MODULE

M30

Algèbre

Résumé de Cours

Ph. Charpentier

Juin 1998

Table des matières

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS QUOTIENTS

1.1 Rappels et compléments

1.1.1 Relation d'équivalence

Définition 1.1.1. On appelle relation d'équivalence sur un ensemble X une relation binaire $\mathscr{R}$ telle que :
(i) $\forall x \in X, x\mathscr{R}x$ (réflexivité) ;
(ii) $\forall x, y \in X, x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$ (symétrie) ;
(iii) $\forall x, y, z \in X, x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$ (transitivité).

Définition 1.1.2. Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble

$$\dot{x} = \{y \in X, \text{ tels que } x\mathscr{R}y\}.$$

Proposition 1.1.3. *Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. L'ensemble $\{\dot{x},\ x \in X\} \subset \mathscr{P}(X)$ est une partition de X . On le note $X/\mathscr{R}$ et on l'appelle l'ensemble quotient de X par $\mathscr{R}$.*

1.1.2 Somme directe de sous espaces vectoriels

Notation 1.1.4. **Somme de sous-espaces vectoriels.** Soient F_i des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On appelle somme des sous-espaces F_i, et on note $\sum_{i=1}^{n} F_i$ l'espace vectoriel $\{\sum_{i=1}^{n} x_i,\ x_i \in F_i\}$.

Définition 1.1.5. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et soient F_i , $1 \leq i \leq n$, des sous espaces vectoriels de E. On dit que E est somme directe des F_i, et on note alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\forall x \in E$, x s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in F_i$;

(ii) E est somme des F_i et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $x_i \in F_i$, implique $x_i = 0$, $\forall i$.

(iii) $\forall i$, soit E_i la somme des F_j, $j \neq i$. Alors E est somme des F_i et $\forall i$, $E_i \cap F_i = \{0\}$.

(iv) $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$, et si $x_i \in F_i$, $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, alors la famille $x_1, \ldots, x_n$ est libre.

Proposition 1.1.6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_i, $1 \leq i \leq n$, des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.*

Remarque 1.1.7. Lorsque $E = F_1 \oplus F_2$ on dit que F_1 et F_2 sont suplémentaires dans E.

1.2 Espaces vectoriels quotients

Définition 1.2.1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On dit que $\mathscr{R}$ est **compatible avec la structure d'espace vectoriel** de E si et seulement si : $\forall y \in E, \forall x, x' \in E, x\mathscr{R}x' \Rightarrow x + y\mathscr{R}x' + y$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x\mathscr{R}\lambda x'$.

Proposition 1.2.2. *Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. $\mathscr{R}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que : $\forall x, y \in E$, $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x - y \in F$. Le quotient $E/\mathscr{R}$ est alors noté E/F.*

Proposition 1.2.3. *E/F défini ci-dessus est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\pi : E \to E/F$, définie par $\pi(x) = \dot{x}$ (i.e. la **surjection canonique** de E sur E/F) est un endomorphisme tel que $\ker \pi = F$.*

Proposition 1.2.4. *Supposons $E = E_1 \oplus E_2$. Alors E/E_1 est isomorphe à E_2 par $\dot{\overbrace{x + y}} \longmapsto x_2$.*

Proposition 1.2.5. *Supposons $\dim E < +\infty$. Alors $\dim E/F = \dim E - \dim F$.*

Proposition 1.2.6. *Soient E et G deux espaces vectoriels, F un sous-espace de E et $f \in \mathscr{L}(E; G)$. Alors, il existe $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(E/F; G)$ tel que $\widetilde{f} \circ \pi = f$ si et seulement si $F \subset \ker f$. De plus si $F = \ker f$ alors $\widetilde{f} : E/F \to f(E)$ est un isomorphisme.*

Cette proposition se représente souvent par le diagramme « commutatif » *Diagramme (a)* de la Fig. 1.2.1.

Proposition 1.2.7. *Soient F un sous-espace de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(E/F)$ tel que $\widetilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$ si et seulement si F est stable par f i.e. $f(F) \subset F$.*

Comme pour la proposition précédente ceci se représente par le diagramme commutatif *Diagramme (b)* de la Fig. 1.2.1.

Proposition 1.2.8. *Supposons F stable par $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $f(F)$ et $f^{-1}(F)$ sont stables par f. Si F_i, $i \in I$, sont stables par f alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ l'est aussi. Soit $a \in E$; le plus petit sous-espace de E stable par f et contenant a est le sous-espace engendré par $\{a, f(a), \ldots, f^{(n)}(a), \ldots\}$.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ E/F \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ E/F \arrow[r, "\tilde{f}"'] & E/F \end{tikzcd}$$

Diagramme (a) *Diagramme (b)*

FIG. 1.2.1 –

Proposition 1.2.9. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F sous- espace de E. Alors F est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si, $(a_{i,j})$ étant la matrice de f (i : colonnes, j : lignes) dans la base (a_i), on a $a_{i,j} = 0$ pour $j > p$ et $i \leq p$.*

Proposition 1.2.10. *Supposons $\dim E < +\infty$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, les sous-espaces F_i étant stables par f. Soit (a_i) une base de E formée par une réunion de bases des F_i. Alors la matrice de f dans la base (a_i) est un tableau diagonal de matrices carrées d'ordres égaux aux dimensions des F_i. En particulier, si on peut trouver des F_i tels que, pour tout i, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $x \in F_i \Rightarrow f(x) = \lambda_i x$ alors $M(f; (a_i))$ est diagonale : on dit dans ce cas que f est **diagonalisable.***

Chapitre 2

REDUCTION DES MATRICES

2.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 2.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $x \in E$ est dit **vecteur propre** de f si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de f si $\exists x \in E$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$.

Remarque 2.1.2. $0 \in E$ est toujours vecteur propre. $0 \in \mathbb{K}$ est valeur propre $\Leftrightarrow$ f est non injectif.

Proposition 2.1.3. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*
a) A tout vecteur propre x non nul, correspond une valeur propre unique dite associée à x.
*b) $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre $\Leftrightarrow$ $V(\lambda) = \{x \in E \text{ t. q. } f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$; on l'appelle le **sous-espace propre** associé à λ. De plus, $V(\lambda)$ est stable par f.*

Remarque 2.1.4. On peut définir $V(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: alors $V(\lambda) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda$ est valeur propre.

Proposition 2.1.5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) λ est valeur propre de f ;
(ii) $f - \lambda id_E$ est non injective ;
(iii) Si $\dim E < \infty$, $f - \lambda id_E$ est non inversible.

Remarque 2.1.6. En général, $\{\lambda \in \mathbb{K} \text{ t. q. } f - \lambda id_E \text{ non inversible}\}$ s'appelle le **Spectre** de f et est plus grand que l'ensemble des valeurs propres.

Proposition 2.1.7. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient λ_i, $1 \leq \lambda_i \leq m$, les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors $V(\lambda_1) + \ldots + V(\lambda_m)$ est somme directe des $V(\lambda_i)$ (i.e. $\forall x_i \in V(\lambda_i)$, $(x_1, \ldots, x_m)$ est libre).*

Corollaire 2.1.8. $\dim E = n \Rightarrow$ *il y a au plus n valeurs propres deux à deux distinctes*

Exercice. Si λest valeurs propre de f, alors : λ^k est valeur propre de f^k pour $k \in \mathbb{N}$ et, si f est inversible, pour $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

A partir de maintenant, E est un espace vectoriel **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$. Une base (a_i) étant choisie, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exists! f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $A = M(f,(a_i))$. Par définition les valeurs propres de A sont celles de f. Ceci ne dépends pas de la base choisie :

Proposition 2.2.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) λ est valeur propre de A ;
(ii) $A - \lambda I_n$ est non inversible ;
(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Proposition 2.2.2. *1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ est invariant si on remplace A par une matrice semblable : on l'appelle le* ***polynôme caractéristique*** *de A.*

2) Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A = M(f,(a_i))$. Alors $P_A(X)$ ne dépends que de f (i.e. pas de la base (a_i) choisie). On l'appelle le ***polynôme caractéristique*** *de f et on le note $P_f(X)$.*

Remarque 2.2.3. On a $P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + \det A$. $\sum a_{ii}$s'appelle la **trace** de A et se note $tr(A)$. De même, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit $tr(f)$ et on a

$$P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(f) X^{n-1} + \ldots + \det f.$$

Proposition 2.2.4. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les valeurs propres de f sont les racines de $P_f(X)$ dans $\mathbb{K}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre d'ordre $k \geq 1$ de f si λ est racine de P_f d'ordre k. Si λ_i $1 \leq i \leq m$, sont les valeurs propres 2 à 2 distinctes de f d'ordre respectifs k_i, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k_i \leq n$. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.*

Proposition 2.2.5. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f d'ordre k, alors $1 \leq \dim V(\lambda) \leq k$.*

Proposition 2.2.6. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Supposons $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, avec $f(E_i) \subset E_i$, et posons $f_i = f_{|E_i}$. Alors $P_f = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P_{f_i}$.*

2.3 Réduction à la forme triangulaire

Théorème 2.3.1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et soient λ_i, $1 \leq i \leq m$, les racines 2 à 2 distinctes de P_f dans $\mathbb{K}$, d'ordres k_i. Supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Alors il existe une base de E dans la quelle la matrice de f est triangulaire, les éléments diagonaux étant les valeurs propres λ_i de f.*

Corollaire 2.3.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si P_A a n racines dans $\mathbb{K}$ alors A est semblable a une matrice triangulaire.*

Notation 2.3.3. Si $P \in K[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$, où $f^0 = id_E$. Si $P, Q \in K[X]$, on a $PQ(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Remarque 2.3.4. L'application $P \mapsto P(f)$ de $K[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ est un homomorphisme d'anneau.

Théorème 2.3.5. *(*CAYLAY-HAMILTON*) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$). Alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$).*

Démonstration. 1) Cas où P_f a n racines dans $\mathbb{K}$. 2) Cas général :

Lemme 2.3.6. *(admis) Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, il existe Δ sur-corps de $\mathbb{K}$ dans lequel P a n racines.*

□

Exemple important. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est clos, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P_A(X)$ a toujours n racines dans $\mathbb{K}$, et le théorème 2.3.5 montre que $P_A(A) = 0$. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P_A(X)$ n'a pas nécessairement n racines dans $\mathbb{K}$ mais on a toujours $P_A(A) = 0$.

2.4 Diagonalisation, polynôme minimal

Définition 2.4.1. $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$) est dite **diagonalisable** s'il existe une base de E (resp. une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$) telle que la matrice de f dans cette base (resp. $P^{-1}AP$) soit diagonale.

Proposition 2.4.2. *$f \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de f $\Leftrightarrow$ si λ_i, $1 \leq i \leq m$, sont les valeurs propres de f 2 à 2 distinctes, d'ordres k_i, on a $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ et $\dim(V(\lambda_i)) = k_i$, $1 \leq i \leq m$.*

Proposition 2.4.3. *$f \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si P_f a n racines 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$. En particulier, lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, si P_f n'a que des racines simples.*

Proposition 2.4.4. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ t. q. } P(f) = 0\}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{K}[X]$. En particulier, il existe un unique polynôme unitaire $\omega_f(X)$ de degré minimal tel que $\omega_f(f) = 0$. ω_f s'appelle le **polynôme minimal** de f.*

Remarque 2.4.5. Les racines de ω_f dans $\mathbb{K}$ sont des valeurs propres de f puisque ω_f divise P_f.

Proposition 2.4.6. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si λ est valeur propre de f alors $\omega_f(\lambda) = 0$.*

Corollaire 2.4.7. *ω_f divise P_f et si λ valeur propre de f d'ordre k, alors λ est racine de ω_f d'ordre h avec $1 \le h \le k$. En particulier, si P_f a n racines dans $\mathbb{K}$, on a $\omega_f(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{h_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres 2 à 2 distinctes de f d'ordre k_i et $1 \le h_i \le k_i$.*

Proposition 2.4.8. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Supposons $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, avec $f(E_i) \subset E_i$, et posons $f_i = f_{E_i}$. Alors ω_f est le ppcm des ω_{f_i}, $1 \le i \le m$.*

Théorème 2.4.9. *Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$. Supposons $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$, les P_i* ***étant premiers entre eux deux à deux****. Soient $N_i = \ker P_i(f)$, $1 \le i \le m$. Alors N_i est stable par f et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$.*

Lemme 2.4.10. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\ker P(f)$est stable par f.*

Lemme 2.4.11. *Soient P_i, $1 \le i \le m$, des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux 2 à 2. Alors les polynômes $P_i' = \prod_{j \ne i} P_j$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.*

Lemme 2.4.12. *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors $\ker P(f) \cap \ker Q(f) = \{0\}$.*

Corollaire 2.4.13. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que P_f a n racines dans $\mathbb{K}$ i.e. : si λ_i, $1 \le i \le m$, sont les racines 2 à 2 distinctes de P_f d'ordre k_i on a $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$. Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est un tableau diagonal de matrices carrées triangulaires M_i d'ordres k_i dont les éléments diagonaux sont égaux à λ_i. De plus, si $N_i = \ker(f - \lambda_i id_E)^{k_i}$ et $f_i = f_{|N_i}$, on a : $\dim N_i = k_i$, $M_i =$ matrice de f_i, $P_{f_i} = (X - \lambda_i)^{k_i}$, $\omega_{f_i} = (X - \lambda_i)^{h_i}$, $1 \le i \le m$, et $\omega_f = \prod \omega_{f_i}$.*

Remarque 2.4.14. Dans les conditions du corollaire ci-dessus, les sous-espaces N_i *sont appelés les* **sous-espaces caractéristiques** de f.

Corollaire 2.4.15. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\omega_f = \prod_{i=1}^{m} g_i^{h_i}$ la décomposition de ω_f en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. Posons $E_i = \ker(g_i^{h_i}(f))$ et $f_i = f_{|E_i}$. Alors, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, $f(E_i) \subset E_i$ et $\omega_{f_i} = g_i^{h_i}$.*

Notation 2.4.16. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Remarque 2.4.17. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente et si $\dim E = n$, alors l'ordre de nilpotence p de f vérifie $p \leq n$.

Corollaire 2.4.18. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que P_f a n racines dans $\mathbb{K}$. Alors il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable et $h \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent tels que $u \circ h = h \circ u$ et $f = u + h$. De plus, une telle décomposition est unique (u s'appelle la* ***partie diagonalisable*** *de f et h la* ***partie nilpotente****).*

Théorème 2.4.19. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est diagonalisable ;

(ii) $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$, tels que $\omega_f(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$;

(iii) P_f a n racines dans $\mathbb{K}$ et si λ_i sont les racines 2 à 2 distinctes, on a $P_f = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i - X)^{k_i}$, avec $k_i = \dim V(\lambda_i)$.

Remarque 2.4.20. 1) L'ordre d'une valeur propre λ s'appelle aussi la **multiplicité algébrique** de λ et la dimension de $V(\lambda)$ la **multiplicité géométrique**. Le théorème 2.4.19 dit donc que f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ P_f a n racines dans$\mathbb{K}$ et, pour chacune d'elles, les multiplicités algébriques et géométriques sont égales. On remarquera aussi que la diagonalisabilité dépends du corps (voir 3) ci dessous).

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $A = M(f, (a_i))$, ω_f est l'unique polynôme unitaire non nul de degré minimal tel que $\omega_f(f) = 0$ donc tel que $\omega_f(A) = 0$. On l'appelle le **polynôme minimal** de A, et on le note ω_A. Si A et B sont semblables, $\omega_A = \omega_B$. Les résultats donnés pour ω_f s'étendent à ω_A : ω_A divise P_A et A est diagonalisable $\Leftrightarrow \omega_A = \prod(X - \lambda_i)$, λ_i deux à deux distincts $\Leftrightarrow P_A = \prod(\lambda_i - X)^{k_i}$, $k_i = \dim V(\lambda_i)$, $\sum_i k_i = n$.

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K}'$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$, alors $A \in M_n(\mathbb{K}')$. Si ω_A est le polynôme minimal de A considérée comme matrice de $M_n(\mathbb{K})$, c'est aussi le polynôme minimal de A considérée comme matrice de $M_n(\mathbb{K}')$[1]. **Mais** on peut avoir $\omega_A = \prod(X - \lambda_i)$, λ_i deux à deux distincts dans $\mathbb{K}'[X]$ mais pas dans $\mathbb{K}[X]$; dans ce cas A est diagonalisable dans $\mathbb{K}'$ mais pas dans $\mathbb{K}$. Par exemple une matrice réelle peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

2.5 Réduite de Jordan d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition 2.5.1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de Jordan d'ordre m relative à λ,** la matrice $U_{m,\lambda} = (\alpha_{i,j}) \in M_m(\mathbb{K})$ (i : colonnes, j : lignes) telle que $\alpha_{i,j} = \lambda$, $1 \leq i \leq m$, $\alpha_{i,i-1} = 1$, $2 \leq i \leq m$, les autres $\alpha_{i,j}$ étant tous nuls.

[1] ω_A est de degré p signifie que A^p est dans l'espace engendré par les A^i, $0 \leq i \leq p-1$, ce qui équivaut à l'annulation de certains déterminants caractériqtiques ce qui ne dépends que des coefficients de la matrice A.

Proposition 2.5.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Supposons que A est semblable à un tableau diagonal de matrices de Jordan U_{m_i,λ_i} (λ_i non nécessairement distincts). Alors ω_A est le p.p.c.m. des polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$.*

Corollaire 2.5.3. *Un tableau diagonal de matrices de Jordan $U_{m_i,\lambda_i} est$ diagonalisable si et seulement si il est diagonal (i.e. $\forall i$, $m_i = 1$).*

Proposition 2.5.4. *Soit f un endomorphisme de E nilpotent. Alors il existe une base de E, $(b_i)_{1\leq i\leq n}$, telle que $M(f,(b_i)) = (\alpha_{i,j})$ soit un tableau diagonal de matrices de Jordan relatives à 0. i.e. $\forall i$, $f(b_i) = 0$ ou bien b_{i-1}, ou encore, $\alpha_{i,j} = 0$ si $j \neq i-1$ et $\alpha_{i,i-1} = 1$ ou 0.*

Démonstration. On suppose f nilpotente d'ordre $p \geq 2$ (i.e. $f \neq 0$), et on utilise les lemmes suivants : □

Lemme 2.5.5. *Soient $N_i = \ker(f^i)$, $1 \leq i \leq p$, de sorte que $N_1 = \ker(f)$, et $N_p = E$. Alors :*
a) Pour $1 \leq i \leq p-1$, $N_i \subset N_{i+1}$ et $N_i \neq N_{i+1}$; en particulier, $p \leq n$;
b) Pour $2 \leq i \leq p$, $f(N_i) \subset N_{i-1}$.

Lemme 2.5.6. *Pour $2 \leq i \leq p$, soit F un supplémentaire de N_{i-1} dans N_i. Alors :*
a) $f_{|F}$ est injective ;
b) si $i \geq 3$, $f(F) \cap N_{i-2} = \{0\}$.

Lemme 2.5.7. *Soit $F_1 = N_1$. Pour $2 \leq i \leq p$, il existe un supplémentaire F_i de N_{i-1} dans N_i tel que :*
a) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$;
b) pour $2 \leq i \leq p$, $f(F_i) \subset F_{i-1}$ et $f_{|F_i}$ est injective.

Remarque 2.5.8. 1) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, est un tableau diagonal de matrices de Jordan $U_{m_i,0}$, $m_i \in \mathbb{N}^*$, alors A est nilpotente d'ordre $p = \max\{m_i\}$ et $\omega_A(X) = X^p$. La proposition 2.5.4 dit donc que les matrices nilpotentes sont les matrices semblables à un tableau diagonal de matrices de Jordan relatives à 0.
2) Un endomorphisme nilpotent est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il est nul.

Théorème 2.5.9. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que P_A a n racines dans $\mathbb{K}$. Alors A est semblables à un tableau diagonal de matrices de Jordan relatives aux valeurs propres de A. Ce tableau est appelé une **réduite de Jordan de** A.*

Remarque 2.5.10. 1) Le théorème 2.5.9 et la proposition 2.5.4 redonnent le théorème 2.4.19.
2) On peut énoncer le théorème 2.5.9 pour les endomorphismes.
3) Il n'y a pas en général une seule réduite de Jordan.

Corollaire 2.5.11. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathscr{L}(E)$). On suppose que son polynôme caractéristique a n racines dans $\mathbb{K}$. Alors A (resp. f) est diagonalisable $\Leftrightarrow$ toute réduite de Jordan de A (resp. f) est diagonale.*

2.6 Application aux systèmes différentiels

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, $G = (g_1, \dots, g_n)$ une application continue d'un intervalle $I = [a, b]$ dans $\mathbb{C}^n$, $V_0 \in \mathbb{C}^n$ et $t_0 \in I$. On cherche les fonctions $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de I dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\forall t \in I$, on a

$$Y'(t) + AY(t) = G(t), \text{ et } Y(t_0) = V_0. \tag{2.6.1}$$

Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire. L'équation (2.6.1) équivaut à la recherche de $Z = (z_1, \dots, z_n)$, fonction de I dans $\mathbb{C}^n$ telle que

$$Z'(t) + \left(P^{-1}AP\right) Z(t) = P^{-1}G(t) \text{ et } Z(t_0) = P^{-1}V_0. \tag{2.6.2}$$

Alors la théorie des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre montre que (2.6.2) a une solution unique définie sur I.

Ecriture des solutions.

On considère tout d'abord l'équation homogène

$$Y'(t) + AY(t) = 0. \tag{2.6.3}$$

Alors il existe une unique matrice $R(t) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que la solution de (2.6.3) qui vaut $X \in \mathbb{C}^n$ en $t = 0$ est définie par : $Y(t) = R(t)X$, et de plus $R(0) = I_n$.

Par suite : $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ est inversible, $R(-t) = R(t)^{-1}$ et $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $R(t_1 + t_2) = R(t_1)R(t_2)$.

La solution de l'équation (2.6.1) s'écrit alors

$$Y(t) = R(t - t_0)V_0 + \int_{t_0}^{t} R(t - s)G(s)ds.$$

Démonstration. Deux possibilités : ou bien on montre l'existence de $R(t)$ par un calcul direct des solutions de (2.6.3) ou bien on introduit $e^{-tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-tA)^n}{n!}$, et alors $\left(e^{-tA}\right)' = -Ae^{-tA}$ d'où $R(t) = e^{-tA}$. □

Chapitre 3

DUALITE

3.1 Formes linéaires, dual d'un espace vectoriel

Définition 3.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle **forme linéaire** sur E, tout élément de $\mathscr{L}(E;\mathbb{K})$. $\mathscr{L}(E;\mathbb{K})$ s'appelle le **dual** de E et se note E^*. Le dual de E^* s'appelle le **bidual** de E et se note E^{**}.

Notation 3.1.2. 1) L'application $(x,f) \mapsto < x, f >= f(x)$ de $E \times E^*$ dans $\mathbb{K}$ s'appelle la **forme bilinéaire canonique**.

2) Les éléments de E^* seront notés x^*, et ceux de E^{**}, x^{**}.

3) $\forall x \in E$, soit $\widetilde{x} \in E^{**}$ défini par $\forall x^* \in E^*$, $< x^*, \widetilde{x} >=< x, x^* >$. Alors l'application $x \mapsto \widetilde{x}$ est un homomorphisme de E dans son bidual E^{**}.

Proposition 3.1.3. *L'homomorphisme $x \mapsto \widetilde{x}$ de E dans son bidual est injectif.*

Théorème 3.1.4. *Supposons E de dimension finie n. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Soit $a_i^* \in E^*$ défini par $< a_j, a_i^* >= \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq n$. Alors $(a_j^*)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E appelée la **base duale** de la base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Corollaire 3.1.5. *Supposons* $\dim E < +\infty$. *Alors :*

(i) E et E^* sont isomorphes ;

(ii) $x \mapsto \widetilde{x}$ est un isomorphisme canonique de E sur E^{**}.

Remarque 3.1.6. Si $\dim E = +\infty$, $x \mapsto \widetilde{x}$ n'est jamais surjectif.

3.2 Orthogonalité

Définition 3.2.1. $x \in E$ et $x^* \in E^*$ sont dit **orthogonaux** si $< x, x^* >= 0$. $A \subset E$ et $A^* \subset E^*$ sont dit **orthogonaux** si $\forall x \in A$ et $\forall x^* \in E^*$, $< x, x^* >= 0$.

Proposition 3.2.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$F^{\perp} = \{x^* \in E^*\, t.q.\, \forall x \in F, < x, x^* >= 0\}$$

*est un sous-espace vectoriel de $E^* que$ l'on appelle l'**orthogonal** de F. De même, si F^* est un sous-espace de E^*,*

$$(F^*)^{\perp} = \{x \in E\, t.q.\, \forall x^* \in F^*, < x, x^* >= 0\}$$

*est un sous-espace de E appelé l'**orthogonal** de F^* dans E.*

Remarque 3.2.3. Si $\dim E < +\infty$, E^{**} étant identifié à E, alors $(F^*)^{\perp}$ est aussi l'orthogonal de F^* dans E^{**}.

Théorème 3.2.4. *On suppose $\dim E < +\infty$. Soit F un sous-espace de E de dimension m. Alors $\dim F^{\perp} = \dim E - m$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Proposition 3.2.5. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Alors*
1) $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$;
2) Si $\dim E < +\infty$, $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$; en particulier, si $E = F \oplus G$, on a $E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$.

3.3 Transposition d'une application linéaire

Définition 3.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E; F)$. $\forall y^* \in F^*$, l'application $x \mapsto < f(x), y^* >$ est un élément de E^*. Si ${}^t f(t^*)$ est cet élément, l'application $y^* \mapsto {}^t f(y^*)$, de F^* dans E^*, est appelée la **transposée** de f. Elle est donc définie par : $\forall x \in E, \forall y^* \in F^*, < x, {}^t f(y^*) >=< f(x), y^* >$.

Remarque 3.3.2. Si $E = F$, ${}^t id_E = id_{E^*}$.

Proposition 3.3.3. *1) $f \mapsto {}^t f$ est linéaire de $\mathscr{L}(E; F)$ dans $\mathscr{L} F^*; E^*)$ et injective.*
2) soient $f \in {}'L(E; F)$ et $g \in \mathscr{L}(F; G)$. Alors ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$. Si f est bijective, ${}^t f$ est bijective et ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.
3) E et F étant de dimensions finies, $f \mapsto {}^t f$ est un isomorphisme et ${}^t({}^t f) = f$ (E^{**} et F^{**} étant identifiés à E et F).

Proposition 3.3.4. *Soient $f \in \mathscr{L}(E; F)$ et E_1 un sous-espace de E. alors $f(E_1)^{\perp} = ({}^t f)^{-1}(E_1^{\perp})$. En particulier, $f(E)^{\perp} = \ker {}^t f$.*

Proposition 3.3.5. *On suppose E et F de dimensions finies. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E; F)$, $\mathrm{rg}({}^t f = \mathrm{rg}(f)$.*

Proposition 3.3.6. *Soient (a_i) et (b_j) des bases de E et F et (a_i^*) et (b_j^*) leurs bases duales. Alors, pour $f \in \mathscr{L}(E; F)$, $M({}^t f; (b_j^*), (a_i^*)) = {}^t M(f; (a_i), (b_j))$.*

Chapitre 4

FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES

4.1 Formes bilinéaires

Définition 4.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que $f : E \times F \to K$ est une **forme bilinéaire** sur $E \times F$ si les applications $x \mapsto f(x, y)$, $x \in E$, $y \in F$ sont des formes linéaires. L'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $\mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K})$.

Proposition 4.1.2. *Dans les conditions de la définition ci-dessus, on a :*

1) $\mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;

2) $\mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K})$ est isomorphe aux espaces $\mathscr{L}(E; F^*)$ et $\mathscr{L}(F; E^*)$. Plus précisément, l'application $\varphi : \mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K}) \to \mathscr{L}(E; F^*)$ définie par $f \mapsto \varphi_f$ où $\varphi_f(x)$, $x \in E$, est l'élément de F^* défini par $< y, \varphi_f(x) >= f(x, y)$ est un isomorphisme.

Proposition 4.1.3. *Supposons E et F de dimensions finies. Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $(b_j)_{1\leq j\leq m}$ une base de F. Soient $(a_i^*)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j^*)_{1\leq j\leq m}$ leurs bases duales. Si $x^* \in E^*$ et $y^* \in F^*$, notons $x^* \otimes y^*$ la forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par $x^* \otimes y^*(x, y) = x^*(x)y^*(y)$. Alors les formes $a_i^* \otimes b_j^*$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, forment une base de $\mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K})$. En particulier, $\dim \mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K}) = nm$.*

Proposition 4.1.4. *Soit $f \in \mathscr{L}_2(E, F; \mathbb{K})$, et posons $\alpha_{ij} = f(a_i, b_j)$, (a_i) et (b_j) étant des bases respectives de E et F (de sorte que $f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a_i^* \otimes b_j^*$). On dit que la matrice $A = (\alpha_{ij})$ (i : colonnes, j : lignes) de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice de f relative aux bases (a_i) et (b_j). Si $x = \sum_i x_i a_i$ et $y = \sum_j y_j b_j$, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, on a $f(x, y) = {}^tYAX = {}^tXAY$.*

Proposition 4.1.5. *Reprenons les notations de la proposition précédents, et soient (a'_i) et (b'_j) deux autres bases de E et F. Soient P et Q les matrices de passage de (a_i) à (a'_i) et de (b_j) à (b'_j), de sorte que, si $x = \sum_i x_i a_i = \sum_i x'_i a'_i$, on a $X = PX'$ et de même, pour $y \in F$, $Y = QY'$. Alors si $f \in \mathcal{L}_2(E, F; \mathbb{K})$, $f(x, y) = {}^tY'({}^tQAP)X'$. Ainsi, la matrice de f relative aux bases (a'_i) et (b'_j) est ${}^tQAP$.*

Proposition 4.1.6. *1) Soit φ_f l'homomorphisme de E dans F^* défini par $\varphi_f(x) = f_x$ où f_x est défini par $f_x(y) = f(x,y)$. Alors $\ker \varphi_f = \{x \in E \text{ t. q. } f(x,y) = 0,\ \forall y \in F\}$. Si $\dim E < +\infty$, par définition on appelle **rang** de f le rang de φ_f.*

2) Supposons E et F de dimensions finies. Soit A la matrice de f relative à une base (a_i) de E et une base (b_j) de F. Alors, A est la matrice de φ_f relative aux bases (a_i) et (b_j^*). En particulier, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Définition 4.1.7. Soit $f \in \mathscr{L}_2(E,E;\mathbb{K}) = \mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$. On dit que f est **symétrique** (resp. **anti-symétrique**) si $\forall x,y \in E$, $f(x,y) = f(y,x)$ (resp. $f(x,y) = -f(y,x)$). En particulier, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, f est anti-symétrique si et seulement si, $\exists x \in E$, $f(x,x) = 0$, c'est à dire si f est **alternée**.

Proposition 4.1.8. *L'ensemble $\mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_2(E;\mathbb{K})$) des formes bilinéaires symétriques (resp. alternées) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$ et on a $\mathscr{L}_2(E;\mathbb{K}) = \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_2(E;\mathbb{K})$.*

Proposition 4.1.9. *Supposons que $\dim E = n$. Alors $f \in \mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$ est symétrique si et seulement si sa matrice (relative à une base quelconque de E) est symétrique. En particulier, $\dim(\mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_2(E;\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.*

4.2 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Définition 4.2.1. Soit $f \in \mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$. On appelle **forme quadratique associée à** f l'application $x \mapsto q_f(x) = f(x,x)$. De plus $f \mapsto q_f$ est un endomorphisme d'espace vectoriel non injectif. Nous noterons $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

Proposition 4.2.2. *L'application $f \mapsto q_f$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ sur $Q(E)$. L'homorphisme réciproque est donné par $q \mapsto f_q$ avec $f_q(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$. La forme bilinéaire f_q s'appelle la **forme polaire** de q.*

Remarque 4.2.3. Supposons $\dim E > +\infty$. Si A est la matrice de f relative à une base (a_i) de E, on dit que A est la matrice de q_f relative à (a_i), et $\det A$ est appelé le **discriminant** de q_f. Si $A = (\alpha_{i,j})$, on a m $q_f(x) = {}^tXAX$ c'est-à-dire $q_f(x) = \displaystyle\sum_i \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_{ij}x_ix_j$. Dans cette écriture, les termes $\alpha_{ii}x_i^2$ sont appelés les **termes carrés** et les termes $2\alpha_{ij}x_ix_j$ les **termes rectangles :** $q_f(x)$ est un polynôme homogène de degré 2.

Exemple 4.2.4. 1) Sur $\mathbb{K}^n$: $f(x,y) = \displaystyle\sum_i x_iy_i$ d'où $q_f(x) = \sum_i x_i^2$.

2) Sur $E = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$: $f(x,y) = \displaystyle\int_a^b x(t)y(t)dt$ d'où $q_f(x) = \displaystyle\int_a^b x(t)^2dt$.

Définition 4.2.5. Soit $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. Par définition on appelle **noyau** de f le sous-espace vectoriel de E défini par $\ker f = \{x \in E \text{ t. q. } \forall y \in E,\ f(x,y) = 0\} = \{y \in E \text{ t. q. } \forall x \in E,\ f(x,y) = 0\}$. f est dite **non dégénérée** si $\ker f = \{0\}$ et **dégénérée** dans le cas contraire.

Proposition 4.2.6. *1) Soit $\varphi_f \in \mathcal{L}(E;E^*)$ défini par $< y, \varphi_f(x) >= f(x,y), y \in E$. Alors* $\ker f = \ker \varphi_f$.

2) Supposons $\dim E < +\infty$. *Soit A la matrice de f relative à une base (a_i) de E. Alors f est non dégénérée si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Remarque 4.2.7. Supposons $\dim E < +\infty$. $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ est non dégénérée $\Leftrightarrow \varphi_f$ est un isomorphisme de E sur E^*. On identifie alors généralement E et E^* par cet isomorphisme, et, en utilisant les notations du chapitre précédent, on note $f(x,y) =< x, y >$, et on dit que f est un **produit scalaire**.

4.3 Orthogonalité, éléments isotropes

Définition 4.3.1. Soit $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. On dit que deux éléments de E sont **orthogonaux relativement à** f (ou à q_f) si $f(x,y) = 0$. Deux parties de E sont dites **orthogonales relativement à** f (ou à q_f) si $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $f(x,y) = 0$.

Proposition 4.3.2. *Soient $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ et F un sous-espace de E. Alors l'ensemble*

$$F^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } f(x,y) = 0,\ \forall y \in F\} = \{y \in E \text{ t.q. } f(x,y) = 0,\ \forall x \in F\}$$

*est un sous-espace vectoriel de E appelé l'**orthogonal** de F **relativement** à f (ou à q_f).*

Proposition 4.3.3. *Soient $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ et F un sous-espace de E. Alors si $F^{\perp_*}$ désigne l'orthogonal de F dans E^*, on a $F^\perp = \varphi_f\left(F^{\perp_*}\right)$. En particulier si f est **non dégénérée**, φ_f est un isomorphisme de $F^\perp$ sur $F^{\perp_*}$.*

Définition 4.3.4. Soit $\mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. Un élément $x \in E$ est dit **isotrope relativement** *à f (ou à q_f) si $q_f(x) = 0$. Un sous-espace F de E est dit* **isotrope relativement** *à f (ou à q_f) si il existe $x \in F$, $x \neq 0$, tel que $f(x,y) = 0, \forall y \in F$, c'est à dire si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.*

Exemple 4.3.5. 1) $e = \mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$: seul vecteur isotrope : 0.

2) $E = \mathbb{C}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$: il y a des vecteurs isotropes non nuls ;

3) $E = \mathbb{R}^n$, $q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right) - x_n^2$: il y a des vecteurs isotropes non nuls.

Proposition 4.3.6. *Soit $f \in \mathscr{S}_2E;\mathbb{K})$. Une famille de vecteurs non isotropes deux à deux orthogonaux est libre.*

Théorème 4.3.7. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ et F un sous-espace vectoriel de E. Le conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) F est non isotrope ;
(ii) $f_{|F}$ est non dégénérée ;
(iii) $F \cap F^\perp = \{0\}$;
(iv) $E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 4.3.8. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E non isotrope. Alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$. En particulier, si $x \in E$ est non isotrope, l'orthogonal de $\mathbb{K}x$ est un hyperplan de E ne contenant pas x.*

Proposition 4.3.9. *Soit $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. Si F est un sous-espace de E alors $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.*

Remarque 4.3.10. Même si F est non isotrope et E de dimension finie, on n'a pas nécessairement $F = \left(F^\perp\right)^\perp$. Par exemple, avec $E = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x_1y_1$ et $F = \mathbb{R}(1,0)$, on a $F^\perp = \mathbb{R}(0,1)$ d'où $F^\perp = \mathbb{R}^2$: $F^\perp$ peut être isotrope.

Proposition 4.3.11. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ **non dégénérée**, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

Remarque 4.3.12. Dans les conditions de la proposition 4.3.11, on n'a pas nécessairement $E = F \oplus F^\perp$. Par exemple, avec $E = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$, $F = \mathbb{R}(1,1)$, on a $F^\perp = F$: il peut y avoir des sous-espaces isotropes.

Proposition 4.3.13. *Soient E un espace de dimension finie, $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ **non dégénérée**, et F un sous-espace de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) F est non isotrope ;
(ii) $F^\perp$ est non isotrope.

Proposition 4.3.14. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ une forme **non dégénérée**. Soit $(a_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Alors il existe une unique base de E, $(a_i^*)_{1\le i\le n}$ telle que $\forall i,j$, $f(a_i,a_j^*) = \delta_{ij}$. On l'appelle la **base duale de** $(a_i)_{1\le i\le n}$ **relativement à** f (où à q_f).*

Remarque 4.3.15. Si $(\widetilde{a}_i^*)$ est la base duale dans E^* de la base (a_i), alors $\widetilde{a}_i^* = \varphi_f(a_i^*)$.

4.4 Bases orthogonales, orthonormales, formes canoniques

Définition 4.4.1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. Une base de E est dite **orthogonale** (resp. **orthonormale**) **relativement à** f (où à q_f) si $i \neq j \Rightarrow f(a_i,a_j) = 0$ (resp. $\forall i,j$, $f(a_i,a_j) = \delta_{ij}$). En particulier, si f est non dégénérée et si (a_i) est orthonormale, $a_i = a_i^*$, $\forall i$.

Théorème 4.4.2. *Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ de rang r. Alors il existe des bases de E telles que :*

(i) $i \neq j \Rightarrow f(a_i, a_j) = 0$;

(ii) $1 \leq i \leq r \Rightarrow f(a_i, a_i) \neq 0$;

(iii) $r+1 \leq i \leq n \Rightarrow f(a_i, a_i) = 0$.

Si x_i, y_i sont les coordonnées de x et y dans une telle base, on a donc les ***formes canoniques*** *:*

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ii} x_i y_i, \; q_f(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} x_i^2.$$

Remarque 4.4.3. 1) Si $K = \mathbb{C}$, on peut choisir (a_i) telle que, pour $1 \leq i \leq r$, $f(a_i, a_i) = 1$. En particulier, si f est non dégénérée, **il existe des bases orthonormales relativement à** f. Dans ce cas il n'y a qu'une seule forme canonique : $\displaystyle\sum_1^n x_i y_i$ et $\displaystyle\sum_1^n x_i^2$.

2) Si $K = \mathbb{R}$, même pour une forme non dégénérée, il n'y a pas en général de base orthonormale : par exemple, sur $\mathbb{R}^2$ $f(x,) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

4.5 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 4.5.1. *Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$* ***non dégénérée****. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que, $\forall x, y \in E$, $f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$. u^* s'appelle l'****adjoint*** *de u relativement à f (ou à q_f).*

Proposition 4.5.2. *Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E\mathbb{K})$* ***non dégénérée****.*

1) Soit φ_f l'application $x \mapsto f_x$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $u^* = \varphi_f^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi_f$. En particulier, $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$.

2) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, $(u^*)^* = u$, $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, et si u est inversible, u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

3) Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(a_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale relativement à f. Alors :

a) $M(u^*, (a_i^*)) = {}^t M(u, (a_i))$, d'où $\det(u^*) = \det u$;

b) si A est la matrice de f relativement à (a_i), on a $M(u^*, (a_i)) = A^{-1t} M(u, (a_i)) A$;

c) en particulier, s'il existe une base orthonormale relativement à f on a $M(u^*, (a_i)) = {}^t M(u, (a_i))$.

Proposition 4.5.3. *Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$* ***non dégénérée****. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall x, y \in E$, $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$;

(ii) $\forall x \in E$, $q_f(u(x)) = q_f(x)$;

(iii) $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$;

(iv) $u \circ u^* = \mathrm{id}_E$;

(v) u est inversible et $u^* = u^{-1}$;

(vi) si (a_i) est une base de E, A la matrice de f relativement à cette base, et, $M = M(u, (a_i))$, on a ${}^t MAM = A$.

Si ces conditions sont remplies, on dit que u est un ***automorphisme orthogonal*** *(ou* ***opérateur orthogonal) relativement à*** *f ou encore un* ***automorphisme de*** *f.*

Proposition 4.5.4. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ non dégénérée et $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que (a_i) soit une base orthonormale. Alors u est orthonormal si et seulement si $(u(a_i))$ est une base orthonormale. De plus, dans ce cas, $A = M(u,(a_i))$ est telle que ${}^tA = A^{-1}$. Une matrice A possédant cette propriété (${}^tAA = I$) est appelée une* ***matrice orthogonale****.*

Exemple 4.5.5. La matrice de passage d'une base orthogonale à une autre est orthogonale.

Proposition 4.5.6. *Soient E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$. L'ensemble des automorphismes orthogonaux relativement à f est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ appelé le* ***groupe orthogonal relativement à*** *f et est noté $GL(f)$ (ou $GL(q_f)$).*

Remarque 4.5.7. 1) S'il existe une base orthonormale, il n'y a qu'une forme canonique $\sum x_iy_i$. Le groupe orthogonal relatif à cette forme se note $O(n,\mathbb{K})$. Les matrices orthogonales forment un sous-groupe du groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à $O(n,\mathbb{K})$.

2) Si u est orthogonale alors $\det(u^* \circ u) = (\det(u))^2 = 1$. Si $\det u = 1$ on dit que u est une **rotation relativement à** f. L'ensemble des rotations est un sous-groupe de $GL(f)$ appelé le **groupe orthogonal spécial**. Le groupe des matrices orthogonales telles que $\det A = 1$ est noté $SO(n;\mathbb{K})$ (ou $O^+(n;\mathbb{K})$) et est isomorphe au groupe orthogonal spécial.

Proposition 4.5.8. *Soient E un espace de dimension finie, $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ non dégénérée et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $u = u^*$;

(ii) $\forall x, y \in E$, $f(u(x),y) = f(x,u(y))$;

(iii) si $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, A la matrice de f relativement à cette base et $M = M(u,(a_i))$, on a $AM = {}^tMA$. En particulier, s'il existe une base orthonormale relativement à f, M est symétrique. Un tel endomorphisme de E est dit ***symétrique relativement à*** *f (ou à q_f) ou encore* ***autoadjoint relativement à*** *f.*

Remarque 4.5.9. 1) Si u est orthogonal ou symétrique, alors on a $u \circ u^* = u^* \circ u$. Un endomorphisme vérifiant cette relation est appelé un endomorphisme **normal**.

2) Si $f \in \mathscr{S}_2E;\mathbb{K})$ est non dégénérée, soit $\mathscr{S}_f(E) = \{u \in \mathscr{L}(E)\,\text{symtriques relativement}\,f\}$. Il est clair que $\mathscr{S}_{\{}(E)$ et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et l'application $u \mapsto f_u$ de $\mathscr{S}_f(E)$ dans $\mathscr{S}_2(E;\mathbb{K})$ définie par $f_u(x,y) = f(u(x),y)$ est un isomorphisme surjectif (E étant de dimension finie).

4.6 Décomposition d'une forme quadratique en carrés indépendants

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$. On cherche à écrire q de la manière suivante :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(f_i(x)\right)^2 , \ \lambda_i \neq 0, \tag{4.6.1}$$

où les f_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ **linéairement indépendantes**. Si on a une telle écriture, la forme bilinéaire symétrique associée à q est donc $f_q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y)$.

Proposition 4.6.1. *Si on peut écrire q sous la forme 4.6.1, alors on a une base orthogonale pour q.*

Lemme 4.6.2. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f_i, $1 \leq i \leq l$, des formes linéaires sur E non nulles. Si $\bigcap_{i=1}^{l-1} \ker(f_i) \subset \ker(f_l)$ alors les f_i sont dépendantes.*

Lemme 4.6.3. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et f_i, $1 \leq i \leq l$, $l \geq 2$, des formes linéaires sur E **linéairement indépendantes**. Alors, pour $1 \leq p \leq l$,*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right) = \dim E - p.$$

Détermination pratique des f_i : méthode de Gauss.

On raisonne par récurrence sur n :

Premier cas : q contient un carré. Par exemple, $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + 2x_1 R + S$, $\lambda_1 \neq 0$, R étant une forme linéaire en $(x_2, \ldots , x_n)$ et S une forme quadratique en $(x_2, \ldots , x_n)$. Alors

$$q(x) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{R}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{R^2}{\lambda_1^2} + S.$$

En prenant $f_1(x) = x_1 + \frac{R}{\lambda_1}$, puisque $S - \frac{R^2}{\lambda_1}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$, le résultat découle de l'hypothèse de récurrence, l'indépendance linéaire étant évidente car seule f_1 contient x_1.

Second cas : q ne contient pas de carré. On a donc par exemple $q(x) = ax_1x_2 + x_1R + x_2S + T$ où $a \neq 0$, R et S sont des formes linéaires en $(x_3, \ldots , x_n)$ et T une forme quadratique en $(x_3, \ldots x_n)$. Alors

$$q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{S}{a}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a}\right) - \frac{RS}{a^2}\right] + T,$$

soit, en posant

$$f_1(x) = x_2 + x_2 + \frac{R}{a} + \frac{S}{a}$$

et

$$f_2(x) = x_1 - x_2 + \frac{S}{a} - \frac{R}{a},$$

$q(x) = \frac{a}{4}\left(f_1^2 - f_2^2\right) - \frac{RS}{a} + T$. f_1 et f_2 étant des formes linéaires indépendantes, le résultat se déduit de l'hypothèse de récurrence car $\frac{RS}{a} + T$ est une forme quadratique ne dépendant pas de x_1 et x_2.

Exemple 4.6.4. 1) $q(x,y,z) = xy + yz + xz = \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2$.

2)

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2zt + tx + 2xy - yt \\ &= \left(x + y + \frac{t}{2}\right)^2 + (y-t)^2 + 3\left(z - \frac{t}{3}\right)^2 - \frac{t^2}{12}. \end{aligned}$$

Chapitre 5

FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES REELLES, ESPACE EUCLIDIEN

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

5.1 Formes bilinéaires symétriques réelles, espace Euclidien

Théorème 5.1.1. *(*LOI D'INERTIE DE SYLVESTER*) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$.*

1) Il existe une base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de E orthogonale relativement à f et deux entiers s et t tels que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in E$, on a $q_f(x) = \sum_{i=1}^{s} (x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} (x_i)^2$, $s + t = \mathrm{rg}(f)$.

2) Si $(a'_i)_{1\leq i\leq n}$ est une autre base de E telle que, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i a'_i \in E$ on a $q_f(x) = \sum_{i=1}^{s'} (x'_i)^2 - \sum_{i=s'+1}^{s'+t'} (x'_i)^2$, alors on a $s = s'$ et $t = t'$.

Le couple (s,t) s'appelle la ***signature de*** *f.*

Définition 5.1.2. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$. On dit que f (ou q_f) est **positive** si, $\forall x \in E$, $q_f(x) \geq 0$ (ce qui entraîne que la signature de f est $(r,0)$, $r = \mathrm{rg} f$).

Proposition 5.1.3. *(*INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ*) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$, $f \geq 0$.*

1) $\forall x, y \in E$, $(f(x,y))^2 \leq f(x,x)f(y,y) = q_f(x)q_f(y)$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ*).*

2) $\forall x, y \in E$, $(q_f(x+y))^{1/2} \leq (q_f(x))^{1/2} + (q_f(y))^{1/2}$ (inégalité triangulaire).

Proposition 5.1.4. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Alors $x \in \ker(f)$ si et seulement si x est isotrope (i.e. $q_f(x) = 0$).*

Remarque 5.1.5. On aurait pu définir les formes négatives f en disant que $-f \geq 0$ et développer des propriétés similaires.

Définition 5.1.6. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$. On dit que f est **définie positive** si elle est positive et non dégénérée.

Proposition 5.1.7. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$, $f \geq 0$. L'application $x \mapsto q_f(x)^{1/2}$ est une **semi-norme** sur E et une **norme** si f est définie positive. Lorsque f est définie positive, E muni de la norme $\| x \| = q_f(x)^{1/2}$ est appelé un **espace préhilbertien réel** ; si de plus $\dim E < +\infty$, E est appelé un **espace Euclidien**.*

Proposition 5.1.8. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$. Si f est définie positive, il existe des bases orthonormales relatives à f.*

Remarque 5.1.9. La proposition 5.1.8 montre qu'il n'existe qu'une seule forme canonique définie positive : $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$. Autrement dit, **il n'existe qu'une seule structure d'espace Euclidien de dimension** n. On choisit donc sur E, espace vectoriel réel, une forme définie positive f_0 que l'on appelle la **forme fondamentale** (ou **produit scalaire**) et on note généralement $f_0(x,y) =< x, y >$ (ou $f_0(x,y) = (x|y)$). Dans une base orthonormale (pour f_0), si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)^{1/2}$.

5.2 Complexification d'un espace réel de dimension finie

Définition 5.2.1. 1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On appelle **complexifié de** E **par rapport à la base** (a_i) l'espace vectoriel $\widetilde{E}$ sur $\mathbb{C}$ des combinaisons linéaires finies formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ des a_i. On a donc $\widetilde{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}a_i$.

2) Si E est l'espace euclidien de dimension n, f_0 la forme fondamentale sur E et (a_i) une base de E orthonormale pour f_0, on peut prolonger f_0 à $\widetilde{E}$ (complexifié par rapport à la base (a_i)) de deux manières différentes :

(a) on définit $\widetilde{f_0} \in \mathcal{S}_2(\widetilde{E};\mathbb{C})$ en posant, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i$, $\widetilde{f_0}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;

(b) on définit $\widetilde{f_0}^{\#}$ (c'est une forme hermitienne) en posant, avec les même notations $\widetilde{f_0}^{\#}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$.

Remarque 5.2.2. 1) Il est clair que $\widetilde{f_0}$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\widetilde{E}$ et que (a_i) est une base de $\widetilde{E}$ orthonormale pour $\widetilde{f_0}$. En particulier, $\widetilde{f_0}$ est non dégénérée, **mais**, il y a des vecteurs isotropes pour $\widetilde{f_0}$.

2) $\widetilde{f_0}^{\#}$ n'est pas une forme bilinéaire : c'est une forme hermitienne (elle est linéaire en x et anti-linéaire en y). Il est clair que (a_i) reste une base orthonormale pour $\widetilde{f_0}^{\#}$, et de plus $\widetilde{f_0}^{\#}$ est **définie positive**.

3) Plus précisément : si $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ sont dans $\widetilde{E}$, x_i, y_i étant dans E, on a :

$$\widetilde{f_0}(x,y) = f_0(x_1,y_1) + if_0(x_2,y_1) + if_0(x_1,y_2) - f_0(x_2,y_2),$$

$$\widetilde{f_0}^{\#}(x,y) = f_0(x_1,y_1) + i f_0(x_2,y_1) - f_0(x_1,y_2) + f_0(x_2,y_2).$$

Proposition 5.2.3. *Reprenons les notations de 2) de la définition ci dessus, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\widetilde{u}$ l'endomorphisme de $\widetilde{E}$ tel que $M(\widetilde{u},(a_i)) = M(u,(a_i))$.*

1) u et $\widetilde{u}$ ont les même valeurs propres complexes.

2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

-(i) u est orthogonal (resp. symétrique, normal) ;

-(ii) $\widetilde{u}$ est orthogonal (resp. symétrique, normal) relativement à $\widetilde{f_0}$;

-(iii) $\widetilde{u}$ est orthogonal (resp. symétrique, normal) relativement à $\widetilde{f_0}^{\#}$.

5.3 Réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques

Notation 5.3.1. E étant l'espace Euclidien de dimension n (de forme fondamentale f_0), le groupe $GL(f_0)$ est noté $\mathcal{O}(n;\mathbb{R})$.

Proposition 5.3.2. *Soient E l'espace Euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{O}(n;\mathbb{R})$. Les valeurs propres complexes de u sont des nombres complexes de module 1. De plus, si $\widetilde{E}$ est le complexifié de E et $\widetilde{u}$ l'endomorphisme de $\widetilde{E}$ associé à u comme dans la proposition 5.2.3, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, est une valeur propre de u, les vecteurs propres de $\widetilde{u}$ associés à λ sont isotropes pour $\widetilde{f_0}$.*

Proposition 5.3.3. *Soient E l'espace Euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E.*

1) u a n valeurs propres réelles.

2) L'orthogonal d'un vecteur propre de u est stable par u.

*3) Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres **distinctes** sont orthogonaux.*

Théorème 5.3.4. *Soient E l'espace Euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe des bases orthonormales de E formées de vecteurs propres de u.*

Corollaire 5.3.5. *Soit A une matrice réelle symétrique. Alors, il existe une matrice orthogonale réelle P telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.*

Corollaire 5.3.6. *Soient E l'espace Euclidien de dimension n et $f \in \mathscr{S}_2(E;\mathbb{R})$. Alors il existe des bases orthonormales de E qui sont orthogonales pour f.*

Remarque 5.3.7. Le corrolaire 5.3.5 n'est pas vrai en général pour une matrice orthogonale. Il suffit de prendre comme exemple la matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$. Cet exemple est d'ailleurs typique du cas général :

Théorème 5.3.8. *Soient E l'espace Euclidien de dimension n et u un endomorphisme orthogonal de E. Alors il existe une base orthonormale $(a_i)_{1\le i\le n}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit le tableau diagonal suivant*

$$M(u,(a_i)) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où, $p, q \ge 0$, $p+q+2r=n$, I_p, I_q sont les matrices identité de dimension respectives p et q et, pour tout i, $1 \le i \le r$,

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta_i \in]0,2\pi[,\ \theta_i \ne \pi.$$

Lemme 5.3.9. *1) Soit F un sous-espace de E invariant par u (i.e. $u(F)=F$). Alors $F^\perp$ est stable par u.*

2) Si 1 et -1 sont valeurs propres de u et si x_1 et x_2 sont des vecteurs propres qui leurs sont associés, alors x_1 et x_2 sont orthogonaux.

Remarque 5.3.10. 1) Pour les matrices, le théorème 5.3.8 dit que, pour toute matrice orthogonale $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P telle que $P-1$ AP soit de la forme décrite dans le théorème.

2) Dans le cas $n=2$, on peut décrire complètement toutes les matrices orthogonales : une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est, soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in [0,2\pi], \tag{5.3.1}$$

soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in [0,2\pi]. \tag{5.3.2}$$

Si A est du type 5.3.1, c'est la matrice d'une rotation d'angle θ. Si A est du type 5.3.2, c'est la matrice d'une symétrie par rapport à une droite : si θ est 0, 2π ou π, elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et sinon c'est une symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}(\sin\theta, 1-\cos\theta)$. Le type 5.3.2 est donc toujours semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 6

FORMES HERTMITIENNES ESPACE HERMITIEN

6.1 Formes sesquilinéaires et hermitiennes

Définition 6.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

1) On dit qu'une application $u : E \to F$ est **semi-linéaire** si, $\forall x, \forall y$ dans E et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = \bar{\lambda} u(x)$. Si $F = \mathbb{C}$, on dit que u est une **forme semi-linéaire**.

2) On dit qu'une application $f : E \times F \to \mathbb{C}$ est une **forme sesquilinéaire** si $\forall y \in F$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire et, $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est semi-linéaire. L'ensemble des formes sesquilinéaires sur $E \times F$ sera noté $\mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$.

Proposition 6.1.2. *Dans les conditions ci-dessus :*

1) $\mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2) $\mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications semi-linéaires de F dans E^*, l'image de f par cet isomorphisme étant $y \mapsto f_y$, f_y étant définie par $f_y(x) = f(x, y)$.

Proposition 6.1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$.*

1) Si $x^* \in E^*$ et $y^* \in F^*$, l'application $x^* \otimes \overline{y^*}$ définie par $x^* \otimes \overline{y^*}(x, y) = x^*(x)\overline{y^*(y)}$ est une forme sesquilinéaire.

2) Supposons E et F de dimensions finies, et soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ (resp. $(b_j)_{1 \in j \in m}$) une base de E (resp. F). Soient (a_i^*) et (b_j^*) leurs bases duales. Alors les formes $a_i^* \otimes \overline{b_j^*}$ forment une base de $\mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$. En particulier, $\dim \mathscr{S}(E, F; \mathbb{C}) = nm$.

Proposition 6.1.4. *Soit $f \in \mathscr{S}(E, F; \mathbb{C})$. Avec les notations de la proposition précédente, posons $\alpha_{ij} = f(a_i, b_j)$ (de sorte que $f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a_i^* \otimes \overline{b_j^*}$). Alors le matrice $A = (\alpha_{ij})$ (i : colonnes, j : lignes) s'appelle la **matrice de f relative aux bases** (a_i) **et** (b_j). Si $x = \sum_i x_i a_i$ et $y = \sum_j y_j a_j$, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et*

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$*, on a* $f(x,y) = {}^t\bar{Y}AX = {}^tX{}^tA\bar{Y}$.

Proposition 6.1.5. *Avec les notations précédentes, si* (a'_i) *et* (b'_j) *sont deux autres bases de* E *et* F*, et, si* P *et* Q *sont les matrices de passage de* (a_i) *à* (a'_i) *et de* (b_j) *à* (b'_j)*, de sorte que si* $x = \sum_i x_i a_i = \sum_i x'_i a'_i \in E$*, on a* $X = PX'$ *et de même pour* $y \in F$*,* $Y = QY'$*, alors, on a* $f(x,y) = {}^t\bar{Y}({}^t\bar{Q}AP)X'$*. Ainsi, la matrice de* f *relative aux bases* (a'_i) *et* (b'_j) *est* ${}^t\bar{Q}AP$*.*

Proposition 6.1.6. *Soit* $f \in \mathscr{S}(E, E; \mathbb{C}) = \mathscr{S}(E; \mathbb{C})$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $\forall (x,y) \in E \times E$*,* $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$*.*
2) $\forall x \in E$*,* $f(x,x) \in \mathbb{R}$*.*

Définition 6.1.7. On dit qu'une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ vérifiant les propriétés de la proposition ci-dessus est une **forme hermitienne** (on dit aussi qu'elle possède la **symétrie hermitienne**). L'ensemble des formes hermitiennes sera noté $\mathscr{S}_h(E; \mathbb{C})$ ou plus simplement $\mathscr{S}_h(E)$.

Remarque 6.1.8. $\mathscr{S}_h(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(E; \mathbb{C})$ seulement sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut facilement voir que toute forme sesquilinéaire s'écrit, de manière unique, comme somme d'une forme hermitienne et d'une forme sesquilinéaire telle que $f(x,x) \in i\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.9. *Supposons* $\dim E = n$ *et soit* (a_i) *une base de* E*. Alors* $f \in \mathscr{S}(E; \mathbb{C})$ *est hermitienne si et seulement si sa matrice dans la base* (a_i) *vérifie la relation* ${}^tA = \bar{A}$*. En particulier, la dimension de* $\mathscr{S}_h(E)$ *est* $\dfrac{n(n+1)}{2}$*. Une matrice* $M \in M_n(\mathbb{C})$ *vérifiant* ${}^tM = \overline{M}$ *est dite* ***hermitienne****.*

6.2 Formes hermitiennes et formes quadratiques hermitiennes

Définition 6.2.1. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{S}_h(E)$. On appelle **forme quadratique hermitienne associée à** f l'application $x \mapsto q_f(x) = f(x,x) \in \mathbb{R}$. On notera $Q_h(E)$ l'ensemble des formes quadratiques hermitiennes sur E.

Proposition 6.2.2. *L'application* $f \mapsto q_f$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{S}_h(E)$ *sur* $Q(E)$*. L'homomorphisme réciproque est donné par* $q \mapsto f_q$ *où*

$$f_q(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)\right).$$

La forme hermitienne f_q *s'appelle la* ***forme polaire de*** q*.*

Remarque 6.2.3. Si $f \in \mathscr{S}_h(E)$ et si E est de dimension finie, si A est la matrice de f dans une base, on dit que A est la matrice de q_f dans cette base. Si $x \in E$ on a donc $q_f(x) = {}^t\overline{X}AX$, c'est-à-dire

$$q_f(x) = \sum_i \alpha_{ii} |x_i|^2 + 2 \sum_{i<j} \alpha_{ij} x_i \bar{x}_j$$

.

Exemple 6.2.4. 1) $E = \mathbb{C}^n$, $f(x, y) = \displaystyle\sum_i x_i \bar{y}_i$ d'où $q_f(x) = \displaystyle\sum_i |x_i|^2$.

2) $E = \mathscr{C}_c([a, b])$, $f(x, y) = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$ d'où $q_f(x) = \displaystyle\int_a^b |x(t)|^2 \, dt$.

Définition 6.2.5. Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. On appelle **noyau** de f le sous-espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) défini par $\ker f = \{x \in E \,\mathrm{t.q.}\, \forall y \in E,\ f(x, y) = 0\} = \{y \in E \,\mathrm{t.q.}\, \forall x \in E,\ f(x, y) = 0\}$. f est dite **non dégénérée** si $\ker f = \{0\}$ et **dégénérée** sinon.

Proposition 6.2.6. *Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$.*

1) Soit $\varphi_f : E \to E^*$ l'application semi-linéaire définie par $\varphi_f(y) = f_y$ où $f_y(x) = f(x, y)$, $x \in E$. Alors $\ker \varphi_f = \ker f$. *Si* $\dim E < +\infty$*, par définition, on appelle **rang de** f le rang de φ_f.*

2) Si E est de dimension finie, et si A est la matrice de f relative à une base (a_i) de E, alors $\overline{A}$ est la matrice de φ_f relative aux bases (a_i) et (a_i^*). En particulier, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$*, et f est non dégénérée si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Remarque 6.2.7. Comme pour les formes bilinéaires, si φ_f est un isomorphisme, on identifie généralement E et E^*, et on note $f(x, y) =< x, y >$, bien que ce produit scalaire ne soit plus bilinéaire, mais hermitien.

6.3 Orthogonalité, éléments isotropes

Définition 6.3.1. Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. On dit que deux éléments de E, x et y, sont **orthogonaux** si $f(x, y) = 0$. Deux parties A et B de E sont dites **orthogonales** si $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $f(x, y) = 0$.

Proposition 6.3.2. *Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $F^\perp = \{x \in E \,\mathrm{t.q.}\, f(x, y) = 0 \, \forall y \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **l'orthogonal de** F **relativement à** f.*

Définition 6.3.3. Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. On dit que $x \in E$ est **isotrope relativement à** f (ou à q_f), si $q_f(x) = 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est **isotrope relativement à** f si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Théorème 6.3.4. *Supposons E de dimension finie, et soient $f \in \mathscr{S}_h(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) F n'est pas isotrope ;

(ii) $f_{|F \times F}$ est non dégénérée ;

(iii) $F \cap F^\perp = \{0\}$;

(iv) $E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 6.3.5. *Si E est de dimension finie et si F est un sous-espace de E non isotrope, alors* $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$. *En particulier,si $x \in E$ est non isotrope, $\{\mathbb{C}x\}^\perp$ est un hyperplan ne contenant pas x.*

Proposition 6.3.6. *Soient $f \in \mathscr{S}_h(E)$ et F un sous-espace de E.*

1) $F \subset (F^\perp)^\perp$.

2) Si E est de dimension finie et si f est non dégénérée, on a $F = (F^\perp)^\perp$ et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Remarque 6.3.7. Comme dans le cas des formes bilinéaires, si f est dégénérée, on n'a pas nécessairement $F = (F^\perp)^\perp$ ni $E = F \oplus F^\perp$ (même lorsque f est non dégénérée pour cette dernière propriété).

Proposition 6.3.8. *Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$ non dégénérée. Alors un sous-espace F de E est non isotrope si et seulement si $F^\perp$ l'est.*

Proposition 6.3.9. *Supposons* $\dim E < +\infty$, *et soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$ non dégénérée. Si (a_i) est une base de E, il existe une unique base (a_i^*) de E telle que $f(a_i, a_j^*) = \delta_{ij}$: on l'appelle la **base duale de** (a_i) **relativement à** f.*

Définition 6.3.10. Supposons E de dimension finie et soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. Une base (a_i) de E est dite **orthogonale** (resp. **orthonormale**) **relativement à** f si $i \neq j$ implique $f(a_i, a_j) = 0$ (resp. $f(a_i a_j) = \delta_{ij}$).

Proposition 6.3.11. *E étant de dimension finie, soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$. Alors il existe des bases de E, (a_i), telles que, si $r = \mathrm{rg}(f)$, $f(a_i a_j) = 0$ pour $i \neq j$, $f(a_i a_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et $f(a_i, a_i) = 0$ pour $r+1 \leq i \leq n$.*

6.4 Formes hermitiennes positives, espace Hermitien

Théorème 6.4.1. *(*Loi d'inertie de Sylvester*) Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{S}_h(E)$.*

1) Il existe une bases (a_i) de E et deux entiers s et t tels que si $x = \sum_i x_i a_i$ et $y = \sum_i y_i a_i$, on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{y_i} - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i \overline{y_i},$$

soit $q_f(x) = \sum_{i=1}^{s} |x_i|^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} |x_i|^2$.

2) Si il existe une autre base (a'_i) de E et deux entiers s' et t' tels que, dans les coordonnées relatives à cette base, on ait $q_f(x) = \sum_{i=1}^{s'} |x'_i|^2 - \sum_{i=s'+1}^{s'+t'} |x_i|^2$ alors, on a $s = s'$ et $t = t'$.

*3) Le couple (s, t) s'appelle la **signature** de f.*

Définition 6.4.2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{S}_h(E)$. On dit que f est **positive** si $\forall x \in E$, $q_f(x) \geq 0$. Autrement dit, si $A = (\alpha_{ij})$ est la matrice de F dans une base de E, alors A est une matrice **hermitienne positive** (i. e. ${}^tA = \overline{A}$ et $\forall (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i \overline{x_j} \geq 0$.

Proposition 6.4.3. *Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$ positive.*
1) $\forall x, y \in E$, $|f(x,y)|^2 \leq q_f(x) q_f(y)$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ*).*
2) $\forall x, y \in E$, $q_f(x+y)^{1/2} \leq q_f(x)^{1/2} q_f(y)^{1/2}$ (inégalité triangulaire).

Proposition 6.4.4. *Soit $f \in \mathscr{S}_h(E)$ positive.*
1) x est isotrope $\Leftrightarrow x \in \ker f$.
*2) Si f est non dégénérée, on dit que f est **définie positive**.*
3) $q_f^{1/2}$ est une semi-norme sur E, et une norme si f est non dégénérée.
*4) Si f est non dégénérée, E muni de q_f est appelé un **espace préhilbertien complexe** et si de plus E est de dimension finie, on l'appelle un espace **hermitien**.*

Remarque 6.4.5. Si f est non dégénérée, il existe des bases orthonormales. Par suite, il n'existe qu'une seule structure d'espace hermitien de dimension n. Comme dans le cas réel, on choisit une forme hermitienne fondamentale f_0 que l'on appelle produit scalaire hermitien (ou simplement produit scalaire). Dans une base orthonormale, on a $q_f(x)^{1/2} = \|x\| = \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{1/2}$.

6.5 Réduction des opérateurs normaux

Proposition 6.5.1. *Soient E l'espace Hermitien de dimension n, f_0 sa forme fondamentale, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $f_0(u(x), y) = f_0(x, u^*(y))$. u^* s'appelle l'**adjoint** de u. De plus :*
1) Si $\varphi_f : E \to E^*$ est l'isomorphisme semi-linéaire associé à f, on a $u^* = \varphi_f^{-1} \circ {}^tu \circ \varphi_f$. En particulier, si (a_i) est une base de E, A la matrice de f_0 dans cette base, M la matrice de u et M^* celle de u^*, on a $M^* = A^{-1} {}^t\overline{M} A$. Si cette base est orthonormale, on a $M^* = {}^t\overline{M}$.
2) De plus, on a les propriétés suivantes : $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, $(u^*)^* = u$, $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, $\det(u^*) = \overline{\det(u)}$, si u est inversible, u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Proposition 6.5.2. *Soient E l'espace Hermitien de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. f_0 étant la forme fondamentale, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\forall x, y \in E$, $f_0(u(x), u(y)) = f_0(x, y)$;
(ii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$;
(iii) $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$;
(iv) $u \circ u^* = \mathrm{id}_E$;
(v) u est inversible et $u^{-1} = u^*$;
*(vi) Si A est la matrice de f_0 et M celle de u dans une base de E, on a $A = {}^tMAM$. Un tel endomorphisme de E est appelé un **opérateur unitaire** de E.*

Remarque 6.5.3. 1) Dans une base orthonormale, la matrice M d'un endomorphisme unitaire vérifie ${}^t\overline{M} = M^{-1}$. Une matrice vérifiant cette relation est dite **unitaire**. Par exemple, la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est unitaire.

2) L'ensemble des opérateurs unitaires est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ appelé le **groupe unitaire** et noté $U(n, \mathbb{C})$.

Proposition 6.5.4. *Soit u un endomorphisme unitaire de E. Les valeurs propres de u sont des nombres complexes de module 1 et le déterminant de u à le même propriété. L'ensemble des $u \in U(n, \mathbb{C})$ tels que* $\det u = 1$ *est appelé le* ***groupe unitaire spécial*** *et est noté $SU(n, \mathbb{C})$.*

Proposition 6.5.5. *Soient E l'espace Hermitien de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u = u^*$;

(ii) $\forall x, y \in E$, $f_0(u(x), y) = f_0(x, u(y))$;

(iii) $\forall x \in E$, $f_0(x, u(x)) \in \mathbb{R}$;

(iv) si A est la matrice de f_0 relative à une base de E et M celle de u, on a ${}^t\overline{M}A = AM$. En particulier, si la base est orthonormale, M est hermitienne. Un endomorphisme de E vérifiant ces propriétés est appelé un ***opérateur hermitien****.*

Proposition 6.5.6. *Les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles.*

Remarque 6.5.7. 1) L'ensemble des opérateurs hermitiens n'est pas un sous_espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$: si u et v sont hermitiens, $u + v$ l'est aussi, mais, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, λu ne l'est pas car $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u \neq \lambda u$.

2) L'application $u \mapsto f_u$ de l'ensemble des opérateurs hermitiens sur E dans l'ensemble des formes hermitiennes définies par $f_u(x, y) = f_0(x, u(y))$ est surjective.

Proposition 6.5.8. *Soient E l'espace Hermitien de dimension n. Un endomorphisme u de E est dit* ***normal*** *si $u \circ u^* = u^* \circ u$. De plus, dans ce cas :*

(i) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. En particulier, $\ker u = \ker u^*$.

(ii) Soient λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Alors, $u^*(x) = \overline{\lambda} x$.

(iii) Si λ et λ' sont deux valeurs propres de u distinctes, les sous-espaces propres $V(\lambda)$ et $V(\lambda')$ sont orthogonaux.

(iv) Si λa est une valeur propre de u, alors le sous-espace propre $V(\lambda)$ qui lui est associé est stable par u^* et son orthogonal $V(\lambda)^\perp$ et stable par u et u^*.

Remarque 6.5.9. Les opérateurs unitaires et hermitiens sont normaux.

Théorème 6.5.10. *Soient E l'espace Hermitien de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Si u est normal, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.*

Corollaire 6.5.11. *1) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est normale (i. e. $A^*A = A^*A$). Alors, il existe une matrice unitaire P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

2) Soit f une forme hermitienne sur E. Il existe des base orthonormales de E qui sont orthogonales pour f.

Définition 6.5.12. Soient E l'espace hermitien de dimension n et F un sous-espace de E. On dit que $p \in \mathscr{L}(E)$ est la **projection orthogonale sur** F si $p(E) \subset F$, et, si $\forall x \in E$, $x - p(x) \in F^\perp$.

Proposition 6.5.13. *Soit E l'espace Hermitien de dimension n.*

1) $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection orthogonale sur un sous-espace de E si et seulement si $p^2 = p$ et $p = p^*$. En particulier, si p est la projection sur F, $p_{|F} = \mathrm{id}_F$.

2) Soient E_i deux sous-espaces de E ($i = 1, 2$) et p_i les projections orthogonales sur E_i. Alors $E_1 \perp E_2$ si et seulement si $p_1 \circ p_2 = 0$.

Remarque 6.5.14. Le théorème 6.5.10 peut s'énoncer comme suit : soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe des projections orthogonales p_i, $1 \leq i \leq j$, telles que $p_i \circ p_j = 0$, si $i \neq j$ et des nombres complexes λ_i tels que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$. De plus, on peut toujours supposer $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ (i. e. $E = \bigoplus_{i=1}^{k} p_i(E)$).

Proposition 6.5.15. *Soit E l'espace Hermitien de dimension$n$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*

1) Supposons qu'il existe une base orthonormale $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E formée de vecteurs propres de u, i. e. $\forall i$, $u(a_i) = \lambda_i a_i$. Alors $\forall i$, $u^*(a_i) = \overline{\lambda_i} a_i$.

2) u est normal si et seulement si il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 6.5.16. *Soit E l'espace Hermitien de dimension n et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E tels que :*

(a) $\forall i, j$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$;

(b) $\forall i$, u_i est normal.

Alors, il existe une base orthonormale de E telle que, pour tout $i \in I$, les éléments de cette base sont des vecteurs propres de u_i. En d'autres termes, il existe des projections orthogonales p_i, $1 \leq i \leq k$ telles que $p \neq l$ implique $p_p \circ p_l = 0$, et telles que $\forall i \in I$, u_i est combinaison linéaire des p_l.

Corollaire 6.5.17. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille dans $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que :*

(a) $\forall i, j$, $A_i A_j = A_j A_i$;

(b) $\forall i$, $A_i^* A_i = A_i A_i^*$.

Alors, il existe une matrice unitaire P telle que, $\forall i \in I$, $P^{-1} A_i P$ soit diagonale.

Proposition 6.5.18. *Soit A une matrice hermitienne positive. Alors, il existe une unique matrice hermitienne positive A' telle que $A'^2 = A$. A' s'appelle la* ***racine carrée positive de*** *A.*

Proposition 6.5.19. *Soit E l'espace Hermitien de dimension n.*

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme hermitien. Alors, $u - i\mathrm{id}_E$ est inversible et $v = (u + i\mathrm{id}_E) \circ (u - i\mathrm{id}_E)^{-1}$ est unitaire et 1 n'est pas valeur propre de v.

2) Soit v un endomorphisme unitaire de E tel que 1 ne soit pas valeur propre de v. Alors $u = i(v + \mathrm{id}_E) \circ (v - \mathrm{id}_E)^{-1}$ est hermitien.