphi_1} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, comme f est à support compact, d'après le Lemme IV.2.2 (et avec les notations qui y sont introduites), il suffit de voir que $\|(\vartheta + a)(f * \chi_\varepsilon) - (\vartheta + a) f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Mais ceci est immédiat puisque $(\vartheta + a)(f * \chi_\varepsilon) = ((\vartheta + a) f) * \chi_\varepsilon + a(f * \chi_\varepsilon) - (af) * \chi_\varepsilon \to (\vartheta + a) f + af - af = (\vartheta + a) f$, dans $L^2(\Omega)$, puisque $(\vartheta + a) f \in L^2(\Omega)$ par hypothèse. □

Démonstration de la Proposition IV.2.2. Pour φ et w de classe $\mathscr{C}^1$ dans Ω posons

$$\delta_j^\varphi w = e^\varphi \frac{\partial (w e^{-\varphi})}{\partial z_j} = \frac{\partial w}{\partial z_j} - w \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}. \tag{IV.2.5}$$

Alors le calcul de T^* fait au Lemme IV.2.2 donne

$$e^\psi T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \left(\sum_{j=1}^n \delta_j^\varphi f_{I,jK}\right) dz^I \wedge d\bar z^K + (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \left(\sum_{j=1}^n f_{I,jK} \frac{\partial \psi}{\partial \bar z_j}\right) dz^I \wedge d\bar z^K.$$

En prenant le module au carré, il vient

$$\int \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k=1}^n \delta_j^\varphi f_{I,jK} \overline{\delta_k^\varphi f_{I,kK}} e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + 2 \int |f|^2 |\partial \psi|^2 e^\varphi d\lambda,$$

et, en rajoutant à cette inégalité $\|Sf\|^2_{\varphi_3}$, par le Lemme IV.2.1, on obtient

$$\int \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k=1}^n \left[\delta_j^\varphi f_{I,jK} \overline{\delta_k^\varphi f_{I,kK}} - \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar z_k} \overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar z_j}}\right] e^{-\varphi} d\lambda + \int \sum_{I,J}{}' \left(\sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_j}\right|^2\right) e^{-\varphi} d\lambda$$
$$\leq 2 \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3} + 2 \int |f|^2 |\partial \psi|^2 e^{-\varphi} d\lambda. \tag{IV.2.6}$$

En intégrant par parties (voir page 7) le second terme du membre de gauche de cette dernière formule il vient

$$\int \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar z_k} \overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar z_j}} e^{-\varphi} d\lambda = -\int \delta_j^\varphi \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar z_k} \overline{f_{I,kK}} e^{-\varphi} d\lambda,$$

et comme $\delta_j^{\varphi}\frac{\partial}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial}{\partial_k}\delta_j^{\varphi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar z_k \partial z_j}$, on a

$$\int \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar z_k}\overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar z_j}} e^{-\varphi} d\lambda = -\int \frac{\partial}{\partial \bar z_k}\left(\delta_j^{\varphi} f_{I,jK}\right)\overline{f_{I,kK}} e^{-\varphi} d\lambda - \int f_{I,jK}\overline{f_{I,kK}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar z_k \partial z_j} e^{-\varphi} d\lambda.$$

En intégrant à nouveau par parties le premier terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus, il devient

$$\int \delta_j^{\varphi} f_{I,jK}\overline{\delta_k^{\varphi} f_{I,kK}} e^{-\varphi} d\lambda,$$

et en remplaçant dans (IV.2.6), on obtient finalement

$$\int \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k=1}^{n} f_{I,jK}\overline{f_{I,kK}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} e^{-\varphi} d\lambda + \int \sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_j}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda$$
$$\leq 2\left\|T^* f\right\|_{\varphi_1}^2 + \left\|Sf\right\|_{\varphi_3}^2 + 2\int |f|^2 |\partial\psi|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \quad \text{(IV.2.7)}$$

ce qui achève la preuve de la Proposition. □

Remarque IV.2.1. la fin de cette preuve, on peut regrouper le premier terme du membre de gauche de (IV.2.7) et le dernier terme du second membre ce qui donne $\langle \mathscr{H}\varphi - 2\partial\psi \wedge \bar\partial\psi; f, \bar f\rangle$. Nous indiquerons un peu plus loin que ceci permet d'obtenir une estimation pour l'équation $\bar\partial u = f$, autre que celle que nous allons voir maintenant (Théorème IV.4.1).

IV.2.3 Théorème d'existence pour les solutions de l'équation $\bar\partial u = f$

Proposition IV.2.3.

Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dans Ω telle que, pour tous $z \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} w_j \overline{w_k} \geq c(z)\sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2,$$

où c est une fonction strictement positive continue sur Ω.

Soit $g \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi)$, $\bar\partial g = 0$ telle que $\int_\Omega |g|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda < +\infty$. Alors il existe une forme $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ solution de l'équation $\bar\partial u = f$ telle que

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 2\int_\Omega |g|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda.$$

Démonstration. Ω étant pseudo-convexe, d'après Proposition III.2.5, il existe $s \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ strictement pluri-sousharmonique telle que, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\Omega_a = \{z \in \Omega \text{ tels que } s(z) < a\}$$

est relativement compact dans Ω.

On fixe maintenant $a \in \mathbb{R}$. Soit $(\eta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{D}(\Omega)$, $0 \leq \eta_\nu \leq 1$, telle que, pour chaque compact K de Ω il existe ν_K tel que, pour $\nu \geq \nu_K$, η_ν soit identiquement égale à 1 sur K et telle que, pour tout ν, $\eta_\nu \equiv 1$ sur Ω_{a+1}. Il existe alors une fonction $\psi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, $\psi \geq 0$, $\psi \equiv 0$ sur Ω_{a+1}, telle que, pour tout ν, on a $\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial\eta_\nu}{\partial \bar z_k}\right| \leq e^{\psi}$, puisque ces conditions sont en nombre fini sur tout compact de Ω.

Remarquons maintenant qu'il existe une fonction $\chi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, convexe positive, nulle sur $]-\infty, a[$ telle que

$$\begin{cases} \varphi + \chi\circ s - 2\psi \geq \varphi, \\ (\chi'\circ s)\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j \partial \bar z_k} w_j\overline{w_k} \geq |\partial\psi|^2\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right). \end{cases} \quad \text{(IV.2.8)}$$

En effet, pour la première inégalité il faut avoir $\chi(\alpha) \geq \sup_{\{s=\alpha\}} 2\psi$, ce qui est possible puisque $\{s=\alpha\}$ est relativement compact dans Ω, et, pour la seconde, comme s est strictement pluri-sousharmonique, il suffit d'avoir $\chi'\circ s \geq c2\left|\partial\psi\right|^2$, et puisque $\chi\circ s \equiv 0$ dans Ω_a et $\partial\psi \equiv 0$ dans Ω_{a+1}, il suffit d'avoir $\chi' \geq 0$ et $\chi'(\alpha)$ suffisamment grand sur $[a,+\infty[$.

Ces notations étant fixées, on pose $\varphi' = \varphi + \chi\circ s$ et $\varphi_j = \varphi' + (j-3)\psi$ pour $j = 1,2,3$ et nous appliquons la Proposition IV.2.2 avec ces fonctions, la fonction φ de la Proposition étant remplacée par $\varphi' = \varphi + \chi\circ s$. D'après (IV.2.8), la fonction $c_l(z)$ de la Proposition IV.2.2 vérifie donc $c_l(z) \geq c(z) + 2\left|\partial\psi(z)\right|^2$, et, pour toute $f \in \mathscr{D}_{p,q+1}(\Omega)$, on a donc

$$\int c(z)\left|f(z)\right|^2 e^{-\varphi'(z)} d\lambda \leq 2\left\|T^* f\right\|_{\varphi_1}^2 + \left\|Sf\right\|_{\varphi_3}^2, \quad \text{(IV.2.9)}$$

et la Proposition IV.2.1 montre que cette inégalité est vraie pour toute forme $f \in D_{T^*} \cap D_S$.

D'après (IV.2.8), on a $\varphi_2 = \varphi' - \psi \geq \varphi$ et $2\varphi_2 - \varphi - \varphi' \geq 0$, soit $\varphi_2 \geq \varphi/2 + \varphi'/2$, donc si $g \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi) \subset L^{22}_{p,q+1}(\Omega, \varphi_2)$ et $f \in D_{T^*} \cap D_S$, on a, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int g \bar{f} e^{-\varphi_2} d\lambda \right| \leq \left(\int |g(z)|^2 \frac{e^{-\varphi(z)}}{c(z)} d\lambda \right)^{1/2} \left(|f(z)|^2 c(z) e^{-\varphi'(z)} d\lambda \right)^{1/2}$$

et (IV.2.9) donne

$$\left| \langle g, f \rangle_{\varphi_2} \right|^2 \leq \| T^* f \|^2_{\varphi_1} + 1/2 \| S f \|^2_{\varphi_3} \text{ si } \int |g(z)|^2 \frac{e^{-\varphi(z)}}{c(z)} d\lambda \leq 1/2.$$

En remarquant que si $\bar\partial g = 0$, i.e. $g \in N_S$, on a $\langle g, f \rangle_{\varphi_2} = 0$, cette dernière égalité donne

$$\begin{cases} \text{pour toute } g \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi) \text{ telle que } \int |g(z)|^2 \frac{e^{-\varphi(z)}}{c(z)} d\lambda \leq 1/2 \text{ et } \bar\partial g = 0, \\ \left| \langle g, f \rangle_{\varphi_2} \right| \leq \| T^* f \|_{\varphi_1} \text{ pour toute } f \in D_{T^*}. \end{cases} \tag{IV.2.10}$$

Ceci montre que l'application $T^* f \mapsto \langle g, f \rangle_{\varphi_2}$ est bien définie sur R_{T^*} et défini une forme linéaire continue. Le théorème de Hahn-Banach assure alors l'existence d'une forme $u_a \in L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_1)$, $\int |u_a|^2 e^{-\varphi_1} \leq 1$, telle que $\langle g, f \rangle_{\varphi_2} = \langle u_a, T^* f \rangle_{\varphi_1}$, pour toute $f \in D_{T^*}$, ce qui signifie $g = T^{**} u_a = T u_a$. De plus, puisque $\varphi_1 = \varphi$ dans Ω_a, on a $\int_{\Omega_a} |u_a|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 1$.

Pour finir la démonstration, on considère une suite réelle croissante $(a_j)_j$ qui tends vers $+\infty$. Pour chaque compact K de Ω, la suite u_{a_j} est uniformément bornée dans $L^2_{p,q}(K)$ et on peut donc en extraire une sous suite faiblement convergente dont la limite est solution de l'équation $\bar\partial u = g$ dans l'intérieur de K (la convergence faible dans $L^2_{p,q}(K)$ impliquant la convergence au sens des distributions). Ainsi, par le procédé diagonal classique, on construit une suite $\left(u_{a_j}\right)_j$ de (p,q)-formes qui converge faiblement dans tout $L^2_{p,q}(\Omega_a)$, $a \in \mathbb{R}$, vers une forme u qui vérifie $\bar\partial u = f$ et $\int_{\Omega_{a_j}} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 1$, pour tout j, et donc $\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 1$, ce qui termine la preuve. □

THÉORÈME IV.2.1.

Soient Ω un domaine pseudo-convexe et φ une fonction pluri-sousharmonique dans Ω. Alors, pour toute $g \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi)$, $\bar\partial$-fermée, il existe $u \in L^2_{p,q,\mathrm{loc}}(\Omega, \varphi)$ telle que $\bar\partial u = g$ et

$$\int_\Omega |u(z)|^2 e^{-\varphi(z)} \left(1 + |z|^2\right)^{-2} d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

En particulier, si Ω est borné, il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que du diamètre de Ω telle que

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq C \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord φ de classe $\mathscr{C}^2$ dans Ω. Comme

$$\langle \mathscr{H} \log\left(1 + |z|^2\right); w, \bar w \rangle = \left(1 + |z|^2\right)^{-2} \left(|w|^2 \left(1 + |z|^2\right) - \left| \sum_j w_j \overline{z_j} \right|^2 \right) \geq \left(1 + |z^2|\right)^{-2} |w|^2,$$

en considérant $\tilde\varphi(z) = \varphi(z) + 2 \log\left(1 + |z|^2\right)$, et $c(z) = 2\left(1 + |z|^2\right)$, la Proposition IV.2.3 donne le résultat.

Montrons maintenant le cas général. Soit s pluri-sousharmonique dans Ω telle que $\Omega_a = \{s < a\}$ soit relativement compact dans Ω, pour tout $a \in \mathbb{R}$ (remarquer que Ω_a est pseudo-convexe). En régularisant φ par convolution, on obtient une famille φ_ε de fonction $\mathscr{C}^\infty$ pluri-sousharmoniques dans $\Omega_{a(\varepsilon)}$, avec $a(\varepsilon) \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$, telle que $\varphi_\varepsilon \searrow \varphi$ quand $\varepsilon \searrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $u_\varepsilon \in L^2_{p,q}\left(\Omega_{a(\varepsilon)}, \varphi_\varepsilon\right)$ telle que $\bar\partial u_\varepsilon = g$ dans $\Omega_{a(\varepsilon)}$ et vérifiant

$$\int_{\Omega_{a(\varepsilon)}} |u_\varepsilon(z)|^2 \left(1 + |z|^2\right)^{-2} e^{-\varphi_\varepsilon} d\lambda \leq \int_{\Omega_{a(\varepsilon)}} |g|^2 e^{-\varphi_\varepsilon} d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Comme $e^{-\varphi_\varepsilon} \nearrow e^{-\varphi}$ quand $\varepsilon \searrow 0$, $u_{\varepsilon'}$ est uniformément bornée dans $L^2_{p,q}\left(\Omega_{a(\varepsilon)}\right)$ quand $\varepsilon' \searrow 0$. Ainsi il existe une suite $\varepsilon_j \to 0$ telle que u_{ε_j} converge faiblement, dans chaque $L^2\left(\Omega_{a(\varepsilon_j)}\right)$ vers une fonction $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ceci implique $\bar\partial u = g$ dans Ω et, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega_a} |u(z)|^2 \left(1 + |z|^2\right)^{-2} e^{-\varphi_\varepsilon} d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda,$$

ce qui termine la démonstration. □

IV.3 Résolution de l'équation $\bar\partial u = f$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et équivalence holomorphie - pseudo-convexité

IV.3.1 Résolution $\mathscr{C}^\infty$ de l'équation $\bar\partial u = f$ dans un ouvert pseudo-convexe

Proposition IV.3.1.

Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$. Pour toute forme $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega,\mathrm{loc})$, $\bar\partial$-fermée, il existe $u \in L^2_{p,q}(\Omega,\mathrm{loc})$ telle que $\bar\partial u = f$.

Démonstration. En effet, soit $p \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ une fonction pluri-sousharmonique (Proposition III.2.5) telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{p < a\}$ est relativement compact dans Ω. Alors, si $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega,\mathrm{loc})$, on construit facilement une fonction convexe croissante χ telle que, si $\varphi = \chi(p)$ on a $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi)$, et la conclusion découle du Théorème IV.2.1. □

Notre prochain but est maintenant de résoudre cette équation avec des estimations Sobolev locales.

Précisons tout d'abord une notation. Pour tout entier s, on notera $W^s(\Omega,\mathrm{loc})$ l'espace des fonction localement de carré intégrable dans Ω telles que, pour $|\alpha| \le s$, $D^\alpha f \in L^2(\Omega,\mathrm{loc})$.

Rappelons enfin que, d'après le Lemme IV.2.2, l'adjoint de l'opérateur $\bar\partial$ au sens des distributions est l'opérateur ϑ défini sur une $(p,q+1)$-forme f par

$$\vartheta f = (-1)^p {\sum_{I,K}}' \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j} \right) dz^I \wedge d\bar z^K. \tag{IV.3.1}$$

Proposition IV.3.2.

Soit $f \in L^2_{p,q+1}(\mathbb{C}^n)$ une forme à support compact. Si $\bar\partial f \in L^2_{p,q+2}(\mathbb{C}^n)$ et $\vartheta f \in L^2_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ alors $f \in W^1_{p,q+1}(\mathbb{C}^n)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{D}_{p,q+1}(\mathbb{C}^n)$. La formule (IV.2.6) appliquée avec $\varphi = \psi = 0$ donne

$${\sum_{I,J}}' \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar z_j} \right|^2 \le 2\|\vartheta f\|_0^2 + \|\bar\partial f\|_0^2.$$

Dans les conditions de l'énoncé, si χ_ε est une suite régularisante, $\vartheta(f * \chi_\varepsilon) = \vartheta f * \chi_\varepsilon$ converge vers ϑf et $\bar\partial(f * \chi_\varepsilon) = \bar\partial f * \chi_\varepsilon$ vers $\bar\partial f$ dans L^2 quand $\varepsilon \to 0$, et la formule ci-dessus montre que $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar z_j} * \chi_\varepsilon$ converge vers $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar z_j}$ dans L^2, pour tous I, J, j.

Pour conclure, il suffit donc d'appliquer le Lemme suivant :

Lemme. *Soit $w \in L^2(\mathbb{C}^n)$ une fonction à support compact. Si $\frac{\partial w}{\partial \bar z_j} \in L^2(\mathbb{C}^n)$ alors $\frac{\partial w}{\partial z_j} \in L^2(\mathbb{C}^n)$.*

Démonstration. En effet, si $w \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$, une intégration par parties (voir page 7) donne $\int \left|\frac{\partial w}{\partial \bar z_j}\right|^2 d\lambda = \int \left|\frac{\partial w}{\partial z_j}\right|^2 d\lambda$, et on conclut par régularisation. □

□

Proposition IV.3.3.

Soit Ω un ouvert pseudo-convexe. Soit $s \ge 0$ un entier. Pour toute forme $f \in W^s_{p,q+1}(\Omega,\mathrm{loc})$, $\bar\partial$-fermée, il existe $u \in W^{s+1}_{p,q}(\Omega,\mathrm{loc})$ telle que $\bar\partial u = f$. De plus, si $q = 0$, toutes les solution de l'équation ont cette propriété.

Démonstration. Nous allons faire la preuve par récurrence sur $s \ge 0$ en distinguant les cas $q = 0$ et $q > 0$.

Supposons donc tout d'abord $q = 0$. Soit $f \in W^s_{p,1}(\Omega,\mathrm{loc})$. D'après la Proposition IV.3.1 il existe $u \in L^2_{p,0}(\Omega,\mathrm{loc})$ telle que, pour tous I et j, $\frac{\partial u_I}{\partial \bar z_j} = f_{I,j}$, et, d'après l'hypothèse de récurrence (qui s'applique ici à toutes les solutions) si $s \ge 1$, on a $u \in W^s_{p,0}(\Omega,\mathrm{loc})$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $\frac{\partial(\chi u_I)}{\partial \bar z_j} = u_I \frac{\partial \chi}{\partial \bar z_j} + \chi f_{I,j}$ appartient à $W^\sigma(\Omega)$ pour $0 \le \sigma \le s$, de sorte que, si $|\alpha| = \sigma$, $\frac{\partial D^\alpha(\chi u_I)}{\partial \bar z_j} \in L^2(\Omega)$, pour tout j. Le Lemme précédent implique donc que $D^\alpha(\chi u_I) \in W^1(\Omega)$, et, par suite $\chi u_I \in W^{\sigma+1}(\Omega)$, $0 \le \sigma \le s$, ce qui montre bien que $u_I \in W^{s+1}(\Omega,\mathrm{loc})$.

Considérons maintenant le cas $q > 0$. Si $s \geq 1$, prenons comme hypothèse de récurrence que si $f \in W^{s-1}_{p,q+1}(\Omega, \text{loc})$ et si, comme dans la démonstration de la Proposition IV.3.1, $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi)$, pour une fonction pluri-sousharmonique convenable φ, alors la solution de l'équation $\bar\partial u = f$ qui est orthogonal au noyau N_T de T est dans $W^s_{p,q}(\Omega, \text{loc})$. Soit donc $f \in W^s_{p,q+1}(\Omega, \text{loc})$, $\bar\partial$-fermée, et choisissons φ pluri-sousharmonique de sorte que $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi)$. Soit u la solution de l'équation $\bar\partial u = f$ donnée par la Proposition IV.3.1 et qui est orthogonale au noyau N_T de T, c'est-à-dire dans R_{T^*}. Compte tenu de l'expression de T^* (c.f. (IV.3.1)) (et du fait que $\vartheta^2 = 0$) on a $\vartheta(e^{-\varphi}u) = 0$, ce qui implique $\vartheta u = au$ où a est un opérateur d'ordre zéro à coefficients $\mathscr{C}^\infty$.

Maintenant, d'après l'hypothèse de récurrence si $s \geq 1$, on a $u \in W^\sigma_{p,q}(\Omega, \text{loc})$, $0 \leq \sigma \leq s$. Donc si $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\bar\partial(\chi u) \in W^\sigma(\Omega)$ et $\vartheta(\chi u) \in W^\sigma(\Omega)$, $0 \leq \sigma \leq s$. Donc, si $|\alpha| = \sigma$, le Lemme précédent montre que $D^\alpha(\chi u) \in W^1(\Omega)$, soit $\chi u \in W^{\sigma+1}(\Omega)$, ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE.

Soit Ω un ouvert pseudo-convexe. Pour toute forme $f \in \mathscr{C}^\infty_{p,q+1}(\Omega)$, $\bar\partial$-fermée, il existe $u \in \mathscr{C}^\infty_{p,q}(\Omega)$ telle que $\bar\partial u = f$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme d'inclusion de Sobolev, ou, plus simplement, le cas particulier simple suivant :

Lemme. *Pour tout entier s on a $W^{s+2n}_{p,q}(\Omega, \text{loc}) \subset \mathscr{C}^s_{p,q}(\Omega, \text{loc})$.*

Démonstration. En effet, en remarquant que si $w \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ on a $\|w\|_\infty \leq \int \left|\frac{\partial^{2n} w}{\partial x_1 \ldots \partial x_{2n}}\right| d\lambda$ (les x_i désignant les coordonnées réelles de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$), on voit que si $w \in W^{2n}(\mathbb{C}^n)$ est à support compact et si χ_ε est une suite régularisante, alors la famille $(w * \chi_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy pour la norme uniforme et converge donc vers une fonction continue qui est presque partout égale à w. En appliquant ceci aux dérivées $D^\alpha w$, $|\alpha| \leq s$, on en déduit que si $w \in W^{s+2n}(\mathbb{C}^n)$ est à support compact alors $w \in \mathscr{C}^s(\mathbb{C}^n)$. □

□

THÉORÈME IV.3.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Ω est un domaine d'holomorphie ;*
2. *Ω est un ouvert pseudo-convexe ;*
3. *Pour toute forme $f \in \mathscr{C}^\infty_{p,q+1}(\Omega)$, $\bar\partial$-fermée, il existe une forme $u \in \mathscr{C}^\infty_{p,q}(\Omega)$ telle que $\bar\partial u = f$.*

Démonstration. La seule implication qui reste à démontrer est 3. entraîne 1. Nous faisons la démonstration par récurrence sur la dimension n. Si $n = 1$, tout ouvert de $\mathbb{C}$ est d'holomorphie (Théorème I.1.3) et donc pseudo-convexe (Théorème III.2.2), et le 3. est le Théorème I.1.2. Nous supposons donc le Théorème vrai en dimension $n-1$.

Nous devons construire une fonction holomorphe dans Ω qui ne se prolonge pas à aucun ouvert plus strictement grand que Ω. Si cela est faux, pour toute fonction f holomorphe dans Ω il existe un point $z_1 \in \partial\Omega$ et un $r > 0$ tels que f se prolonge dans $B(z_1, r)$. Si z' est un point de $\Omega \cap B(z_1, r/2)$, tel que $d(z', \partial\Omega) = r' < r/2$, alors $B(z', r') \subset \Omega \cap B(z_1, r)$, $\partial B(z', r') \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ et f se prolonge au voisinage de $\overline{B(z', r')}$. Ainsi, il suffit de montrer que si D est un ouvert convexe de Ω tel que $\partial D \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ et si $z_0 \in \partial D \cap \partial\Omega$, il existe une fonction f holomorphe dans Ω qui ne se prolonge pas au voisinage de z_0.

Par translation et changement de coordonnées, on peut supposer $z_0 = 0$ et $D_0 = D \cap \{z_n = 0\} \neq \emptyset$. La convexité de D entraîne alors $z_0 \in \partial D_0$ et $z_0 \in \omega$ où $\omega = \{z \in \Omega \text{ tels que } z_n = 0\}$. Notons j l'injection canonique de ω dans Ω, ω étant considéré comme un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$. Soit π la projection $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1})$ et $M = \{z \in \Omega \text{ tels que } \pi(z) \notin \omega\}$, de sorte que M et ω sont disjoints et fermés dans Ω.

Lemme 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\omega)$, $\bar\partial$-fermée, $q \geq 0$. Alors il existe $F \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\Omega)$, $\bar\partial$-fermée telle que $f = j^*F$.*

Preuve du Lemme. Soit $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ nulle sur un voisinage de M dans Ω et valant 1 au voisinage de ω dans Ω. Alors $\psi\pi^*f \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\Omega)$ et $j^*\psi\pi^*f = f$. Reste à modifier cette forme pour la rendre $\bar\partial$-fermée sans changer sa valeur sur ω. Pour cela on cherche $v \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\Omega)$ telle que la forme $F = \psi\pi^*f - z_n v$ soit $\bar\partial$-fermée ce qui équivaut à $\bar\partial v = \frac{1}{z_n}\bar\partial\psi \wedge \pi^*f$. Comme ψ vaut 1 au voisinage de ω, $\frac{1}{z_n}\bar\partial\psi \wedge \pi^*f \in \mathscr{C}^\infty_{0,q+1}(\Omega)$ et l'hypothèse assure l'existence de v. □

Lemme 2. *Si $f \in \mathscr{C}^\infty_{0,q+1}(\omega)$ est $\bar\partial$-fermée, il existe $u \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\omega)$ telle que $\bar\partial u = f$. En particulier ω est un domaine d'holomorphie.*

Démonstration. En effet, si F est la forme du Lemme précédent, par hypothèse il existe $U \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(\Omega)$ telle que $\bar\partial U = F$ et il suffit de prendre $u = j^*U$. La dernière assertion du Lemme résulte de l'hypothèse de récurrence. □

Terminons maintenant la démonstration de Théorème. D'après le Lemme 2 il existe g holomorphe dans ω qui ne se prolonge pas au voisinage de 0, et, ce même Lemme donne une fonction G holomorphe dans Ω telle que $j^*G = g$. Alors G ne peut se prolonger au voisinage de 0. □

IV.4 Compléments et notes

En faisant les calculs comme il est dit dans la Remarque IV.2.1, on aboutit au théorème (implicite donc dans les travaux de L. Hörmander) suivant :

Théorème IV.4.1 (L. Hörmander [Hör65]).
Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$. Soit φ une fonction pluri-sousharmonique dans Ω. Soit f une $(0,q)$-forme $\bar\partial$-fermée dans Ω. Alors il existe une forme u solution de l'équation $\bar\partial u = f$ dans Ω vérifiant

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le \int_\Omega \|f\|_{i\partial\bar\partial\varphi}\, e^{-\varphi}\, d\lambda,$$

où $\|f\|_{i\partial\bar\partial\varphi}$ désigne la norme de f dans la métrique définie par la hessienne de φ.

La norme $\|f\|_{i\partial\bar\partial\varphi}$ est définie de la manière suivante. Supposons tout d'abord $q = 1$ et $\mathscr{H}\varphi = \left(\Omega^{jk}\right)_{j,k}$ définie positive. Alors si $\left(\Omega_{jk}\right)_{j,k}$ désigne la matrice inverse de $\mathscr{H}\varphi$, on a $\|f\|_{i\partial\bar\partial\varphi} = \sum_{j,k} \Omega_{jk} f_j \overline{f_k}$. En général, cette norme peut se définir comme suit. Soit $\beta = \sum_{i,k} dz_i \wedge d\overline{z_k}$ la forme de Kähler fondamentale de $\mathbb{C}^n$. Pour toute forme u on défini le produit intérieur Λu de u avec β par

$$\langle \Lambda u, v\rangle = \left\langle u, \beta\wedge v\right\rangle, \text{ pour toute forme } v,$$

où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire euclidien, et on pose

$$\|f\|_{i\partial\bar\partial\varphi} = \sup_{\langle i\partial\bar\partial\varphi\wedge\Lambda h, h\rangle \ge 1} \langle f, h\rangle$$

(noter que $h \longmapsto \left\langle i\partial\bar\partial\varphi\wedge\Lambda h, h\right\rangle$ est une forme quadratique positive).

De nombreuses estimations L^2 pour les solutions de l'équation $\bar\partial u = f$ ont été obtenus par divers auteurs. Nous en citerons un certain nombre dans le chapitre suivant. Pour l'instant nous nous contentons de donner une estimation générale obtenue par B. Berndtsson et P. Charpentier (dans le cas $\varphi = \psi$ c'est un résultat dû à H. Donnelly et C. Fefferman) :

Théorème IV.4.2 (B. Berndtsson & P. Charpentier [BC00]).
Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$. Soient φ et ψ deux fonctions pluri-sousharmoniques de classe $\mathscr{C}^2$ dans Ω. On suppose que $\psi \ge 0$ et qu'il existe une constante $r < 1$ telle que

$$i\partial\psi \wedge \bar\partial\psi \le r\, i\partial\bar\partial\psi.$$

Alors il existe une constante $C_r > 0$ telle que, pour toute $(0,q)$-forme f, $\bar\partial$-fermée, dans $L^2_{(0,q+1)}\left(\Omega, \psi-\varphi\right) \subset L^2_{(0,q+1)}\left(\Omega,\varphi\right)$, si u est la solution de l'équation $\bar\partial u = f$ de norme minimale dans $L^2_{(0,q)}\left(\Omega,\varphi\right)$ (i.e. la projection sur le noyau de $\bar\partial$ de la solution dans $L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right)\right)$ donnée par le Théorème IV.2.1) on a

$$\int_\Omega |u|^2 e^{\psi-\varphi}\, d\lambda \le C_r \int_\Omega \|f\|_{i\partial\bar\partial(\psi+\varphi)}\, e^{\psi-\varphi}\, d\lambda.$$

CHAPITRE V

INTRODUCTION AU PROBLÈME $\bar{\partial}$-NEUMANN

Dans ce chapitre nous introduisons le « problème $\bar{\partial}$-Neumann ». L'exposé détaillé des résultats connus aujourd'hui dépasse très largement le cadre de ce cours. Nous nous contenterons donc de poser précisément le problème et de donner les résultats fondamentaux. Il y aura très peu de démonstration (sauf à la dernière Section), le lecteur intéressé étant renvoyé à la bibliographie.

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ***domaine pseudo-convexe borné*** de $\mathbb{C}^n$.

V.1 L'OPÉRATEUR DE NEUMANN ASSOCIÉ AU $\bar{\partial}$

Soit φ une fonction pluri-sousharmonique dans Ω. L'opérateur $T : L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right) \to L^2_{(p,q+1)}\left(\Omega,\varphi\right)$ du chapitre précédent sera maintenant noté simplement $\bar{\partial}$ et son adjoint (hilbertien) T^* sera noté $\bar{\partial}^*_\varphi$, ou simplement $\bar{\partial}^*$ lorsque $\varphi = 0$.

Le Théorème IV.2.1 donne la décomposition orthogonale $L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right) = R_{\bar{\partial}} \oplus N_{\bar{\partial}^*_\varphi}$ et, par passage à l'adjoint, on a aussi $L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right) = R_{\bar{\partial}^*_\varphi} \oplus N_{\bar{\partial}}$, $1 \leq q \leq n-1$. On défini alors l'*opérateur de Laplace-Beltrami* $\Box_\varphi$ *associé à l'opérateur* $\bar{\partial}$, (noté simplement $\Box$ lorsque $\varphi = 0$) de la manière suivante :

DÉFINITION V.1.1.

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$. Soit φ une fonction pluri-sousharmonique dans Ω. Pour $1 \leq q \leq n-1$ on note $\Box_\varphi$ l'opérateur à domaine$D_{\Box_\varphi} \subset L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right)$ à valeurs dans $L^2_{(p,q)}\left(\Omega,\varphi\right)$ défini par $\Box_\varphi = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_\varphi + \bar{\partial}^*_\varphi\bar{\partial}$. $D_{\Box_\varphi}$ est donc défini par

$$f \in D_{\Box_\varphi} \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} f \in D_{\bar{\partial}} \cap D_{\bar{\partial}^*_\varphi}, \\ \bar{\partial} f \in D_{\bar{\partial}^*_\varphi} \text{ et } \bar{\partial}^*_\varphi f \in D_{\bar{\partial}}. \end{array} \right.$$

Les conditions définissant $D_{\Box_\varphi}$ s'appellent les conditions de Neumann. De plus, $\Box_\varphi$ est un opérateur autoadjoint.

Les calculs faits à la Section IV.2.2 permettent aussitôt de donner l'expression de $\Box_\varphi$ au sens des distributions (i.e. agissant sur les formes de $\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega)$) :

PROPOSITION V.1.1.

Pour toute forme $f = \sum'_{I,J} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar z^J \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$ on a

$$\Box_\varphi f = \sum_{I,J}{}' \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f_{IJ}}{\partial z_k \partial \bar z_k} - \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar z_k} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \right) \right) dz^I \wedge d\bar z^J + \sum_{I,K}{}' \left(\sum_{k=1}^n f_{I,kK} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_k} \right) dz^I \wedge dz_k \wedge d\bar z^K.$$

En particulier, si $\varphi = 0$, $\Box$ (au sens des distributions) est exactement le laplacien usuel composante par composante.

Remarque. On peut naturellement définir aussi l'opérateur $\Box_\varphi$ pour $q = 0$ et $q = n$ (c'est-à-dire sur les fonctions). Par exemple pour $q = 0$, on pose $\Box_\varphi f = \bar\partial^*_\varphi \bar\partial f = \triangle f$ et la condition de Neumann est $f \in D_{\bar\partial}$, $\bar\partial f \in D_{\bar\partial^*_\varphi}$. C'est le problème de Neumann classique dont l'étude, bien connue, ne sera pas abordée ici.

Nous allons maintenant voir que le Théorème IV.2.1 montre que $\Box_\varphi$ est inversible.

Soit $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$. Comme $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi) = N_{\bar\partial} \oplus R_{\bar\partial^*_\varphi}$, on peut écrire $g = g_1 + g_2$ de manière unique avec $\bar\partial g_1 = 0$ et $g_2 = \bar\partial^*_\varphi h_2$, avec $h_2 \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi)$.

D'après le Théorème IV.2.1 il existe $u_1 \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \varphi)$ telle que $\bar\partial u_1 = g_1$, et, par décomposition orthogonale de l'espace, on peut supposer u_1 orthogonale à $N_{\bar\partial}$ c'est-à-dire qu'il existe $f_1 \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ telle que $u_1 = \bar\partial^*_\varphi f_1$. La même raison de décomposition de l'espace fait que l'on peut supposer $f_1 \in \left(N_{\bar\partial^*_\varphi}\right)^\perp$ c'est-à-dire dans $R_{\bar\partial}$ de sorte que $\bar\partial f_1 = 0$. Ceci implique que $f_1 \in D_{\Box_\varphi}$. En effet, on a bien $f_1 \in D_{\bar\partial}$ et $\bar\partial f_1 \in D_{\bar\partial^*}$ (puisque $\bar\partial f_1 = 0$), et, par construction, $f_1 \in D_{\bar\partial^*}$ et $\bar\partial^*_\varphi f_1 = u_1 \in D_{\bar\partial}$. Enfin, par définition on a $\Box_\varphi f_1 = \bar\partial \bar\partial^*_\varphi f_1 = g_1$.

Considérons maintenant $g_2 = \bar\partial^*_\varphi h_2$. Les même propriétés de décomposition des espaces montrent que l'on peut supposer $h_2 \in \left(N_{\bar\partial^*_\varphi}\right)^\perp = R_{\bar\partial}$ de sorte que $\bar\partial h_2 = 0$, et, le Théorème IV.2.1 implique l'existence d'une forme $f_2 \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$, que l'on peut supposer être dans l'orthogonal de $N_{\bar\partial}$ c'est-à-dire dans l'image de $\bar\partial^*_\varphi$ donc dans $D_{\bar\partial^*_\varphi}$ et vérifiant $\bar\partial^*_\varphi f_2 = 0$, telle que $h_2 = \bar\partial f_2$. Ceci montre que $f_2 \in D_{\Box_\varphi}$ et que $\Box_\varphi f_2 = \bar\partial^*_\varphi \bar\partial f_2 = g_2$.

En conclusion, la forme $f = f_1 + f_2$ est dans le domaine de $\Box_\varphi$ et vérifie $\Box_\varphi f = g$. De plus, la norme de f dans $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ est contrôlée par celle de g à une constante multiplicative près qui ne dépends que du diamètre de Ω.

Remarquons de plus que la solution f de l'équation $\Box_\varphi f = g$ est nécessairement unique. En effet, si $\Box_\varphi f = 0$, $f \in D_{\Box_\varphi}$, pour toute forme $g \in D_{\Box_\varphi}$ on aura $\langle f, \Box_\varphi g \rangle = 0$, et comme nous venons de voir que $\forall u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ il existe $g \in D_{\Box_\varphi}$ telle que $\Box_\varphi g = u$, cela implique $\langle f, u \rangle = 0$, pour toute u donc $f = 0$. Donc l'application qui à $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ fait correspondre l'unique solution f de l'équation $\Box_\varphi f = g$ est linéaire.

Ainsi :

THÉORÈME V.1.1.

*Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$. Pour $0 \le p \le n$ et $1 \le q \le n-1$ l'opérateur à domaine $\Box_\varphi$ est inversible et sont inverse, que nous noterons $\mathcal{N}^\varphi_{p,q}$ (ou simplement $\mathcal{N}^\varphi$), est défini sur $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ tout entier et est continu de norme ne dépendant que du diamètre de Ω. L'opérateur $\mathcal{N}^\varphi_{p,q}$ est appelé l'**opérateur de Neumann** associé au $\bar\partial$.*

Pour comprendre un peu plus l'opérateur $\Box_\varphi$, il est utile de donner, lorsque cela est possible, une description du domaine de $\bar\partial^*_\varphi$. Par exemple, on peut expliciter les forme de $D_{\bar\partial^*_\varphi}$ qui sont à coefficients dans $\mathcal{C}^1\left(\overline\Omega\right)$. Pour $f \in \mathcal{C}^1_{(p,q)}\left(\overline\Omega\right)$ et $u \in \mathcal{C}^1_{(p,q-1)}\left(\overline\Omega\right)$, on a

$$\langle \bar\partial u, f \rangle_\varphi = (-1)^p \int_\Omega \sum_{I,K}{}' \sum_j \frac{\partial u_{IK}}{\partial \bar z_j} \overline{f_{I,jK}} e^{-\varphi} d\lambda.$$

Si ρ est une fonction définissante de Ω, une intégration par parties (c.f. Section I.2) donne (avec les notations introduites au début de la preuve de la Proposition IV.2.2 (formule (IV.2.5), page 31))

$$\begin{aligned} \langle \bar\partial u, f \rangle_\varphi &= (-1)^p \int_\Omega \sum_{I,K}{}' \sum_j u_{IK} \frac{\partial \left(\overline{f_{I,jK}} e^{-\varphi} \right)}{\partial \bar z_j} d\lambda + (-1)^p \int_{\partial\Omega} \sum_{I,K}{}' u_{IK} \left(\sum_j \overline{f_{I,jK} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}} \right) e^{-\varphi} d\sigma \\ &= (-1)^{p-1} \int_\Omega \sum_{I,K}{}' \sum_j u_{IK} \overline{\delta^\varphi_j f_{I,jK}} e^{-\varphi} d\lambda + (-1)^p \int_{\partial\Omega} \sum_{I,K}{}' u_{IK} \left(\sum_j \overline{f_{I,jK} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}} \right) e^{-\varphi} d\sigma. \end{aligned}$$

Comme $f \in D_{\bar\partial^*_\varphi}$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que $\left| \langle \bar\partial u, f \rangle_\varphi \right| \le C \|u\|_\varphi$, pour toute u, la formule montre que

$$f \in D_{\bar\partial^*_\varphi} \text{ si et seulement si pour tous } I, K, \sum_j f_{I,jK} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{V.1.1}$$

ce qui signifie que les vecteurs $\left(f_{I,jK}\right)_j$ sont complexe tangents en tout point de $\partial\Omega$. On traduit ces relations en disant que la partie normale de f est nulle sur $\partial\Omega$.

Deux opérateurs sont naturellement associés à l'opérateur de Neumann :

PROPOSITION V.1.2.
Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ et soit φ une fonction pluri-sousharmonique dans Ω.

1. *Le projecteur orthogonal de $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ sur le sous-espace fermé $N_{\bar\partial}$ noyau de l'opérateur $\bar\partial$, $0 \leq q \leq n-1$, est noté $\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q}$ et est appelé le projecteur de Bergman. De plus, pour $1 \leq q \leq n-1$,*
$$\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} = \mathrm{Id} - \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial$$
(i.e. l'opérateur $f \mapsto f - \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial f$ se prolonge de $\mathscr{C}^1_{(p,q)}\left(\bar\Omega\right)$ à $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ et on a la formule ci-dessus).
2. *L'opérateur $\bar\partial^*\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}$ est l'opérateur qui à $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$, $1 \leq q \leq n-1$, fait correspondre la solution de l'équation $\bar\partial u = \mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f$ qui est orthogonale au noyau $N_{\bar\partial}$ de l'opérateur $\bar\partial$. En particulier, si $\bar\partial f = 0$, $\bar\partial^*\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} f$ est la solution de l'équation $\bar\partial u = f$ de norme minimale dans $L^2_{(p,q-1)}(\Omega,\varphi)$.*

Remarque. Dans le cas $q = p = 0$ et $\varphi = 0$, $\mathscr{B}^0_{0,0} = \mathscr{B}$ est naturellement l'opérateur de Bergman classique (i.e. le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace fermé des fonctions holomorphes).

Démonstration. Vérifions la formule du 1. $\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q}$ étant un projecteur orthogonal dans un espace de Hilbert, il est caractérisé par
$$\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f \in N_{\bar\partial}, \text{ et } \forall g \in N_{\bar\partial} \text{ on a } \left\langle \mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f, g\right\rangle_{\varphi} = \langle f, g\rangle_{\varphi}.$$
Si $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ et si $\bar\partial g = 0$, on a
$$\left\langle f - \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial f, g\right\rangle_{\varphi} = \langle f, g\rangle_{\varphi} - \left\langle \mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial f, \bar\partial g\right\rangle = \langle f, g\rangle,$$
et $\bar\partial\left(f - \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial f\right) = 0$, car, si $\bar\partial u = 0$, par construction, $\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1} u \in N_{\bar\partial}$ donc $\bar\partial\bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} u = u$ puisque $\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}$ est l'inverse de $\square_{\varphi}$, donc $\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f = f - \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q+1}\bar\partial f$. On conclut alors par densité.

Vérifions maintenant le 2. de la Proposition. Écrivons $f = \mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f + f_1$, avec $f_1 \in \left(N_{\bar\partial}\right)^{\perp} = R_{\bar\partial^*_{\varphi}}$. La construction de $\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}$ montre qu'alors $\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} f_1 \in N_{\bar\partial^*_{\varphi}}$ et donc $\bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} f = \bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}\left(\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f\right)$, et comme $\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f \in N_{\bar\partial}$, $\bar\partial\bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} f = \bar\partial\bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}\mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f = \mathscr{B}^{\varphi}_{p,q} f$, ce qui montre l'assertion puisque $\bar\partial^*_{\varphi}\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q} f$ est orthogonal au noyau de $\bar\partial$. □

V.2 LE PROBLÈME $\bar\partial$-NEUMANN

Le problème $\bar\partial$-Neumann consiste à obtenir des estimations de l'opérateur $\mathscr{N}^{\varphi}_{p,q}$. Sauf mention expresse du contraire, nous nous restreindrons au cas $\varphi = 0$ (l'opérateur étant alors noté $\mathscr{N}_{p,q}$).

Nous avons vu (Corollaire de la Proposition IV.3.3) qu'il existe tojours une solution de l'équation $\bar\partial u = f$, avec une donnée $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{p,q+1}(\Omega)$, qui est $\mathscr{C}^{\infty}$ dans Ω. Il est alors naturel de se demander s'il existe des solutions qui ont un bon comportement au bord du domaine ; par exemple, si $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{p,q+1}\left(\bar\Omega\right)$ peut-on trouver u dans $\mathscr{C}^{\infty}_{p,q}\left(\bar\Omega\right)$? La réponse à cette question est positive et a été donnée par J. J. Kohn :

THÉORÈME V.2.1 *(J. J. Kohn [Koh73]).*
Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. Pour tout entier positif s il existe un réel $t > 0$ tel que l'opérateur $\mathscr{N}^{t|z|^2}_{p,q}$ envoie continûment l'espace de Sobolev $W^s_{p,q}(\Omega)$ dans lui-même. De plus, pour toute $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{p,q+1}\left(\bar\Omega\right)$ il existe u dans $\mathscr{C}^{\infty}_{p,q}\left(\bar\Omega\right)$ telle que $\bar\partial u = f$.

La solution u de l'énoncé ci-dessus s'obtient à partir des opérateurs $\bar\partial^*_{t|z|^2}\mathcal{N}^{t|z|^2}_{p,q}$, par un procédé de type Mittag-Lefler, et n'est pas celle donnée par l'opérateur $\bar\partial^*\mathcal{N}_{p,q}$.

Ce problème a été étudié par J. J. Kohn pour la solution $\bar\partial^*\mathcal{N}_{p,q}$, et la réponse finale (due à M. Christ) est non. Toutefois cette étude a ouvert toute une théorie dont nous allons brièvement exposer les résultats principaux (sans démonstrations) maintenant.

Pour tenter de répondre à cette question J. J. Kohn a introduit deux approches fournissant des estimées dans les espaces de Sobolev : la condition de compacité et les estimées sous-elliptiques.

DÉFINITION V.2.1.

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit z un point de $\partial\Omega$.

1. On dit que le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une ***condition de compacité*** au point z s'il existe un voisinage U de z dans $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour toute forme $f \in \mathscr{D}_{p,q}(U)\cap D_{\bar\partial}\cap D_{\bar\partial^*}$, on ait

$$\|f\|_{L^2_{p,q}(\Omega)} \leq \varepsilon\left(\|\bar\partial f\|_{L^2_{p,q+1}(\Omega)} + \|\bar\partial^* f\|_{L^2_{p,q-1}(\Omega)}\right) + C_\varepsilon\|f\|_{W^{-1}_{p,q}(\Omega)},$$

   où l'espace $W^{-1}_{p,q}(\Omega)$ désigne l'espace de formes dont les coefficients sont dans l'espace de Sobolev $W^{-1}(\Omega)$ dual de l'espace de Sobolev $W^1(\Omega)$.

2. On dit que le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une ***estimée sous-elliptique*** d'ordre $\varepsilon > 0$ au point z s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage U de z dans $\mathbb{C}^n$ tel que, pour toute forme $f \in \mathscr{D}_{p,q}(U)\cap D_{\bar\partial}\cap D_{\bar\partial^*}$, on ait

$$\|f\|_{W^\varepsilon_{p,q}(\Omega)} \leq C\left(\|\bar\partial f\|_{L^2_{p,q+1}(\Omega)} + \|\bar\partial^* f\|_{L^2_{p,q-1}(\Omega)} + \|f\|_{L^2_{p,q}(\Omega)}\right),$$

   où $W^\varepsilon_{p,q}(\Omega)$ désigne l'espace des formes à coefficients dans l'espace de Sobolev $W^\varepsilon(\Omega)$ (comparer avec la Proposition IV.3.2).

Le principal résultat du fameux travail de J. J. Kohn et L. Nirenberg donne des estimation Sobolev quand ces conditions sont remplies :

THÉORÈME V.2.2 *(J. J. Kohn & L. Niremberg [KN65]).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. *Si le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une condition de compacité en tout point de $\partial\Omega$ alors, pour tout réel s ,l'opérateur $\mathcal{N}_{p,q}$ est compact de l'espace de Sobolev $W^s_{p,q}(\Omega)$ dans lui-même.*
2. *S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une estimée sous-elliptique d'ordre ε en tout point de $\partial\Omega$ alors, pour tout réel s ,l'opérateur $\mathcal{N}_{p,q}$ est continu de l'espace de Sobolev $W^s_{p,q}(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $W^{s+2\varepsilon}_{p,q}(\Omega)$.*

En particulier, dans les deux cas ci-dessus, $\mathcal{N}_{p,q}$ envoie $\mathscr{C}^\infty_{p,q}\left(\overline{\Omega}\right)$ dans lui-même.

Une condition, de nature plus géométrique, impliquant les conditions de compacité a été trouvée par D. Catlin :

THÉORÈME V.2.3 *(D. Catlin [Cat84]).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$. Si, pour tout $M > 0$ il existe une fonction pluri-sousharmonique $\lambda \in \mathscr{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, telle que $\mathscr{H}\lambda(z) \geq M\mathrm{Id}$, en tout point $z \in \partial\Omega$, alors le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une condition de compacité en tout point de $\partial\Omega$.

Remarque. Il a été montré par M. Christ que la condition suffisante du Théorème ci-dessus n'est pas nécessaire.

La question de savoir si pour un domaine donné, le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une estimée sous-elliptique, a été caractérisée par D. Catlin dans un travail profond à partir de la notion de points de type fini introduite par J. D'Angelo.

Explicitons tout d'abord cette notion. Si h est une fonction d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{C}^s$, on appelle *ordre d'annulation* de h en 0, et on note $\mathrm{ord}(h,0)$, le nombre entier $\inf\left\{|\alpha| \ \alpha \in \mathbb{N}^r \text{ tel que } \partial^\alpha(h-h(0))(0) \neq 0\right\}$. Soit z un point du bord d'un domaine pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière. Soit $q \in \{1,\dots,n\}$. Soit ρ une fonction définissante de $\partial\Omega$ au voisinage de z. On appelle q-type de $\partial\Omega$ au point z le nombre $\triangle^{\partial\Omega}_q(z) = \sup_\gamma \frac{\mathrm{ord}(\rho\circ\gamma,0)}{\mathrm{ord}(\gamma,0)}$ le sup étant pris sur toutes les fonction γ holomorphes dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^q$ telles que $\gamma(0) = z$. On dit que $\partial\Omega$ est de *q-type fini* au point z lorsque $\triangle^{\partial\Omega}_q(z) < +\infty$, et on dit que z est un point de $\partial\Omega$ de *type fini* si $\triangle^{\partial\Omega}_1(z) < +\infty$ (ce qui implique qu'il est de q-type fini pour tout q) et $\triangle^{\partial\Omega}_1(z)$ s'appelle le *type* de z.

En langage imagé, un point $z \in \partial\Omega$ est de type fini s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'ordre de contact d'un ensemble analytique passant par z avec $\partial\Omega$ est toujours inférieur à C. Il est clair (considérer l'espace complexe tangent) que cette constante est ≥ 2. Il est alors facile de voir que si $\partial\Omega$ est strictement convexe au voisinage de z alors le type de z est 2, et il en est donc de même de tout domaine strictement pseudo-convexe (c.f. Définition III.3.1 et la remarque qui suit).

Le Théorème fondamental de cette théorie du type est dû à J. D'Angelo :

THÉORÈME V.2.4 (J. D'Angelo [D'A82]).

> *Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $z \in \partial\Omega$. Si z et de type fini il existe un voisinage U de z dans $\mathbb{C}^n$ tel que tout point de $U \cap \partial\Omega$ soit de type fini.*

Attention, ce théorème ne dit pas qu'il existe un voisinage U de z tel que les points de $U \cap \partial\Omega$ ont un type majoré par celui de z. Ceci est faux en général. J. D'Angelo a montré que l'on peut choisir U de sorte que, en tout point z' de $U \cap \partial\Omega$ on a $\triangle_1^{\partial\Omega}(z') \leq 2\left(\frac{\triangle_1^{\partial\Omega}(z)}{2}\right)^{n-1}$, et cette estimation n'est pas optimale. Le problème de trouver une estimation optimale pour cette inégalité est toujours ouvert aujourd'hui.

Le résultat fondamental de D. Catlin est alors le Théorème suivant :

THÉORÈME V.2.5 (D. Catlin [Cat87]).

> *Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors le problème $\bar\partial$-Neumann vérifie une estimée sous-elliptique en un point $z \in \partial\Omega$ si et seulement si le point z est de type fini.*

Par contre ce Théorème ne précise pas l'ordre de l'estimée sous-elliptique, il donne seulement une majoration de celui-ci qui est loin d'être optimale. La recherche de l'ordre optimal pour l'estimée sous-elliptique semble très difficile et est probablement loin d'être résolu aujourd'hui.

D'autres méthodes ont été développées pour obtenir des estimations Sobolev. Citons simplement trois résultats typiques.

THÉORÈME V.2.6 (H. Boas & E. Straube [BS91]).

> *Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si il existe une fonction définissante ρ de Ω qui est pluri-sousharmonique sur $\partial\Omega$ alors, pour tout réel s, les opérateurs $\mathscr{N}_{p,q}$, $\mathscr{B}_{p,q}$ $\bar\partial^*\mathscr{N}_{p,q}$ et $\bar\partial\mathscr{N}_{p,q}$ sont continus de l'espace de Sobolev $W^s_{p,q}(\Omega)$ dans lui-même.*

Le fait que la frontière de Ω soit $\mathscr{C}^\infty$ est importante dans ce résultat, et la démonstration ne permet pas d'obtenir de résultat précis avec une régularité plus faible (elle utilise le Théorème V.2.1). Toutefois, avec une autre méthode, on peut donner un résultat précis avec une condition minimale de régularité :

THÉORÈME V.2.7 (A. Bonami & P. Charpentier, [BC88],[BC90], J. Michel & Mei Chi Shaw, [MS01]).

> *Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière lipschitz. S'il existe une fonction définissante de Ω qui est pluri-sousharmonique alors les opérateurs $\mathscr{N}_{p,q}$, $\mathscr{B}_{p,q}$ $\bar\partial^*\mathscr{N}_{p,q}$ et $\bar\partial\mathscr{N}_{p,q}$ sont continus de l'espace de Sobolev $W^{1/2}_{p,q}(\Omega)$ dans lui-même.*

On notera que ce résultat s'applique en particulier à tout domaine convexe borné, puisque la frontière d'un ouvert convexe est automatiquement lipschitz.

Pour un domaine pseudo-convexe borné à frontière régulière quelconque, J. J. Kohn avait remarqué qu'il y a toujours une estimation Sobolev d'indice > 0 satisfaite par l'opérateur $\mathscr{N}_{p,q}$, sans que l'on puisse dire quelque chose sur cet indice. En liaison avec le Théorème III.3.1, le résultat suivant précise ce fait :

THÉORÈME V.2.8 (B. Berndtsson & P. Charpentier [BC00]).

> *Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière lipschitz. S'il existe une fonction définissante ρ de Ω et un réel $\eta \in]0,1[$ tel que ρ^η soit pluri-sousharmonique dans Ω alors les opérateurs $\mathscr{N}_{p,q}$, $\mathscr{B}_{p,q}$ $\bar\partial^*\mathscr{N}_{p,q}$ et $\bar\partial\mathscr{N}_{p,q}$ sont continus de l'espace de Sobolev $W^s_{p,q}(\Omega)$ dans lui-même, pour tout $s \in [0, \eta/2[$.*

Contrairement au Théorème précédent, dans l'énoncé ci-dessus, la continuité des opérateurs dans l'espace de Sobolev $W^{\eta/2}_{p,q}(\Omega)$ est un problème ouvert.

Si l'on veut obtenir des estimations dans des espaces autres que les espaces de Sobolev classiques, il est naturel de se restreindre à des cas où ces dernières sont connus. C'est ainsi que l'on a cherché à obtenir des estimations dans les espaces L^p et Sobolev L^p_s ainsi que dans des espaces de lipschitz pour les domaines de type fini. Il est rapidement apparu qu'il y a alors une très grande différence entre la dimension 2 et les dimensions supérieures.

THÉORÈME V.2.9 (D. C. Chang, A. Nagel & E. M. Stein [CNS92]).

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de type fini m de $\mathbb{C}^2$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors $\mathscr{N}_{p,q}$ envoie l'espace de Sobolev $L_s^p(\Omega)$ dans $L_{s+2/m}^p(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ et l'espace Lipschitz $\Lambda_\alpha(\Omega)$ dans $\Lambda_{\alpha+2\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$. Les opérateurs $\bar{\partial}^* \mathscr{N}_{p,q}$ et $\bar{\partial}\mathscr{N}_{p,q}$ envoient l'espace de Sobolev $L_s^p(\Omega)$ dans $L_{s+1/m}^p(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ et l'espace Lipschitz $\Lambda_\alpha(\Omega)$ dans $\Lambda_{\alpha+\alpha}(\Omega)$. Enfin $\mathscr{B}_{p,q}$ envoie les espaces $L_s^p(\Omega)$ et $\Lambda_\alpha(\Omega)$ dans eux même.

En dimension supérieure, la situation n'est plus du tout aussi claire et seuls quelque cas très particuliers ont pu être traités (voir [Mac88, Koe02, NS06]).

V.3 PROJECTEURS ET NOYAUX DE BERGMAN ET DE SZEGÖ

Dans cette Section nous allons présenter un certain nombre de résultats pour l'opérateur $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{0,0}$ qui peuvent être obtenus par des méthodes particulières lorsque les résultats analogues pour $\mathscr{N}_{p,q}$ ne sont pas connus. Ces résultats sont en général aussi valables pour le projecteur de Szegö (qui est le projecteur orthogonal de $L^2(\partial\Omega)$ sur le sous-espace fermé des traces au bord des fonction holomorphes (voir ci-dessous)).

V.3.1 Définitions générales

Nous notons $A^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonction holomorphes dans Ω qui sont dans $L^2(\Omega)$. Pour tout $z \in \Omega$, le Corollaire 3 de la Proposition II.2.1 montre que l'application $f \mapsto f(z)$ est une forme linéaire continue sur $A^2(\Omega)$ et il existe donc une unique fonction $K_z \in \overline{A^2(\Omega)}$ tel que $f(z) = \left\langle f, \overline{K_z}\right\rangle = \int_\Omega K_z(w) f(w)\, d\lambda$. La fonction $(z, w) \mapsto K(z, w) = K_z(w)$ est appelée le ***noyau de Bergman*** de Ω.

Soit maintenant $\left(u_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $A^2(\Omega)$. Pour toute $f \in L^2(\Omega)$ et tout point $z \in \Omega$, on a donc

$$\mathscr{B} f(z) = \sum_j \left(\int_\Omega f(w)\overline{u_j(w)}\, d\lambda\right) u_j(z).$$

Si K est un compact de Ω, la formule de la moyenne et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Corollaire 3 de la Proposition II.2.1) montrent qu'il existe une constante C_K telle que, pour toute $f \in A^2(\Omega)$ on a $|f(z)| \leq C_K \|f\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $z \in K$. Comme

$$\sum_j \left|u_j(z)\right|^2 = \sup_{\sum_j |a_j|^2 \leq 1} \left|\sum_j a_j u_j(z)\right|^2 = \sup_{\|f\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} |f(z)|^2,$$

pour tout $z \in K$ on a $\sum_j \left|u_j(z)\right|^2 \leq C_K^2$. Il en résulte que la série $\sum_j u_j(z)\overline{u_j(w)}$ est uniformément convergente sur $K \times K$. Alors, si on note $B^\Omega(z, w)$ la somme de cette série, pour toute fonction f continue et à support compact dans Ω, on a

$$\mathscr{B} f(z) = \int_\Omega B^\Omega(z, w) f(w)\, d\lambda, \tag{V.3.1}$$

pour tout $z \in K$. Et comme, d'après ce qui précède, pour tout $z \in K$ la série de fonctions $\sum_j u_j(z)\overline{u_j}$ converge dans $L^2(\Omega)$, par densité, la formule (V.3.1) est vraie pour toute $f \in L^2(\Omega)$, ce qui montre que $B^\Omega(z, w)$ est le noyau de Bergman de Ω.

De ces remarques, on déduit aussitôt la Proposition suivante :

PROPOSITION V.3.1.

*Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il existe une unique fonction $B^\Omega(z, w)$, appelée **noyau de Bergman** de Ω, définie sur $\Omega \times \Omega$, telle que*

1. *pour tout $w \in \Omega$, $z \mapsto B^\Omega(z, w)$ appartient à $A^2(\Omega)$,*
2. *$B^\Omega(z, w) = \overline{B^\Omega(w, z)}$,*
3. *$B^\Omega(z, z) = \sup_{\|f\|_{A^2(\Omega)}\leq 1} |f(z)|^2$,*
4. *pour toute $f \in L^2(\Omega)$ et tout point $z \in \Omega$, on a $\mathscr{B} f(z) = \int_\Omega B^\Omega(z, w) f(w)\, d\lambda$.*

La formule de changement de variables montre que le noyau de Bergman est invariant par biholomorphisme :

PROPOSITION V.3.2.

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ biholomorphes. Si Φ est un biholomorphisme de Ω' sur Ω et si on note $J\Phi(\xi) = \det\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_i}\right)_{i,j}$, alors

$$B^{\Omega'}(\xi,\zeta) = B^{\Omega}\left(\Phi(\xi),\Phi(\zeta)\right) J\Phi(\xi)\overline{J\Phi(\zeta)}.$$

Le noyau de Bergman peut se calculer pour quelque domaines particulier. Par exemple, celui de la boule unité B de $\mathbb{C}^n$ est

$$B^B(z,w) = \frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-\bar{w}z)^{n+1}}$$

(voir [Rud80]), et celui du polydisque $\triangle = \left\{z \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } |z_i| \leq r_i\right\}$ est $B^D(z,w) = \frac{1}{\pi^n}\prod_i \frac{1}{(r_i - \overline{w_i}z_i)^2}$. Le calcul se fait généralement en construisant une base hilbertienne particulière de $A^2(\Omega)$.

La condition 3. de la Proposition montre que si Ω et Ω' sont deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ tels que $\Omega' \subset \Omega$ alors $B^{\Omega'}(z,z) \geq B^{\Omega}(z,z)$, pour tout $z \in \Omega'$.

Définissons maintenant les projecteur et noyaux de Szegö.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit ρ une fonction définissante de Ω. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit soit $\Omega^\delta = \left\{z \in \Omega \text{ tels que } \rho(z) < -\delta\right\}$. On appelle ***espace de Hardy*** (d'indice 2) de Ω l'espace des fonctions holomorphes f dans Ω telles que $\sup_{\delta_0>\delta>0}\int_{\partial\Omega^\delta}\left|f\right|^2 d\sigma < +\infty$, où $d\sigma$ désigne la mesure euclidienne sur $\partial\Omega^\delta$. Cet espace est noté $H^2(\Omega)$.

L'analyse fonctionnelle classique montre que pour toute fonction f appartient à $H^2(\Omega)$ il existe une (unique) fonction $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ telle que f soit l'intégrale de Poisson de φ. En particulier, le définition ci-dessus est indépendante de la fonction définissante du domaine. On pose alors $\|f\|_{H^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$. Ainsi $H^2(\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\partial\Omega)$ et le projecteur orthogonal $\mathscr{S}$ de $L^2(\partial\Omega)$ sur $H^2(\Omega)$ est appelé le **projecteur de Szegö**.

Une autre manière de définir l'espace $H^2(\Omega)$ est la suivante : $H^2(\Omega)$ est l'adhérence, dans $L^2(\partial\Omega)$ de la trace sur $\partial\Omega$ des fonctions holomorphes dans Ω continues dans son adhérence.

Si P désigne le prolongement de Poisson classique, pour tout point $z \in \Omega$, l'application linéaire $f \mapsto Pf(z)$ est continue sur $H^2(\Omega)$ et il existe une unique fonction $k_z \in \overline{H^2(\Omega)}$ telle que $Pf(z) = \int_{\partial\Omega} k_z(\zeta)f(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$, pour toute $f \in H^2(\Omega)$. La fonction $(z,\zeta) \mapsto S(z,\zeta) = k_z(\zeta)$ est appelée le **noyau de Szegö** de Ω.

Si $\left(\varphi_i\right)_i$ est une base hilbertienne de $H^2(\Omega)$, en identifiant ces fonctions avec leurs prolongement holomorphe dans Ω par l'intégrale de Poisson, un raisonnement tout à fait similaire à celui fait ci-dessus pour le noyau de Bergman montre que la série $S^\Omega(z,\zeta) = \sum\varphi_i(z)\overline{\varphi_i(\zeta)}$ est uniformément convergente sur $K \times K$, pour tout compact K de Ω. De plus, pour tout $\zeta \in \Omega$, la série $\sum\varphi_i\overline{\varphi_i(\zeta)}$ converge dans $H^2(\Omega)$ et la fonction $S^\Omega(z,\zeta)$ se prolonge presque partout sur $\partial\Omega \times \Omega$. De même, pour $z \in \Omega$ fixé, $\zeta \mapsto S^\Omega(z,\zeta)$ se prolonge presque partout sur $\Omega \times \partial\Omega$. Comme, pour toute $f \in H^2(\Omega)$ on a, pour $z \in \Omega$, $f(z) = \int_{\partial\Omega} S^\Omega(z,\zeta)f(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$, $S^\Omega(z,\zeta)$ est le noyau de Szegö de Ω.

En général le calcul de ces noyaux est impossible et on cherche a avoir des estimation aussi fines que possible de manière à pouvoir en déduire des propriétés du projecteur de Bergman associé. C'est un étude qui est, en général, très difficile car elle fait intervenir la géométrie de la structure complexe du domaine.

Nous donnons d'abord un résultat de D. Catlin reliant cette géométrie au noyau de Bergman sur la diagonale de $\Omega \times \Omega$. Nous verrons ensuite, sur des exemples, comment on peut utiliser ce résultat et nous énoncerons les principaux résultats connus aujourd'hui.

V.3.2 Une estimation du noyau de Bergman sur la diagonale

THÉORÈME V.3.1 *(D. Catlin [Cat89]).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit z^0 un point de Ω. Soient $\beta_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, des nombres réels tels que le polydisque $\triangle = \left\{z \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } \left|z_i - z_i^0\right| \leq \beta_i\right\}$ soit contenu dans Ω. On suppose qu'il existe une fonction pluri-sousharmonique $\varphi \in \mathscr{C}^3(\Omega)$ et des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que

1. *pour tout $z \in \triangle$ et tout $w \in \mathbb{C}^n$, on a $\left\langle \mathscr{H}\varphi(z), w\right\rangle \geq c\sum_i \frac{|w_i|^2}{\beta_i^2}$;*
2. *$\left|\varphi\right| \leq 1$ dans Ω ;*
3. *pour tout $z \in \triangle$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 3$, on a $\left|D^\alpha\varphi(z)\right| \leq C\prod_i \beta_i^{-\alpha}$.*

Alors, il existe une constante A ne dépendant que c, C et du diamètre de Ω telle que $A\prod\beta_i^{-2} \leq B^\Omega(z^0,z^0) \leq \prod\beta_i^{-2}$.

Démonstration. L'expression du noyau de Bergman d'un polydisque et les remarques ci-dessus montrent que

$$B^{\Omega}(z,z) \le \prod \beta_i^{-2},$$

en tout point $z \in \triangle$. Nous allons maintenant montrer qu'il existe une constante A ne dépendant que de c, C et du diamètre de Ω telle que $B^{\Omega}(z,z) \ge A\prod \beta_i^{-2}$.

Par translation on peut supposer $0 \in \Omega$. Quitte à remplacer φ par $\varphi + |z|^2 + D$, ce qui fait que la constante C dépend alors du diamètre de Ω, on peut supposer $\varphi\left(z^0\right) = 0$ et $\left\langle \mathscr{H}\varphi(z), w\right\rangle \ge |w|^2$, pour tous $z \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$.

En appliquant la formule de Taylor à φ, les hypothèses 1. et 3. montrent qu'il existe une constante $d \in]0,1[$, ne dépendant que de c et C, telle que, si on note $\triangle_d = \left\{z \in \triangle \text{ tels que } \left|z_i - z_i^0\right| < d\beta_i, 1 \le i \le n\right\}$, et si on pose

$$h(z) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\left(z^0\right)\left(z_i - z_i^0\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial z_j}\left(z^0\right)\left(z_i - z_i^0\right)\left(z_j - z_j^0\right),$$

pour tout $z \in \triangle_d$ on a

$$\varphi(z) \ge \Re e h(z) + d\sum_{i=1}^{n} \frac{\left|z_i - z_i^0\right|^2}{\beta_i^2}. \tag{V.3.2}$$

En particulier, $\Re e h$ est majorée par une constante ne dépendant que de c et C sur $\triangle_d$. On suppose d ainsi fixé dans tout ce qui suit.

Soit ψ, $0 \le \psi \le 1$, une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans le polydisque unité $\{|z_i| \le 1, 1 \le i \le n\}$ valant identiquement 1 sur le polydisque $\{|z_i| \le 1/2, 1 \le i \le n\}$. On pose $\psi_d(z) = \psi\left(\frac{z_1 - z_1^0}{d\beta_1}, \dots, \frac{z_n - z_n^0}{d\beta_n}\right)$ de sorte que ψ_d est à support dans $\triangle_d$ et vaut 1 dans $\triangle_{d/2}$. La fonction $\psi_d e^{sh}$ vaut alors 1 au point z^0 et, le choix de d montre qu'il existe une constante C_s ne dépendant que de c, C et s telle que $\left\|\psi_d e^{sh}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_s \prod_{i=1}^{n} \left|\beta_i\right|^2$. La fin de la démonstration consiste alors à montrer que l'on peut choisir s_0 de sorte qu'il existe une fonction u_{s_0} telle que la fonction $\psi_d e^{s_0 h} - u_{s_0}$ soit holomorphe dans Ω et vérifie les même propriétés que $\psi_d e^{s_0 h}$. L'existence de u_{s_0} va être établie en utilisant des arguments similaires à ceux utilisée pour la démonstration du Théorème IV.2.1.

Posons $a = d^3/8$, de sorte que (d'après (V.3.2))

$$\Re e h(z) \le -a \text{ pour } z \in \left\{\varphi(z) \le a\right\} \cap \operatorname{Supp}\left(\bar\partial \psi_d\right).$$

Soit χ une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi(t) = 0$ pour $t \le a/2$ et $\chi''(t) > 0$ pour $t \ge a/2$, et posons $\lambda_s(z) = \varphi(z) + s^2 \chi\circ\varphi(z)$.

Lemme 1. *Pour toute forme $g \in L^2_{(0,1)}(\Omega, \lambda_s) \cap \mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}} \cap \mathscr{D}_{\bar\partial}$ on a*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda_s}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} g_i \overline{g_j} e^{-\lambda_s} \le 2\left\|\bar\partial^*_{\lambda_s} g\right\|^2_{\lambda_s} + \left\|\bar\partial g\right\|^2_{\lambda_s}.$$

Preuve rapide du Lemme 1. Nous nous contentons de vérifier l'inégalité pour les formes qui sont dans $\mathscr{C}^1_{(0,1)}\left(\overline{\Omega}\right)$ et lorsque $\varphi \in \mathscr{C}^3\left(\overline{\Omega}\right)$, le cas général s'obtenant par un argument de densité un peu plus délicat que celui de la Proposition IV.2.1 (voir [Hör65]). Pour obtenir l'inégalité dans ce cas, on reprends les calculs faits dans la démonstration de la Proposition IV.2.2 en faisant $\psi = 0$ et $\varphi = \lambda_s$. La seule chose qui change est que, lors des intégrations par parties, la forme n'étant plus à support compact dans Ω, il faut tenir compte des intégrales sur $\partial\Omega$. Pour la première, l'intégrale au bord est

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j,k} \overline{g_k} \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z_k}} e^{-\lambda_s} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} d\sigma.$$

Comme $g \in \mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}}$, on a $\sum_j g_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j} = 0$ sur $\partial\Omega$ (c.f. (V.1.1)) donc $\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z_k}} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} = -\sum_j g_j \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}$, et l'intégrale ci-dessus devient $-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} g_j \overline{g_k} e^{-\lambda_s} d\sigma$. Pour la seconde intégration par parties, l'intégrale au bord est $\int_{\partial\Omega} \delta_j^{\lambda_s} g_j \overline{g_k} \frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_k}} e^{-\lambda_s} d\sigma$ et comme $\sum_k \overline{g_k} \frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_k}} = 0$ sur $\partial\Omega$, ces intégrales disparaissent. Finalement, l'inégalité (IV.2.7) de la fin de la démonstration de la Proposition IV.2.2 devient

$$\int \sum_{j,k=1}^{n} g_j \overline{g_k} \frac{\partial^2 \lambda_s}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} e^{-\lambda_s} d\lambda + \int \sum_{j,k=1}^{n} \left|\frac{\partial g_k}{\partial \overline{z_j}}\right|^2 e^{-\lambda_s} d\lambda + \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} g_j \overline{g_k} e^{-\lambda_s} d\sigma \le 2\left\|\bar\partial^*_{\lambda_s} g\right\|^2_{\lambda_s} + \left\|\bar\partial g\right\|^2_{\lambda_s},$$

et, pour conclure, il suffit de remarquer que, comme Ω est pseudo-convexe et $\sum_j g_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} g_j \overline{g_k} \ge 0$$

sur $\partial\Omega$. □

Lemme 2. *Pour toute forme $f \in L^2_{(0,1)}(\Omega, \lambda_s)$ $\bar\partial$-fermée, il existe une solution $u \in L^2(\Omega, \lambda_s)$ à l'équation $\bar\partial u = f$ qui vérifie*

$$\|u\|^2_{\lambda_s} \leq B\left(\int_{\Omega\setminus\triangle}\left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2\right)e^{-\lambda_s} + \int_{\triangle}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2|f_j|^2\right)e^{-\lambda_s}\right),$$

où B est une constante qui ne dépends que de c, C et du diamètre de Ω.

Démonstration du Lemme 2. Soit $g \in L^2_{(0,1)}(\Omega, \lambda_s)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\langle g, f\rangle_{\lambda_s}\right| \leq \left(\int_{\Omega\setminus\triangle}\sum_{i=1}^n |g_i|^2 e^{-\lambda_s} + \int_{\triangle}\sum_{i=1}^n \frac{|g_i|^2}{\beta_i^2}e^{-\lambda_s}\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\setminus\triangle}\sum_{i=1}^n |f_i|^2 e^{-\lambda_s} + \int_{\triangle}\beta_i^2|f_i|^2 e^{-\lambda_s}\right)^{1/2}.$$

L'hypothèse sur φ et la définition de λ_s donnent

$$\sum_i |g_i|^2 \leq \sum_{i,j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}g_i\overline{g_j} \leq \sum_{i,j}\frac{\partial^2\lambda_s}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}g_i\overline{g_j}$$

sur Ω et

$$\sum_i \frac{|g_i|^2}{\beta_i^2} \leq \frac{1}{c}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}g_i\overline{g_j} \leq \sum_{i,j}\frac{\partial^2\lambda_s}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}g_i\overline{g_j}$$

sur $\triangle$, et du Lemme précédent on déduit que, si $g \in L^2_{(0,1)}(\Omega, \lambda_s) \cap \mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}} \cap \mathscr{N}_{\bar\partial}$,

$$\left|\langle g, f\rangle_{\lambda_s}\right| \leq B\left\|\bar\partial^*_{\lambda_s}g\right\|_{\lambda_s}\left(\int_{\Omega\setminus\triangle}\sum_{i=1}^n |f_i|^2 e^{-\lambda_s} + \int_{\triangle}\beta_i^2|f_i|^2 e^{-\lambda_s}\right)^{1/2}$$

où B est une constante qui ne dépends que de c, C et du diamètre de Ω. En appliquant le Théorème de Hahn-Banach à la forme linéaire $\bar\partial^*_{\lambda_s}g \mapsto \langle g, f\rangle_{\lambda_s}$ définie sur $\bar\partial^*_{\lambda_s}\left(\mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}} \cap \mathscr{N}_{\bar\partial}\right)$ donc sur $\bar\partial^*_{\lambda_s}\left(\mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}}\right)$ puisque $\bar\partial^*_{\lambda_s}$ est nul sur l'orthogonal de $\mathscr{N}_{\bar\partial}$, on en déduit qu'il existe $u \in L^2(\Omega, \lambda_s)$, de norme majorée par $B\left(\int_{\Omega\setminus\triangle}\sum_{i=1}^n |f_i|^2 e^{-\lambda_s} + \int_{\triangle}\beta_i^2|f_i|^2 e^{-\lambda_s}\right)$, telle que, pour toute $h \in \mathscr{D}_{\bar\partial^*_{\lambda_s}}$, $\langle h, f\rangle_{\lambda_s} = \left\langle \bar\partial^*_{\lambda_s}h, u\right\rangle_{\lambda_s} = \langle h, \bar\partial u\rangle_{\lambda_s}$, ce qui prouve le Lemme. □

Terminons maintenant la démonstration du Théorème. Soit $\alpha_s = \sum_i \alpha_s^i d\overline{z_i} = \bar\partial\left(\psi_d e^{sh}\right)$. Le second Lemme dit qu'il existe une solution u_s de l'équation $\bar\partial u = \alpha_s$ qui vérifie $\int_\Omega |u_s|^2 e^{-\lambda_s}d\lambda \leq B\int_\triangle \sum_{i=1}^n \beta_i^2\left|\alpha_s^i\right|^2 e^{-\lambda_s}d\lambda$, et, comme h est holomorphe, un calcul immédiat montre que $\int_\triangle \sum_{i=1}^n \beta_i^2\left|\alpha_s^i\right|^2 e^{-\lambda_s}d\lambda \leq B\int_{\mathrm{Supp}(\bar\partial\psi_d)} e^{2s\Re e h - \varphi - s^2\chi\circ\varphi}d\lambda$, où B est une (autre) constante qui ne dépends que de c, C et du diamètre de Ω.

Remarquons maintenant que, sur le support de $\bar\partial\psi_d$, on a $2s\Re e h - \varphi \leq (2s-1)\varphi - {}^{a}/_{2} \leq 2sC$ et $\chi\circ\varphi$ est minorée par une constante strictement positive, et, par suite $2s\Re e h - \varphi - s^2\chi\circ\varphi$ converge uniformément vers $-\infty$ sur $\mathrm{Supp}\psi$ quand s tends vers $+\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe $s_0 > 0$ tel que $\int_\Omega \left|u_{s_0}\right|^2 e^{-\lambda_{s_0}}d\lambda \leq B\varepsilon_0\prod_{i=1}^n \beta_i^2$. De plus, comme α_{s_0} est identiquement nulle sur $\triangle_{d/2}$, u_{s_0} est holomorphe dans $\triangle_{d/2}$, et, la formule de la moyenne donne $\left|u_{s_0}\left(z^0\right)\right|^2 \leq B\varepsilon_0$, où B ne dépende que de c, C et du diamètre de Ω.

Considérons pour finir la fonction holomorphe $f = \psi_d e^{s_0 h} - u_{s_0}$. Les calculs précédents montrent que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(C_{s_0} + B\varepsilon_0\right)\prod_{i=1}^n \beta_i^2$ et $\left|f\left(z^0\right)\right| \geq 1 - B\varepsilon_0$, et pour conclure, il suffit de choisir ε_0 de sorte que $1 - B\varepsilon_0 \geq {}^1/_2$. □

V.3.3 Exemples d'estimations du noyau de Bergman sur la diagonale

V.3.3.1 Cas des domaines strictement pseudo-convexes

L'exemple typique le plus simple d'application du Théorème V.3.1 est celui d'un domaine strictement pseudo-convexe (Définition III.3.1).

PROPOSITION V.3.3.

> *Soit Ω un domaine strictement pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe un voisinage U de $\partial\Omega$ tel que, pour $z \in U \cap \Omega$ on a $B^\Omega(z,z) \simeq \delta(z)^{-n-1}$, où $\delta(z)$ désigne la distance de z à $\partial\Omega$, les constantes dans l'équivalence étant indépendantes de z.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Soit ρ une fonction définissante de Ω strictement pluri-sousharmonique (Proposition III.3.1). Notons $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \text{ tels que } \rho > -\delta\}$. Comme ρ est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $\bar\Omega$, elle est équivalente à la distance $\delta(z)$ d'un point z à $\partial\Omega$ dans un voisinage V de $\partial\Omega$ dans lequel le module du gradient de ρ est uniformément minoré. Nous supposons $\delta \leq \delta_0$, δ_0 étant choisi de sorte que Ω_{δ_0} soit contenu dans V.

Soit $\varphi = e^{\rho/\delta}$. Cette fonction est pluri-sousharmonique au voisinage de $\bar\Omega$, $0 \le \varphi \le 1$ et $e^{-1} \le \varphi \le 1$ sur Ω_δ. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} &= e^{\rho/\delta}\left[\frac{1}{\delta^2}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j\right|^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\overline{z_k}} w_j\overline{w_k}\right] \\ &\ge e^{-1}\left[\frac{1}{\delta^2}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j\right|^2 + \frac{1}{\delta}|w|^2\right] \text{ sur } \Omega_\delta. \end{aligned} \tag{V.3.3}$$

Soit $z \in \Omega_\delta$ tel que $\rho(z) = -\delta/2$, de sorte que $\delta(z) \simeq \delta$, les constantes de l'équivalence ne dépendant pas du point z. Soit $(\zeta_i)_{1\le i\le n}$ un système de coordonnées centré en z tel que ζ_i, $1 \le i \le n-1$, soit complexe tangent à ρ en z (i.e. $\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(z) = 0$) et ζ_n normal. Comme ρ est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $\bar\Omega$, il existe une constante $c > 0$ telle que le polydisque $\triangle = \left\{|\zeta_i| < c\delta^{1/2}, \text{ pour } 1 \le i \le n-1 \text{ et } |\zeta_n| < c\delta\right\}$ soit contenu dans Ω_δ. Alors, si $\tilde\varphi$ désigne l'expression de φ dans le système de coordonnées $(\zeta_i)_{1\le i\le n}$, la formule (V.3.3) donne

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\tilde\varphi(0)}{\partial\zeta_j\partial\overline{\zeta_k}}\xi_j\overline{\xi_k} \ge e^{-1}\left(\frac{1}{\delta^2}|\xi_n|^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{n-1}|\xi_j|^2\right)$$

d'où on déduit l'existence de $c > 0$ tel que $\sum_{j,k}\frac{\partial^2\tilde\varphi(z)}{\partial\zeta_j\partial\overline{\zeta_k}}\xi_j\overline{\xi_k} \ge c\left(\frac{1}{\delta^2}|\xi_n|^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{n-1}|\xi_j|^2\right)$ pour tout $z \in \triangle$. □

V.3.3.2 Cas des domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$

L'estimation de $B^\Omega(z,z)$ ci-dessus a été généralisée aux domaines pseudo-convexes de type fini de $\mathbb{C}^2$ par D. Catlin dans [Cat89]. Nous allons présenter maintenant ce résultat en utilisant la méthode développée dans [CD06b] adaptée à la dimension 2.

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^2$ de type fini. Nous notons M un entier plus grand que le maximum m des types des points du bord de Ω. Soit ρ une fonction définissante de Ω telle que $|\nabla\rho| \equiv 1$ sur $\partial\Omega$, $|\nabla\rho| \ne 0$ dans un voisinage U de $\partial\Omega$.

Soient $L = \frac{\partial\rho}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial\rho}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}$ le champ complexe tangent (i.e. $L\rho \equiv 0$) et $N = \frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_1}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \overline{z_2}}\frac{\partial}{\partial z_2}$ le champ complexe normal (i.e. $\Re e N$ est la normale réelle sortante aux surfaces de niveaux de ρ), qui sont tous deux définis et de modules non nuls dans U.

Nous supposerons dans toute la suite (ce qui n'est pas une restriction, Proposition III.3.2) que les surfaces de niveau $\{\rho = -\varepsilon\}$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, sont pseudo-convexes. Ceci se traduit par le fait que $c_{11} = \left\langle i\partial\bar\partial\rho; (L,\bar L)\right\rangle \ge 0$ dans $\Omega \cap \{\rho \ge -\varepsilon_0\} \subset U$.

On appelle liste $\mathscr{L}$ une suite $\mathscr{L} = (L^1, \dots, L^k)$ où $L^i = L$ ou $\bar L$, et $k = |\mathscr{L}|$ est appelé la longueur de $\mathscr{L}$. Pour toute liste $\mathscr{L}$ de longueur k, on note $\mathscr{L}(\partial\rho) = L^1 \dots L^{k-2}(\langle\partial\bar\partial\rho; (L^{k-1}, L^k)\rangle)$. Quitte à réduire U si nécessaire, l'hypothèse de type fini faite sur Ω est équivalente à

$$\inf_{z\in U}\sup_{1\le k\le m}\left|\mathscr{L}(\partial\rho)(z)\right| > c > 0,$$

et c'est sous cette hypothèse que nous allons travailler (cette équivalence résulte d'un travail de T. Bloom et I. Graham [BG77] que nous admettrons ici).

Pour $\delta > 0$ et tout $z \in U$, on pose

$$S_\delta(z) = S(z) = \sum_{l=|\mathscr{L}|=2}^{M}\left|\frac{\mathscr{L}(\partial\rho)(z)}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}},$$

où $n \ge M$

$$S_{\delta 0}(z) = S_0(z) = \sum_{l=|\mathscr{L}|=2}^{M}\left|\frac{\mathscr{L}(\partial\rho)(z)}{\delta}\right|^{\frac{2}{l}}.$$

Comme Ω est supposé de type fini m, on a

$$S \gtrsim \delta^{-2n/m} \text{ et } S_0 \gtrsim \delta^{-2/m}, \tag{V.3.4}$$

dans U, les constantes étant indépendantes du point.

Ces notations étant fixées, construisons tout d'abord la fonction pluri-sousharmonique à grand hessien qui nous servira pour appliquer le Théorème V.3.1.

On note $\mathscr{E}_l = \{\Re e(\mathscr{L}(\partial r)), \Im m(\mathscr{L}(\partial r)), |\mathscr{L}| = l\}$, $l \ge 2$, $\mathscr{E}^3 = \bigcup_{l=3}^{M}\mathscr{E}_l$ et $\mathscr{E} = \bigcup_{l=2}^{M}\mathscr{E}_l$. Pour tout $l \ge 2$ et toute $\varphi \in \mathscr{E}_l$, on pose

$$\psi_\varphi^\delta = \frac{\varphi\left|L\varphi\right|^{\frac{1}{l}-1}}{\delta^{1/l}} = \frac{\varphi}{\delta}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-1},$$

et, pour $\lambda > 0$ et $B > 0$,

$$F^{\delta}_{\varphi,\lambda,B} = \cosh(\lambda\psi^{\delta}_{\varphi})\vartheta_B\left(\frac{\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2n/l}}{S}\right),$$

où $\vartheta_B(t) = \vartheta(tB)$, avec $\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 1/2 \end{cases}$. On notera que si $F^{\delta}_{\varphi,\lambda,B}$ n'est pas nulle en un point, à cause du support de $\vartheta_B(t)$ $L\varphi$ est non nul (puisque S est non nul, Ω étant de type fini) et, d'autre part, $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq S_0 \geq \frac{1}{2}\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{1/(l-1)}$ ce qui implique $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-1} \leq 2^{l-1} \leq 2^M$, ce qui montre que $F^{\delta}_{\varphi,\lambda,B}$ est majorée par $\cosh\left(2^M\lambda\right)$.

Dans toute la suite, la notation $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que $A \leq CB$, et de même pour le symbole $\gtrsim$.

THÉORÈME V.3.2.

Ω étant comme ci-dessus, et avec les même notations, il existe des constantes λ_l, B_l, $l \geq 2$, K, C et δ_0 ne dépendant que de Ω telles que, pour tout $0 \leq \delta \leq \delta_0$, si on pose $F_\delta = \sum_{\varphi\in\mathscr{E}} F^{\delta}_{\varphi} + Ke^{\rho/\delta}$, où $F^{\delta}_{\varphi} = F^{\delta}_{\varphi,\lambda_{|\varphi|},B_{|\varphi|}}$, alors, sur $\Omega \cap \{\rho > -\delta\}$, on a :

1. *$|F_\delta| \leq C$ dans Ω.*
2. *Si $W = aL + bN$,*
$$\left\langle\partial\bar{\partial}F_\delta; (W, \bar{W})\right\rangle \geq |a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}.$$
3. *Pour tous entiers k et l, il existe une constante $C_{k,l}$ ne dépendant que de k, l et Ω telle que, pour toute liste $\widetilde{\mathscr{L}} = (X_1, \ldots, X_k)$ avec $X_i = L$ ou $\overline{L}$ ou N ou $\overline{N}$, le nombre de L ou $\overline{L}$ (resp. N ou $\overline{N}$) étant k (resp. l), on a*
$$\widetilde{\mathscr{L}}|F_\delta| \leq C_{k,l}S^{-k/2n}\delta^{-l}.$$

Dans toute la suite $\delta > 0$ est fixé ainsi que $W = aL + bN$.

Lemme 1. *Avec les notations précédentes, il existe des constantes C et δ_0 ne dépendant que de Ω telle, pour $0 < \delta \leq \delta_0$, on a*

$$\left\langle\partial\bar{\partial}(e^{\rho/\delta}); (W, \bar{W})\right\rangle \gtrsim |a|^2\frac{c_{11}}{\delta} + \frac{|b|^2}{\delta^2} + |a|^2\left(\frac{c_{11}}{\delta} - \frac{C}{\delta^{\frac{2}{m+1}}}\right)$$

dans $\Omega \cap \{r > -\delta\}$.

Démonstration du Lemme 1. C'est un calcul direct. □

Pour des commodités de notation nous reécrivons S et S_0 de la manière suivante :

$$S = \sum_{l=3}^{M}\sum_{\varphi\in\mathscr{L}_{l-1}}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} + \left(\frac{c_{11}}{\delta}\right)^n,$$

et S_0 de même sans le n. M étant choisit assez grand, ces définitions sont équivalentes aux précédentes. Nous démontrerons le théorème avec ces notations.

PROPOSITION V.3.4.

Il existe des constantes positives B_l, M_l, K_l et E_l, $l = 3, \ldots, M$, vérifiant $B_l \geq B_{l+1} \geq B_M \geq 2\mathrm{card}(\mathscr{E})$, $K_l > \sum_{j<l}\mathrm{card}(\mathscr{E}_j)K_j + \mathrm{card}(\mathscr{E})$, telles que, pour $\delta \leq \delta_0$, et $3 \leq l \leq M$, il existe un réel positif λ_l tel que pour toute $\varphi \in \mathscr{E}_{l-1}$, la fonction $F^{\delta}_{\varphi,\lambda_l,B_l} = F$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *$|F| \leq M_l$;*
2. *Si $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} < \frac{S}{2B_l}$ alors $F = 0$;*
3. *Si $\frac{S}{2B_l} \leq \left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} < \frac{S}{B_l}$, alors :*
   (a) *si $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l-1}} \leq \frac{S}{B_{l-1}}$ on a $\left|\left\langle\partial\bar{\partial}F; (W; \bar{W})\right\rangle\right| \leq |a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}$;*
   (b) *si $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l-1}} > \frac{S}{B_{l-1}}$ on a $\left|\left\langle\partial\bar{\partial}F; (W; \bar{W})\right\rangle\right| \leq E_l\left(|a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}\right)$.*
4. *Si $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} \geq \frac{S}{2B_l}$ alors :*

(a) *si* $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l-1}} \leq \frac{S}{B_{l-1}}$ *on a* $\left|\langle \partial\bar{\partial}F;(W;\bar{W})\rangle\right| \geq K_l\left(|a|^2 S^{1/n} - |b|^2\delta^{-2}\right)$;

(b) *si* $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l-1}} > \frac{S}{B_{l-1}}$ *on a* $\left|\langle \partial\bar{\partial}F;(W;\bar{W})\rangle\right| \leq E_l\left(|a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}\right)$.

Commençons tout d'abord par déduire les 1 et 2 du théorème de la proposition. Pour le 3, on peut tout de suite noter que $\widetilde{\mathscr{L}}\left|e^{\rho/\delta}\right| \leq C_{k,l}\delta^{-l}$ (calcul élémentaire à l'aide de crochets) ; l'autre estimation se déduira des calculs qui seront faits pour les 1 et 2.

Démonstration des parties 1 et 2 du Théorème V.3.2 à partir de la Proposition. On prend donc

$$F = F_\delta = \sum_{l=3}^{M}\sum_{\varphi\in\mathscr{E}_{l-1}} F^{\delta}_{\varphi,\lambda_l,B_l} + Ke^{r/\delta} = F^1 + Ke^{r/\delta},$$

avec K assez grand. Séparons deux cas.

Tout d'abord, si $\forall\, l \geq 3$ et $\forall \varphi \in \mathscr{E}_{l-1}$, $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} \leq \frac{S}{B_l}$, on a $\frac{c_{11}}{\delta} > \frac{S^{1/n}}{2}$, donc $\frac{c_{11}}{\delta} > \frac{c}{\delta^{2/m}}$, où c ne dépend que de Ω, c'est-à-dire $\frac{c_{11}}{\delta} \geq \frac{1}{\delta^{2/m}}\left(c - C\delta^{\frac{2}{m(m+1)}}\right) \geq 0$, pour δ_0 assez petit. D'après le Lemme 1, on a donc

$$\left\langle \partial\bar{\partial}(e^{\rho/\delta});(W,\bar{W})\right\rangle \geq cK\left(|a|^2\frac{c_{11}}{\delta} + \frac{|b|^2}{\delta^2}\right),$$

où $c > 0$ ne dépend que de Ω. Comme la proposition donne, dans ce cas, $\left|\langle \partial\bar{\partial}F^1;(W,\bar{W})\rangle\right| \leq \sum_{l=3}^{M} E_l\left(|a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}\right)$, il suffit de prendre $K \geq \sum_{l=3}^{M} E_l + 1$.

Supposons maintenant qu'il existe $\varphi_0 \in \mathscr{E}_{l_0-1}$, $l \geq 3$, tel que $\left|\frac{L\varphi_0}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} > \frac{S}{B_{l_0}}$. Soit

$$\mathscr{F} = \left\{\varphi\in\mathscr{E} \text{ tels que si } \varphi\in\mathscr{E}_{l-1}, \left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} \geq \frac{S}{2B_l} \text{ et } \left|\frac{\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l-1}} > \frac{S}{B_{l-1}}\right\}.$$

Séparons deux cas.

Si $\mathscr{F}$ est vide, la proposition implique

$$\left\langle \partial\bar{\partial}F^{\delta}_{\varphi_0,\lambda_{l_0},B_{l_0}};(W,\bar{W})\right\rangle \geq K_{l_0}\left(|a|^2 S^{1/n} - |b|^2\delta^{-2}\right),$$

et, pour toute φ, on a

$$\left|\left\langle \partial\bar{\partial}F^{\delta}_{\varphi,\lambda_l,B_l};(W,\bar{W})\right\rangle\right| \leq |a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}.$$

On conclut donc en prenant $K \geq K_{l_0} + \operatorname{card}(\mathscr{E}) + 1$.

Supposons maintenant $\mathscr{F}$ non vide et soit l_0 le plus petit indice (≥ 3) l pour lesquels il existe $\varphi \in \mathscr{F}\cap\mathscr{E}_{l-1}$. Deux cas peuvent se présenter :

Si $l_0 = 3$, on a alors $\left(\frac{c_{11}}{\delta}\right)^{\frac{2}{n}} > \frac{S}{B_2}$, et le raisonnement du tout premier cas donne le résultat pour δ_0 assez petit et K assez grand. Supposons pour finir que $l_0 > 3$. D'après la proposition, il existe donc $\varphi_0 \in \mathscr{E}_{l_0-1}$ telle que

$$\left\langle \partial\bar{\partial}F^{\delta}_{\varphi_0,\lambda_{l_0},B_{l_0}};(W,\bar{W})\right\rangle \geq K_{l_0}\left(|a|^2 S^{1/n} - |b|^2\delta^{-2}\right),$$

et, pour toute φ on a

$$\left|\left\langle \partial\bar{\partial}F^{\delta}_{\varphi,\lambda_l,B_l};(W,\bar{W})\right\rangle\right| \leq K_l\left(|a|^2 S^{1/n} + |b|^2\delta^{-2}\right).$$

La conclusion résulte alors du choix des K_l. □

La démonstration de la Proposition va résulter d'une série de lemmes où l'on estime explicitement les dérivées des fonctions intervenant dans les $F^{\delta}_{\varphi,\lambda_l,B_l}$.

Lemme 1. *Soient $\varphi \in \mathscr{E}_{l-1}$, $l \geq 3$, et $A > 0$. Soit $\psi = \frac{\varphi}{\delta}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-1}$. Il existe une constante C ne dépendant que de Ω et des constantes $D(A)$ et $K(A)$ ne dépendant que de A et de Ω telle que pour $W = aL + bN$ et $A > 0$, si $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$, on a :*

1. $\left|W\psi\right| \leq (A^2+1)|a|S_0^{1/2} + 2C|b|\frac{S_0^{\frac{1-2l}{2}}}{\delta}$.
2. $\left|W\psi\right|^2 \geq \frac{|a|^2}{16A^2}S_0 - 4C^2|b|^2\frac{S_0^{1-2l}}{\delta^2}$, *sauf si* $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right| > \frac{1}{2A^3}S_0^{\frac{l-1}{2}}$.
3. $\left|\bar{L}L\psi\right| \leq D(A)S_0$.

4. $\left|\bar{N}N\psi\right| \leq K(A)\frac{S_0^{\frac{1}{2}-l}}{\delta^2}$.

Démonstration. En effet, des calculs immédiats donnent ($L\varphi$ ne s'annule pas par hypothèse)

$$|N\psi| \lesssim \frac{1}{\delta}\left(S_0^{\frac{1-l}{2}} + S_0^{\frac{l-1}{2}} S_0^{\frac{1-2l}{2}}\right) \lesssim \frac{1}{\delta} S_0^{\frac{1-2l}{2}},$$

et,

$$L\psi = \frac{L\varphi}{\delta}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-1} + \frac{\varphi}{\delta}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-2}\frac{L\left|L\varphi\right|}{\delta}.$$

Si $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$, on a donc $\left|L\psi\right| \leq (A^2+1)S_0^{1/2}$, ce qui donne le 1, et si, de plus, $\left|\frac{\varphi}{\delta}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-2}\frac{L|L\varphi|}{\delta}\right| > \frac{1}{2}\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{1/l}$, on a $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right| A^2 S_0^{1-\frac{l}{2}} > \frac{S_0^{1/2}}{2A}$, c'est-à-dire $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right| > \frac{1}{2A^3} S_0^{\frac{l-1}{2}}$, ce qui donne le 2.

De même, un calcul élémentaire donne $\left|\bar{L}L\psi\right| \leq 3S_0 + S_0^{-l/2}\frac{\bar{L}L|L\varphi|}{\delta}$. Puisque $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$, un autre calcul donne $\left|\frac{\bar{L}L|L\varphi|}{\delta}\right| \leq S_0^{\frac{l}{2}+1} + 5AS_0^{\frac{l}{2}+1}$, ce qui donne le 3.

Vérifions enfin le 4. Un calcul direct donne tout d'abord

$$\begin{aligned}\left|\bar{N}N\psi\right| &\lesssim \left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-2}\left(\frac{1}{\delta^2} + \left|\frac{N\left|L\varphi\right|}{\delta^2}\right| + \left|\frac{\varphi}{\delta}\right|\left|\frac{\bar{N}N\left|L\varphi\right|}{\delta}\right|\right) \\ &\quad \left|\frac{\varphi}{\delta}\right|\left|\frac{N\left|L\varphi\right|}{\delta}\right|\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{1}{l}-3}.\end{aligned}$$

Puis on remarque que $\left|\frac{N|L\varphi|}{\delta^2}\right| \lesssim \frac{1}{\delta}$, et, que, pour $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$, on a $\left|\frac{\bar{N}N|L\varphi|}{\delta}\right| \lesssim \frac{1}{\delta}\frac{1}{|L\varphi|} \leq \frac{A^{l/2}}{\delta^2}S_0^{-l/2}$, et on conclut aisément. □

Lemme 2. *Soit $\varphi \in \mathscr{E}_{l-1}$, $l \geq 3$. Soit $\chi = \left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}}\frac{1}{S}$. Avec la notation W du lemme précédent, on a :*

1. $|LS| \lesssim S^{\frac{1}{2n}+1}$, $|NS| \lesssim \frac{S^{1-\frac{1}{n}}}{\delta}$.
2. $\left|\bar{N}NS\right| \lesssim \frac{S^{1-\frac{2}{n}}}{\delta^2}$.
3. $\left|N\chi\right| \lesssim \frac{1}{\delta}S_0^{-1}$, $\left|L\chi\right| \lesssim S_0^{1/2}$, *et,* $W\chi \lesssim |a|\, S_0^{1/2} + |b|\,\frac{S_0^{-1}}{\delta}$.
4. $\left|\bar{L}L\chi\right| \lesssim S^{1/n}$.
5. $\left|\bar{N}N\chi\right| \lesssim \frac{S^{-l/n}}{\delta^2}$.
6. $\left|\bar{N}L\chi\right| \lesssim \frac{1}{\delta}$.

Démonstration. Elle se fait par calcul direct. La première estimation du 1 provient du fait que le domaine est de type fini (c.f. (V.3.4)), et les suivantes sur les dérivées de S s'obtiennent par calcul direct. Le 3 s'en déduit aussitôt. Les trois dernières estimations s'obtiennent de même sans difficultés. □

Lemme 3. *Avec les notation du lemme précédent et du début pour la fonction ϑ_B, il existe une constante $K(B)$ ne dépendant que de B et de Ω telle que :*

1. $\left|W(\vartheta_B(\chi))\right| \leq K(B)\left(|a|\, S_0^{1/2} + |b|\,\frac{S_0^{-1}}{\delta}\right)$.
2. $\left|\bar{W}W(\vartheta_B(\chi))\right| \leq K(B)\left(|a|^2 S_0 + |b|^2\frac{S_0^{-2}}{\delta^2}\right)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. □

Lemme 4. *Soit $\varphi \in \mathscr{E}_{l-1}$. Avec les notations des lemmes précédents, pour $\lambda > 0$, soit $F = \cosh(\lambda\psi)\vartheta_B(\chi)$. Il existe des constantes positives $\alpha(A)$, $\tilde{K}(A)$, $\tilde{K}(B)$ et $\tilde{K}(A,B)$ ne dépendant que de A, B, et Ω et une constante β ne dépendant que de Ω, telles que :*

1. *Si* $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$ *et* $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} \geq \frac{S}{B}$, *on a*

$$\begin{aligned}\bar{W}W(F) &\geq \lambda^2\cosh(\lambda\psi)\left(\alpha(A)\,|a|^2 S_0 - \beta\,|b|^2\frac{S_0^{1-2l}}{\delta^2}\right) \\ &\quad -\lambda\left|\cosh(\lambda\psi)\right|\left(\tilde{K}(A)\,|a|^2 S_0 + \tilde{K}(B)\,|b|^2\frac{S_0^{-2}}{\delta^2}\right),\end{aligned}$$

sauf si $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right| > \frac{1}{2A^3} S_0^{\frac{l-1}{2}}$.

2. *Si* $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{2/l} \geq \frac{S_0}{A}$ *et* $\left|\frac{L\varphi}{\delta}\right|^{\frac{2n}{l}} \geq \frac{S}{2B}$, *on a*

$$\left|\bar W W(F)\right| \leq \tilde K(A,B)\lambda\cosh(\lambda\psi)\left(|a|^2 S_0 + |b|^2 \frac{S_0^{-2}}{\delta^2}\right).$$

Si de plus $\left|\frac{\varphi}{\delta}\right| < \frac{1}{\lambda}\left(\frac{S_0}{A}\right)^{\frac{l-1}{2}}$, *on a*

$$\left|\bar W W(F)\right| \leq \tilde K(A,B)\lambda\left(|a|^2 S_0 + |b|^2 \frac{S_0^{-2}}{\delta^2}\right).$$

Démonstration. On écrit simplement

$$\begin{aligned}\bar W W(F) \quad = \quad & \lambda^2\cosh(\lambda\psi)\left|W\psi\right|^2 \vartheta_B(\chi)\\ & +\lambda\sinh(\lambda\psi)\left(\bar W W(\psi) + (W\psi)(\bar W(\vartheta_B(\chi)))\right)\\ & +\lambda\sinh(\lambda\chi)(\bar W\psi)(W(\vartheta_B(\chi)))\\ & +(\cosh(\lambda\psi))\bar W W(\vartheta_B(\chi)),\end{aligned}$$

et on utilise les lemmes précédents. □

Nous allons maintenant voir que, modulo un changement de variables, en chaque point de Ω il existe un polydisque centré en ce point et de multi-rayons lié à S_δ.

PROPOSITION V.3.5.

Soit z^0 un point de $\Omega\cap U$. On suppose que les coordonnées canoniques z sont choisies de sorte que $\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\left(z^0\right) \neq 0$. Il existe un changement de variables holomorphe $z = \Phi(\zeta)$ de la forme $\left(z_1 = z_1^0 + \zeta_1, z_2 = z_2^0 + \zeta_2 + P(\zeta_1)\right)$, où P est un polynôme holomorphe de degré $\leq 2M$ tel que, en posant $\widetilde\rho = \rho\circ\Phi$, on a :

1. *Pour pour entier p, $0 \leq p \leq 2M$, $\frac{\partial^p\widetilde\rho}{\partial\zeta_1^p}(0) = 0$;*
2. *Les modules des coefficients de P sont majorés par une constante ne dépendant que de Ω.*

Démonstration. La vérification de cette Proposition est un simple calcul : en effet, par récurrence on vérifie que

$$\frac{\partial^p\widetilde\rho}{\partial\zeta_1^p}(\zeta) = \frac{\partial\rho}{\partial z_2}(\Phi(\zeta))\frac{\partial^p\Phi}{\partial\zeta_1^p}(\zeta) + \sum_{\substack{\alpha+\beta=1\\ s<p,\,\beta+s=p}}^{p} * \frac{\partial^{\alpha+\beta}\rho}{\partial z_2^\alpha\partial z_1^\beta}(\Phi(\zeta))\frac{\partial^s P(\zeta)}{\partial\zeta_1^s},$$

où $*$ représente des constantes absolues, ce qui détermine entièrement le polynôme P. □

On transporte maintenant le champ L sur $\widetilde\Omega = \left\{\widetilde\rho < 0\right\}$ en posant

$$\widetilde L = \Phi^*(L) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\circ\Phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \frac{\partial P}{\partial\zeta_1}\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right) - \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\circ\Phi\right)\frac{\partial}{\partial\zeta_2},$$

de sorte que, compte tenu de l'expression de Φ on a

$$\widetilde L = \frac{\partial\widetilde\rho}{\partial\zeta_2}\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \frac{\partial\widetilde\rho}{\partial\zeta_1}\frac{\partial}{\partial\zeta_2} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\circ\Phi\right)\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\circ\Phi + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\circ\Phi\right)\frac{\partial P}{\partial\zeta_1}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta_2}.$$

Alors, si f est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur Ω, on a $\widetilde L\left(f\circ\Phi\right)(\zeta) = \left(Lf\right)\circ\Phi(\zeta)$ et $\left\langle\partial\bar\partial\widetilde\rho; \widetilde L, \overline{\widetilde L}\right\rangle = \left\langle\partial\bar\partial\rho; L, \overline{L}\right\rangle\circ\Phi$, de sorte que, avec des notations évidentes, $\widetilde{S_\delta} = S_\delta\circ\Phi$ et $\widetilde{S_{\delta 0}} = S_{\delta 0}\circ\Phi$.

On remarque d'autre part que, si on note $\widetilde L = a\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + b\frac{\partial}{\partial\zeta_2}$, on a $a(0) = \frac{\partial\rho}{\partial z_2}\left(z^0\right) \neq 0$, $b(0) = 0$ et, pour $p \leq 2M-1$, $\frac{\partial^p b}{\partial\zeta_1^p}(0) = 0$.

De même, on note $\widetilde N = \Phi^*(N) = \frac{\partial\widetilde\rho}{\partial\overline{\zeta_1}}\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \frac{\partial\widetilde\rho}{\partial\overline{\zeta_2}}\frac{\partial}{\partial\zeta_2}$ le champs complexe normal aux surfaces de niveaux de $\widetilde\rho$.

Lemme V.3.1. *Soit $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|l| = l_1 + l_2 \leq M$. Alors il existe une constante K qui ne dépend que de Ω telle que, en notant D^l une dérivation de la forme $\frac{\partial^{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}}{\partial\zeta_1^{\alpha_1}\partial\overline{\zeta_1}^{\beta_2}\partial\zeta_2^{\alpha_1}\partial\overline{\zeta_2}^{\beta_2}}$ avec $\alpha_1+\beta_1 = l_1$, $\alpha_2+\beta_2 = l_2$, on a $\left|D^l\widetilde\rho(0)\right| \leq K\delta\widetilde{S_{\delta 0}}^{l_1/2}\delta^{-l_2}$.*

Esquisse de la démonstration. La preuve est purement calculatoire et nous ne donnerons pas les détails qui sont laissés au lecteur. Tout d'abord on remarque que, ρ étant $\mathscr{C}^\infty$, il suffit de vérifier le Lemme lorsque $l = (l_1, 0)$. Ensuite, on vérifie que, si L_i est soit $\widetilde{L}$ soit $\overline{\widetilde{L}}$ alors l'opérateur différentiel $L_1 L_2 \dots L_p$ est la somme de $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\zeta_1^\alpha \partial\overline{\zeta_2}^\beta}$, avec α (resp. β) le nombre de fois que L (resp. $\overline{L}$) apparaît dans $L_1 L_2 \dots L_p$, et d'une combinaison d'opérateurs différentiels $\frac{\partial^s}{\partial\zeta_1^{s_1}\partial\overline{\zeta_1}^{r_1}\partial\zeta_2^{s_2}\partial\overline{\zeta_2}^{r_2}}$ de longueur totale $s < p$, les coefficients étant majorés uniformément par une constante ne dépendant que de Ω. La vérification du Lemme se fait alors par récurrence sur l. □

En utilisant ce Lemme, la formule de Taylor appliquée à $\widetilde{\rho}$ donne alors aussitôt une majoration de $\widetilde{\rho}(\zeta)$ lorsque ζ est voisin de 0 :

Lemme V.3.2. *Il existe une constante K, qui ne dépends que de Ω, telle que, en tout point ζ du polydisque*

$$\triangle_\delta^\varepsilon(0) = \left\{|\zeta_1| \leq \varepsilon \widetilde{S_{\delta 0}}^{-1/2}, |\zeta_2| \leq \varepsilon\delta\right\}$$

on a $\left|\widetilde{\rho}(\zeta) - \widetilde{\rho}(0)\right| \leq K\varepsilon\delta$. En particulier, il existe une constante ε_0, qui ne dépends que de Ω, telle que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, le polydisque $\triangle_{\delta_0}^\varepsilon(0)$, où δ_0 désigne la distance de 0 à la frontière de $\widetilde{\Omega}$ (de sorte que δ_0 est équivalente à $\left|\widetilde{\rho}(0)\right|$) est contenu dans $\widetilde{\Omega} \cap \left\{\left|\widetilde{\rho}(\xi)\right| < 2\delta_0\right\}$.

Pour pouvoir appliquer le Théorème V.3.1 à $\widetilde{\Omega}$ au point 0, on commence par transporter sur $\widetilde{\Omega}$ la fonction du Théorème V.3.2 en posant $\widetilde{F_{\delta_0 1}} = F_{4\delta_0} \circ \Phi$ puis on modifie cette fonction dans $\widetilde{\Omega}_{2\delta_0}$ de manière à pouvoir ensuite la rendre pluri-sousharmonique dans $\widetilde{\Omega}$.

On tronque tout d'abord $\widetilde{F_{\delta_0 1}}$ dans la bande $\widetilde{\Omega_{2\delta_0}} \setminus \widetilde{\Omega_{4\delta_0}}$ avec une fonction $\chi\left(\widetilde{\rho}/\delta_0\right)$ où $\chi(t)$ est une fonction $\mathscr{C}^3$ paire, croissante sur $]-\infty, 0]$, égale à 0 sur $]-\infty, -4]$, à 1 sur $]-2, 0]$ et à $(t+4)^4/4^4$ sur $[-4, -3/8]$ (remarquer que χ^2/χ est bornée sur $]-4, +\infty[)$, en posant $\widetilde{F_{\delta_0 2}} = \chi\left(\widetilde{\rho}/\delta_0\right)\widetilde{F_{\delta_0 1}}$.

Si $\widetilde{W} = a\widetilde{L} + b\widetilde{N}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, des calculs simples montrent que

$$\left|\left\langle \partial\overline{\partial}\chi\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right); \widetilde{W}, \overline{\widetilde{W}}\right\rangle\right| \lesssim \chi'\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right)\frac{|a|^2}{\delta_0}\left|\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{\rho}; \widetilde{L}, \overline{\widetilde{L}}\right\rangle\right| + \frac{|b|^2}{\delta_0^2}\left(\chi''\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right) + K\chi'\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right)\right) + 1,$$

$$\left|W\left(\chi\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right)\right)\right| \lesssim \chi'\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\delta_0}\right)\frac{|b|}{\delta_0},$$

$$\left|\overline{W}\widetilde{F_{4\delta_0 1}}\right| \lesssim |a|\,\widetilde{S_{\delta_0}}^{1/2} + |b|\,\delta_0^{-1}$$

et, le Théorème V.3.2 donne $\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{F_{\delta_0 2}}; W, \overline{W}\right\rangle \geq -K\left(\frac{|a|^2}{\delta_0}\left|\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{\rho}; \widetilde{L}, \overline{\widetilde{L}}\right\rangle\right| + \frac{|b|^2}{\delta_0^2} + 1\right)$ dans $\widetilde{\Omega_{4\delta_0}}$ c'est-à-dire là où elle peut être non nulle.

Par ailleurs, comme les surfaces de niveau de ρ sont pseudo-convexes dans un voisinage U de $\partial\Omega$, celles de $\widetilde{\rho}$ le sont dans un voisinage $\widetilde{U} = \left\{-\rho_0 < \widetilde{\rho} < 0\right\}$ de $\widetilde{\Omega}$, et la fonction $e^{\widetilde{\rho}/\delta_0}$ vérifie, dans $\widetilde{U}$,

$$\left\langle \partial\overline{\partial}e^{\widetilde{\rho}/\delta_0}; W, \overline{W}\right\rangle \geq e^{\widetilde{\rho}/\delta_0}\left(\frac{|a|^2}{\delta_0}\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{\rho}; \widetilde{L}, \overline{\widetilde{L}}\right\rangle + \frac{1}{K}\frac{|b|^2}{\delta_0^2}\right) - K$$

où K est une constante qui ne dépends que de Ω et $\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{\rho}; \widetilde{L}, \overline{\widetilde{L}}\right\rangle \geq 0$. De même, si ϑ est une fonction croissante $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ valant 0 sur $\left]-\infty, -\rho_0\right]$, 1 sur $\left[-\rho_0/2, 0\right]$ et vérifiant ϑ'^2/ϑ borné sur $\left]-\rho_0, 0\right]$, la fonction $\vartheta\left(\widetilde{\rho}\right)$ vérifie $\left\langle \partial\overline{\partial}\vartheta\left(\widetilde{\rho}\right); W, \overline{W}\right\rangle \geq -K$ (K ne dépendant que de Ω), et, un calcul direct (utilisant l'inégalité ϑ'^2/ϑ) montre qu'il existe une constante K, qui ne dépends que de Ω, telle que la fonction

$$h = \vartheta\left(\widetilde{\rho}\right)e^{\widetilde{\rho}/\delta_0} + K|z|^2$$

est pluri-sousharmonique dans $\widetilde{\Omega}$.

On pose alors $\widetilde{F_{\delta_0}} = \widetilde{F_{\delta_0 2}} + Kh$, avec K une constante assez grande (ne dépendant que de Ω). Les calculs qui précèdent montrent que (en supposant $4\delta_0 < \rho_0/4$) que $\widetilde{F_{\delta_0}}$ est pluri-sousharmonique dans $\widetilde{\Omega}$ et vérifie $\left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{F_{\delta_0}}; W, \overline{W}\right\rangle \geq |a|^2\,\widetilde{S_{\delta_0 0}} + |b|^2\,\delta_0^{-2}$ dans $\widetilde{\Omega_{2\delta_0}}$.

Pour appliquer le Théorème V.3.1 à $\widetilde{\Omega}$ en 0, il nous reste à vérifier l'estimation de $\partial\overline{\partial}\widetilde{F_{\delta_0}}$ dans les coordonnées (ζ_1, ζ_2) dans un polydisque $\triangle_{\delta_0}^\varepsilon(0)$. En un point ζ de ce polydisque écrivons

$$\begin{aligned}
|a|^2\,\widetilde{S_{\delta_0 0}} + |b|^2\,\delta_0^{-2} &\leq \left\langle \partial\overline{\partial}\widetilde{F_{\delta_0}}; W, \overline{W}\right\rangle \\
&= \frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_1}}|a|^2\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right|^2 + 2\Re\mathrm{e}\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_2}}a\overline{b}\left(\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right)^2 + \frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_2\partial\overline{\zeta_2}}|b|^2\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right|^2 \\
&\quad + A,
\end{aligned}$$

où A contient des termes qui sont tous majorés soit par $K|a||b|\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right|$, soit par $K\left(|a|^2+|b|^2\right)\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right|$ ou bien par $K\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(\zeta)-\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right|$, avec K une constante qui ne dépends que de Ω. En appliquant le Lemme V.3.1, la formule de Taylor appliquée à l'ordre M donne aussitôt (en utilisant que $\widetilde{S_{\delta_0 0}}^M \le \delta_0$ par l'hypothèse de type fini) $\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right| \le K\varepsilon\delta_0\widetilde{S_{\delta_0}}^{1/2}$ et $\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(\zeta)-\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right| \le K\varepsilon$. Par suite, pour $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 assez petit (ne dépendant que de Ω), il vient

$$\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_1}}|a|^2\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right|^2+2\Re\mathrm{e}\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_2}}a\overline{b}\left(\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right)^2+\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_2\partial\overline{\zeta_2}}|b|^2\left|\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\right|^2 \ge \frac{1}{K}\left(|a|^2\widetilde{S_{\delta_0 0}}+|b|^2\delta_0^{-2}\right),$$

et on conclut, puisque $\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\zeta_2}(0)\neq 0$,

$$\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_1}}|a|^2+2\Re\mathrm{e}\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta_2}}a\overline{b}+\frac{\partial^2\widetilde{\rho}(\zeta)}{\partial\zeta_2\partial\overline{\zeta_2}}|b|^2 \ge \frac{1}{K}\left(|a|^2\widetilde{S_{\delta_0 0}}+|b|^2\delta_0^{-2}\right).$$

Alors le Théorème V.3.1 dit que le noyau de Bergman de $\widetilde{\Omega}$ vérifie $B^{\widetilde{\Omega}}(0,0)\simeq\widetilde{S_{\delta_0 0}}\delta_0^{-2}$, la constante de l'équivalence ne dépendant que de Ω. Le changement de variables Φ ayant un jacobien uniformément majoré et minoré par des constantes non nulles qui ne dépendent que de Ω, on obtient :

THÉORÈME V.3.3 *(D. Catlin [Cat89]).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe à bord de classe $\mathscr{C}^\infty$ de type fini de $\mathbb{C}^2$. Avec les notation précédentes, en tout point z de Ω le noyau de Bergman de Ω vérifie $B^\Omega(z,z)\simeq S_{\delta(z)0}(z)\delta(z)^{-2}$ où $\delta(z)$ désigne la distance de z à $\partial\Omega$, les constantes dans l'équivalence étant indépendantes du point z.

En dimension supérieure, seuls des cas particuliers ont été traités (voir à la fin), la géométrie de ces domaines n'étant pas actuellement comprise.

Pour obtenir des estimations du projecteur de Bergman dans des espaces autre que les espaces de Sobolev classiques, on a essayé d'obtenir des estimation ponctuelles du noyau de Bergman ainsi que de ses dérivées en dehors de la diagonale de $\Omega\times\Omega$, en utilisant une idée due à N Kerzman qui consiste à remarquer que la propriété 1. de la Proposition V.3.1 implique que $B^\Omega(z,w)$ ainsi que ses dérivées $D_w^\alpha B^\Omega(z,w)$ et $D_z^\alpha B^\Omega(z,w)$ vérifie la propriété de la moyenne dans chaque variable. Ainsi, si z^0 est un point de Ω et si ψ_w est une fonction radiale à support compact dans Ω d'intégrale 1 et valant 1 au point w, on a, avec une intégration par parties,

$$D_z^\alpha D_w^\beta B^\Omega(z,w)=D_z^\alpha\int_\Omega D_\zeta^\beta B^\Omega(z,\zeta)\psi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)=D_z^\alpha\int_\Omega B^\Omega(z,\zeta)D_\zeta^\beta\psi_w(\zeta)\,d\lambda(\zeta)=D_z^\alpha\mathscr{B}\left(D_\zeta^\beta\psi_w\right)(z),$$

et on cherche des estimations de $D_z^\alpha D_w^\beta B^\Omega(z,w)$ (via le lemme de Sobolev) en utilisant des estimation Sobolev suffisamment précises du projecteur de Bergman. Le théorème de Catlin (Théorème V.2.5) indique donc que le cadre naturel d'une telle méthode est celui des domaines de type fini.

Les premiers résultats d'estimations fines des projecteurs de Bergman et Szegö on été obtenus en dimension 2 :

THÉORÈME V.3.4 *(A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein & S. Wainger [NRSW89]).*

Soit Ω un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^2$ à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. *Si Ω est de type fini, le projecteur de Bergman $\mathscr{B}$ de Ω est continu de l'espace de Sobolev $L_s^p(\Omega)$ dans lui-même, pour $s\in\mathbb{R}$ et $p\in[1,+\infty[$, et de l'espace de lipschitz $\Lambda_\alpha(\Omega)$ dans lui-même, pour tout $\alpha>0$.*
2. *Soit z^0 un point de type fini de $\partial\Omega$. Alors, pour tout voisinage ouvert V de z^0 il existe un voisinage ouvert W de z^0 tels que, pour toute fonction $f\in L^2(\partial\Omega)\cap\Lambda_\alpha(V\cap\partial\Omega)$, $\alpha>0$, le projeté de Szegö $\mathscr{S}f$ de f est dans $\Lambda_\alpha(W\cap\partial\Omega)$.*

L'analogue en dimension supérieure n'est toujours pas connu. Seuls des résultats partiels ont été obtenus. Précisément, les principaux résultats actuels pour lesquels le Théorème précédent est connu sont les suivants :

1. Ω est soit convexe de type fini (pour 1.) soit localement convexe de type fini au voisinage de z^0 (pour 2.). Ce cas est du à J. McNeal ([McN94, MN02]) et J. McNeal & E. M. Stein ([MS94, MS97]). Récemment ce résultat a été étendu aux domaines linéellement convexes et localement linéellement convexes de type fini (P. Charpentier & Y. Dupain [CD08]) ;
2. La forme de Levi de Ω est localement diagonalisable et Ω est de type fini (soit en tout point du bord, pour le 1., soit en z^0 pour le 2.). Ce cas est du à P. Charpentier & Y. Dupain ([CD06b, CD06a, CD08]) ;
3. Plus généralement P. Charpentier & Y. Dupain ont introduit dans [CD08] une classe de domaines, les domaines complètement géométriquement séparés de type fini, qui contient les deux classes précédentes, ainsi que d'autres, pour laquelle le Théorème est vrai.

BIBLIOGRAPHIE

[AM04] E. AMAR et E. MATHERON – *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[BC88] A. BONAMI et P. CHARPENTIER – « Une estimation Sobolev 1/2 pour le projecteur de Bergman », *C. R. Acad. Sci. Paris Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* **307** (1988), no. 5, p. 173–176.

[BC90] — , « Boundary values for the canonical solution to $\bar{\partial}$-equation and $W^{1/2}$ estimates », *preprint, Bordeaux* (1990).

[BC00] B. BERNDTSSON et P. CHARPENTIER – « A Sobolev mapping property of the Bergman kernel », *Math. Z.* **235** (2000), no. 1, p. 1–10.

[BG77] T. BLOOM et I. GRAHAM – « A geometric characterization of points of finite type m on real sub manifold of $\mathbb{C}^n$ », *J. of Diff. Geometry* **12** (1977), p. 171–182.

[BS91] H. P. BOAS et E. J. STRAUBE – « Sobolev estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann operator on domains in $\mathbb{C}^n$ admitting a defining function that is plurisubharmonic on the boundary », *Math. Z.* **206** (1991), no. 1, p. 81–88.

[Cat84] D. W. CATLIN – « Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem », *Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.* **41** (1984), p. 39–49.

[Cat87] D. CATLIN – « Subelliptic estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains », *Ann. of Math.* **126** (1987), no. 1, p. 131–191.

[Cat89] D. CATLIN – « Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two », *Math. Z.* **200** (1989), p. 429–466.

[CD06a] P. CHARPENTIER et Y. DUPAIN – « Estimates for the Bergman and Szegö projections for pseudo-convex domains of finite type with locally diagonalizable Levi form », *Publications Mathemàtiques* **50** (2006), no. 2, p. 413–446.

[CD06b] — , « Geometry of Pseudo-convex Domains of Finite Type with Locally Diagonalizable Levi Form and Bergman Kernel », *Jour. Math. Pures et Appl.* **85** (2006), p. 71–118.

[CD08] — , « Extremal Basis, Geometrically Separated Domains and Applications », *http ://fr.arxiv.org/abs/0810.1884* (2008).

[CNS92] D. C. CHANG, A. NAGEL et E. STEIN – « Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem for pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^2$ of finite type », *Acta Math.* **169** (1992), p. 153–228.

[Con78] J. B. CONWAY – *Functions of one complex variable*, Springer Verlag - Graduate Texts in Mathematics N° 11, 1978.

[D'A82] J. P. D'ANGELO – « Real hypersurfaces, orders of contact, and applications », *Annals of Math.* **115** (1982), p. 615–637.

[DF77] K. DIEDERICH et E. FORNAESS – « Pseudoconvex Domains : Bounded Strictly Plurisubharmonic Exhaustion Function », *Inventiones mathematicae* **39** (1977), p. 129–141.

[Ḧ73] L. HÖRMANDER – *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 1973.

[Hör65] L. HÖRMANDER – « L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator », *Acta Math.* **113** (1965), p. 89–152.

[KN65] J. J. KOHN et L. NIRENBERG – « Non coercive boundary value problems », *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), p. 443–492.

[Koe02] K. KOENIG – « On maximal Sobolev and Hölder estimates for the tangential Cauchy-Riemann operator and boundary Laplacian », *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 129–197.

[Koh73] J. J. KOHN – « Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **181** (1973), p. 273–292.

[Kra82] S. KRANTZ – *Function theory of several complex variables*, John Wiley and Sons, 1982.

[LT97] C. LAURENT-THIÉBAUT – *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Savoirs Actuels, Inter-Éditions / CNRS Éditions, 1997.

[Mac88] M. MACHEDON – « Szegö kernels on pseudoconvex domains with one degenerate eigenvalue », *Ann. of Math.* **128** (1988), p. 619–640.

[McN94] J. MCNEAL – « Estimates on Bergman Kernels of Convex Domains », *Advances in Math* (1994), p. 108–139.

[MN02] J. MC NEAL – « Uniform subelliptic estimates on scaled convex domains of finite type. », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 1, p. 39–47.

[MS94] J. D. MCNEAL et E. M. STEIN – « Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type », *Duke Math. J.* **73** (1994), no. 1, p. 177–199.

[MS97] — , « The Szegö projection on convex domains », *Math. Z.* **224** (1997), no. 4, p. 519–553.

[MS01] J. MICHEL et M.-C. SHAW – « The $\overline{\partial}$-Neumann operator on Lipschitz pseudoconvex domains with plurisubharmonic defining functions », *Duke Mathematical Journal* **108** (2001), no. 3, p. 421–447.

[Nar85] R. NARASIMHAN – *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser Verlag, 1985.

[NN01] R. NARASIMHAN et Y. NIEVERGELT – *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[NRSW89] A. NAGEL, J. P. ROSAY, E. M. STEIN et S. WAINGER – « Estimates for the Bergman and Szegö kernels in $\mathbb{C}^2$ », *Annals of Math.* **129** (1989), p. 113–147.

[NS06] A. NAGEL et E. M. STEIN – « The $\bar{\partial}_b$-complex on decoupled boundaries in $\mathbb{C}^n$ », *Annals of Math.* **164** (2006), p. 649–713.

[Ran86] R. M. RANGE – *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics, 108, Springer-Verlag, 1986.

[Rud80] W. RUDIN – *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer Verlag, 2008. - (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften ; 241), 1980.

[Rud87] — , *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1987.

[Yge01] A. YGER – *Analyse complexe et distributions*, Editions Ellipses, 2001.