M11

Ph. CHARPENTIER

1992-93

Sommaire

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

Chapitre 1

ESPACES METRIQUES, ESPACES NORMES

1.1 Topologie d'un espace métrique, normé

Définition 1.1.1 *1) Soit X un ensemble. On dit qu'une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une* **distance** *sur X si:*

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

b) $\forall x,\ y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

*c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (***inégalité triangulaire***).*

2) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $x \longmapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme sur E si:

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in K$, $x \in E$;

*c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (***inégalité triangulaire***).*

3) On appelle **espace métrique** *(resp.* **espace normé***) un ensemble (resp. un espace vectoriel) muni d'une distance (resp. d'une norme). Tout espace normé est un espace métrique pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ et on le considère toujours muni de cette distance.*

Exemples. 1) **Exemple fondamental**: $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ muni de la norme euclidienne. On peut munir ces espaces d'autres normes: pour $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_i |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum\limits_i |x_i|$.

2) $E = \mathcal{B}(X; \mathbb{C}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ bornées$\}$: $\|f\|_\infty = \|f\|_X = \sup\limits_X |f(x)|$: c'est la **norme uniforme**.

3) $E = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{C})$. On définit clasiquement sur E les normes suivantes: $\|f\|_\infty$ (comme ci dessus), $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)| dt$, $\|f\|_2 = \Big(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 dt\Big)^{1/2}$.

Définition 1.1.2 *Soit (X, d) un espace métrique.*

1) Pour $x \in X$, on appelle **boule ouverte** *(resp.* **boule fermée***) de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble $B(x, r) = \{y \in X / d(x, y) < r\}$ (resp. $\overline{B}(x, r) = \{y \in X / d(x, y) \leq r\}$.*

2) On dit que $\Omega \subset X$ est une partie **ouverte** *de X (ou un* **ouvert** *de X) si $\forall x \in \Omega$, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$.*

3) On dit que $A \subset X$ est **fermée** *si $X \backslash A$ est ouverte.*

4) Soit $x \in X$. On dit que $A \subset X$ est un **voisinage** *de x s'il existe un ouvert Ω dans X tel que $x \in \Omega \subset A$.*

Terminologie. (X, d) espace métrique. L'ensemble des ouverts de X s'appele la **topologie** de (X, d).

Proposition 1.1.3 *a) Toute boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).*

b) Toute réunion d'ouverts est ouverte.

c) toute intersection de fermés est fermée.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^p$ décrire les boules pour la norme euclidienne et les normes $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$. Montrer que les espaces métriques correspondants ont les même ouverts.

Le résultat de cet exercice est un cas particulier d'un théorème que l'on signale simplement:

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel de* **dimension finie** *sur $\mathbb{R}$ et soient $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes sur E. Alors il existe deux constantes c_1 et c_2, > 0, telles que, $\forall x \in E$, $\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$.*

1.2 Suites dans un espace métrique, normé

Définition 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle* **suite dans** *(X, d), une application de $\mathbb{N}$ dans X: $n \longmapsto x_n$. On la note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Définition 1.2.2 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans (X, d). On appelle* **suite extraite de** *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la forme $n \longmapsto x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est* **strictement croissante**. *On note généralement $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ (i.e. $n_k = \varphi(k)$).*

Définition 1.2.3 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans (X, d) converge vers $l \in X$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, l) = 0$. C'est-à-dire, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n(\epsilon)$ tel que $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow d(x_n, l) \leq \epsilon$ (dans un normé: $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - l\| = 0$).*

Proposition 1.2.4 *Si une suite admet une limite, celle-ci est unique. On note* $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ *et parfois* $x_n \longrightarrow l$.

Proposition 1.2.5 *Soit* E *un espace normé.*
1) $x_n \longrightarrow l$, $y_n \longrightarrow l' \Rightarrow \lambda x_n + \mu y_n \longrightarrow \lambda l + \mu l'$;
2) $E = \mathbb{R}^p$. $x_n = (x_n^1, \ldots x_n^p) \longrightarrow l = (l^1, \ldots l^p)$ *(pour la morme euclidienne par exemple) si et seulement si pour tout* i, $x_n^i \longrightarrow l^i$.

1.3 Intérieur, adhérence d'une partie

Définition 1.3.1 *Soient* X *un espace métrique et* $A \subset X$. *On appelle* **intérieur** *de* A *la réunion* $\overset{\circ}{A}$ *des ouverts contenus dans* A. *C'est aussi la réunion des boules ouvertes contenues dans* A.

Remarque. On peut avoir $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ et $A \neq \emptyset$.

Proposition 1.3.2 *1)* $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset A \Leftrightarrow \exists \rho > 0$ *tel que* $\overline{B}(x,\rho) \subset A \Leftrightarrow A$ *est un voisinage de* x.
2) A *est ouvert* $\Leftrightarrow \; A = \overset{\circ}{A}$.
3) $A \subset B \Rightarrow \; \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
4) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Remarque. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$,, mais en général il n'y a pas égalité. Par exemple, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}} = \emptyset$.

Définition 1.3.3 *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $A \subset X$. *On appelle* **adhérence** *de* A *l'intersection* $\overline{A}$ *des fermés contenant* A.

Proposition 1.3.4 *Soit* $A \subset X$, (X,d) *métrique.*
1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \rho > 0$, $\overline{B}(x,\rho) \cap A \neq \emptyset$.
2) $\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{A^c}$.
3) $\left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}$.
4) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
6) A *est fermé si et seulement si* $A = \overline{A}$.

Remarque. $\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap\overline{B}$, mais, en général il n'y a pas égalité. Par exemple: $\overline{\mathbb{Q}}=\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

Terminologie. Soient (X,d) un espace métrique et A et B deux parties de X. On dit que B **est dense dans** A si $A\subset\overline{B}$.

Exemples. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$...

Définition 1.3.5 *Soit $A\subset X$, (X,d) espace métrique. On appelle* **frontière de** *A l'ensemble*

$$\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=\overline{A}\backslash\overset{\circ}{A}=\mathrm{Fr}(A^c).$$

Définition 1.3.6 *On dit que $x\in X$ est* **valeur d'adhérence** *de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, s'il existe une suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ extraite de (x_n) telle que $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. i.e.: $\forall\epsilon>0$, $\forall n$, $\exists k>n$ tel que $d(x_k,x)<\epsilon$.*

Remarque. Si $A=\{x_0,...,x_n,...\}$, x est valeur d'adhérence de $(x_n)\Rightarrow x\in\overline{A}$. Mais la réciproque est fause.

Proposition 1.3.7 *Soit $A\subset X$. Alors, $x\in\overline{A}\Leftrightarrow\exists x_n\in A$ t.q. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.*

Définition 1.3.8 *Soit $A\subset X$, X métrique. $x\in X$ est dit* **point d'accumulation de** *A si $\exists x_n\in A$, $x_n\neq x$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, ou encore: $\forall r>0$, $\big(B(x,r)\cap A\big)\backslash\{x\}\neq\emptyset$, ou encore: $x\in\overline{A\backslash\{x\}}$.*

Remarque. (x_n) suite. $A=\{x_0,...,x_n,...\}$. x est point d'accumulation de $A\Rightarrow x$ est valeur d'adhérence de (x_n). Mais la réciproque est fausse.

Exercices proposés. (non traités en cours)
1) Ω ouvert de $\mathbb{R}^p\Rightarrow\Omega\cap\mathbb{Q}^p$ et $\Omega\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^p$ sont denses dans Ω.
2) Un ouvert de $\mathbb{R}^p$ est réunion **dénombrable** de boules ouvertes.

1.4 Suites de Cauchy

Définition 1.4.1 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (X,d) est une* **suite de Cauchy** *si $\forall\epsilon>0$, $\exists n(\epsilon)$ tel que pour $p\geq n(\epsilon)$ et $q\geq n(\epsilon)$ on a $d(x_p,x_q)\leq\epsilon$ (dans un espace normé: $\|x_p-x_q\|\leq\epsilon$).*

Remarque. Toute suite de Cauchy qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.

Théorème 1.4.2 **(critère de Cauchy).** *1) Soit (X,d) un espace métrique. Toute suite convergente dans (X,d) est une suite de Cauchy.*
2) Dans $\mathbb{R}^p$ toute suite de Cauchy est convergente.

Pour la preuve du 2): rappel de l'axiome de la borne supérieure ce qui donne le résultat dans $\mathbb{R}$, puis, cas général.

Remarque. Dans un métrique quelconque, le 2) du théorème peut être faux: par exemple dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ou encore $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_1$.

Définition 1.4.3 *Un espace métrique (X,d) est dit* **complet** *si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X. Un espace normé complet est appelé un* **espace de Banach**.

Remarque. $Y\subset X$, X métrique complet. Alors, Y complet $\Leftrightarrow$ Y fermé.

Exemples. -$\mathbb{R}^p$ est un espace de Banach.
- $\mathcal{B}(X;\mathbb{C})$ muni de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$ est un espace ce Banach.
- On verra plus tard que $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

1.5 Compacité

Terminologie. (X,d) espace métrique, $A\subset X$. On dit qu'une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X est un **recouvrement ouvert de** A si $A\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Si $J\subset I$, on dit que $(\Omega_i)_{i\in J}$ est un **sous-recouvrement (de** (Ω_i)**) de** A si $A\subset\bigcup_{i\in J}\Omega_i$.

Définition 1.5.1 *Soit (X, d) un espace métrique. $A \subset X$ est dit* **compact** *si $\forall (\Omega_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de A, il existe $J \subset I$, J* **fini** *tel que $(\Omega_i)_{i \in J}$ soit un sous-recouvrement de A.*

Proposition 1.5.2 *Soit $A \subset X$, A compact.*
1) $B \subset A$, B fermé $\Rightarrow B$ compact.
2) A est borné (i.e. $\forall x \in X$, $\sup\limits_{y \in A} d(x, y) < \infty$; dans le cas d'un normé, $\sup\limits_{x \in A} \|x\| < \infty$) et fermé.

Terminologie. $A \subset X$ est dit **relativement compact** si $\overline{A}$ est compact.

Proposition 1.5.3 *(***Borel-Lebesgue***) Soit $A \subset X$, A compact, et soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall x \in A$, $\exists i \in I$ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega_i$.*

Théorème 1.5.4 *1) Soit $A \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
a) A est compact;
b) Toute suite de points de A possède une valeur d'adhérence dans A;
c) A est complet et, $\forall \epsilon > 0$, il existe un **nombre fini** *de points x_i* de *A tels que les boules $B(x_i, \epsilon)$ forment un recouvrement ouvert de A (i.e. A est* **précompact***).*
2) Soit $A \subset \mathbb{R}^p$. Alors: A compact $\Leftrightarrow$ A est fermé et borné.

Proposition 1.5.5 *Tout ensemble infini borné de $\mathbb{R}^p$ possède un point d'accumulation.*

Théorème 1.5.6 *(***F. Riesz***) Soit E un espace normé. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
a) E est localement compact (i.e. possède un voisinage de 0 compact);
b) $\exists r$ et r', $0 < r' < r$ tels que $\overline{B}(0, r)$ peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon r';
c) $\dim E < \infty$.

1.6 Limite d'une fonction

Définition 1.6.1 *Soient X et Y deux espaces métriques, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$, et $f : A \backslash \{a\} \longrightarrow Y$. On dit que $L = \lim\limits_{x \to a, x \in A \backslash \{a\}} f(x)$ si:*
a) a est un point d'accumulation de A;
b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $d(x, a) < \eta$, $x \neq a \Rightarrow d'(L, f(x)) \leq \epsilon$ (i.e.: $f\Big(B(a, \eta) \cap (A \backslash \{a\})\Big) \subset B(L, \epsilon)$.

Proposition 1.6.2 *1) La limite définie ci-dessus est unique si elle existe.*
2) $L = \lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x) \Leftrightarrow \forall x_n \in A \setminus \{a\}$ *t.q.* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, *on a* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.
3) Si Y *est un espace normé:* $\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim f(x) + \mu \lim g(x)$.
4) Si $Y = \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, ..., f_p)$, $\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x) = L$, $L = (L_1, ..., L_p) \Leftrightarrow \forall i$, $\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f_i(x) = L_i$.

Proposition 1.6.3 *(***critère de Cauchy***) Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* Y *étant* **Complet**. *Soient* a *un point d'accumulation de* A *et* $f : A \setminus \{a\} \longrightarrow Y$. *Alors,* $\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$ *existe si et seulement si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ *t.q.* $\forall x, x' \in (A \setminus \{a\}) \cap B(a, \eta)$, *on a* $d'\Big(f(x),\ f(x')\Big) \leq \epsilon$.

1.7 Fonctions continues

Définition 1.7.1 *Soient* X, Y *deux espaces métriques,* $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$ *et* $a \in A$. *On dit que* f *est* **continue** *en* a *si:*
- *ou bien* a *est isolé dans* A *(i.e.* $\exists r > 0 / B(a, r) \cap A = \{a\}$*);*
- *ou bien* a *est un point d'accumulation de* A *et* $\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x) = f(a)$.

f *est dite* **continue sur** A *(ou seulement continue) si elle est continue en tout point de* A.

Proposition 1.7.2 *1)* f *est continue en* a *si et seulement si:* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ *t.q.* $x \in A$, $d(x, a) < \eta \Rightarrow d'\Big(f(x), f(a)\Big) \leq \epsilon$.
2) f *continue en* $a \Leftrightarrow \forall x_n \in A$ *t.q.* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, *on a* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.
3) Si $Y = \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, ... f_p)$, *est continue en* $a \Leftrightarrow \forall i$, f_i *est continue en* a.

Remarque. $X = \mathbb{R}^p$. $f(x_1, ..x_p)$ est continue en $a \Rightarrow \forall i$, $x_i \longmapsto f(a_1, .., x_i, .., a_p)$ est continue en a_i (si l'application est bien définie). Mais, **la réciproque est fausse**: par exemple la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ au point $a = (0, 0)$.

Proposition 1.7.3 *1) Supposons* Y *espace normé. Si* f *et* g *sont continues en* a, *alors* $\lambda f + \mu g$ *est continue en* a*; si de plus* $Y = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, fg *est continue en* a *et si de plus* $g(a) \neq 0$, f/g *est définie dans* $A \cap B(a, \delta)$ *et est continue en* a.
2) X, Y, Z *étant des espaces métriques,* $A \subset X$, $B \subset Y$, $f : A \longrightarrow Y$, *telle que* $f(A) \subset B$, $g : B \longrightarrow Z$ *et* $a \in A$, *si* f *est continue en* a *et* g *continue en* $f(a)$ *alors* $g \circ f$ *est continue en* a.

Exemples.- E étant normé, $x \longmapsto \|x\|$ est continue.
- Sur $\mathbb{R}^p$: les fonctions polynômiales $P(x) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha$, I sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^p$ sont continues.

Proposition 1.7.4 *Soit $K \subset X$, K* **compact**. *Si $f : K \longrightarrow Y$ est continue, alors $f(K)$ est compact. En particulier, f est bornée (i.e. $f(K)$ est borné dans Y).*

Corollaire 1.7.5 *Soit $K \subset X$, K compact. Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Remarque. $K \subset X$, K compact, $f : K \longrightarrow F$ continue, F normé. Alors, $x \longmapsto \|f(x)\|$ est bornée et atteint ses bornes.

Définition 1.7.6 *Soient $A \subset X$ et $f : A \longrightarrow Y$. f est dite* **uniformément continue** *(***sur** *A) si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x,\ y \in A$, $d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'\Big(f(x), f(y)\Big) \leq \epsilon$.*

Proposition 1.7.7 *Soient $K \subset X$, K* **compact** *et $f : K \longrightarrow Y$. Si f est continue, alors elle est uniformément continue.*

Remarque. Cette proposition peut être fausse si K n'est pas compact. par exemple: $1/x$ sur $]0,1]$; x^2 sur $[0,+\infty[$. Par contre x^α, $0 \leq \alpha \leq 1$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ sans être bornée.

Proposition 1.7.8 *Soient $A \subset X$ et $f : A \longrightarrow Y$. f est continue sur A si et seulement si $\forall \Omega_2$ ouvert de Y, $\exists \Omega_1$ ouvert de X t.q. $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \cap A$. De même: f est continue en $a \in A \Leftrightarrow \forall V_2$ voisinage de $f(a)$, $\exists V_1$ voisinage de a t.q. $f^{-1}(V_2) = V_1 \cap A$.*

Exercices proposés. 1) E espace normé. Alors $x \longmapsto \|x\|$ est uniformément continue.

2) $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $x \in X$, $d(x,A) = \inf\limits_{y \in A} d(x,y)$. Alors $x \longmapsto d(x,A)$ est uniformément continue, et $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

1.8 Connexité

Définition 1.8.1 *Soient X un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est* **connexe** *s'il n'existe pas deux ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que:*

- *$\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset$,*
- *$\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$ et $\Omega_2 \cap A \neq \emptyset$,*
- *$A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$.*

Exemple. Dans un espace **normé** une boule est connexe (voir proposition24). Mais ceci peut être faux dans un espace métrique.

Proposition 1.8.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est connexe $\Leftrightarrow$ A est un intervalle.*

Proposition 1.8.3 *1) Soit $A \subset X$ connexe. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*
2) Soient $A_i \subset X$, $i \in I$, des connexes. Alors, si $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.
3) Soient $A_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$, des connexes tels que $A_{i+1} \cap A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} A_i$ est connexe.

Définition 1.8.4 *Soient $A \subset X$ et $a \in A$. On appelle* **composante connexe de** a **dans** A *le plus grand connexe contenant a et contenu dans A. A est dit* **totalement discontinu** *si ses composantes connexes sont toutes réduites à un point.*

Proposition 1.8.5 *Dans un espace normé les composantes connexes d'un ouvert sont ouvertes.*

Remarque. Ceci peut être faux dans un métrique. Par exemple dans $X = \{0\} \cup \Big(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \Big[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p}\Big]\Big)$, la composante de 0 est $\{0\}$.

Exercice. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion **dénombrable** d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Proposition 1.8.6 *Soient $A \subset X$ connexe et $B \subset A$. Si $\exists \Omega$ ouvert et $\exists F$ fermé tels que $B = \Omega \cap A = F \cap A$ alors ou bien $B = \emptyset$ ou bien $B = A$.*

Remarque. Soit $\dot{a}$ la composante connexe de a dans A. Alors $\overline{\dot{a}} \cap A = \dot{a}$.

Proposition 1.8.7 *Soient $A \subset X$ connexe, et $f : A \longrightarrow Y$ continue. Alors $f(A)$ est connexe. En particulier si $Y = \mathbb{R}$, $f(A)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).*

1.9 Connexité par arc

Soit A une partie d'un espace métrique X On appelle **chemin continu** dans A une application $\alpha : [0,1] \longrightarrow A$ continue. $\alpha(0)$ (resp. $\alpha(1)$) s'appelle l'origine (resp. l'extrémité) du chemin. On appelle **chemin inverse** de α le chemin $\overline{\alpha} : [0,1] \longrightarrow A$ défini par $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Si α et β sont deux chemins **consécutifs** (i.e. $\alpha(1) = \beta(0)$) on appelle **juxtaposé** des chemins α et β le chemin $\alpha\beta$ défini par

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Proposition 1.9.1 *Soit $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. La relation, entre points de A, définie par $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow$ il existe un chemin continu* **dans** *A d'origine a et d'extrémité b est une relation d'équivalence.*

Définition 1.9.2 *Soit $A \subset X$. Les classes d'équivalences modulo la relation $\mathfrak{R}$ de la définition ci-dessus sont appelées les* **composantes connexes par arc de** *A. S'il n'y en a qu'une, on dit que A est* **connexe par arc**.

Proposition 1.9.3 *Si A est connexe par arc, alors il est connexe.*

Remarque. La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

Proposition 1.9.4 *1) Dans un espace* **normé** *les composantes connexes par arc d'un ouvert sont ouvertes. Plus précisément, toute boule est connexe par arc. De plus un ouvert est connexe par arc si et seulement si il est connexe.*

2) Si $A \subset \mathbb{R}$, alors A connexe par arc $\Leftrightarrow$ A connexe $\Leftrightarrow$ A est un intervalle.

Remarque. A connexe par arc **n'entraîne pas** $\overline{A}$ connexe par arc.

Proposition 1.9.5 *Soit $A \subset X$ un ensemble connexe par arc. Si $f : A \longrightarrow Y$ est continue alors $f(A)$ est connexe par arc.*

Chapitre 2

SERIES NUMERIQUES

2.1 Définition et propriétés générales

Définition 2.1.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans un espace* **normé** E*. On appelle* **série de terme général** u_n *(notée* $\sum u_n$*) la suite* $(S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$*. On dit que* $\sum u_n$ *converge vers* $S \in E$ *si la suite* (S_n) *converge vers* S*. i.e. si* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow \|S - S_n\| \leq \epsilon$ *(on dit alors que* S *est la* **somme** *de* $\sum u_n$*). Dans le cas contraire, on dit que la série* **diverge**. *La série* $\sum u_n$ *est dite* **normalement convergente** *(ou* **absoluement convergente***) si la série* $\sum \|u_n\|$ *est convergente. Nous utiliserons la notation* $S = \sum_{0}^{\infty} u_n$.

Exemple. Séries géométriques: $u_n = aq^n \Rightarrow S_n = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$. Donc la série géométrique $\sum aq^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ $(q \in \mathbb{C})$.

Remarque. Soit $u_n \in E$. La suite (u_n) est convergente $\Leftrightarrow$ la série $\sum \Big(u_{n+1} - u_n\Big)$ est convergente.
Proposition 2.1.2 *On ne change pas la nature de la série* $\sum u_n$ *si on change un nombre fini de* u_n.

Proposition 2.1.3 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries dans* E.

a) $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent* $\Rightarrow \sum \Big(\lambda u_n + \mu v_n\Big)$ *converge et* $\sum_{0}^{\infty} \Big(\lambda u_n + \mu v_n\Big) = \lambda \sum_{0}^{\infty} u_n + \sum_{0}^{\infty} v_n$.

b) $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge* $\Rightarrow$ *pour* $\mu \neq 0$, $\sum \Big(\lambda u_n + \mu v\Big)$ *diverge.*

Remarques 1) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de $\sum \Big(u_n + v_n\Big)$.

2) Si $u_n = (u_n^1, ..., u_n^p) \in \mathbb{C}^p$, $u_n^j = a_n^j + ib_n^j$, a_n^j, $b_n^j \in \mathbb{R}$, alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \forall i$, $\sum a_n^j$ et $\sum b_n^j$ convergent, et de même pour la convergence normale. Ainsi l'étude des séries à termes dans $\mathbb{C}^p$ de ramène à celle des séries à termes dans $\mathbb{R}$, et de même pour les séries à termes dans un espace normé de dimension finie.

Théorème 2.1.4 (**critère de Cauchy**) *Soit E un espace de* **Banach**. *Pour une série $\sum u_n$ à termes dans E les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $\sum u_n$ est convergente;

b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$ tel que $q \geq p \geq N(\epsilon) \Rightarrow \Big\| \sum\limits_{n=p}^{q} u_n \Big\| \leq \epsilon$.

Remarque.1) Le théorème 1 s'applique en particulier à tous les espaces normés de dimension finie.

2) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **Mais** la réciproque est fausse. Par exemple $u_n = 1/n$ $\Rightarrow u_n \longrightarrow 0$ et $\sum u_n$ diverge car $\sum\limits_{n}^{2n} \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}$.

Proposition 2.1.5 *Si E est un espace de* **Banach** *toute série normalement convergente est convergente.*

Proposition 2.1.6 (**Sommation par paquets**) *Soit $\sum u_n$ une série dans E. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$* **strictement croissante**, *et posons $v_n = \sum\limits_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k$. Alors, si $\sum u_n$ converge, il en est de même de $\sum v_n$ et $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{0}^{\infty} v_n$.*

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple $u_n = (-1)^n$: $\sum u_n$ diverge, et si $\varphi(n) = 2n$, $v_n = 0$.

Théorème 2.1.7 *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée intégrable sur tout intervalle $[0, x]$, $x > 0$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que sur $[a, +\infty[$ f est décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ (i.e. $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt$) sont de même nature.*

Exemples. 1) Séries de Riemann: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

2) Séries de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2.2 Séries numériques à termes positifs

Théorème 2.2.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ est majorée (noté: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$).*

Proposition 2.2.2 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\exists n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ on a $u_n \leq v_n$. Alors:*
(a) $\sum_0^{\infty} v_n < +\infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} u_n < +\infty$;
(b) $\sum_0^{\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} v_n = +\infty$.

Corollaire 2.2.3 *u_n et v_n étant comme ci-dessus, on a:*
(i) si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, alors: $\sum_0^{\infty} v_n < +\infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} u_n < +\infty$;
(ii) si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \neq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature;
(iii) si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, alors $\sum_0^{\infty} u_n < +\infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} v_n < +\infty$.

Rappel sur les notations $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$: soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Par définition:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{j\geq n} a_j\right) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{j\geq n} a_j\right) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

1°) $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ si et seulement si:
- si $a < +\infty$: $\forall\epsilon > 0$, $\exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow a_n \leq a + \epsilon$, et, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k \geq n$ tel que $a_k \geq a - \epsilon$;
- si $a = +\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A > 0$, $\exists k \geq n$ tel que $a_k \geq A$.

Il revient au même de dire que a est la plus grande valeur d'adhérence de (a_n).

2°) $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ si et seulement si:
- si $a > -\infty$: $\forall\epsilon > 0$, $\exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow a_n \geq a - \epsilon$, et, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k \geq n$ tel que $a_k \leq a + \epsilon$;
- si $a = -\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A > 0$, $\exists k \geq n$ tel que $a_k \leq -A$.

Il revient au même de dire que a est la plus petite valeur d'adhérence de (a_n).

Remarque. On notera qu'une suite (a_n) est convergente si et seulement si $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

Proposition 2.2.4 **(regle de Cauchy)** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(u_n)^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *converge;*

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(u_n)^{1/n} > 1$ *(ou seulement s'il existe une infinité de valeurs de n telles que $(u_n)^{1/n} \geq 1$)* $\Rightarrow \sum u_n$ *diverge.*

Remarques. 1°) Si $\overline{\lim_{n\to\infty}}(u_n)^{1/n} = 1$ on ne peut rien dire: par exemple si $u_n = 1/n$, on a $\overline{\lim_n} u_n^{1/n} = 1$ et $\sum u_n = +\infty$, par contre, si $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a encore $\overline{\lim_n} u_n^{1/n} = 1$ mais $\sum u_n$ converge.

2°) Si $\overline{\lim_n} u_n^{1/n} = k < 1$, on peut majorer le reste de la série: si $k < k_1 < 1$, pour $n \geq n_0$, on a $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p \leq \frac{k_1^{n+1}}{1-k_1}$. En général on ne peut pas majorer le reste $\sum_n^{\infty} u_p$ d'une série convergente à termes positifs: si $\alpha_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, et si $S > 0$, il existe une série à termes positifs $\sum u_n$ telle que: $\sum_0^{\infty} u_n = S$ et il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sum_n^{\infty} u_p \geq \alpha_n$.

Proposition 2.2.5 **(regle de d'Alembert)** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *converge;*

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *(ou seulement s'il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$)* $\Rightarrow \sum u_n$ *diverge.*

Remarque. 1°) Le fait que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ **n'entraine pas la divergence**: par exemple $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n = p^2 \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$, implique $\sum u_n < +\infty$ et $\frac{u_{p^2}}{u_{p^2-1}} = \frac{(p^2-1)^2}{p^2} \longrightarrow +\infty$.

2°) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = l$, mais la réciproque est fausse.

Exercice. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $p > 1$ et $A > 0$ tels que, pour tout n, l'on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + \frac{\alpha_n}{n^p}$, $|\alpha_n| \leq A$. Alors la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\lambda > 1$.

Indications:

-Si $\lambda > 1$, $\exists k > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq n_0 \Rightarrow n u_n - (n+1)u_{n+1} > k u_{n+1}$. En additionant, il vient: $k \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} u_j \leq n_0 u_{n_0} - (n_0+p)u_{n_0+p} \leq n_0 u_{n_0}$.

-Si $\lambda \leq 1$, on pose $a_n = \begin{cases} n & \text{si } \lambda < 1 \\ n\log n & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$. Alors, pour $n \geq n_0$, on a: si $\lambda < 1$, $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, et, si $\lambda = 1$, $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\log n} \leq 1 + \frac{1}{n} \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; par suite $u_{n+1} \geq u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \sum_1^{\infty} u_{n_0+p} \geq u_{n_0} a_{n_0} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_{n_0+p}} = +\infty$.

2.3 Séries normalement (absolument) convergentes

Définition 2.3.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans espace normé* E*. On dit que la série* $\sum u_n$ *est* **commutativement convergente** *si, pour toute bijection* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*, la série* $\sum u_{\varphi(n)}$ *et convergente et si* $\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty u_{\varphi(n)}$*.*

Théorème 2.3.2 *Soit* $\sum u_n$ *une série dans un espace normé.*
1) Si $\sum u_n$ *et* $\sum \|u_n\|$ *sont convergentes, alors* $\sum u_n$ *est commutativement convergente.*
2) Si $E = \mathbb{R}^p$ *ou* $\mathbb{C}^p$*, ou plus généralement, un espace normé de dimension finie,* $\sum u_n$ *est commutativement convergente si et seulement si elle est normalement convergente.*

Remarques. 1°) Dans le 1) du théorème l'hypothèse $\sum u_n$ convergente est inutile si E est complet.
2°) En général, commutativement convergent équivaut à sommable.

Proposition 2.3.3 *(***produit de séries***) Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries dans une algèbre normée* E*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$*. Si les deux séries sont convergentes et si l'une des deux est normalement convergente alors* $\sum w_n$ *est convergente et* $\sum_0^\infty w_n = \Big(\sum_0^\infty u_n\Big)\Big(\sum_0^\infty v_n\Big)$*. Si de plus les deux séries sont normalement convergentes il en est de même de* $\sum w_n$*.*

Remarque. Le produit défini ci-dessus s'appelle le **produit de Cauchy**. Il est possible de définir d'autres produits de séries. Par exemple le **produit de Dirichlet** est défini par $z_n = \sum_{ij=n} u_i v_j$ et possède les même propriétés que le produit de Cauchy.

2.4 Séries non normalement (absolument) convergentes

Proposition 2.4.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels. Posons* $u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $u_n^- = -(u_n - u_n^+)$.
1) $\sum |u_n|$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n^+$ *et* $\sum u_n^-$ *convergent.*
2) Supposons que $\sum u_n$ *converge. Alors* $\sum |u_n|$ *diverge* $\Leftrightarrow \sum u_n^+$ *et* $\sum u_n^-$ *divergent.*

Théorème 2.4.2 (**theoreme d'Abel**) *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries dans une algèbre de* **Banach**. *On suppose que:*

(i) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{i=n}^{m} b_i \right\| \leq M$, *$M$ étant une constante indépendante de n et m;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n - a_{n+1}\| < +\infty$.

Alors la série $\sum a_n b_n$ *est convergente.*

Corollaire 2.4.3 (**series alternees**) *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Si la suite* (u_n) *est décroissante et tend vers zéro, alors la série* $\sum (-1)^n u_n$ *est convergente.*

Exemples. 1°) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$: **série harmonique**. Plus généralement, si (a_n) est une suite de nombres réels qui tend en décroissant vers zéro et si $\theta \neq 2k\pi$, la série $\sum a_n e^{in\theta}$ est convergente.

2°) Les hypothèses du théorème d'Abel ne peuvent être affaiblies: par exemple, si

$$u_n = \frac{(-1)^n n + n^{1/2}}{n\sqrt{n}},$$

la suite u_n est alternée et tend vers zéro bien que la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 2.4.4 *Soit* $\sum u_n$ *une série* **convergente** *à termes réels telle que* $\sum_0^{\infty} |u_n| = +\infty$. *Alors, pour tout* $l \in \mathbb{R}$ *il existe une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *sur lui-même telle que* $\sum_0^{\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Chapitre 3

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

3.1 Suites de fonctions

Notations. Si A et B sont deux ensembles, on notera $\mathcal{F}(A;B)$ l'ensemble des applications de A dans B. Si F est un espace normé, on notera $\mathcal{BF}(A;E)$ l'ensemble des applications **bornées** (i.e. $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\| < +\infty$) de A dans E. Cet espace sera muni de la norme $\|f\|_\infty$ notée parfois $\|f\|_A$. Si E est une algèbre normée, $\mathcal{BF}(A;E)$ est aussi une algèbre normée.

Définition 3.1.1 *On appelle suite dans $\mathcal{F}(A;B)$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(A;B)$. On la note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 3.1.2 *Soit X un espace métrique, et soient f_n et f des applications de A dans X. On dit que la suite (f_n)* **converge simplement** *vers f si $\forall x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Exemples. 1°) Sur $[0,1]$, x^n converge simplement vers la fonction qui vaut 0 en tout point de $[0,1[$ et 1 en 1. En particulier f n'est pas continue.

2°) De même, sur $[0,+\infty[$, la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue.

3°) Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, et posons $f_n(x) = f(x/n)$. Alors la suite (f_n) converge simplement vers zéro, mais pour tout n, $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} |f(x)|$ qui est non nul si $f \not\equiv 0$: par convergence simple, les extrémas ne sont pas concervés.

4°) Soit $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \end{cases}$. Alors (f_n) converge simplement vers 0 bien que $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$ pour tout n: l'intégrale n'est pas concervée par convergence simple.

Définition 3.1.3 *Soit X un espace métrique, et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions de A dans X. On dit que la suite (f_n)* **converge uniformément** *vers f si $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sup\limits_{x\in A} d\Big(f_n(x), f(x)\Big)\right] = 0$ (dans un espace normé X, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$).*

Remarque. La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse. Par exemple, sur $[0,1[$, x^n converge simplement vers 0 mais pas uniformément.

Proposition 3.1.4 *Soient f_n et f des fonctions de A dans $\mathbb{R}^q$, $f_n = (f_n^1, ..., f_n^q)$, $f = (f^1, ...f^q)$. Alors, (f_n) converge uniformément (simplement) vers f si et seulement si $\forall i$, (f_n^i) converge uniformément (simplement) vers f^i.*

Exemple. Sur $[0,1]$ la suite $(x^n \log x)$ converge uniformément vers 0.

Proposition 3.1.5 *Soit E un espace normé, et soient f_n et f des fonctions de A dans E. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $f_n \in \mathcal{BF}(A; E)$;
(ii) $f \in \mathcal{BF}(A; E)$.
De plus si ces conditions sont remplies, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Remarque. Cette porposition montre en particulier la concervation des extrémas par convergence uniforme. Plus précisément, si f_n et f sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors on a: $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sup\limits_{x\in A} f_n(x)\Big) = \sup\limits_{x\in A} f(x) \leq +\infty$, et $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\inf\limits_{x\in A} f_n(x)\Big) = \inf\limits_{x\in A} f(x) \geq -\infty$.

Proposition 3.1.6 *1) Linéarité des convergences simple et uniforme.*
2) Si E est une algèbre normée, on a $\lim\limits_{n} f_n g_n = fg$ pour la convergence simple et pour la convergence uniforme si f et g sont **bornées**.
3) Si $E = \mathbb{R}$ ou *$\mathbb{C}$, si f_n converge uniformément vers f, et si* $\inf|f| > 0$, $1/f_n$ *converge uniformément vers $1/f$.*

Remarque. Si $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément et si f est non bornée, en général, $f_n g_n$ **ne converge pas uniformément** vers fg. Par exemple, si $f_n(x) = x - 1/n$ et $g_n = 1/n$, $x \in [0, +\infty[$, $f_n \longrightarrow \mathrm{id}$, $g_n \longrightarrow 0$ uniformément, mais $f_n g_n = x/n - 1/n^2$ ne tend pas uniformément vers 0 puisque $\|f_n g_n\|_\infty = +\infty$.

Théorème 3.1.7 *(***Critere de Cauchy***) Soit X un espace métrique* **complet** *et soient f_n des applications de A dans X. Alors (f_n) tend vers $f : A \longrightarrow X$ uniformément si et seulement si: $\forall \epsilon > 0$, $\exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq n(\epsilon)$ implique $\sup\limits_{x\in A} d\Big(f_p(x) - f_q(x)\Big) \leq \epsilon$ ($\Big\|f_p - f_q\Big\|_\infty \leq \epsilon$ si X est normé).*
En particulier, si E est un espace de **Banach**, *l'espace normé $\mathcal{BF}(A; E)$ est complet.*

Théorème 3.1.8 *Soient A une partie d'un espace métrique X, a un point d'accumulation de A, Y un espace métrique* **complet**, *et $f_n, f \in \mathcal{F}(A; Y)$ telles que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Si pour tout n, $\lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f_n(x) = L_n$, alors la suite (L_n) est convergente dans Y, et si L est sa limite, on a $L = \lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$.*

Corollaire 3.1.9 *Sous les même hypothèses sur A, f_n, f, et Y, si f_n est continue en $a \in A$, alors f est aussi continue en a. En particulier, si E est un espace de Banach, l'espace $\mathcal{CB}(A; E)$ des fonctions continues bornées de A dans E est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_\infty$.*

Théorème 3.1.10 *Soient $f_n, f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ telles que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. De plus, si, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$, on pose $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F.*

Théorème 3.1.11 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$, des fonctions dérivables sur I. On suppose que:*
-(i) $\exists x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$;
-(ii) $\exists g \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ telle que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout intervalle compact contenu dans I.
Alors il existe $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ dérivable sur I telle que $f' = g$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f et uniformément sur tout intervalle compact contenu dans I.

Exercice. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-x}^x \Big(1 + t/n\Big)^n dt = 2\mathrm{sh}x$, $x > 0$. *Indication*: remarquer que, pour $|t| \le x$, $\Big|e^t - \Big(1 + t/n\Big)^n\Big| \le e^x - \Big(1 + x/n\Big)^n$ car $e^t - \Big(1 + t/n\Big)^n = \sum\limits_0^\infty a_n t^n$ avec $a_n \ge 0$, $\forall n$.

3.2 Séries de fonctions

Définition 3.2.1 *Soient E un espace normé et $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathcal{F}(A; E)$. On dit que la série $\sum u_n$* **converge simplement** *(resp.* **uniformément** *(sur A))* **vers** *$S \in \mathcal{F}(A; E)$, si la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^n u_k$ converge simplement (resp. uniformément) vers S, et, dans ce cas on note $\sum\limits_{n=0}^\infty u_n = S$.*

Proposition 3.2.2 *Les résultats des Proposition 3, théorèmes 1, 2, 3, 4, ainsi que le corollaire du théorème 2 s'étendent aux séries de fonctions.*

Proposition 3.2.3 *Soient $u_n \in \mathcal{F}(A; E)$, $v_n \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}_+)$.*
1) Supposons que $\forall x \in A$, $\|u_n(x)\| \leq v_n(x)$. Alors, si $\sum v_n$ converge uniformément (resp. simplement), $\sum \|u_n(x)\|$ converge uniformément (resp. simplement).
2) Si E est **complet**, *$\sum \|u_n(x)\|$ converge uniformément (resp. simplement) implique $\sum u_n$ converge uniformément (resp.simplement).*

Remarque. La proposition ci-dessus dit que: $\sum \|u_n\|_\infty$ converge $\Rightarrow$ $\sum \|u_n(x)\|_E$ converge uniformément $\Rightarrow$ (si E est complet) $\sum u_n$ converge. **Mais** $\sum u_n$ converge uniformément **n'implique pas** $\sum \|u_n\|_\infty$ converge **ni** $\sum \|u_n(x)\|_E$ converge.

Définition 3.2.4 *Soient $u_n \in \mathcal{F}(A; E)$, E étant un espace normé. On dit que la série $\sum u_n$ est* **normalement convergente** *si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente (i.e. si u_n est bornée pour tout n et si $\sum u_n$ est normalement convergente dans l'espace normé $\mathcal{BF}(A; E)$).*

Remarque. La proposition 5 dit que, si E est complet, la convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème 3.2.5 (**Theoreme d'Abel**) *Soient E une algèbre de Banach, a_n et b_n des éléments de $\mathcal{F}(A; E)$. On suppose que:*

-(i) il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{p=0}^{n} b_p \right\|_\infty \leq M$;

-(ii) $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_\infty = 0$;

-(iii) la série de fonctions $\sum \|a_n(x) - a_{n+1}(x)\|_E$ converge uniformément (sur A).

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge uniformément (sur A).

Si de plus la série $\sum a_n - a_{n+1}$ converge normalement, alors la série $\sum a_n b_n$ converge normalement.

Corollaire 3.2.6 *Si dans le théorème 5 on remplace (ii) et (iii) par: la suite (a_n) tend vers zéro uniformément en* **décroissant**, *alors $\sum a_n b_n$ est uniformément convergente.*

exemple. La série de fonctions $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge simplement pour $\theta \neq 2k\pi$ et uniformément sur tout intervalle $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

Chapitre 4

SERIES ENTIERES

4.1 Series entières, rayon de convergence

Définition 4.1.1 *On appelle série entière d'une variable complexe une série de fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ la forme $\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. a_n s'appelle le coéficient d'ordre n de la série entière et a_0 le coéficient constant.*

Proposition 4.1.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Suposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq M$. Alors:*
a) La série entière $\sum a_n z^n$ converge simplement dans le disque ouvert $B(0, |z_0|)$;
b) Pour $0 \leq r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge **normalement** *dans le disque fermé $\overline{B}(0, r)$. Plus précisément, si $b_n(r) = M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$, on a $\|a_n z^n\|_{\overline{B}(0,r)} \leq b_n(r)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(r) < +\infty$.*

Définition 4.1.3 *On appelle* **rayon de convergence** *de la série entière $\sum a_n z^n$ le réel $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ défini par:*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \exists M_r > 0 \text{ t.q. } |a_n r^n| \leq M_r,\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque. Il est clair que R existe toujours, et, si $0 \leq r < R$, M_r existe alors que si $r > R$, M_r n'existe pas.

Théorème 4.1.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*
1) Si $R = 0$, la série converge seulement en 0.
2) Si $R = +\infty$, la série est normalement convergente sur tout disque $\overline{B}(0, r)$, $0 \leq r < +\infty$.
3) Si $r \in]0, +\infty[$, la série est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{B}(0, r)$ avec $0 \leq r < R$ (donc converge simplement sur le disque ouvert $B(0, R)$) et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.

Remarques. Le disque ouvert $B(0,R)$ s'appelle le **disque de convergence de $\sum a_n z^n$.** Le théorème 1 montre que si $r < R$ la série converge uniformément sur $\overline{B}(0,r)$. En général, il n'y a pas convergence uniforme sur $B(0,R)$ (par exemple $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$) **mais** il se peut qu'il y ait convergence normale sur $\overline{B}(0,R)$ (par exemple, si $a_n \geq 0$, $\sum a_n < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, la série entière $\sum a_n z^n$ a 1 pour rayon de convergence et $\sum \|a_n z^n\|_{B(0,1)} = \sum a_n < +\infty$).

Exemples. La série entière $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a $+\infty$ pour rayon de convergence. Par contre, la série $\sum n! z^n$ a 0 comme rayon de convergence.

Théorème 4.1.5 *Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}.$$

Remarque. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe alors R^{-1} est égal à cette limite soit encore $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Proposition 4.1.6 *La somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ d'une série entière est une fonction continue sur le disque de convergence.*

Proposition 4.1.7 *(**Principe des zeros isoles**) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière non identiquement nulle de rayon de convergence $R > 0$. Alors, il existe $r \in]0,R]$ tel que pour $z \in B(0,r)$, $z \neq 0$ si $a_0 = 0$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq 0$.*

Corollaire 4.1.8 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences strictement positifs. S'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro telle que, pour tout k, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z_k^n$, alors $a_n = b_n$ pour tout n.*

Proposition 4.1.9 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'. Supposons $R \leq R'$. Alors:*

1) Si $R < R'$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R" = R$.

2) Si $R = R'$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $\geq R$ (il peut être $> R$).

3) La série produit $\sum \Big(\sum\limits_{i+j=n} a_i b_j\Big) z^n$ a un rayon de convergence $\geq R$ (il peut être $> R$).

Remarque. *Composition des séries entières:* soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence > 0. Si $a_0 = 0$, $\sum b_n \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i\Big)^n$ est une série entière de rayon de convergence > 0 (j'ai seulement indiqué le résultat).

4.2 Dérivabilité, développement de Taylor

Définition 4.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est* **dérivable au sens complexe en** $z \in \Omega$ *si* $\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}^*} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$ *existe. Si f est dérivable au sens complexe en tout point de Ω, on dit que f est dérivable au sens complexe dans Ω et l'application $z \longmapsto f'(z)$ s'appelle la* **dérivée** *de f.*

Remarque. Si f est dérivable dans Ω et si $z_0 \in \Omega$, pour $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto f(z_0 + x\zeta_0)$ est definie et dérivable, au sens usuel, dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$.*
a) Si f est dérvable au sens complexe en z_0 alors f est continue en z_0.
b) Si f et g sont dérivables au sens complexe en $z_0 \in \Omega$, alors $\lambda f + \mu g$ et fg le sont, et, $(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0)$ et $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) + g'(z_0)$.
c) Si g est dérivable au sens complexe en z_0 et si $g(z_0) \neq 0$ alors $1/g$ est définie au voisinage de z_0 et est dérivable au sens complexe en z_0, et $(1/g)'(z_0) = -g'(z_0)/g(z_0)^2$.
d) Si Ω est connexe, f dérivable au sens complexe dans Ω et si $f' \equiv 0$ dans Ω alors f est constante dans Ω.

Théorème 4.2.3 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.*
a) La série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a R pour rayon de convergence.
b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est dérivable au sens complexe dans $B(0, R)$ et, pour $z \in \Omega$, on a $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Corollaire 4.2.4 *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alors f est indéfiniement dérivable au sens complexe dans $B(0, R)$, et, $\forall z \in B(0, R)$, $f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n! a_n$. En d'autres termes, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ dans $B(0, R)$: f est somme de sa série de Taylor à l'origine.*

Proposition 4.2.5 *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alors pour tout $z_0 \in B(0, R)$, la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $\geq R - |z_0|$, et, pour $|z - z_0| < R - |z_0|$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$: développement de Taylor au point $z_0 \in B(0, R)$.*

Lemme 4.2.6 (admis) *Soit$(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes. Si la série double $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p=0}^{\infty}|a_{n,p}|\Big)$ est convergente, alors les séries $\sum_p a_{n,p}$ et $\sum_n a_{n,p}$ sont convergentes $\forall n$ et $\forall p$ respectivement, et les séries $\sum_n \Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}\Big)$ et $\sum_p \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}\Big)$ sont convergentes et ont même somme.*

Remarque. Il se peut que la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$ ait un rayon de convergence $> R - |z_0|$. Par exemple, si $f(z) = \frac{1}{1 - iz}$, et si $x_0 \in]-1, 1[$, on a $f(z) = \frac{1}{1 - ix_0}\Big(1 - i\frac{z - x_0}{1 - ix_0}\Big)^{-1}$, soit $f(z) = \sum \frac{i^n}{(1 - ix_0)^{n+1}}(z - x_0)^n$, qui a pour rayon de convergence $(1 + x_0^2)^{1/2}$.

Proposition 4.2.7 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R, et, si on pose $g(z) = a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, on a $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans $B(0, R)$.*

Exemple. $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, et le rayon de convergence est 1. Par suite, $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$ a 1 pour rayon de convergence et $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $\varphi(x) = \mathrm{Arctg}x$, $|x| < 1$.

4.3 Fonctions analytiques

Définition 4.3.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est* **développable en série entière au voisinage de** *x_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ ayant un rayon de convergence $R > 0$ et un réel r, $0 < r \leq R$, tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$ et, pour $x \in B(x_0, r)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. De plus on dit que f est* **analytique dans** *Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω.*

Remarque. Si f est développable en série entière en x_0, alors f est indéfiniment dérivable au voisinage de x_0, au sens réel usuel ou au sens complexe. **Mais**, pour les fonctions de variable réelle la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction e^{-1/x^2} est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. On démontre par contre que, dans le cas des fonctions de variable complexe, cette réciproque est vraie. Plus précisément, on montre que toute fonction dérivable au sens complexe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ y est analytique.

Proposition 4.3.2 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction indéfiniement dérivable en x_0 (au sens réel ou complexe suivant le cas). Alors f est développable en série entière en x_0 si et seulement si la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence > 0, et, pour $|x - x_0| < \delta$, $\delta > 0$ assez petit, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.*

Proposition 4.3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
1) L'ensemble $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$ des fonctions analytiques dans Ω est une algèbre contenue dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
2) Si $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$.
3) Si $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$ alors, $1/f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \backslash \{f = 0\})$.
4) Si $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est telle que $k' \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$ alors $k \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$.
5) La composée, convenable, de deux fonctions analytiques est analytique.

Proposition 4.3.4 *(***principe des zeros isoles***) Soit $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Si f n'est pas identiquement nulle sur un ouvert non vide, $f^{-1}(0)$ est discret dans Ω.*

Proposition 4.3.5 *Soient Ω un ouvert connexe et f et g deux fonctions analytiques dans Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) $\exists x_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$;
(ii) l'ensemble $\{x \in \Omega \text{ t.q. } f(x) = g(x)\}$ a un point d'accumulation dans Ω.
(iii) $f = g$.

Proposition 4.3.6 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$;
(ii) $\forall x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage V de x_0 et deux constantes $M > 0$ et $t > 0$ tels que $\forall x \in V$, $\forall p \in \mathbb{N}$, on ait $\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M t^p$.

4.4 Fonctions analytiques usuelles

4.4.1 Fonctions élémentaires

-*Exponnentielle complexe*: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Rayon de convergence: $+\infty$.

-*Sinus complexe*: $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Rayon de convergence: $+\infty$.

-*Cosinus complexe*: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Rayon de convergence: $+\infty$.

De ces définitions on déduit les formules classiques:

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

-*Tangente complexe*: elle est définie par $\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Elle est analytique en dehors de $\{k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

-*Cotangente complexe*: $\mathrm{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, qui est analytique en dehors de $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$.

-*Sinus hyperbolique complexe*: $\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

-*cosinus hyperbolique complexe*: $\mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Les fonction trigonométriques réciproques sont elles aussi analytiques. Par exemple:

$\mathrm{Arctg} z$ est la primitive de $\frac{1}{1+z^2}$ qui s'annule à l'origine, elle est donc analytique en dehors de $\{i, -i\}$. De plus, dans $\{|z| < 1\}$, on a $\mathrm{Arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

De même, $\mathrm{Argth} z$ qui est primitive de $\frac{1}{1-z^2}$ est analytique en dehors de $\{1, -1\}$.

On procède de même pour $\mathrm{Arcsin} z$, primitive de $\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$, $|z| < 1$, $\mathrm{Argsh} z$ primitive de $\frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}$, $|z| < 1$, etc...

De plus, on a, pour la variable complexe z les formules usuelles de trigonométrie: $\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'$, $\sin z^2 + \cos z^2 = 1$, $\cos ix = \mathrm{ch} x$, $\sin ix = \mathrm{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Logarithme complexe

Si $z = re^{i\theta}$, l'équation $e^\zeta = z$ équivaut à $\zeta = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$. Le nombre θ qui est défini par z modulo $2k\pi$ s'appelle l'argument de z et se note $\arg z$. On pose alors par définition:

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

Le nombre $\log z$ est donc défini **modulo** 2π.

-Si $z \in \mathbb{R}$, on retrouve la définition usuelle du logarithme si on prend $\arg z = 0$.

-Si z, $z' \in \mathbb{C}$, on a $\log zz' = \log z + \log z'$ (modulo 2π). De plus, $\log z = \log z'$ implique $z = z'$.

Définition 4.4.1 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On dit qu'une application* **continue** *de Ω dans $\mathbb{C}$ est une* **détermination du logarithme dans** Ω *si, $\forall z \in \Omega$, on a $e^{f(z)} = z$.*

Proposition 4.4.2 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. Si f est une détermination de $\log z$ dans Ω toute autre détermination est de la forme $f(z) + 2ik\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 4.4.3 *(admise) Si Ω est un ouvert connexe* **simplement connexe** *de $\mathbb{C}$, alors il existe une détermination de $\log z$ dans Ω.*

Remarque. Pour une déternination donnée, on na pas nécéssairement $\log zz' = \log z + \log z'$ pour $z,\ z' \in \Omega$ tels que $zz' \in \Omega$.

Proposition 4.4.4 *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et f une détermination de $\log z$ dans Ω. Alors f est dérivable au sens complexe dans Ω et $f'(z) = 1/z$. De plus f est analytique dans Ω.*

4.4.3 Détermination principale du logarithme

On prend $\Omega = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[$. Alors, si $z \in \Omega$, il existe un unique $r \in [0, +\infty[$ et un unique $\theta \in]-\pi, +\pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$. Ce θ s'appelle la **détermination principale de l'argument de** z et se note $\mathrm{Arg} z$. On appelle alors **détermination principale du logarithme** la détermination de $\log z$ dans Ω définie par $\mathrm{Log} z = \log|z| + i\mathrm{Arg} z$.

On peut remarquer que si $z,\ z' \in \Omega$, et si $|\mathrm{Arg} z + \mathrm{Arg} z'| < \pi$, on a $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log} z + \mathrm{Log} z'$. Mais en général cette formule est fausse.

Proposition 4.4.5 *Pour $|z| < 1$, on a $\mathrm{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$.*

Chapitre 5

SERIES DE FOURIER

5.1 Fonctions 2π-périodiques, séries trigonométriques

Rappels. Soit $\mathcal{R}([0,2\pi])$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. L'application

$$(f,g) \longmapsto < f,g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

est une forme hermitienne sur $\mathcal{R}([O,2\pi])$. La semi-norme qui lui est associée est

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaires qui lui sont associées sont respectivement

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\right| \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

et

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

De plus, on a $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\Re\text{e} < f,g >$, et en particulier, si f et g sont orthogonales (i.e. $< f,g >= 0$), $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$.

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}([0,2\pi])$ est un **système orthonormal** si $< f_p, f_q > = \delta_{pq}$.

Exemple. La famille $\Big(\frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{1/2}}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de même que la famille

$$\Big(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \frac{\cos nx}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\sin nx}{(\pi)^{1/2}}\Big)_{n\in\mathbb{N}_*}.$$

Fonctions 2π-périodiques. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est **périodique de période** T (ou T-**périodique**) si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$. Si f est T-périodique, $T \neq 0$, et si $T_1 \neq 0$, alors $x \longmapsto f\Big(\frac{Tx}{T_1}\Big)$ est T_1-périodique. Dans la suite, on ne s'interressera qu'au fonctions 2π-périodiques.

Exemples. Polynômes trigonométriques: $\sum\limits_{k=-m}^{n} c_k e^{ikx}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx$, $\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \sin kx$.

Remarque. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques s'identifie à l'espace vectoriel des fonctions définies sur un intervalle $[a, a+2\pi]$ telles que $f(a) = f(a+2\pi)$.

Notations. Nous noterons $P(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques intégrables sur tout intervalle $[a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$. $P(\mathbb{R})$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ identifiée a une sous-algèbre de $\mathcal{R}([0, 2\pi])$. Si $f \in P(\mathbb{R})$, elle est intégrable sur tout segment $[a, b]$, et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{a+2k\pi}^{b+2k\pi} f(t)dt$. De plus, l'application $a \longmapsto \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)dt$ est constante. Par exemple, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt$.

On notera $\mathcal{T}_N$ l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, c'est-à-dire la sous-algèbre de $P(\mathbb{R})$ formée par les fonctions qui s'écrivent $\sum\limits_{k=-N}^{k=+N} c_k e^{ikx}$. Il est clair que $\left(e^{ikx}\right)_{|k|\leq N}$ et

$$(1, \cos x, \sin x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \cos Nx, \sin Nx)$$

sont deux bases de $\mathcal{T}_N$: on a

$$\sum_{k=-N}^{k=+N} c_k e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où $a_0 = c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$ (a_k et b_k ne sont pas réels en général) et $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 2(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2)$, $k \geq 1$.

Définition 5.1.1 *On appelle* **série trigonométrique** *une série de fonctions de la forme* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $c_n \in \mathbb{C}$. *Si on pose* $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ *et* $b_n = i(c_n + c_{-n})$, *cette série s'écrit aussi* $a_0 + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *dans le sens suivant: si* $S_N = \sum\limits_{|n|\leq N} c_n e^{inx}$, *on a* $S_N = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. *On dit que* $\sum\limits_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *converge simplement (resp. uniformément, resp. normalement) si la suite* S_N *converge simplement(resp. uniformément, resp. si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| + |c_{-n}| < +\infty$ *soit encore* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$*).*

Remarque. $\sum\limits_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge si et seulement si la série de fonctions $c_0 + \sum\limits_{n\geq 1}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx})$ converge.

Proposition 5.1.2 *1) Une série trigonométrique normalement convergente est uniformément convergente.*

2) S'il existe deux réels $M > 0$ et $p > 1$ tels que $\forall n \in \mathbb{Z}_*$, $|c_n| \leq \frac{M}{|n|^p}$ (ou ce qui revient au même, $\max(|a_n|, |b_n|) \leq \frac{M}{|n|^p}$), la série trigonométrique $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente. De plus, si p est un entier ≥ 2, la somme $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ est une fonction $p-2$ fois dérivable et, pour $j \leq p-2$,

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\right)^{(j)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^j c_n e^{inx}.$$

5.2 Série de Fourier d'une fonction

Problème: étant donné $f \in P(\mathbb{R})$, existe-t-il une série trigonométrique telle que $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$?

Proposition 5.2.1 *Soit $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique. Si elle converge uniformément, et si $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, alors $f \in P(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} < f, e^{inx} >$.*

Définition 5.2.2 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. On appelle* **coefficients de Fourier complexes** (*resp.* **réels**) *de f les nombres complexes $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} < f, e^{inx} > = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} < f, 1 >$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} < f, \cos nx >$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} < f, \sin nx >$, $n \geq 1$). La série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

s'appelle la **série de Fourier de** *f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(f)e^{ikx}$ $(= a_0 + \sum_{1\leq k\leq N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx))$.*

Remarques. 1) $f \longmapsto c_n(f)$, $f \longmapsto a_n(f)$ et $f \longmapsto b_n(f)$ sont des applications $\mathbb{C}$-linéaires.

2) Si f est paire (i.e. $f(-x) = f(x)$) on a, $\forall n$, $b_n(f) = 0$, et, si f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)$) on a, $\forall n$, $a_n(f) = 0$.

Proposition 5.2.3 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$.*

1) Si f est $\mathcal{C}^1$ **par morceaux et continue** *alors $f' \in P(\mathbb{R})$ et $c_n(f') = inc_n(f)$: la série de Fourier de f' est obtenue en dérivant terme à terme celle de f*

2) Si f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux, $k \geq 2$ (i.e. f est $\mathcal{C}^{k-1}$ et $f^{(k-1)}$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux) alors, pour $n \neq 0$, $|c_n(f)| \leq \dfrac{\sup |f^{(k)}|}{|n|^k}$.

3) En particulier, si f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux, $k \geq 2$, la série de Fourier de f converge normalement.

RemarqueS. 1) Le 1) de la proposition ci-dessus peut être faux si on ne suppose pas f continue. Par exemple, la fonction $f(x) = x$ pour $|x| < \pi$ est telle que $f' \equiv 1$, la série de Fourier de f est $2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$, et en dérivant terme à terme, on trouve $2\sum(-1)^n\cos nx$ qui est une série divergente non égale à la série de Fourier de 1.

2) Nous verrons plus tard que si $f \in P(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

3) En général, la série de Fourier d'une fonction continue de $P(\mathbb{R})$ ne converge même pas simplement vers f.

Définition 5.2.4 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. On appelle* **moyennes de Cesaro** *de la série de Fourier de f les moyennes arithmétiques $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$, $n \geq 1$.*

Proposition 5.2.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, soit K_n la fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par: $K_n(u) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2$. Alors, pour toute $f \in P(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, on a*

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)K_n(x-t)dt.$$

La fonction $u \longmapsto K_n(u)$ s'appelle le **noyau de Fejer**.

Théorème 5.2.6 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. Si f est continue, la suite de fonctions $(\sigma_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.*

Lemme 5.2.7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, le noyau de Fejer vérifie les propriétes suivantes:*

a) $K_n(u) \geq 0$;

b) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} K_n(u)du = 1$;

c) $\forall \eta > 0$, $\lim_{n\to\infty} \|K_n\|_{[\eta,+\pi]} = \lim_{n\to\infty} \|K_n\|_{[-\pi,\eta]} = 0$.

Corollaire 5.2.8 *Soit $f \in P(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Si f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux, $k \geq 2$, la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

5.3 La théorie hilbertienne

Proposition 5.3.1 *Soient $f \in P(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}$.*
1) $\forall Q \in \mathcal{T}_N$, on a $< f - S_N(f), Q >= 0$.
2) $\|f - S_N(f)\|_2^2 = \inf_{Q \in \mathcal{T}_N} \|f - Q\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{-N}^{+N} |c_k(f)|^2$.

Théorème 5.3.2 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. On a $\lim_{N \to \infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$. En particulier, on a $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{-\infty} |c_k(f)|^2$ (***identite de Parseval***).*

Lemme 5.3.3 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. Alors, $\lim_{N \to \infty} \|f - \sigma_N(f)\|_2 = 0$.*

Corollaire 5.3.4 *Soit $f \in P(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Corollaire 5.3.5 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$.*
1) $f = 0$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = 0$.
2) $\lim_{n \to \infty} c_n(f) = 0$.

Corollaire 5.3.6 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$ continue par morceaux. Si $c_0(f) = 0$, la série trigonométrique obtenue en intégrant terme à terme la série de Fourier de f est normalement convergente vers une primitive de f.*

5.4 Le théorème de Jordan-Dirichlet

Proposition 5.4.1 *Soit $f \in P(\mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)u/2}{\sin u/2}$. Alors,*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u) D_n(u) du.$$

D_n s'appelle le **noyau de Dirichlet**.

Théorème 5.4.2 (**theoreme de Jordan-Dirichlet**) *Soit $f \in P(\mathbb{R})$ une fonction vérifiant l'une des deux conditions suivantes:*

(I) f est continue par morceaux et admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite (condition de Dirichlet).

(II) f est monotone par morceaux (condition de Jordan).

Alors:

1) Pour tout x, on a $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

2) De plus, la convergence est uniforme sur tout segment $[a,b]$ tel que:

(a) dans le cas (I), f est continue sur le segment $[a,b]$ et à dérivées bornées dans $[a,b]$;

(b) dans le cas (II), f est continue sur $[a,b]$.

Lemme 5.4.3 *Soit g une fonction intégrable sur $[\alpha,\beta]$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\sin(nt)dt = \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\cos(nt)dt = 0$$

Lemme 5.4.4 *On a* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq\alpha\leq\pi}\left|\int_0^\alpha \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du\right| \leq C.$

Lemme 5.4.5 (2^{nd} **formule de la moyenne**) *(admis) Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction monotone bornée et $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors, il existe $c\in[a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt + f(b)\int_c^b g(t)dt.$$

Exemples. 1) Soit f la fonction périodique qui vaut x sur $]-\pi,+\pi[$ et telle que $f(k\pi)=0$. Alors, $a_n(f)=0$, $b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx$ d'où, $b_n(f)=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$, et le théorème de Jordan-Dirichlet donne $f(x)=2\sum_0^\infty(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. La relation de Parseval est dans ce cas

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2dx = \frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq1}\frac{4}{n^2},\ \text{soit}\ \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2)Soit g la fonction périodique qui vaut $|x|$ sur $[-\pi,+\pi]$. Alors, $b_n(f)=0$, $a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \begin{cases} 0, & si\ n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$ Le théorème de Jordan -Dirichlet donne donc

$$g(x)=\pi/2-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^\infty\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

La relation de Parseval s'écrit ici

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2dx = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{(2p+1)^4},\ \text{soit,}\ \sum_{p=0}^\infty\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

De plus, si on pose $G(x)=\int_0^x g(t)dt$, la série de Fourier de $G(x)-\frac{\pi x}{2}$ est

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^\infty\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}.$$