LICENCE DE MATHÉMATIQUES PURES

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Philippe Charpentier

Université Bordeaux I
Année universitaire 2000-01

PHILIPPE CHARPENTIER
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES
351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE
Adresse électronique: `Philippe.Charpentier@math.u-bordeaux.fr`

INTRODUCTION

Ce polycopié a été réalisé durant l'année universitaire 2000-2001 alors que j'enseignais les certificats de Licence LA1 et LA2. J'ai choisi de faire une présentation assez exhaustive (donc ne correspondant pas toujours exactement au contenu des programmes officiels de la Licence de Bordeaux) affin d'éviter au maximum les « trous » que j'ai pu constater en travaillant à la préparation de l'oral de l'agrégation.

La présentation tâche toujours de dégager en premier les concepts généraux même si on ne les utilise que dans des cas particuliers. Par rapport au programme officiel il n'y a finalement que peu de changements. Pour les équations différentielles, la notion de solution approchée a été systématiquement développée et utilisée. Ainsi le Théorème de cauchy-Lipschitz est non seulement démontré avec le Théorème du point fixe mais aussi avec avec la méthode d'Euler des solutions approchées. Du même coup, on montre le Théorème de Arzela-Cauchy-Péano.

Les exercices des fins de chapitre sont dûs aux enseignants de travaux dirigés, Christophe Bavard, Gérard Galusinski, Gilles Robert et Philippe Monnier.

Philippe Charpentier

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

CALCUL DIFFÉRENTIEL

SECTION I.1

Fonctions différentiables

Définition I.1.1.

1. Soient X un espace métrique, Y un espace normé, U un ouvert de X, x_0 un point de U et g une fonction de U dans Y. On dit qu'une fonction f de U dans un espace normé E est un $\mathbf{o}(g)$ (resp. $\mathbf{O}(g)$), et on écrit $f = \mathbf{o}(g)$ (resp. $f = \mathbf{O}(g)$) au point x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction ε de V dans E telle que $\forall x \in V$, $f(x) = \|g(x)\|\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \varepsilon(x) = 0$ (resp. $\overline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}} \|\varepsilon(x)\| < +\infty$).

*2. Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, $x_0 \in U$ et $f_i : U \to F$, $i = 1, 2$, deux fonctions. On dit que f_1 et f_2 sont **tangentes** en x_0 si, en posant $m(r) = \sup\limits_{\|x-x_0\|\leq r} \|f_1(x) - f_2(x)\|$, pour r assez petit, on a $m(r) = \mathbf{o}(r)$ en $r = 0$. Il revient au même de dire que $f_1 - f_2 = \mathbf{o}(\|x - x_0\|)$.*

*3. Sous les même hypothèses que le 2., on dit que f_1 et f_2 sont **strictement tangentes** en x_0 si, $f_1(x_0) - f_2(x_0) = 0$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour $\|x - x_0\| < r$ et $\|y - x_0\| < r$ on a $\|(f_1(x) - f_2(x) - (f_1(y) - f_2(y))\| \leq \varepsilon \|x - y\|$, c'est-à-dire que $f_1 - f_2$ est lipschitzienne de rapport ε dans la boule $B(x_0, r)$.*

Bien sûr, la notion de stricte tangence est plus forte que celle de tangence.

PROPOSITION I.1.1.

Soient E et F deux espaces normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $x_0 \in U$ et $f_i : U \to F$, $i = 1, 2$, deux fonctions.

1. La relation « f_1 est tangente à f_2 en x_0 » est une relation d'équivalence. Si f_1 est tangente à f_2 en x_0, $f_1 - f_2$ est continue en x_0 et vaut 0 en ce point ; en particulier, si f_1 est continue en x_0, f_2 l'est aussi.

2. Il existe au plus une application linéaire g de E dans F telle que les fonctions $x \mapsto f_1(x) - f_1(x_0)$ et $x \mapsto g(x - x_0)$ soient tangentes en x_0. De plus, si f_1 est continue en x_0 alors g est continue et réciproquement.

Démonstration. Le 1. est immédiat, et, la seule chose à voir dans le 2. est le fait que si deux applications linéaires g_1 et g_2 de E dans F sont tangentes en zéro alors elles sont égales ce qui évident puisque

$$\sup_{\|x\|\leq r} \|g_1(x) - g_2(x)\| = \|g_1 - g_2\|\, r.$$

□

Définition I.1.2.

*Soient E et F deux espaces normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $x_0 \in U$ et $f : U \to F$. On dit que f est **différentiable** en x_0 si les conditions suivantes sont vérifiés :*

1. f est continue en x_0.

2. Il existe une application linéaire $g : E \to F$ telle que les applications $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ et $x \mapsto g(x - x_0)$ soient tangentes en x_0, c'est-à-dire $f(x) = f(x_0) + g(x - x_0) + \mathbf{o}(\|x - x_0\|)$.

*De plus, lorsqu'elle existe, cette application linéaire est unique et continue. On l'appelle la **différentielle** de f en x_0 ou la **dérivée** de f en x_0 et elle se note $df(x_0)$ ou encore $f'(x_0)$. Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable dans U et l'application $df : x \to df(x)$ de U dans $\mathscr{L}(E; F)$ s'appelle **l'application dérivée** de f, ou simplement la **dérivée** ou la **différentielle** de f.*

Remarque I.1.1. *1. La Proposition précédente montre qu'une fonction f est différentiable en x_0 si et seulement si la condition 2. de la Définition ci-dessus est satisfaite avec g **continue**.*

2. $df(x_0)$ est donc une application linéaire de E dans F. Son action sur un élément h de E sera notée $df(x_0)(h)$ ou $df(x_0) \bullet h$.

3. Dans toute la suite, dans un énoncé donné, les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ qui est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Naturellement, lorsque les espaces normés sont complexes, on peut aussi les considérer comme des espaces normés réels. La notion de différentiabilité dépend alors du corps sur lequel on se place. En effet, si on considère que le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, la fonction est différentiable s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire tangente, et, si on considère que le corps des scalaires est $\mathbb{C}$, elle le sera s'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire tangente. Ainsi on voit aussitôt, par la définition même, que la différentiabilité sur $\mathbb{C}$ implique celle sur $\mathbb{R}$, la $\mathbb{R}$-différentielle étant égale à la $\mathbb{C}$-différentielle, mais la réciproque n'est pas vraie en général : une fonction $\mathbb{R}$-différentiable est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si sa $\mathbb{R}$-différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

4. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $df(x_0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans F. Elle s'écrit donc $t \mapsto t df(x_0) \bullet 1$. On identifie alors toujours l'application linéaire $df(x_0)$ avec le point de F $df(x_0) \bullet 1$. Ceci redonne, dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, la notion usuelle de dérivée.

Le but du présent cours n'est pas d'étudier les différences profondes qui existent entre la $\mathbb{R}$-différentiabilité et la $\mathbb{C}$-différentiabilité (ceci est essentiellement l'objet de la théorie des fonctions holomorphes), mais de construire une théorie des fonctions différentiables indépendante du corps.

Définition I.1.3.

*Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$. On dit que f est **continûment différentiable** dans U ou de **classe** $\mathscr{C}^1$ dans U, et on note $f \in \mathscr{C}^1(U; F)$, ou simplement $f \in \mathscr{C}^1(U)$, si f est différentiable dans U et si l'application dérivée df est continue de U dans $\mathscr{L}(E; F)$ (muni de la norme usuelle des applications linéaires continues).*

Définition I.1.4.

*Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $x_0 \in U$. On dit que f est **strictement différentiable** en x_0 s'il existe une application linéaire continue $g : E \to F$ telle que les applications $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ et $x \mapsto g(x - x_0)$ soient strictement tangentes en x_0.*

La Proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION I.1.2.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $x_0 \in U$. f est strictement différentiable en x_0 si et seulement si elle est différentiable en x_0 et si on a

$$f(x) - f(y) = df(x_0) \bullet (x - y) + \|x - y\| \, \psi(x, y)$$

avec $\lim\limits_{x,y \to x_0} \psi(x, y) = 0$.

Nous verrons, à la section suivante (Proposition I.2.2, page 9), une condition suffisante de différentiabilité stricte qui implique qu'une fonction continûment différentiable est strictement différentiable.

La Proposition suivante se vérifie très facilement à partir des définitions :

PROPOSITION I.1.3.

Les notions de fonctions différentiables, strictement différentiables, de différentielle en un point et d'application dérivée restent inchangées si on remplace les normes des espaces E et F par des normes équivalentes.

PROPOSITION I.1.4.

Soient E F et G trois espaces normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F.

1. Si f et g sont deux applications de U dans F différentiables en $x_0 \in U$, pour tous scalaires λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x_0 et $d(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda df(x_0) + \mu dg(x_0)$.

2. Soient $f : U \to F$, $g : V \to G$, $x_0 \in U$ et supposons $f(x_0) = y_0 \in V$. Si f est différentiable en x_0 et g différentiable en y_0 alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et $d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$.

Démonstration. La preuve du 1. est élémentaire, vérifions simplement le 2. f étant différentiable en x_0, elle est continue, et on peut écrire
$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + dg(y_0) \bullet (f(x) - f(x_0)) + \mathbf{o}(\|f(x) - f(x_0)\|)$$
pour x voisin de x_0. En écrivant ensuite que f est différentiable en x_0 et en remplaçant dans l'expression précédente, il vient
$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + dg(y_0) \circ df(x_0) \bullet (x - x_0) + dg(y_0) \bullet \mathbf{o}(\|x - x_0\|) + \mathbf{o}(\|df(x_0) \bullet (x - x_0) + \mathbf{o}(\|x - x_0\|)\|.$$
Comme $df(x_0)$ et $dg(y_0)$ sont continues, on a $dg(y_0) \bullet (\mathbf{o}\,\|x - x_0\|) = \mathbf{o}(\|x - x_0\|)$ et
$$\mathbf{o}(\|df(x_0) \bullet (x - x_0) + \mathbf{o}(\|x - x_0\|)\| = \mathbf{o}(\|x - x_0\|).$$
□

PROPOSITION I.1.5.

1. Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$. Si f est constante elle est différentiable en tout point de U et $df(x) = 0$, $\forall x \in U$.

2. Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, et F des espaces normés et $f : E = \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ une application multilinéaire continue. Alors f est différentiable en tout point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E et
$$df(x) \bullet (h_1, \ldots, h_n) = f(h_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, h_2, \ldots, x_n) + \ldots + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n).$$

3. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $\mathscr{GL}(E;F)$ le sous ensemble de $\mathscr{L}(E;F)$ constitué des isomorphismes de E sur F. Alors $\mathscr{GL}(E;F)$ est ouvert dans $\mathscr{L}(E;F)$ et l'application $\varphi : u \mapsto u^{-1}$ de $\mathscr{GL}(E;F)$ dans $\mathscr{GL}(F;E)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, pour toute $u \in \mathscr{GL}(E;F)$, on a
$$d\varphi(u) \bullet h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1},\ h \in \mathscr{GL}(E;F).$$

Démonstration. Le 1. est évident ainsi que le 2. pour $n = 1$. Montrons donc le 2. pour $n > 1$. Par linéarité, on a
$$f(x_1 + h_1, \ldots x_n + h_n) = f(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + f(x_1, \ldots, h_{n-1}, x_n) + g(x, h),$$
où $g(x,h)$ est une somme d'expressions de la forme $f(z_I)$ avec $z_I = (z_1, \ldots, z_n)$ $I \subset \{1, 2, \ldots n\}$, card$I \geq 2$, $z_i = x_i$, si $i \notin I$ et $z_i = h_i$ si $i \in I$. Alors la continuité de f implique qu'il existe une constante K ne dépendant que de n et de x telle que $\|g(x,h)\| \leq K\,\|g\| \sup_{i \neq j} \|h_i\|\,\|h_j\| \leq K\,\|g\|\,\|h\|^2 = \mathbf{o}(\|h\|)$ ce qui termine la preuve du 2.

Démontrons maintenant le 3. Voyons tout d'abord que $\mathscr{GL}(E;F)$ est ouvert dans $\mathscr{L}(E;F)$: soient $u \in \mathscr{GL}(E;F)$ et $h \in \mathscr{L}(E;F)$; pour voir que $u+h$ est un isomorphisme pour $\|h\|$ assez petit, il suffit de voir que $u^{-1}\circ(u+h) = \mathrm{id}_E + u^{-1}\circ h \in \mathscr{GL}(E)$. Or si on prend $\|h\| \leq 1/2\,\|u^{-1}\|^{-1}$, cela résulte du Lemme important suivant :

LEMME. *1. Soit E un espace de Banach. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est telle que $\|u\| < 1$ alors $\mathrm{id}_E - u$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$, et, $\|(\mathrm{id}_E - u)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|u\|}$.*

2. Soient E et F deux espace normés. L'application $u \mapsto u^{-1}$ de $\mathscr{GL}(E;F)$ dans $\mathscr{GL}(F;E)$ est continue.

Démonstration du Lemme. Considérons la série $\sum_{n \geq 0} u^n$. Comme $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, cette série est absolument convergente, donc convergente. On voit alors aussitôt que sa somme v vérifie $v \circ (\mathrm{id}_E - u) = (\mathrm{id}_E - u) \circ v = \mathrm{id}_E$.

Montrons maintenant le 2. du Lemme. Soit $u \in \mathscr{GL}(E;F)$ et supposons qu'il existe une suite $h_n \in \mathscr{GL}(E;F)$ qui tends vers zéro telle que, pour tout n, $u + h_n \in \mathscr{GL}(E;F)$. Alors, pour tout n, $\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n \in \mathscr{GL}(E;E)$ (multiplier à gauche par u^{-1}), et on a $(u + h_n)^{-1} - u^{-1} = (\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n)^{-1} \circ u^{-1} - u^{-1} = ((\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n)^{-1} - \mathrm{id}_E) \circ u^{-1}$, donc $(u + h_n)^{-1} - u^{-1} = -(\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n)^{-1} \circ u^{-1} \circ h_n \circ u^{-1}$. Or la formule
$$\left(\sum_{m=0}^{N} (-1)^m (u^{-1} \circ h_n)^m\right) \circ \left(\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n\right) = \mathrm{id}_E + (-1)^N \left(u^{-1} \circ h_n\right)^{N+1}$$
montre que, pour $\|h_n\|$ petit (i.e. n assez grand) la norme de $\left(\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ h_n\right)^{-1}$ est uniformément bornée ce qui permet de conclure. □

Fin de la démonstration de la Proposition. Pour $\|h\|$ assez petit, on a $\varphi(u + h) - \varphi(u) = (u + h)^{-1} \circ (u - (u + h)) \circ u^{-1} = -(u+h)^{-1}\circ h \circ u^{-1}$. Pour voir que φ est différentiable, il suffit de voir que la différence entre $(u+h)^{-1}\circ h \circ u^{-1}$ et $u^{-1}\circ h \circ u^{-1}$ est un $\mathbf{o}(\|h\|)$. Or cette différence est, en norme majorée par $\|(u + h)^{-1} - u^{-1}\|\,\|u^{-1}\|\,\|h\|$, et il suffit de voir que $\|(u + h)^{-1} - u^{-1}\|$ tend vers zéro quand h tend vers zéro ce qui n'est autre que la continuité de φ qui est donnée par le Lemme.

Reste à voir que $d\varphi$ est continue de $\mathscr{GL}(E;F)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F); \mathscr{L}(E;F))$ ce qui est très simple : l'application ψ qui à $(v, w) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(E;F)$ fait correspondre l'application linéaire $h \mapsto -v \circ h \circ w$ est continue de $\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(E;F)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F); \mathscr{L}(E;F))$, et, comme $d\varphi(u) = \psi(\varphi(u), \varphi(u))$, le résultat découle de la continuité de φ que nous avons déjà établie. □

PROPOSITION I.1.6.

Soient E et F_i, $1 \leq i \leq n$, des espaces normés, $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F. Pour tout i, soit p_i la projection de F sur F_i, et u_i l'injection canonique de F_i dans F définie par $u_i(x_i) = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$. Soit $x_0 \in U$. Notons $f_i = p_i \circ f$. Pour que f soit différentiable en x_0, il faut et il suffit que, pour chaque i, la fonction f_i soit différentiable. De plus, dans ce cas, on a

$$df(x_0) = \sum_{i=0}^{n} u_i \circ df_i(x_0).$$

Démonstration. Les applications p_i et u_i étant linéaires, elles sont différentiables (Proposition I.1.5, page précédente) de différentielles en chaque point égales à elles même, et, par suite (Proposition I.1.4, page 2) f_i est différentiable de différentielle $df_i(x_0) = p_i \circ df(x_0)$. Inversement, on a $f = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ f_i$ d'où on déduit aussitôt le résultat. □

COROLLAIRE.

Soient E, E_i, $1 \leq i \leq n$, et F des espaces normés, f une application multilinéaire continue de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F et U un ouvert de E. Pour tout i soit u_i une fonction de U dans E_i et posons $u(x) = f(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, $x \in U$. Soit $x_0 \in U$. Si, pour tout i, u_i est différentiable en x_0 alors u l'est aussi et on a

$$du(x_0) \bullet h = \sum_{i=1}^{n} f(u_1(x_0), \ldots, du_i(x_0) \bullet h, \ldots, u_n(x_0)).$$

Démonstration. En effet, il suffit de remarquer que u est la composée de f avec l'application de U dans $\prod_{i=1}^{n} E_i$ définie par $x \mapsto (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ et d'appliquer la Proposition précédente (ainsi que la Proposition I.1.4 et la Proposition I.1.5). □

Remarque I.1.2. *Si $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ est somme directe topologique de sous-espaces, il est canoniquement isomorphe à l'espace normé produit des F_i, et la Proposition précédente s'applique clairement : si on note p_i la projection canonique de F sur F_i, une fonction $f : U \to F$ est différentiable en x_0 si et seulement si les fonctions $f_i = p_i \circ f$ sont différentiables et on a $df(x_0) \bullet h = \sum_{i=1}^{n} df_i(x_0) \bullet h$.*

PROPOSITION I.1.7.

*Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, et F des espaces normés, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, U un ouvert de E, $x^0 = (x_1^0, \ldots x_n^0) \in U$, et f une fonction de U dans F. Pour tout i, soient $\lambda_i^{x_0}$ la fonction de E_i dans E définie par $\lambda_i^{x_0}(x_i) = (x_1^0, \ldots, x_i, \ldots x_n^0)$, $U_i = (\lambda_i^{x_0})^{-1}(U)$, qui est un ouvert contenant x_i^0, et $f_i^{x^0} = f \circ \lambda_i^{x_0}$. Si f est différentiable en x^0 alors les fonctions $f_i^{x^0}$ sont différentiables en x_i^0 et on a $df(x^0) \bullet h = \sum_{i=1}^{n} df_i^{x^0}(x_i^0) \bullet h_i$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. La différentielle de $f_i^{x^0}$ en x_i^0 est généralement notée $df_{x_i}(x^0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ ou encore $f'_{x_i}(x^0)$ et s'appelle la **différentielle partielle de** f **par rapport à** x_i au point x^0 ou encore la **dérivée partielle de** f par **rapport à** x_i en x^0, et la formule précédente devient*

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} df_{x_i}(x^0) \circ p_i,$$

où p_i est la projection canonique de E sur E_i.

*Si, pour tout $x^0 \in U$, $f_i^{x^0}$ est différentiable en x_i^0, l'application $x \mapsto df_{x_i}(x)$ s'appelle la **dérivée partielle de** f **par rapport à** x_i et se note df_{x_i} ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou encore f'_{x_i}. De plus, si f est différentiable en tout point de U, pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ dans U, il faut et il suffit que les fonctions df_{x_i} soient continues dans U.*

Démonstration. Pour tout i, soit u_i l'injection canonique de E_i dans E définie par $u_i(x_i) = (0, \dots x_i, \dots 0)$. Comme $\lambda_i^0(x_i) = x^0 + u_i(x_i - x_i^0)$, λ_i^0 est différentiable dans E_i et on a $d\lambda_i^0(x_i) = u_i$, pour tout $x_i \in E_i$. Par suite, f_i est différentiable en x_i^0 et $df_i(x_i^0) = df(x^0) \circ u_i$, d'où la première partie de l'énoncé. La seconde partie est immédiate. □

Remarque I.1.3. *1. L'existence des dérivées partielles df_{x_i}, pour tout i,* ***n'implique pas****, à priori, que f est différentiable. Nous reviendrons sur cette question à la section suivante.*

2. Si $\dim E_i = 1$ df_{x_i} est une application linéaire de $\mathbb{K}$ dans F que l'on identifie toujours à sa valeur en 1.

Définition I.1.5.

Soient E et F deux espaces normés, E_1 un sous-espace de E, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F. On dit que f est ***différentiable dans la direction*** *E_1 en $x_0 \in U$ si la fonction $x \mapsto f(x_0 + x)$, $x \in E_1$, qui est définie dans un voisinage de 0 dans E_1 est différentiable en 0. On note $d_{E_1}f(x_0)$ la différentielle de cette application et on l'appelle la* ***différentielle de f dans la direction*** *E_1 en x_0. C'est un élément de $\mathscr{L}(E_1; F)$.*

Les deux Propositions suivantes, qui sont immédiates, permettent de relier les différentielles dans une direction aux notions de différentielle et de différentielles partielles :

PROPOSITION I.1.8.

Soient E et F deux espaces normés, E_1 un sous-espace de E, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F. Si f est différentiable en x_0 alors elle est différentiable dans la direction E_1 en x_0 et $d_{E_1}f(x_0) = df(x_0)_{|E_1}$.

PROPOSITION I.1.9.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, f une fonction de U dans F et $x^0 \in U$. Supposons que E soit somme directe topologique de sous-espaces E_i, $1 \leq i \leq n$. Identifions $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ avec l'espace normé produit $\prod_{i=1}^{n} E_i$ par l'isomorphisme canonique (bicontinu) $\sum_{i=1}^{n} x_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Pour tout i, f est différentiable dans la direction E_i en x^0 si et seulement si elle admet une différentielle partielle par rapport à x_i au point x^0, et de plus, $df_{x_i}(x^0) = d_{E_i}f(x^0)$. En particulier, si f est différentiable en x^0, alors, pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$, on a

$$df(x^0) \bullet h = \sum_{i=1}^{n} d_{E_i}f(x^0) \bullet h_i.$$

Remarque I.1.4. *On notera que, comme pour les différentielles partielles, l'existence de différentielles dans diverses directions (par exemple, dans la proposition précédente, pour chaque E_i) n'implique pas la différentiabilité de la fonction (cela n'implique même pas la continuité au point).*

Pour terminer, résumons les résultats précédents dans le cas où les espaces E et F se décomposent tous les deux :

PROPOSITION I.1.10.

Soient

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \text{ et } F = \bigoplus_{j=1}^{n} F_j$$

deux espaces normés sommes directes topologiques de sous-espaces, U un ouvert de E, f une fonction de U dans F et x_0 un point de U. Pour tout j, soit p_j la projection canonique de F sur F_j et $f^j = p_j \circ f$. Si f est différentiable en x_0 alors pour tous i et j, f^j est différentiable dans la direction E_i en x_0 et

$$df(x_0) \bullet h = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{n \\ m}} df_{E_i}^j(x_0) \bullet h_i.$$

On dit que $df(x_0)$ est donnée par la ***matrice Jacobienne*** *$\left(df_{E_i}^j(x_0)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ où $df_{E_i}^j(x_0) \in \mathscr{L}(E_i; F_j)$.*

En utilisant cette écriture, on peut énoncer à nouveau la Proposition sur la différentielle d'une application composée :

PROPOSITION I.1.11.

Soient

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i\ ,\ F = \bigoplus_{j=1}^{n} F_j \text{ et } G = \bigoplus_{k=1}^{p} G_k$$

trois espaces normés sommes directes topologiques de sous-espaces, U un ouvert de E, f une fonction de U dans F, V un ouvert de F, g une fonction de V dans G et x_0 un point de U tel que $f(x_0) = y_0 \in V$. On suppose que f est différentiable en x_0 et que g est différentiable en y_0. Alors, avec les notations de la Proposition précédente pour f et l'analogue pour g, pour $h \in E$, on a

$$d(g \circ f) \bullet h = \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{\substack{n \\ p}} \left(\sum_{j=1}^{m} dg_{F_j}^{k}(y_0) \circ df_{E_i}^{j}(x_0) \right) \bullet h_i.$$

En d'autres termes la matrice Jacobienne de $g \circ f$ est le produit des matrices Jacobiennes de g et f.

SECTION I.2

Théorème des accroissements finis et applications

SOUS-SECTION I.2.1

Le Théorème des accroissements finis

On considère tout d'abord le cas des fonctions d'une variable réelle pour lesquelles on a un résultat plus précis.

Définition I.2.1.

*Soit f une fonction d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace normé F. On dit que f admet une **dérivée à droite** (resp. **gauche**) en $x_0 \in [a, b[$ (resp. $x_0 \in]a, b]$) si $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (resp. $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$) existe.*

On remarquera, bien sûr, qu'une fonction de $[a, b]$ dans F est différentiable en $x_0 \in]a, b[$ si et seulement si elle admet des dérivées à droite et à gauche et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

THÉORÈME I.2.1 (*Théorème des accroissements finis*).

Soient F un espace normé, $f : [a, b] \to F$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que pour tout $x \in]a, b[$ sauf peut être pour x appartenant à un sous-ensemble dénombrable D de $]a, b[$, $f'_d(x)$ et $g'_d(x)$ existe et vérifient $\|f'_d(x)\| \le g'_d(x)$, $x \in]a, b[\setminus D$. Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord $D = \emptyset$. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\|f(x) - f(a)\| \le g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \tag{I.2.1}$$

(en appliquant ceci à $x = b$ et en faisant tendre ε vers zéro). Soit U l'ensemble des $x \in [a, b]$ qui ne satisfont pas à (I.2.1). La continuité des fonctions montre que U est ouvert. Si U est non vide, il a une borne inférieure c. Par continuité, (I.2.1) est vraie au voisinage de a, donc $c > a$ et $c \notin U$ puisque ce dernier est ouvert, ce qui implique aussi que $c < b$. On a donc $\|f'_d(c)\| \le g'_d(c)$ ce qui implique $\|f(x) - f(c)\| \le g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c)$ pour $c \le x \le c + \eta$ avec η assez petit. Comme c vérifie (I.2.1), on a donc $\|f(x) - f(a)\| \le g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon$ ce qui contredit la définition de c. Considérons maintenant le cas général où les éléments de D forment une suite x_n. Au lieu de démontrer (I.2.1), nous allons démontrer que, en notant N_x l'ensemble des entiers n tels que $x_n < x$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon \left(\sum_{n \in N_x} 2^{-n} \right) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon, \tag{I.2.2}$$

ce qui donnera la conclusion comme précédemment. Remarquons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \sum_{n \in N_x} 2^{-n}$ est continue en tout point n'appartenant pas à D, continue à gauche aux points de D et croissante : en effet, la croissance étant évidente, la continuité résulte du fait que, si $x \notin D$, pour tout m, il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[$ ne contienne aucun x_p avec $p \leq m$, ce qui entraîne $\left| \sum_{n \in N_x} 2^{-n} - \sum_{n \in N_{x \pm \delta}} 2^{-n} \right| \leq 2^{-m+1}$, et, si $x \in D$, on a le même résultat en remplaçant $]x-\delta, x+\delta[$ par $]x-\delta, x[$. Il en résulte que si on désigne encore par U l'ensemble des $x \in [a,b]$ qui ne satisfont pas à (I.2.2), si $x \in U$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x] \subset U$. Supposons donc a nouveau U non vide, et soit c sa borne inférieure. Comme précédemment on a $a < c$ et ce qui précède montre que $c < b$, et que $c \notin U$. Si $c \notin D$, on peut conclure comme dans la première partie. Supposons $c \in D$ c'est-à-dire $c = x_{n_0}$. Alors, pour tout $x > c$ on a $\sum_{n \in N_x} 2^{-n} \geq \sum_{n \in N_c} 2^{-n} + 2^{-n_0}$, et, comme c n'est pas dans U, par continuité, (I.2.2) est encore vérifiée sur un intervalle semi-ouvert non vide $[c, c+\mu[$ ce qui contredit encore la définition de c. □

COROLLAIRE.

Soit $f : [a,b] \to F$ une application continue. Supposons que f admette une dérivée à droite $f'_d(x)$ pour tout $x \in]a,b[$ et que $\|f'_d(x)\| \leq k$. Alors, pour tous x_1, x_2 dans $[a,b]$, on a $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\,|x_1 - x_2|$.

Remarque I.2.1. *On a bien sûr des énoncés analogues pour les dérivées à gauche qui s'obtiennent en changeant x en $-x$.*

Considérons maintenant les fonctions définies sur un ouvert d'un espace normé.

THÉORÈME I.2.2 (*Théorème des accroissements finis*).

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$. Soient a et b deux points de U tels que le segment $[a,b]$ joignant a à b dans E soit contenu dans U. Supposons f continue sur $[a,b]$ et que, pour tout $x \in]a,b[$, f soit différentiable en x et que $\|df(x)\| \leq k$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k\,\|b-a\|$.

Démonstration. On considère la fonction $h(t) = f((1-t)a + tb)$, $t \in [0,1]$. Alors h est différentiable en tout point de $]0,1[$ et $\|dh(t)\| \leq k\,\|b-a\|$. Il suffit donc d'appliquer le corollaire précédent. □

COROLLAIRE.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert convexe de E et $f : U \to F$. Supposons que, pour tout $x \in U$, f soit différentiable en x et que $\|df(x)\| \leq k$. Alors, $\forall x, y \in U$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x-y\|$.

PROPOSITION I.2.1.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert connexe de E et $f : U \to F$. Supposons que, pour tout $x \in U$, f soit différentiable en x et que $df(x) = 0$. Alors f est constante dans U.

Démonstration. En effet, le Théorème précédent implique que f est localement constante. Comme f est continue et U connexe, ceci implique que f est constante. □

Le Théorème des accroissements finis pour les fonctions réelles d'une variable réelle classique est une égalité ($f(x+h) = f(x) + f'(\vartheta x)h$, $\vartheta \in]0,1[$). Il est bien connu que ce Théorème est en général faux pour les fonction à valeurs dans un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Par contre, si f est définie sur un ouvert d'un espace normé et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut appliquer le Théorème classique à la restriction de la fonction à un segment. Cela donne immédiatement le résultat suivant :

THÉORÈME I.2.3 (*Théorème des accroissements finis*).

Soit f une fonction différentiable sur un ouvert U d'un espace normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient x et h dans E tels que le segment $[x, x+h]$ soit contenu dans U. Alors il existe $\vartheta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + df(x+\vartheta h) \bullet h.$$

Ce Théorème peut se généraliser aux fonctions à valeurs dans un espace normé de la manière suivante :

THÉORÈME I.2.4 (*Théorème des accroissements finis*).

Soit f une fonction différentiable sur un ouvert U d'un espace normé E à valeurs dans un espace normé F. Soient x et h dans E tels que le segment $[x, x+h]$ soit contenu dans U. Alors $f(x+h) - f(x)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{df(x+\vartheta h) \bullet h,\ \vartheta \in]0,1[\}$.

Démonstration. Notons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas où les espaces normés sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (Remarque I.1.1, page 2). Soit L une forme linéaire continue sur F. La fonction $L \circ f$ est donc différentiable sur U de différentielle $L \circ df$ (Propositions I.1.4, page 2 et I.1.5, page 3). Le Théorème précédent appliqué à $L \circ f$ montre qu'il existe $\vartheta_L \in]0,1[$ tel que

$$L\left(f(x+h) - f(x) - df(x+\vartheta_L h) \bullet h\right) = 0.$$

Alors si $f(x+h) - f(x)$ n'appartenait pas à l'enveloppe convexe fermée de $\{df(x+\vartheta h) \bullet h,\ \vartheta \in]0,1[\}$, cela contredirait le Théorème de Hahn-Banach. □

SOUS-SECTION I.2.2

Applications du Théorème des accroissements finis

THÉORÈME I.2.5.

Soient E un espace normé, F un espace de Banach, U un ouvert convexe de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions différentiables de U dans F. On suppose que :

1. Il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ a une limite dans F ;

2. La suite (df_n) converge uniformément, sur U, vers $g : U \to \mathscr{L}(E; F)$ c'est-à-dire que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in U} \|df_n(x) - g(x)\| = 0.$$

Alors :

(i) Pour tout $x \in U$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans F.

(ii) La suite (f_n) converge uniformément sur toute partie bornée de U.

(iii) La fonction limite f est différentiable sur U et $df = g$.

Démonstration. En effet, le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page précédente) appliqué aux fonctions $f_p - f_q$ en un point x_1 donne

$$\|f_p(x) - f_p(x_1) - (f_q(x) - f_q(x_1))\| \le \|x - x_1\| \sup_{y\in U} \|df_p(y) - df_q(y)\| \tag{I.2.3}$$

ce qui montre immédiatement, en prenant $x_1 = x_0$, que $\|f_p(x) - f_q(x)\|$ tend vers zéro uniformément sur toute partie bornée de U. La fonction limite f existe donc puisque F est supposé complet et elle est continue. Reste à voir que f est différentiable de différentielle g. Or, $x_1 \in U$ étant fixé, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_1) - g(x_1) \bullet (x - x_1)\| \ \le\ & \|f(x) - f(x_1) - (f_n(x) - f_n(x_1)\| \\ & + \|f_n(x) - f_n(x_1) - df_n(x_1) \bullet (x - x_1)\| \\ & + \|df_n(x_1) \bullet (x - x_1) - g(x_1) \bullet (x - x_1)\|. \end{aligned} \tag{I.2.4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Le premier terme du second membre de (I.2.4) se majore par $\varepsilon \|x - x_1\|$ pour $n \ge n_0$ d'après (I.2.3) (en faisant $q = n$ et $p \to \infty$). Le troisième terme se majore par la même quantité d'après l'hypothèse, pour n_0 assez grand. Fixons maintenant $n \ge n_0$. Alors la différentiabilité de f_n en x_1 montre que, pour $\|x - x_1\| \le h$ assez petit, le second terme se majore aussi par $\varepsilon \|x - x_1\|$. □

COROLLAIRE.

Soient U un ouvert connexe d'un espace normé E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de U dans un espace de Banach F vérifiant les conditions suivantes :

1. Il existe un point $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge dans F ;

2. Pour tout $x \in U$ il existe une boule de centre x et de rayon > 0 sur laquelle la suite $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g ;

Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $f(x)$ dans$F$, tout point de U possède un voisinage sur lequel la suite (f_n) converge uniformément vers f et f est différentiable sur U et $df = g$.

Démonstration. En effet, soit O l'ensemble des points x de U en lesquels la suite $(f_n(x))$ converge. Le Théorème précédent montre que O est ouvert et fermé, et comme O est non vide, on a $O = U$. Le reste de l'énoncé résulte du Théorème précédent. □

THÉORÈME I.2.6.

Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, et F des espaces normés, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, U un ouvert de E et f une application continue de U dans F.

1. Si les dérivées partielles $df_{x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$, existent en tout point x de U et si, pour tout i, $df_{x_i} : U \to \mathscr{L}(E_i; F)$ sont continues en un point x^0 de U, alors f est différentiable en x^0.

2. Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ dans U, il faut et il suffit que f ait des dérivées partielles $df_{x_i}(x)$ en tout point x de U et que les applications df_{x_i} soient continues.

On peut naturellement donner un énoncé analogue lorsque E est somme directe topologique de sous-espaces, en vertu de la Proposition I.1.9, page 5.

Démonstration. Montrons tout d'abord le 1., le 2. en sera une conséquence facile. D'après la Proposition I.1.7, page 4, il faut montrer que

$$\left\| f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) - \sum_{i=1}^{n} df_{x_i}(x^0) \bullet (x_i - x_i^0) \right\|$$

est un $\mathbf{o}(\|x - x^0\|)$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|x_j - x_j^0\| \leq \eta$, $1 \leq j \leq n$, on a, pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$\left\| f(x_1^0, \ldots x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_{i+1}^0, \ldots x_n) - df_{x_{i+1}}(x^0) \bullet (x_{i+1} - x_{i+1}^0) \right\| \leq \varepsilon \left\| x_{i+1} - x_{i+1}^0 \right\|. \tag{I.2.5}$$

Or la différentielle de la fonction $\xi \mapsto f(x_1^0, \ldots x_i^0, \xi, x_{i+2}, \ldots x_n) - df_{x_{i+1}}(x^0) \bullet (\xi - x_{i+1}^0)$ est, dans un voisinage de x_{i+1}^0,

$$df_{x_{i+1}}(x_1^0, \ldots x_i^0, \xi, x_{i+2}, \ldots x_n) - df_{x_{i+1}}(x^0),$$

et l'hypothèse de continuité de df_{x_i} implique donc que, que pour $\|x_j - x_j^0\| \leq \eta$, $1 \leq j \leq n$, $\|\xi - x_{i+1}^0\| \leq \eta$, η assez petit, on a

$$\left\| df_{x_{i+1}}(x_1^0, \ldots x_i^0, \xi, x_{i+2}, \ldots x_n) - df_{x_{i+1}}(x^0) \right\| \leq \varepsilon,$$

et, le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7) implique (I.2.5).

Le 2. se voit alors aisément : nous savons déjà que la condition est nécessaire (Proposition I.1.7, page 4). Réciproquement, si elle est satisfaite, alors f est différentiable en tout point de U d'après le 1., et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ à nouveau d'après la Proposition I.1.7. □

PROPOSITION I.2.2.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et f une application de U dans F. Soit $x_0 \in U$. Si f est différentiable dans U et si df est continue en x_0 alors f est strictement différentiable en x_0.

Démonstration. En effet, si on pose $g(x) = f(x) - f(x_0) - df(x_0) \bullet (x - x_0)$, g est différentiable et $dg(x) = df(x) - df(x_0)$. Par hypothèse, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\|x - x_0\| \leq \eta$, on a $\|dg(x)\| \leq \varepsilon$. Alors le Corollaire du Théorème des accroissements finis (page 7) implique que g est ε-lipschitzienne dans la boule $\|x - x_0\| \leq \eta$. □

Nous allons terminer cette sous-section en donnant un Théorème célèbre dont nous ne donnerons la démonstration que dans un cas particulier, la preuve générale étant difficile :

THÉORÈME I.2.7 (*Théorème de Sard*).

*Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$. Soit C l'ensemble des **points critiques** de f, c'est-à-dire l'ensemble des points x de U tels que le rang de $df(x)$ soit $< n$ (i.e. $\dim(df(\mathbb{R}^p)) < n$). Alors $f(C)$ est de mesure (de Lebesgue !) nulle.*

Démonstration. Comme nous l'avons dit nous ne faisons la démonstration que dans un cas particulier, pour la simplifier : nous nous contentons du cas $p = n$. Par translation, il suffit de montrer que, si $I = [0,1]^n$, $f(C \cap I)$ est de mesure nulle. Soit $x \in C \cap I$. Puisque $df(x)(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de dimension inférieure à $n-1$, il existe un hyperplan P contenant $df(x)(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7) appliqué à la fonction $u \mapsto f(u) - df(x) \bullet u$ donne

$$f(y) = f(x) + df(x) \bullet (y - x) + \|t - x\| \, b(\varepsilon),$$

où

$$\|b(\varepsilon)\| \leq \sup_{u \in B(x,\varepsilon)} \|df(x) - df(u)\|,$$

ce qui implique $\lim_{\varepsilon \to 0} b(\varepsilon) = 0$ puisque df est uniformément continue sur le compact I. Comme $f(x) + df((x) \bullet (y - x)$ appartient à l'hyperplan affine $\tilde{P} = f(x) + P$, la distance de $f(y)$ à $\tilde{P}$ est inférieure à $\varepsilon b(\varepsilon)$. Ceci montre que $f(B(x, \varepsilon))$ est située entre les

deux hyperplans affines dont la distance à $\tilde{P}$ est $\varepsilon b(\varepsilon)$. Une autre application du même Théorème des accroissements finis montre par ailleurs que
$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{u\in I} \|df(u)\| \, \|y - x\|$$
de sorte que $f(y)$ appartient à la boule de centre $f(x)$ et de rayon $\alpha_I \varepsilon$ où $\alpha_I = \sup_{u\in I} \|df(u)\|$. Finalement, $f(B(x,\varepsilon)$ est contenu dans un cylindre droit dont la base est l'intersection de $\tilde{P}$ avec la boule de centre $f(x)$ et de rayon $\alpha_I\varepsilon$ et la hauteur est $2\varepsilon b(\varepsilon)$. Ainsi, $f(B(x,\varepsilon)$ est contenu dans un pavé de $\mathbb{R}^n$ dont les côtés parallèles à P sont de longueurs $\sqrt{n}\alpha_I\varepsilon$ et le côté perpendiculaire à P est de longueur $2\varepsilon b(\varepsilon)$. Le volume d'un tel pavé est $2n^{(n-1)/2}\alpha_I^{n-1}\varepsilon^n b(\varepsilon)$.

Découpons maintenant chacun des n côtés du pavé I en k parties égales : on obtient ainsi k^n cubes de côté $1/k$. Chacun de ces cubes est contenu dans une boule (centré en l'un quelconque des points du cube) de rayon $(\sqrt{n})/k$. D'après ce qui précède, si l'un de ces cubes intersecte C alors son image par f est contenue dans un pavé de volume
$$2n^{n-1/2}\alpha_I^{n-1}k^{-n}b((\sqrt{n})/k).$$
Comme il y a au plus k^n tels cubes, on en déduit que $f(C\cap I)$ est contenu dans une réunion finie de pavés dont la somme des volumes est $2n^{n-1/2}\alpha_I^{n-1}b((\sqrt{n})/k)$, quantité qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Compte tenu des propriétés bien connues de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ cela signifie exactement que la mesure (de Lebesgue) de $f(C\cap I)$ est nulle, et la preuve du Théorème est achevée dans ce cas particulier.

C.Q.F.D.

SECTION I.3

Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

SOUS-SECTION I.3.1

Le Théorème d'inversion locale

PROPOSITION I.3.1.

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. Supposons que f soit strictement différentiable en x_0 et que $df(x_0)$ soit un isomorphisme de E sur F (i.e. $df(x_0)$ bijective, $df(x_0)$ et $df(x_0)^{-1}$ continues (c.f. le commentaire qui suit la Définition I.3.1). Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 (contenu dans U) et un voisinage ouvert W de $y_0 = f(x_0)$ tels que f soit un homéomorphisme de V sur W.

Démonstration. Soit $f_1 = (df(x_0))^{-1} \circ f \;:\; U \to E$. Comme $df(x_0)$ est linéaire, f_1 est aussi strictement différentiable en x_0 et $df_1(x_0) = \mathrm{id}_E$. Soit $0 < k < 1$. Il existe donc $r > 0$ tel que l'application $x \mapsto \varphi(x) = x - f_1(x)$ soit lipschitzienne de rapport k dans la boule $B(x_0,r)$. Utilisons maintenant le Lemme suivant qui est une conséquence facile du Théorème du point fixe classique :

LEMME. *Soient E un espace de Banach, x_0 un point de E, $r > 0$ et g une fonction continue de la boule ouverte $B(x_0,r)$ dans E telle que la fonction $x \mapsto \psi(x) = x - g(x)$ soit lipschitzienne de rapport $k < 1$. Soit $y_0 = g(x_0)$. Alors, il existe un voisinage ouvert V de x_0 contenu dans $B(x_0,r)$ tel que g soit un homéomorphisme de V sur la boule ouverte $B(y_0,(1-k)r)$. De plus, l'application réciproque g^{-1} de cet homéomorphisme est lipschitzienne de rapport $1/(1-k)$.*

Démonstration du Lemme. En effet, considérons la fonction $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + y_0 - x_0$. Il est clair que $\tilde{\psi}$ est lipschitzienne de rapport k dans $B(x_0,r)$ et $\tilde{\psi}(x_0) = 0$. Par suite, pour $x \in B(x_0,r)$ on a $\left\|\tilde{\psi}(x)\right\| \leq k\,\|x - x_0\| \leq kr$. Alors, si $y \in B(x_0,(1-k)r)$, la fonction $\omega(x) = y + \tilde{\psi}(x)$ est lipschitzienne de rapport k et vérifie
$$\|\omega(x) - x_0\| \leq \|y - x_0\| + \left\|\tilde{\psi}(x)\right\|.$$
Ainsi, si on pose $(1-k)r_1 = \|y - x_0\|$, ω est une fonction lipschitzienne de rapport k de la boule fermée $\bar{B}(x_0,r_1)$ dans elle même. Le Théorème du point fixe classique implique que ω a un unique point fixe dans cette boule fermée ce qui signifie que l'équation $\tilde{\psi}(x) = x - y$ a une unique solution dans la boule $B(x_0,r)$. En d'autres termes, pour tout $y \in B(y_0,(1-k)r)$, l'équation $g(x) = y$ a une unique solution $h(y)$ dans la boule $B(x_0,r)$. Ceci définit donc une fonction h de $B(y_0,(1-k)r)$ dans $B(x_0,r)$ et comme
$$\left\|g(x) - g(x')\right\| \geq \left\|x - x'\right\| - \left\|\psi(x) - \psi(x')\right\| \geq (1-k)\left\|x - x'\right\|,$$

on a

$$\left\|h(y) - h(y')\right\| \leq \frac{1}{1-k} \left\|y - y'\right\|,$$

ce qui montre en particulier que h est continue. Si alors on pose $V = g^{-1}(B(y_0, (1-k)r))$, V est un voisinage ouvert de x_0 et h est l'inverse de la restriction à V de g. □

Fin de la démonstration de la Proposition. D'après le Lemme, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que f_1 soit un homéomorphisme de V sur un voisinage ouvert W_1 de $f_1(x_0)$. Comme $df(x_0)$ est un homéomorphisme de E sur F, f est un homéomorphisme de V sur un voisinage ouvert W de y_0. □

On notera que dans la démonstration de la Proposition précédente on a simplement utilisé que E est complet. Mais l'hypothèse « $df(x_0)$ est un isomorphisme » implique que F est aussi complet.

Définition I.3.1.

*Soient E et F deux espaces normés, V un ouvert de E et W un ouvert de F. On dit que f est un **difféomorphisme de classe** $\mathscr{C}^1$ de V sur W si f est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W et si son inverse $f^{-1} : W \to V$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.*

Avant de poursuivre plus avant, faisons une remarque importante. Si E et F sont deux espaces normés, une application linéaire continue bijective f de E sur F n'a pas nécessairement un inverse f^{-1} continu. Dans toute la suite nous appellerons **isomorphisme d'espaces normés** (ou simplement **isomorphisme**) de E sur F une application linéaire continue bijective f telle que f^{-1} soit continue. Rappelons au passage que le Théorème d'isomorphie de Banach dit que, quand E et F sont des espaces complets, toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.

PROPOSITION I.3.2.

Soient E et F deux espaces normés, V un ouvert de E et W un ouvert de F. Soit f un homéomorphisme de V sur W différentiable en $x_0 \in V$. Pour que f^{-1} soit différentiable en $f(x_0)$ il faut et il suffit que $df(x_0)$ soit un isomorphisme. De plus, dans ce cas $d(f^{-1})(f(x_0)) = (df(x_0))^{-1}$.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire (en utilisant la formule de différentiation d'une fonction composée), montrons donc qu'elle est suffisante. Par hypothèse on a $f(x) - f(x_0) = df(x_0) \bullet (x - x_0) + \|x - x_0\| \varepsilon(x - x_0)$, $x \in V$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$, ce qui s'écrit encore

$$x - x_0 = (df(x_0))^{-1} \bullet (f(x) - f(x_0)) - \|x - x_0\| (df(x_0))^{-1} \bullet \varepsilon(x - x_0),$$

soit encore, pour $y \in W$ et en posant $y_0 = f(x_0)$,

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1} \bullet (y - y_0) - \left\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right\| (df(x_0))^{-1} \bullet \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)), \tag{I.3.1}$$

d'où on tire

$$\left\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right\| \left(1 - \left\|(df(x_0))^{-1}\right\| \left\|\varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))\right\|\right) \leq \left\|(df(x_0))^{-1}\right\| \|y - y_0\|,$$

et comme $\lim\limits_{y \to y_0} \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = 0$ (car f est un homéomorphisme), il vient $\left\|f^{-1} - y) - f^{-1}(y_0)\right\| \leq K \|y - y_0\|$, pour y proche de y_0 (pour une certaine constante K), ce qui prouve que le second terme du second membre de (**??**) est un $\mathbf{o}(\|y - y_0\|)$ et termine la démonstration. □

PROPOSITION I.3.3.

Soient E et F deux espaces normés, V un ouvert de E et W un ouvert de F. Soit f un homéomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W. Pour que f soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W il faut et il suffit que, pour tout $x \in V$, $df(x)$ soit un isomorphisme et alors $d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y))^{-1}$, $y \in W$.

Démonstration. La Proposition I.3.2 montre que f^{-1} est différentiable en tout point de W. Il faut seulement voir que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ c'est à dire que $y \mapsto (df(f^{-1}(y)))^{-1}$ est continue. Mais, comme df est supposée continue, ceci résulte du Lemme de la Proposition I.1.5, page 3. □

THÉORÈME I.3.1 (*Théorème d'inversion locale*).

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans F. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0)$ soit un isomorphisme de E sur F. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 contenu dans U et un voisinage ouvert W de $f(x_0)$ tels que f soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W.

Démonstration. D'après la Proposition I.2.2, page 9, f est strictement différentiable en x_0, et la Proposition I.3.1, page précédente, implique qu'il existe un voisinage ouvert $V' \subset U$ de x_0 tel que f soit un homéomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V' sur son image. Comme $\mathscr{GL}(E; F)$ est ouvert (Proposition I.1.5, page 3) son image réciproque par df est ouverte dans E et contient x_0 par hypothèse. Il existe donc un voisinage ouvert $V \subset V'$ de x_0 tel que $df(x)$ soit un isomorphisme pour tout $x \in V$. Ainsi, si on pose $W = f(V)$, on est dans les conditions de la Proposition I.3.3, de la présente page, ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE.
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans F. Pour que f soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de U sur son image, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :
(i) f est injective ;
(ii) pour tout $x \in U$, $df(x)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Les conditions sont bien sûr nécessaires, voyons qu'elles sont suffisantes. En effet, le Théorème d'inversion locale montre que f est un application ouverte, donc $f(U)$ est ouvert, et la Proposition I.3.3, page précédente, montre qu'il suffit de remarquer que f est un homéomorphisme. Or, par hypothèse, f est une bijection, et la continuité de f^{-1} résulte du fait que f est ouverte. □

Remarque I.3.1. *Le Théorème d'inversion locale que nous venons de voir redonne, bien sûr, le résultat classique en dimension finie : si $E = F = \mathbb{R}^n$, f est un difféomorphisme local en un point x_0 si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0 et le Jacobien de f en x_0 est non nul.*

Nous terminons cette sous-section par un résultat classique d'inversion globale :

THÉORÈME I.3.2 (*Théorème de Hadamard-Lévy*).
Soient E et F deux espaces de Banach et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de E dans F. On suppose que, pour tout $x \in E$, $df(x)$ est un isomorphisme et qu'il existe un nombre $A > 0$ tel que $\left\|(df(x))^{-1}\right\| \leq A$. Alors f est un difféomorphisme de E sur F (i.e. surjectif) de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration. La Proposition précédente nous dit qu'il suffit de montrer que f est bijective.

Démontrons tout d'abord que f est surjective. Soient $x \in E$ et $y \in F$. Soit $\gamma\ :\ [0,1] \to F$ tel que $\gamma(0) = f(x)$., $t \in [0,1]$. Par hypothèse, f est un difféomorphisme au voisinage de $f(x)$ (Théorème I.3.1) ; il existe donc $h > 0$ et $\tilde{\gamma}\ :\ [0,h] \to E$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Soit A l'ensemble des $t \in]0,1]$ tels qu'il existe $\tilde{\gamma}\ :\ [0,t] \to E$ tels que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. A est donc non vide. Soit a la borne supérieure de A. Si $0 < t_1 < t_2 < a$, et si $\tilde{\gamma}_i\ :\ [0,t_i] \to E$ est continue et vérifie $f \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma$, $i = 1,2$, l'ensemble des $t \in [0,t_1]$ tels que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ sur $[0,t]$ est fermé (par continuité) et ouvert car f est un difféomorphisme local en tout point de E. Il s'en suit qu'il existe $\tilde{\gamma}\ :\ [0,a[\to E$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. De cette relation on tire $d\tilde{\gamma}(t) = (df(\tilde{\gamma}(t))^{-1} \circ d\gamma(t)$, et l'hypothèse implique $\|d\tilde{\gamma}(t)\| \leq A\,\|d\gamma(t)\|$, $0 \leq t < a$. Le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7) entraîne donc que si $0 \leq t_1 \leq t_2 < a$, on a $\|\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_2)\| \leq A \sup_t \|d\gamma(t)\|\,|t_1 - t_2|$. Ceci montre que si $(t_n)_n$ est une suite, dans $[0,a[$ qui converge vers a, alors $(\tilde{\gamma}(t_n))_n$ est une suite de Cauchy dans E. Comme E est supposé complet, on conclut que $\tilde{\gamma}$ se prolonge par continuité à $[0,a]$. Alors si $a < 1$, f étant un difféomorphisme local en $\tilde{\gamma}(a)$, $\tilde{\gamma}$ peut se prolonger par $f^{-1} \circ \gamma$ au-delà de a ce qui contredit la définition de a. Ainsi $f(\tilde{\gamma}(1) = \gamma(1)$. Si on choisit $\gamma(t) = (1-t)f(x) + ty$, $y \in F$ quelconque, on obtient $f(\tilde{\gamma}(1)) = y$, ce qui conclut.

On notera que, au passage, on a montré que, pour toute fonction $\gamma\ :\ [0,1] \to F$ telle que $\gamma(0) \in f(E)$, il existe une unique fonction $\tilde{\gamma}\ :\ [0,1] \to E$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. De plus, ceci reste évidement vrai si on remplace $[0,1]$ par un segment quelconque de $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que f est injective. Soient x et x' deux points de E tels que $f(x) = f(x')$. Soient $\tilde{\gamma}_1(t) = (1-t)x + tx'$ et $\gamma_1(t) = f \circ \tilde{\gamma}_1(t)$. Posons $\varphi(s,t) = \gamma_s(t) = s\gamma_1(t)$, $0 \leq s \leq 1$ et $\varphi_t(s) = \varphi(s,t)$ de sorte que $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$. La première partie de la preuve montre que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe une unique fonction continue $\tilde{\varphi}_t\ :\ [0,1] \to E$ telle que $f \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t$. posons $\tilde{\varphi}(s,t) = \tilde{\varphi}_t(s)$ et $\tilde{\gamma}_s(t) = \tilde{\varphi}(s,t)$. Remarquons que $\tilde{\varphi}$ est continue car, si $(s_1,t_1) \in [0,1]^2$, comme f^{-1} existe et est un difféomorphisme local au voisinage de $\varphi(s_1,t_1)$ (Théorème I.3.1), la fonction continue $\psi(s,t) = f^{-1} \circ \varphi(s,t)$ définit, pout t voisin de t_1 des fonctions ψ_t vérifiant $f \circ \psi_t = \varphi_t$, au voisinage de s_1. Alors l'unicité obtenue dans la première partie de la démonstration montre que $\psi_t = \tilde{\varphi}_t$ au voisinage de s_1. Pour montrer que $x = x'$, il nous suffit de montrer que, $\forall s \in [0,1]$, on a $\tilde{\gamma}_s(0) = \tilde{\gamma}_s(1)$. Soit A l'ensemble des $s \in [0,1]$ pour lesquels cette propriété est vraie sur $[0,s]$. Comme $f(x) = f(x')$, $\|\varphi(s,t)\| \leq Ks$, et comme f est un difféomorphisme local à l'origine (Théorème I.3.1), il existe $h > 0$ tel que $h \in A$. Soit $a > 0$ la borne sutérieure de A. Par continuité de $\tilde{\varphi}$, on a $a \in A$. Si $a = 1$, la preuve est terminée. Supposons donc $a < 1$. Comme φ est continue, il existe $\varepsilon > 0$ et $h > 0$ tels que f^{-1} existe et soit un difféomorphisme local au voisinage de $\varphi([a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times ([0,h] \cup [1-h,1])$. Alors, si on pose $\psi(s,t) = f^{-1} \circ \varphi(s,t)$, pour $(s,t) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times ([0,h] \cup [1-h,1]$, on a $\psi(s,0) = \psi(s,1)$ et l'unicité prouvée précédement montre que $\psi(s,t) = \tilde{\gamma}_s(t)$, ce qui contredit la maximalité de a.

C.Q.F.D.

SOUS-SECTION I.3.2

Le Théorème des fonctions implicites

THÉORÈME I.3.3 (*Théorème des fonctions implicites*).
Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ et f un fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans G. Soit (x_0, y_0) un point de U. On suppose que $f(x_0, y_0) = 0$ et que la différentielle partielle de f par rapport à

la seconde variable au point (x_0, y_0), $df_y(x_0, y_0)$, est un isomorphisme de F sur G. Alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de (x_0, y_0), un voisinage ouvert W de x_0 dans E et un fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ de W dans F tels que la relation

$$(x, y) \in V,\ f(x, y) = 0$$

équivaut à la relation

$$x \in V,\ y = g(x).$$

Démonstration. Nous allons déduire ce Théorème du Théorème d'inversion locale. Considérons l'application $f_1 : U \to E \times G$ définie par $f_1(x, y) = (x, f(x, y))$, $(x, y) \in U$. Cette application est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa différentielle en (x_0, y_0) est l'application $(h, k) \mapsto (h, df_x(x_0, y_0) \bullet h + df_y(x_0, y_0) \bullet k)$. L'hypothèse faite sur $df_y(x_0, y_0)$ implique que $df_1(x_0, y_0)$ est un isomorphisme, et on peut lui appliquer le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11) : il existe un voisinage V de (x_0, y_0) contenu dans U et un voisinage W_1 de $(x_0, 0) = f_1(x_0, y_0)$ dans $E \times G$ tels que f_1 soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Soit g_1 le difféomorphisme réciproque. Il est nécessairement de la forme $g_1(x, z) = (x, \tilde{g}(x, z))$, avec $(x, z) \in W_1$, ce qui définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $\tilde{g}$, dans W_1. Comme f_1 et g_1 sont des homéomorphismes réciproques, on a équivalence entre les deux relations suivantes :

(a) $(x, y) \in V$ et $f(x, y) = z$;

(b) $(x, z) \in W_1$ et $\tilde{g}(x, z) = y$.

Si on fait $z = 0$ dans (a), on trouve la première relation de l'énoncé. Soit alors W l'ensemble des points de E tels que $(x, 0) \in W_1$. Clairement W est un ouvert de E qui contient x_0, et si on pose $g(x) = \tilde{g}(x, 0)$, g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans W telle que la relation (b) pour $z = 0$ s'écrive $x \in W$ et $g(x) = y$, ce qui termine la preuve. □

On notera que l'ouvert W dont l'existence est prouvée par le Théorème des fonctions implicites n'est pas nécessairement connexe, mais il contient évidement une boule B centrée en x_0 telle que la relation $x \in B$, $y = g(x)$, implique $(x, y) \in U$ et $f(x, y) = 0$. Dans un certain sens, g est la seule fonction qui possède cette propriété :

PROPOSITION I.3.4.

Dans les conditions du Théorème des fonctions implicites, et avec les même notations, soient W' un voisinage ouvert connexe de x_0 contenu dans W et h une fonction continue de W' dans F telle que

$$\begin{cases} h(x_0) = y_0,\ (x, h(x)) \in U,\ \forall x \in W', \\ f(x, h(x)) = 0. \end{cases}$$

Alors h est la restriction à W' de la fonction g donnée par le Théorème des fonctions implicites.

Démonstration. En effet, soit A l'ensemble des points de W' tels que $h(x) = g(x)$. On a donc $x_0 \in A$ et A est fermé car h et g sont continues. Montrons maintenant que A est ouvert dans W'. Si A n'est pas ouvert dans W', il existe un point x de A et une suite (x_n) de points de $W' \setminus A$ qui converge vers x tels que $h(x_n) \neq g(x_n)$, pour tout n. L'équivalence du Théorème des fonctions implicites montre alors que $(x_n, h(x_n)) \notin V$ pour tout n. Mais comme $(x, h(x)) \in V$, ceci contredit la continuité de h en x. Comme A est connexe, on a donc bien $A = W'$. □

La démonstration du Théorème des fonctions implicites montre que, si on oublie l'hypothèse $f(x_0, y_0) = 0$, on a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME I.3.4 (*Théorème des fonctions implicites*).

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, x_0 un point de U, y_0 un point de V et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U \times V$ dans G. On suppose que $df_y(x_0, y_0)$ est un isomorphisme de F sur G. Alors il existe un voisinage U_1 de x_0, un voisinage W de $f(x_0 y_0)$ et une unique fonction g de $U_1 \times W$ dans V telle que $\forall (x, z) \in U_1 \times W$ on ait $f(x, g(x, z)) = z$.

COROLLAIRE.

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $df(x_0)$ est surjective et que E est somme directe topologique de $\ker(df(x_0)$ et d'un sous-espace E_2 (qui est nécessairement complet). Alors $f(U)$ contient un voisinage de $f(x_0)$.

Démonstration. En effet, remarquons tout d'abord que E_2 est nécessairement complet : si (x_n) est une suite de Cauchy dans E_2 alors $((0, x_n))$ est une suite de Cauchy dans $\ker(df(x_0)) \times E_2 = E$ et, comme E est complet, elle converge vers $x = (x^1, x^2)$; comme les projections sont continues par hypothèse, on doit avoir $x^2 = \lim x_n$. Ceci étant remarqué, le corollaire suit immédiatement le Théorème une fois identifié E avec le produit $\ker(df(x_0) \times E_2$: $f(U)$ contient le voisinage W de $f(0, x_0)$. □

SECTION I.4

Différentielles d'ordre supérieurs

SOUS-SECTION I.4.1

Différentielles secondes

Définition I.4.1.

*Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et $f : U \to F$ une fonction. On dit que f est **deux fois différentiable en** x_0 si f différentiable dans un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_0 et si la différentielle $df : V \to \mathscr{L}(E;F)$ est différentiable en x_0. La différentielle de df en x_0 est notée $d^2f(x_0)$ (ou $f''(x_0)$) et s'appelle la **différentielle seconde de** f au point x_0. C'est une application linéaire continue de E dans $\mathscr{L}(E;F)$, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$. On dit que f est **deux fois différentiable dans** U si elle est différentiable en tout point de U et si df est aussi différentiable en tout point de U, et on note d^2f l'application $x \mapsto d^2f(x)$ de U dans $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ et on appelle **différentielle seconde** de f cette application. On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^2$ dans U si elle est deux fois différentiable dans U (i.e. en tout point de U) et si d^2f est continue de U dans l'espace normé $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$, et on note $f \in \mathscr{C}^2(U)$.*

Rappelons que l'espace $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ s'identifie canoniquement et isométriquement à l'espace $\mathscr{L}(E,E;F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times E$ par l'application $u \mapsto \tilde{u}$ où $\tilde{u}(h,k) = (u \bullet h) \bullet k$.

On identifie alors toujours la différentielle seconde** $d^2f(x_0)$ **à la forme bilinéaire continue obtenue par cet isomorphisme c'est-à-dire à la forme bilinéaire continue** $(h,k) \mapsto (df^2(x_0) \bullet h) \bullet k$ **que l'on écrit alors** $d^2f(x_0) \bullet (h,k)$**.

La définition ci-dessus et l'identification précédente montrent que

PROPOSITION I.4.1.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et $f : U \to F$ une fonction. Alors f est deux fois différentiable en x_0 si elle est différentiable dans un voisinage de x_0 et s'il existe une application bilinéaire continue g de $E \times E$ dans F telle que, pour $\|h\|$ assez petit, $h, k \in E$, on a

$$df(x_0+h) \bullet k - df(x_0) \bullet k - g(x_0) \bullet (h,k) = \mathbf{o}(\|h\| (\|h\| + \|k\|).$$

La propriété fondamentale qui justifie pleinement cette identification est la suivante :

THÉORÈME I.4.1.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et $f : U \to F$ une fonction deux fois différentiable en x_0. Alors $d^2f(x_0)$ est une application bilinéaire continue symétrique. Autrement dit, $d^2f(x_0) \bullet (h,k) = d^2f(x_0) \bullet (k,h)$, $h, k \in E$.

Démonstration. Posons $A(h,k) = f(x_0+h+k) - f(x_0+h) - f(x_0+k) + f(x_0)$.

Démontrons tout d'abord que

$$\left\|A(h,k) - d^2f(x_0) \bullet (k,h)\right\| = \mathbf{o}((\|h\| + \|k\|)^2) \tag{I.4.1}$$

En effet, si on écrit

$$\begin{aligned}\left\|A(h,k) - d^2f(x_0) \bullet (k,h)\right\| \;\le\; & \|A(h,k) - df(x_0+k) \bullet h + df(x_0) \bullet h\| \\ & + \left\|df(x_0+k) \bullet h - df(x_0) \bullet h - d^2f(x_0) \bullet (h,k)\right\|,\end{aligned} \tag{I.4.2}$$

le second terme du second membre de cette inégalité est un $\mathbf{o}(\|k\| (\|h\| + \|k\|)$ par la Proposition précédente, et, le premier s'écrit $\|\psi(h) - \psi(0)\|$ où $\psi(x) = f(x_0+k+x) - f(x_0+x) - df(x_0+k) \bullet x + df(x_0) \bullet x$. En appliquant à ψ le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7), on majore ce terme par

$$\|h\| \sup_{0 \le t \le 1} \|df(x_0+k+th) - df(x_0+th) - df(x_0+k) + df(x_0)\|. \tag{I.4.3}$$

En écrivant $df(x_0+k+th) - df(x_0+th) = df(x_0+k+th) - df(x_0) - (df(x_0+th) - df(x_0)) = d^2f(x_0) \bullet (k+th) - d^2f(x_0) \bullet th + \mathbf{o}(\|h\| + \|k\|)$, par la définition même de la différentielle seconde, on voit que (I.4.3) est un $\mathbf{o}(\|h\| (\|h\| + \|k\|)$. Ainsi, la premier membre de (I.4.2) est un $\mathbf{o}(\|h\| (\|h\| + \|k\|))$, ce qui montre (I.4.1).

Terminons maintenant la preuve du Théorème. Comme $A(h,k)$ est symétrique, (I.4.1) donne

$$\left\|A(h,k) - d^2f(x_0) \bullet (h,k)\right\| = \mathbf{o}((\|h\| + \|k\|)^2),$$

et, par suite,

$$\left\|d^2f(x_0)\bullet(h,k)-d^2f(x_0)\bullet(k,h)\right\|=\mathbf{o}((\|h\|+\|k\|)^2).$$

Alors, si h et k sont dans E de normes égales à 1, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que, pour $|\lambda|\leq\eta$ on a

$$\left\|d^2f(x_0)\bullet(\lambda h,\lambda k)-d^2f(x_0)\bullet(\lambda k,\lambda h)\right\|\leq\varepsilon\,|\lambda|^2\,(\|h\|+\|k\|)^2,$$

ce qui, en simplifiant par $|\lambda|^2$ donne le résultat cherché.

C.Q.F.D.

Remarque I.4.1. *Dans le cas particulier où $E=\mathbb{R}$, $d^2f(x_0)$ est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans F. Elle s'écrit donc, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $d^2f(x_0)\bullet(\lambda,\mu)=\lambda\mu d^2f(x_0)\bullet(1,1)$. On identifie toujours $d^2f(x_0)$ avec le vecteur de F $d^2f(x_0)\bullet(1,1)$ ce qui redonne la notion usuelle de dérivée seconde dans le cas où $F=\mathbb{R}$.*

PROPOSITION I.4.2.

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et $f:U\to F$ une fonction deux fois différentiable en x_0. Pour tout t fixé dans E, l'application $x\mapsto df(x)\bullet t$, définie au voisinage de x_0 est différentiable en x_0 de différentielle $h\mapsto d^2f(x_0)\bullet(h,t)$.

Démonstration. En effet, cette application est la composée de l'application linéaire $u\mapsto u\bullet t$ de $\mathscr{L}(E;F)$ dans F et de l'application $x\mapsto df(x)$ d'un voisinage de x_0 dans $\mathscr{L}(E;F)$ (Proposition I.1.4, page 2 et Proposition I.1.5, page 3). □

PROPOSITION I.4.3.

Soient E_i, $1\leq i\leq n$, et F des espaces normés, $E=\prod_{i=1}^n E_i$, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F deux fois différentiable en x_0. Alors, pour tout i, $1\leq i\leq n$, les différentielles partielles df_{x_i} sont différentiables en x_0. Pour tous i et j, $1\leq i,j\leq n$, df_{x_i} admet une différentielle partielle par rapport à x_j, notée $d^2f_{x_ix_j}(x_0)$, qui est un élément de $\mathscr{L}(E_i,E_j;F)$, et on a $(d^2f_{x_ix_j}(x_0)\bullet h_i)\bullet k_j=(d^2f_{x_jx_i}(x_0)\bullet k_j)\bullet h_i$. De plus, pour tous $h=(h_i)_{1\leq i\leq n}$ et $k=(k_i)_{1\leq i\leq n}$ dans E, on a

$$d^2f(x_0)\bullet(h,k)=\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}(d^2f_{x_ix_j}(x_0)\bullet h_i)\bullet k_j.$$

Démonstration. En effet, pour tout i, $df_{x_i}(x)=df(x)\circ u_i$ où $u_i(h_i)=(0,\ldots,h_i,\ldots,0)$, $h_i\in E_i$ (Proposition I.1.7, page 4), ce qui montre que df_{x_i} est différentiable en x_0 et que sa différentielle partielle par rapport à x_j en x_0 est $d^2f_{x_ix_j}(x_0)=d^2f(x_0)\circ(u_i,u_j)$. □

Remarque I.4.2. *1. On a bien sûr un énoncé analogue pour les différentielles directionnelles lorsque E est somme directe topologique de sous-espaces.*

2. Dans le cas où $\dim E_i=\dim E_j=1$, $d^2f_{x_ix_j}(x_0)$ est une application bilinéaire de $\mathbb{K}^2$ dans F et on l'identifie toujours à sa valeur au point $(1,1)$.

3. On notera que la Proposition ci-dessus (en particulier dans le cas du 2. ci-dessus) donne un résultat plus fort que le classique Théorème de Schwarz qui dit que les dérivées partielles secondes croisées sont égales lorsque la fonction est deux fois continûment dérivable.

PROPOSITION I.4.4.

Soient E_i, $1\leq i\leq n$, et F des espaces normés, $E=\prod_{i=1}^n E_i$, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. Pour que f soit deux fois différentiable en x_0 il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues df_{x_i}, $1\leq i\leq n$, en tout point d'un voisinage de x_0, et que les dérivées partielles secondes $df_{x_ix_j}(x)$, $1\leq i,j\leq n$, existent en tout point d'un voisinage de x_0 et qu'elles soient continues en x_0.

Démonstration. Il suffit d'appliquer deux fois le Théorème I.2.6, page 9. □

PROPOSITION I.4.5.

Soient E_i, $1\leq i\leq n$, et F des espaces normés, $E=\prod_{i=1}^n E_i$ et f une application multilinéaire continue de E dans F.

1. Si $n=1$, $d^2f=0$.

2. Si $n \geq 2$, la différentielle seconde de f en $x \in E$ est donnée par la formule

$$d^2 f(x) \bullet (h,k) = \sum_{i<j} f(\xi_{ij}(x,h,k)) + f(\xi_{ji}(x,k,h)),$$

où $\xi_{ij}(x,h,k)$ est le point de E dont toutes les coordonnées sont égales à celles de x sauf la i-ème qui est h_i et la j-ème qui est k_j. En particulier, si $n = 2$, $d^2 f$ est l'application constante qui à x fait correspondre la forme bilinéaire symétrique continue $(h,k) \mapsto f(h_1,k_2) + f(k_1,h_2)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions et de la Proposition I.1.5, page 3. □

Terminons ce paragraphe en donnant, à titre d'exercice le calcul de la différentielle seconde d'une fonction composée. Supposons donc que U soit un ouvert d'un espace normé E, V un ouvert d'un espace normé F, f une fonction de U dans V, g une fonction de V dans un espace normé G, les deux fonctons f et g étant supposées deux fois différentiables, f en $x_0 \in U$ et g en $y_0 = f(x_0) \in V$. La différentielle de $g \circ f$ en x est donc $d(g \circ f)(x) \bullet h = dg(f(x) \circ df(x) \bullet h$. Ainsi $d(g \circ f)$ est la composée de l'application bilinéaire $\psi(u,v) = u \circ v$ et de $x \mapsto (dg(f(x), df(x))$. Par des résultats que nous avons vus, on a donc

$$d(d(g \circ f))(x_0) \bullet h = \psi(d(dg \circ f)(x_0) \bullet h, df(x_0)) + \psi(dg(f(x_0), d^2 f(x_0) \bullet h),$$

ce qui donne

$$d^2(g \circ f)(x_0) \bullet h = d^2 g(y_0) \circ (df(x_0) \bullet h) \circ df(x_0) + dg(y_0) \circ d^2 f(x_0) \bullet h.$$

Ainsi :

PROPOSITION I.4.6.

Dans les conditions ci-dessus, la différentielle seconde de $g \circ f$ au point x_0 est donnée par la formule

$$d^2(g \circ f)(x_0) \bullet (h,k) = d^2 g(y_0) \bullet (df(x_0) \bullet h, df(x_0) \bullet k) + dg(y_0) \bullet (d^2 f(x_0) \bullet (h,k)).$$

SOUS-SECTION I.4.2

Différentielles d'ordres supérieurs

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la différentielle seconde est une application bilinéaire symétrique continue de $E \times E$ dans F. Pour abréger les notations nous noterons $\mathscr{S}_2(E;F)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques continues de $E \times E$ dans F et $\mathscr{L}_2(E;F)$ celui des formes bilinéaires continues de $E \times E$ dans F. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}_*$, mous noterons $\mathscr{S}_n(E;F)$ l'espace des formes multilinéaires f symétriques, c'est-à-dire telles que, pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$, $f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n)$, et continues de E^n dans F, et $\mathscr{L}_n(E;F)$ l'espace des formes multilinéaires continues de E^n dans F. Par récurrence sur n, on déduit aussitôt la propriété suivante :

PROPOSITION I.4.7.

L'espace $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}_{n-1}(E;F))$ s'identifie canoniquement et isométriquement à l'espace normé $\mathscr{L}_n(E;F)$ par l'application $f \mapsto \tilde{f}$ où $\tilde{f}(h_1,\ldots,h_n) = f(h_1) \bullet (h_1,\ldots,h_n)$.

Ces mises au point étant faites, nous pouvons généraliser aisément la notion de différerentielle seconde à celle de différentielle d'ordre quelconque :

Définition I.4.2.

*Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une application de U dans F. Par récurrence sur n, on dit que f **est n fois**, $n \geq 1$, **différentiable au point** x_0 si elle est $n-1$ fois différentiable dans un voisinage de x_0 et si l'application $x \mapsto d^{n-1}f(x)$ d'un voisinage de x_0 dans $\mathscr{L}_{n-1}(E;F)$ est différentiable en x_0. Dans ce cas, la différentielle de cette application s'appelle la **différentielle** (ou **dérivée**) **d'ordre** n de f en x_0 et se note $d^n f(x_0)$ (ou $f^{(n)}(x_0)$) et c'est un élément de $\mathscr{L}_n(E;F)$. Lorsque f est n fois différentiable en tout point de U, l'application $d^n f \ : \ x \mapsto d^n f(x)$ de U dans $\mathscr{L}_n(E;F)$ s'appelle la **différentielle d'ordre** n de f et se note $d^n f$ (ou $f^{(n)}$). On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^n$ dans U, et on écrit $f \in \mathscr{C}^n(U)$, $n \geq 1$, si elle différentiable à l'ordre n dans (i.e. en tout point de) U et si $d^n f$ est continue. Par convention, on dit qu'une fonction f de U dans F est **de classe** $\mathscr{C}^0$ dans U, ce que l'on écrit $f \in \mathscr{C}^0(U)$, si elle est continue dans U. Une fonction f de U dans f qui appartient à $\mathscr{C}^n(U)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ dans U et on écrit $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.*

THÉORÈME I.4.2.

Soient E et F deux espace normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F n fois différentiable au point x_0. Alors $d^n f(x_0) \in \mathscr{S}_n(E;F)$.

Démonstration. En effet, nous avons déjà vu ce résultat à la sous-section précédente pour $n = 2$ (Théorème I.4.1, page 14), démontrons le pour $n \geq 2$ par récurrence. Supposons donc le résultat vrai pour $n-1$. Comme $d^n f(x_0) \bullet (h_1, \ldots, h_n) = (d(d^{n-1}f)(x_0) \bullet h_1) \bullet (h_2, \ldots, h_n)$, $d^n f(x_0)$ est déjà un fonction symétrique des variables h_2, …, h_n. Comme toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est composée d'un nombre fini de transpositions dont chacune permute deux éléments consécutifs, il suffit de voir que $d^n f(x_0) \bullet (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ ne change pas quand on échange h_1 et h_2. Or, on a $d^n f(x_0) \bullet (h_1, h_2, \ldots h_n) = (d^2(d^{n-2}f)(x_0) \bullet (h_1, h_2)) \bullet (h_3, \ldots, h_n)$, et le résultat découle encore du Théorème I.4.1. □

Remarque I.4.3. *Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$, $d^n f(x_0)$ est une application n-multilinéaire de $\mathbb{R}^n$ dans F. Elle s'écrit donc, $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$, $d^n f(x_0) \bullet (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \ldots \lambda_n d^2 f(x_0) \bullet (1, \ldots, 1)$. On identifie toujours $d^n f(x_0)$ avec le vecteur de F $d^n f(x_0) \bullet (1, \ldots, 1)$ (ce qui redonne la notion usuelle de dérivée n-ième dans le cas où $F = \mathbb{R}$) et $x \mapsto d^n f(x)$ devient une application de U dans F.*

On notera que si F est un espace produit (ou une somme directe topologique) alors une fonction f de $U \subset E$ dans F est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si chacune de ses composantes est de classe $\mathscr{C}^n$.

La démonstration de la Proposition suivante se fait aisément en utilisant la Proposition I.4.5, page 15.

PROPOSITION I.4.8.

Soient E_i, $1 \leq i \leq n$ et F des espaces normés et f une application multilinéaire continue de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et on a :

1. *Pour $p > n$ $d^p f$ est identiquement nulle.*
2. *Si $p \leq n$, pour tous $x \in E$ et $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E$, on a*

$$d^p f(x) \bullet (h_1, \ldots, h_p) = \sum_{\substack{I = \{i_1, \ldots, i_p\} \\ i_1 < \ldots < i_p \\ I \subset \{1, \ldots, n\}}} \sum_{\substack{\sigma \text{ permutation} \\ \text{de } I}} f(\xi_{\sigma(I)}(x,h)),$$

où $\xi_{\sigma(I)}(x,h)$ désigne l'élément de E dont les coordonnées ξ_i sont $\xi_i = x_i$ si $i \notin I$ et $\xi_i = h_{\sigma(i)i}$, la i-ème coordonnée de $h_{\sigma(i)}$, si $i \in I$. En particulier $d^n f$ est constante.

PROPOSITION I.4.9.

Soient E, F et G des espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, f une application de U dans V et g une application de V dans G. Si f est n fois différentiable en $x_0 \in U$ et si g est n fois différentiable en $y_0 = f(x_0)$ alors $h = g \circ f$ est n fois différentiable en x_0. De plus si $f \in \mathscr{C}^n(U)$ et $g \in \mathscr{C}^n(V)$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(U)$.

Démonstration. Pour $n = 1$, ceci résulte de la Proposition I.1.4, page 2, la formule donnant la différentielle d'une fonction composée montrant la dernière assertion de la Proposition dans ce cas. Pour le cas général, on raisonne par récurrence sur n. Supposons donc le résultat prouvé pour $n-1$. Il faut donc voir que dh est $n-1$ fois différentiable et, de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ pour la dernière assertion. Or $dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$ ce qui peut s'écrire comme la composée de l'application $x \mapsto (dg(f(x), df(x))$ et de l'application $(u, v) \mapsto u \circ v$. La seconde application est bilinéaire donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Proposition précédente). Pour la première, il suffit de voir que ses composantes sont $n-1$ fois différentiables (ou de classe $\mathscr{C}^{n-1}$), ce qui est l'hypothèse pour la seconde et résulte de l'hypothèse de récurrence pour la première. La conclusion s'obtient en réutilisant l'hypothèse de récurrence. □

PROPOSITION I.4.10.

Soient E et F deux espaces de Banach. L'application $\varphi : \mathscr{GL}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E)$ définie par $\varphi(u) = u^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (c.f. Proposition I.1.5, 3., page 3). De plus, pour tout $n \geq 1$, toute $u \in \mathscr{GL}(E;F)$ et tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathscr{GL}(E;F)^n$, on a

$$d^n\varphi(u) \bullet h = (-1)^n \sum_{\substack{\sigma \text{ permutation} \\ \text{de } \{1, \ldots, n\}}} u^{-1} \circ h_{\sigma(1)} \circ u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1} \circ h_{\sigma(n)} \circ u^{-1}.$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (Proposition I.1.5, page 3) et que $d\varphi(u) = \psi(\varphi(u), \varphi(u))$ où ψ est définie par $\psi(v, w) \bullet h = -v \circ h \circ w$. Montrons qu'elle est de classe $\mathscr{C}^n$ en raisonnant encore une fois par récurrence sur n : supposons donc le résultat prouvé pour $n-1$, et voyons que $d\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Cela est fort simple : $d\varphi$ est la composée de l'application $u \mapsto (\varphi(u), \varphi(u))$ qui est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ par hypothèse de récurrence, et de l'application bilinéaire ψ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Proposition I.4.8), et il suffit d'appliquer la Proposition précédente. Pour voir la formule on procède de la manière suivante : soit ψ_n l'application multilinéaire continue définie par

$$\psi_n(u_1,\ldots,u_{n+1})\bullet(h_1,\ldots h_n) = (-1)^n \sum_{\substack{\sigma \text{ permutation} \\ \text{de } \{1,\ldots,n\}}} u_1\circ h_{\sigma(1)}\circ u_2\circ\ldots\circ u_n\circ h_{\sigma(n)}\circ u_{n+1}.$$

On doit donc montrer que $d^n\varphi(u)\bullet h = \psi_n(\varphi(u),\ldots,\varphi(u))\bullet h$. On fait alors ceci par récurrence sur n sans grande difficulté. Les détails sont laissés au lecteur. □

Définition I.4.3.

*Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F. On dit que f est un **difféomorphisme de classe** $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de U dans F, si f est bijective si f et f^{-1} sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$).*

PROPOSITION I.4.11.

Soient E et F deux espaces de Banach, V un ouvert de E, W un ouvert de F et f un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W. Alors, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$), f^{-1} l'est aussi (i.e. f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$)).

Démonstration. En effet, on sait que $d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$. Il en résulte que $d(f^{-1})$ est la composée des applications f^{-1}, df et $u\mapsto u^{-1}$, les deux premières étant de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$, et la dernière étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Proposition I.4.10). Raisonnons alors par récurrence sur n. Supposons le résultat vrai pour $n-1$, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ ce qui conclut. □

COROLLAIRE 1.

Soient E et F deux espaces de Banach, V un ouvert de E, W un ouvert de F et f un homéomorphisme de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de V sur W. Si, pour tout $x\in V$, $df(x)$ est un isomorphisme alors f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$).

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition précédente et de la Proposition I.3.3, page 11. □

COROLLAIRE 2.

Dans les conditions du Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11), si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) alors f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de V sur W.

COROLLAIRE 3.

Dans les conditions du Théorème des fonctions implicites (Théorème I.3.3, page 12), si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) alors l'application $g : W\to F$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$).

PROPOSITION I.4.12.

Soient E_i, $1\le i\le n$, et F des espaces normés, U un ouvert de $E=\prod_{i=1}^n E_i$, $x_0\in U$ et f une fonction de U dans F de classe $\mathscr{C}^p$ au point x_0. Alors, pour tout $\{j_1,\ldots,j_p\}\subset\{1,\ldots,n\}$, f admet des dérivées partielles d'ordre p au point x_0, $d^pf_{x_{j_1}\ldots x_{j_p}}(x_0)$ qui sont des éléments de $\mathscr{L}(E_{j_1},\ldots,E_{j_p};F)$ vérifiant, pour tous $h_i=(h_{i,j})_{1\le j\le n}$, $1\le i\le p$,

$$(\ldots(d^pf_{x_{i_1}\ldots x_{i_p}}(x_0)\bullet h_{1,i_1})\bullet\ldots)\bullet h_{p,i_p} = (\ldots(d^pf_{x_{i_{\sigma(1)}}\ldots x_{i_{\sigma(p)}}}(x_0)\bullet h_{\sigma(1),i_{\sigma(1)}})\bullet\ldots)\bullet h_{\sigma(p),i_{\sigma(p)}},$$

pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,p\}$, et on a

$$d^pf(x_0)\bullet(h_1,\ldots h_p) = \sum_{\{j_1,\ldots,j_p\}\subset\{1,\ldots,n\}} (\ldots(d^pf_{x_{j_1}\ldots x_{j_p}}(x_0)\bullet h_{1,j_1})\bullet\ldots)\bullet h_{p,j_p}).$$

Démonstration. Ceci se démontre par récurrence sur p comme la Proposition I.4.3, page 15. □

Par abus de notation, on écrit usuellement $d^pf_{x_{j_1}\ldots x_{j_p}}(x_0) = d^pf_{x_{j_{\sigma(1)}}\ldots x_{j_{\sigma(p)}}}(x_0)$ pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,p\}$.

Remarque I.4.4. *Dans le cas où* $\dim E_{j_i} = 1$, $1\le i\le p$, *$d^pf_{x_{i_1}\ldots x_{i_p}}(x_0)$ est une application multilinéaire de $\mathbb{K}^p$ dans F et, comme pour les dérivées partielles secondes, on l'identifie toujours à sa valeur sur* $(1,\ldots,1)$. *De plus, dans ce cas, grâce à l'invariance par permutation des indices, on écrit plus simplement $d^pf_{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}(x_0)$ ou même, encore plus simplement, $d^\alpha f(x_0)$, où $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = p$.*

De plus, toujours dans ce cas particulier où les E_j sont de dimension 1, en regroupant les dérivées partielles en fonctions des multiindices α, on trouve l'expression classique de la différentielle des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à partir des dérivées partielles :

PROPOSITION I.4.13.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction, de U dans un espace normé F, p fois différentiable en $x_0 \in U$. Alors, avec les notations de ci-dessus, on a :

$$d^p f(x_0)(h)^p = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=p}} \frac{p!}{\alpha!} d^\alpha f(x_0)(h)^\alpha,$$

où $(h)^p = (h,\dots,h)$, $(h)^\alpha = h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Démonstration. Ceci se voit facilement par récurrence sur p : supposons la formule vraie pour p et montrons la pour $p+1$. En différentiant la formule à l'ordre p, il vient

$$d^{p+1} f(x_0) \bullet (h)^{p+1} = \sum_\alpha \sum_{i=1}^n d^i(d^\alpha f)(x_0) h_i (h)^\alpha,$$

ce qui donne bien, en regroupant les dérivées partielles une formule similaire à celle que l'on cherche. Il faut simplement vérifier que, tous calculs faits, on trouve le bon coefficient. Or, $d^i(d^\alpha f) = d^\beta f$, avec β de longueur $p+1$, si et seulement si $(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_i+1,\dots,\alpha_n)$ pour un certain i tel que $\beta_i \neq 0$. Ainsi le regroupement donne

$$d^p f(x_0)(h)^p = \sum_{|\beta|=p+1} \left(\sum_{\beta_i\neq 0} \frac{p!}{\beta_1!\dots(\beta_i-1)!\dots\beta_n!} \right) d^\beta f(x_0)(h)^\beta,$$

ce qui donne immédiatement le résultat. □

PROPOSITION I.4.14.

Soient E_i, $1 \le i \le n$, et F des espaces normés, $E = \prod_{i=1}^n E_i$, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. Pour que f soit p fois différentiable en x_0, il suffit qu'elle admette des dérivées partielles $d^p f_{x_{j_1}\dots x_{j_p}}(x)$ continues au voisinage de x_0, pour tous $\{j_1,\dots,j_p\} \subset \{1,\dots,n\}$.

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur p (c.f. Proposition I.4.4, page 15) en utilisant la Proposition précédente. □

Naturellement, on a des énoncés analogues (avec les différentielles directionnelles d'ordre p) à ceux des deux Propositions précédentes lorsque E est somme directe topologique de sous-espaces.

SECTION I.5

Formule de Taylor, développements limités

SOUS-SECTION I.5.1

La formule de Taylor

PROPOSITION I.5.1.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace normé et f une fonction $n+1$ fois différentiable de U dans F. Alors

$$\frac{d}{dt}\left(f(t) + (1-t)df(t) + \dots + \frac{1}{n!}(1-t)^n d^n f(t) \right) = \frac{1}{n!}(1-t)^n d^{n+1} f(t),$$

où la fonction entre parenthèse est considérée de U dans F (c.f. Remarque I.4.3, page 17) et $\frac{d}{dt}$ désigne la différentielle au point t.

Démonstration. C'est un cas particulier du Lemme suivant :

LEMME. *Soient E, F et G trois espace normés, U un ouvert de $\mathbb{R}$, u une application de U dans E, v une application de U dans F et φ une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Alors l'application*

$$t \mapsto \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \varphi(d^p u(t), d^{n-p} v(t))$$

de U dans F a pour dérivée

$$t \mapsto \varphi(u(t), d^{n+1} v(t)) + (-1)^n \varphi(d^{n+1} u(t), v(t)).$$

Preuve du Lemme. Ceci se voit très facilement à partir du Corollaire de la Proposition I.1.6, page 4. □

Preuve de la Proposition. Il suffit d'appliquer le Lemme avec $E = \mathbb{R}$, $G = F$, $\varphi(t, y) = ty$, $y \in F$ et $u(t) = \frac{1}{n!}(1-t)^n$. □

Nous allons maintenant avoir besoin de la notion d'intégrale d'une fonction de variable réelle à valeurs dans un espace de Banach. Sans entrer dans les détails, précisons un peu ce point.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et f une fonction de I dans F. On peut alors considérer les sommes de Riemann, dans F, associées à f sur I. Comme dans la définition de l'intégrale de Riemann, on définit alors la notion de fonction f définie sur I et à valeur dans F intégrable au sens de Riemann . Il est alors clair que si I est fermé et f continue, par continuité uniforme, elle est intégrable au sens de Riemann, et que, si on considère la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, elle est dérivable (différentiable) sur l'intérieur de I de dérivée en x égale à $f(x)$. En particulier, si f est dérivable et $I = [a, b]$, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$. On peut aussi, plus simplement, ne considérer (cela nous suffira) que les fonctions réglées :

On dit qu'une fonction f d'un segment I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach F est **réglée** si elle est limite uniforme, sur I, de fonctions en escalier c'est-à-dire de fonctions h de la forme suivante : il existe une subdivision finie $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $I = [a, b]$, $a_1 = a$, $a_n = b$, telle que, sur $]a_i, a_{i+1}[$, h soit constante (on ne s'interresse pas à la valeur de h aux points de la subdivision). On définit ensuite l'intégrale d'une fonction en escalier h par $\int_a^b h(t)dt = \sum_{i=1}^{n-1} h_i(a_{i+1} - a_i) \in F$ où $h_i \in F$ est la valeur prise par h sur $]a_i, a_{i+1}[$. On verifie alors facilement que si h_1 et h_2 sont deux fonctions en escalier, alors $h_1 - h_2$ en est une aussi (quitte à changer les subdivisions) et $\left\| \int_a^b (h_1(t) - h_2(t))dt \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in I} \|h_1(t) - h_2(t)\|$. De là, on déduit que si f est une fonction de I dans F qui est limite uniforme d'une suite (h_n) de fonctions en escalier alors la suite $\left(\int_a^b h_n(t)dt \right)_n$ est de Cauchy dans F et donc converge (puisque F est supposé complet) et sa limite ne dépends pas de la suite (h_n) convergeant vers f choisie. C'est cette limite que l'on appelle l'intégrale de f. Naturellement, les fonctions continues sur un segment I sont uniformément continues (I est compact) et donc limites uniformes de fonctions en escalier. Cette méthode permet donc de définir l'intégrale des fonctions continues à valeurs dans l'espace de Banach F , et la propriété de différentiabilité de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une conséquence immédiate des propriétés de base de l'intégrale ainsi définie.

PROPOSITION I.5.2.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0, 1]$, F un espace de Banach et f une fonction de U dans F de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors

$$f(1) = f(0) + df(0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(t)dt.$$

Dans cette formule les différentielles $d^p f(0)$ sont identifiées à un vecteur de F.

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la Proposition précédente. □

PROPOSITION I.5.3.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0, 1]$, F un espace normé et f une fonction $n+1$ fois différentiable de U dans F. Supposons que $\left\| d^{n+1} f(t) \right\| \leq M$, $1 \leq t \leq 1$. Alors

$$\left\| f(1) - f(0) - \frac{1}{2!} d^2 f(0) - \ldots - \frac{1}{n!} d^n f(0) \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

Démonstration. En effet, considérons les fonctions $g(t) = -M\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et

$$v(t) = f(t) + (1-t)df(t) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-t)^n d^n f(t).$$

La Proposition I.5.1 dit que $\|dv(t)\| \leq \dfrac{(1-t)^n}{n!}\left\|d^{n+1}f(t)\right\|$, ce qui donne $\|dv(t)\| \leq \dfrac{(1-t)^n}{n!}M = g'(t)$. Alors la conclusion résulte du Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.1, page 6). □

THÉORÈME I.5.1 (*Formule de Taylor avec reste intégral*).

Soient E un espace normé, F un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de U dans F. On suppose que le segment $[x_0, x_0+h]$ est contenu dans U. Alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) \bullet (h)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}d^{n+1}f(x_0+th) \bullet (h)^{n+1}dt,$$

où $(h)^p = (h, \ldots h) \in E^p$, $1 \leq p \leq n+1$.

Démonstration. En effet, considérons la fonction $v(t) = f(x_0+th)$, $t \in [0,1]$. Alors v est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et on vérifie aisément, par récurrence, que, pour tout entier p, $d^p v(t) = d^p f(x_0+th) \bullet (h)^p$ (c.f. Proposition I.4.2, page 15). Le Théorème est donc un cas particulier de la Proposition I.5.2. □

THÉORÈME I.5.2 (*Formule de Taylor-Lagrange*).

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et f une application n fois différentiable. Supposons que, pour tout $x \in U$ on ait $\left\|d^{n+1}f(x)\right\| \leq M$. Alors, pour h assez petit,

$$\left\|f(x_0+h) - f(x_0) - \ldots - \frac{1}{n!}d^n f(x_0) \bullet (h)^n\right\| \leq M\frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. En effet, comme dans la preuve du Théorème précédent, il suffit d'appliquer la Proposition I.5.3. □

THÉORÈME I.5.3 (*Formule de Taylor-Young*).

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F $n-1$ fois différentiable dans U et n fois différentiable au point x_0. Alors

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \ldots - \frac{1}{n!}d^n f(x_0) \bullet (h)^n = \mathbf{o}(\|h\|^n).$$

Démonstration. Pour $n = 1$, c'est exactement la définition de la différentiabilité. Procédons par récurrence sur n et supposons donc le résultat vrai pour $n-1$. Soit $\varphi(h) = f(x_0+h) - \ldots - \dfrac{1}{n!}d^n f(x_0) \bullet (h)^n$. Comme $d^p f(x_0)$ est une forme multilinéaire symétrique, le Corollaire de la Proposition I.1.6, page 4, montre que la différentielle de l'application $h \mapsto d^p f(x_0) \bullet (h)^p$ au point h est l'application linéaire

$$k \mapsto pd^p f(x_0) \bullet (h, \ldots, h, k).$$

Si on note $pd^p f(x_0) \bullet (h)^{p-1}$ cette application (ce qui se justifie par la symétrie de $d^p f(x_0)$), on obtient une expression de la différentielle de φ en h :

$$d\varphi(h) = df(x_0+h) - df(x_0) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}d^n f(x_0) \bullet (h)^{n-1}.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à df donne alors $\|d\varphi(h)\| = \mathbf{o}(\|h\|^{n-1})$, ce qui implique, par le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\|h\| \leq \eta$, on a $\|\varphi(h) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon\|h\|^n$, ce qui termine la preuve. □

Dans le cas d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la Proposition I.4.13, page 19, combinée aux formules de Taylor que nous venons de donner, redonne la forme classique pour la partie principale :

PROPOSITION I.5.4.

Dans les conditions de l'une des formules de Taylor ci-dessus, si $E = \mathbb{R}^n$, on a, avec les notations de la Proposition I.4.13,

$$f(x_0+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(h)^\alpha}{\alpha!}d^\alpha f(x_0) + Reste,$$

où «$Reste$» est à remplacer par le reste correspondant à la formule considérée, et que l'on peut exprimer avec les même notations pour la formule avec reste intégral :

$$Reste = (n+1) \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{(h)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 d^\alpha f(x+th)(1-t)^n dt.$$

SOUS-SECTION I.5.2

Développements limités

Pour pouvoir définir la notion de développement limité, il nous faut tout d'abord introduire celle de polynôme d'un espace vectoriel dans un autre.

Définition I.5.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

*1. On appelle **polynôme homogène de degré** n, n entier ≥ 1, de E dans F une application φ de E dans F de la forme $\varphi(x) = f(x, \dots, x)$ où f est une application multilinéaire de E^n dans F. Par convention, on appelle **polynôme homogène de degré zéro** une fonction constante de E dans F.*

*2. On appelle **polynôme de degré** n (ou $\leq n$) de E dans F une somme de polynômes homogènes φ_p de E dans F de degrés $p \leq n$.*

PROPOSITION I.5.5.

1. Si $\varphi : E \to F$ est un polynôme homogène de degré n, il existe une application multilinéaire symétrique $g : E^n \to F$ telle que $\varphi(x) = g(x, \dots, x)$, $x \in E$.

2. Soient E, F, G et H trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\varphi : E \to F$ un polynôme homogène de degré p, $\psi : E \to G$ un polynôme homogène de degré q et $\Phi : F \times G \to H$ une application bilinéaire. Alors

$$x \mapsto \Phi(\varphi(x), \psi(x))$$

est un polynôme homogène de degré $p+q$ de E dans H. Cette propriété permet de définir le «produit» des polynômes φ et ψ.

3. Plus généralement, si E, F_i, $1 \leq i \leq n$, et H sont des espaces vectoriels, $\varphi_i : E \to F_i$, $1 \leq i \leq n$, un polynôme homogène de degré p_i, et Φ une application multilinéaire de $\prod_{i=1}^{n} F_i$ dans G alors

$$x \mapsto \Phi(\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x))$$

est un polynôme homogène de degré $\sum_{i=1}^{n} p_i$ de E dans H.

Démonstration. Le 2. et le 3. sont évidents et le 1. se voit en considérant

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\sigma \text{ permutation} \\ \text{de } \{1,\dots,n\}}} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

□

Il est utile de remarquer que la notion de polynôme introduite ici généralise la notion usuelle de polynôme à n variables. En effet, E et F étant des espaces vectoriels, soit φ un polynôme homogène de degré p de E^n dans F. Il existe donc une application f multilinéaire symétrique de $(E^n)^p$ dans F telle que, pour $x \in E^n$, on a $\varphi(x) = f(x, \dots, x)$. Écrivons $\tilde{x}_i = (0, \dots, x_i, \dots, 0) \in E^n$ pour tout $x_i \in E$; alors

$$\varphi(x) = \sum_{(i_1,\dots,i_p) \in \{1,\dots,n\}^p} f(\tilde{x}_{i_1}, \dots \tilde{x}_{i_p}).$$

Comme f est symétrique, on peut «regrouper» les x_{i_j} d'indices égaux d'où :

PROPOSITION I.5.6.

Soient E et F deux espaces vectoriels et φ un polynôme de degré p de E^n dans F. Pour $0 \leq i \leq p$, il existe une application multilinéaire f_i de $(E^n)^i$ dans F telle que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{1,\ldots,n\}^n \\ |\alpha|=\sum \alpha_j = i}} f_i((x_1)^{\alpha_1}, \ldots, (x_n)^{\alpha_n}),$$

où

$$(x_i)^{\alpha_i} = (\overbrace{(0,\ldots,x_i,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,x_i,\ldots,0)}^{\alpha_i \text{ fois}}) \in (E^n)^{\alpha_i}.$$

En particulier, si $E = \mathbb{K}$ et $F = \mathscr{C}(U;G)$ où U est un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et G un espace normé, on a

$$\varphi(x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots\alpha_n)\in\{1,\ldots,n\}^n \\ |\alpha|=\sum \alpha_j \leq p}} c_\alpha(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$, et où c_α est une fonction continue de U dans G, ce qui donne la notion usuelle de fonction polynômiale de U dans G lorsque les fonctions c_α sont constantes.

Définition I.5.2.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit φ une application de E dans F, et, pour tout $h \in E$, soit $\Delta_h\varphi$ la fonction de E dans F définie par

$$\Delta_h\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

*1. On appelle **différence (symétrique) seconde** de φ relative aux points x_1 et x_2 de E la fonction $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi = \Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi)$ qui vaut, au point x,*

$$\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi(x) = \varphi(x+x_1+x_2) - \varphi(x+x_1) - \varphi(x+x_2) + \varphi(x).$$

En particulier, la notation est justifiée par le fait que $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi = \Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi$.

*2. Pour tout entier $n \geq 2$, on appelle **différence (symétrique)** n**-ième** de φ relative aux points x_1 ,..., x_n de E la fonction $\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}\varphi = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_{n-1}}\varphi)$. Explicitement, cette fonction est :*

$$x \mapsto \sum_{\substack{0\leq p\leq n \\ i_1<\ldots<i_p \\ 1\leq i_j\leq n}} (-1)^{n-p}\varphi(x + x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}).$$

En particulier, pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$, on a $\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}\varphi = \Delta_{x_{\sigma(1)}}\ldots\Delta_{x_{\sigma(n)}}\varphi$.

PROPOSITION I.5.7.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

un polynôme de degré n. Soit $f_n : E^n \to F$ une application multilinéaire symétrique telle que $\varphi_n(x) = f_n(x,\ldots,x)$. Alors :

1. Pour tout h dans E, $\Delta_h\varphi$ est un polynôme de degré $\leq n-1$.

2. Pour tous x_1,..., x_n dans E, $\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}\varphi = n! f_n(x_1,\ldots,x_n)$.

Démonstration. On démontre ceci par récurrence sur n. pour $n = 1$, on a $\Delta_h\varphi(x) = \varphi_1(h)$, ce qui montre le résultat dans ce cas. Supposons donc la Proposition vraie pour $n-1$. Vérifions tout d'abord le premier point : en tenant compte du fait que f_n est symétrique, on a, en écrivant $\Delta_h\varphi = \Delta_h\varphi_n + \Delta_h(\varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1})$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\Delta_h\varphi(x) = n f_n(x,\ldots,x,h) + \psi(x,h) \tag{I.5.1}$$

où ψ est, en x, un polynôme homogène de degré $\leq n-2$, ce qui montre le 1. Vérifions maintenant le 2. En écrivant (I.5.1) pour $h = x_n \in E$, on peut écrire $\Delta_{x_n}\varphi = \psi_{n-1} + \ldots \psi_0$ où ψ_i est un polynôme homogène de degré i dépendant du paramètre x_n et, de plus, pour $i = n-1$, $\psi_{n-1}(x) = g_{n-1}(x,\ldots,x)$ avec $g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = n f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à $\Delta_{x_n}\varphi$: $\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_{n-1}}(\Delta_{x_n}\varphi) = (n-1)! g_{n-1}(x_1,\ldots x_{n-1})$ ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE 1.

La donnée d'un polynôme $\varphi : E \to F$ détermine de manière unique les polynômes homogènes φ_i tels que $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$.

Démonstration. En effet, c'est clairement vrai pour $n = 0$, et, si on suppose cela vrai pour $n-1$, la Proposition montre que φ détermine entièrement l'application multilinéaire symétrique f_n, donc φ_n, et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\varphi - \varphi_n$. □

De ce fait φ_i s'appelle la composante de degré i de φ.

COROLLAIRE 2.

Étant donné un polynôme homogène φ_n de degré n, il existe une et une seule application multilinéaire symétrique $f_n : E^n \to F$ telle que $\varphi_n(x) = f_n(x, \ldots, x)$.

La notion de polynômes introduite ci-dessus est abstraite. Dans le cas où les espaces E et f sont des espaces normés, il faut voir ce que signifie qu'un polynôme est continu :

PROPOSITION I.5.8.

Soient E et F deux espaces normés et $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$ un polynôme de degré n. Pour tout i soit f_i l'application multilinéaire symétrique de E^i dans f déterminée par φ_i (Corollaire 2 ci-dessus). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les applications f_i sont continues.
(ii) Les polynômes homogènes φ_i sont continus.
(iii) φ est continu.
(iv) φ est continu à l'origine.
(v) Il existe $r > 0$ tel que $\sup_{\|x\| \leq r} \|\varphi(x)\| < +\infty$.
(vi) Pour tout $r > 0$, $\sup_{\|x\| \leq r} \|\varphi(x)\| < +\infty$.

Démonstration. Il est clair que (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv). Montrons que (iv) implique (i) par récurrence sur n. L'affirmation pour $n = 0$ étant triviale, supposons le résultat vrai pour $n-1$. D'après la Proposition I.5.7, l'application f_n est $\frac{1}{n!}\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} \varphi$ qui (d'après la Définition I.5.2, page précédente) est une somme d'expressions de la forme (à un facteur multiplicatif près) $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$; ces expressions étant continues en zéro par hypothèse, il en est donc de même de f_n qui est donc continue partout ce qui implique que φ_n est continue. Alors $\varphi - \varphi_n$ est continue en zéro et l'hypothèse de récurrence entraîne la continuité de tous les f_i, $0 \leq i \leq n-1$.

L'implication (i)⇒(vi) est très simple : d'après la carctérisation des applications multilinéaires continues, les f_i sont bornées sur la boule fermée $\bar{B}(0, r)$ ce qui entraîne la même chose pour les φ_i et donc pour φ. Comme (vi)⇒(v) est évidente, il n'y a plus qu'à voir que (v)⇒(i). On procède à nouveau par récurrence sur n. Pour $n = 0$ c'est évident, supposons donc le résultat obtenu pour $n-1$. Le raisonnement est similaire aux précédents : si φ est bornée sur la boule $\bar{B}(0, r)$ alors il en est de même de f_n et, par suite, aussi de φ_n et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\varphi - \varphi_n$. □

Définition I.5.3.

*Soient E et f deux espaces normés, V un voisinage de zéro dans E, n un entier positif et f une fonction de V dans F. On dit que f est **tangente à zéro à l'origine à l'ordre** n si $\|f(x)\| = \mathbf{o}(\|x\|^n)$. On dit que deux fonctions f_1 et f_2 de V dans F sont **tangentes à l'origine à l'ordre** n si $f_1 - f_2$ est tangente à zéro à l'origine à l'ordre n.*

La Définition I.5.2, page précédente montre que :

PROPOSITION I.5.9.

Dans les conditions de la Définition ci-dessus, si f est tangente à zéro à l'origine à l'ordre n, on a

$$\|\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} f(0)\| = \mathbf{o}((\|x_1\| + \ldots \|x_n\|)^n).$$

Définition I.5.4.

*Soient E et f deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. On dit qu'un polynôme $\varphi : E \to F$ de degré $\leq n$ est un **développement limité de** f **à l'ordre** n **au point** x_0 si la fonction $x \mapsto f(x_0 + x)$ est tangente à l'origine à φ à l'ordre n. Autrement dit si*

$$\|f(x_0 + x) - \varphi(x)\| = \mathbf{o}(\|x\|^n).$$

PROPOSITION I.5.10.
Soient E et f deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. Si φ_1 et φ_2 sont deux développements de f à l'ordre n en x_0 alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Démonstration. C'est exactement le Lemme suivant :

LEMME. *Si un polynôme de degré $\leq n$ est tangent à zéro à l'origine à l'ordre n il est identiquement nul.*

Preuve du Lemme. La preuve se fait par récurrence sur n. Supposons le Lemme montré pour $n-1$. Si on pose $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$, et si f_n est l'application multilinéaire symétrique associée à φ_n, les Propositions I.5.7, page 23 et I.5.9 montrent que, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\|x_1\| + \ldots + \|x_n\| \leq \eta$ on a $\|f_n(x_1, \ldots x_n)\| \leq \varepsilon(\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)^n$. Comme f_n est multilinéaire, ceci implique $f_n = 0$, et, donc φ est un polynôme de degré $\leq n-1$ qui est tangent à zéro à l'origine à l'ordre $n-1$. L'hypothèse de récurrence donne le résultat. □

□

PROPOSITION I.5.11.
Soient E et f deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans F. Supposons que f admette un développement limité φ à l'ordre n en x_0. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue en x_0.
(ii) φ est continu.

Démonstration. Ceci résulte de la Proposition I.5.8, page précédente. □

PROPOSITION I.5.12.
Soient E et f deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction continue de U dans F. Supposons que f admette un développement à l'ordre n $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$ en x_0. Alors :

1. *pour tout $p \leq n$, $\sum_{i=0}^{p} \varphi_i$ est le développement limité à l'ordre p de f en x_0.*
2. *Si f_n est la forme multilinéaire symétrique associée à φ_n, on a*

$$\|\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} f(x_0) - n! f_n(x_1, \ldots x_n)\| = \mathbf{o}((\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)^n).$$

Démonstration. Pour montrer le 1., il suffit de voir que $\left\| \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x) \right\| = \mathbf{o}(\|x\|^p)$. Mais ceci est évident car φ est supposée continue (Proposition I.5.8, page ci-contre. Le 2. se déduit des Propositions I.5.9, page précédente, et I.5.7, page 23. □

PROPOSITION I.5.13.
Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction n fois différentiable au point x_0 de U dans F. Alors :

1. *f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$ où $\varphi_i(x) = \frac{1}{i!} d^i f(x_0) \bullet (x)^i$.*
2. *On a*

$$\|\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} f(x_0) - d^n f(x_0) \bullet (x_1, \ldots x_n)\| = \mathbf{o}((\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)^n).$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de Taylor-Young (Théorème I.5.3, page 21) et de la Proposition précédente. □

PROPOSITION I.5.14.
Soient E, F, G et H des espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F.

1. *Soient f et g deux applications de U dans F et x_0 un point de U. Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n au point x_0, il en est de même de $f+g$ et son développement limité est la somme des développements de f et g.*
2. *Soient f une application de U dans F, g une application de U dans G, Φ une application bilinéaire continue de $F \times G$ dans H et x_0 un point de U. Si f (resp. g) admet un développement limité φ (resp. ψ) à l'ordre n au point x_0 alors la fonction h de U dans H définie par $h(x) = \Phi(f(x), g(x))$ (i.e. le «produit» de f et g) admet un développement limité à l'ordre n au point x_0. Plus précisément, soit λ le*

polynôme définit par (c.f. Proposition I.5.5, page 22) $\lambda(x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x))$*, et posons* $\lambda = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_i$*. Alors* $\mu = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ *est le développement limité à l'ordre* n *de* h *au point* x_0*.*

3. *Soient* f *une fonction de* U *dans* V*,* g *une fonction de* V *dans* G*,* x_0 *un point de* U *et* $y_0 = f(x_0)$*. On suppose que* f *(resp.* g*) admet un développement limité à l'ordre* n $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$*,* $\varphi_0 = y_0$*, (resp.* $\psi = \sum_{i=0}^{n} \psi_i$*) au point* x_0 *(resp.* y_0*). Alors* $g \circ f$ *admet un développement limité à l'ordre* n*,* ω*, au point* x_0 *donné par la formule* $\omega(x) = g \circ f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i_1+\ldots+i_j \leq n} \tilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x)) \right)$*, où* $\tilde{\psi}_j$ *désigne l'application multilinéaire symétrique (de* F^j *dans* G*) associée à* ψ_j*.*

Démonstration. Le 1. est évident, vérifions le 2. On écrit $f(x_0 + x) = \varphi(x) + r(x)$ et $g(x_0 + x) = \psi(x) + s(x)$ où r et s sont des $\mathbf{o}(\|x\|^n)$, et on a

$$\Phi(f(x_0 + x), g(x_0 + x)) - \Phi(\varphi(x), \psi(x)) = \Phi(\varphi(x), s(x)) + \Phi(r(x), \psi(x)) + \Phi(rx), s(x)),$$

et, d'après la caractérisation des applications multilinéaires continues, le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est un $\mathbf{o}(\|x\|^n)$; on conclut en notant que $\lambda - \mu$ est aussi un $\mathbf{o}(\|x\|^n)$.

Montrons maintenant le 3. Comme précédemment écrivons $f(x_0 + x) = \varphi(x) + r(x)$ et $g(y_0 + y) = \psi(y) + s(y)$ où r (resp. s) est un $\mathbf{o}(\|x\|^n)$ (resp. $\mathbf{o}(\|y\|^n)$). Il est clair que $s(\varphi(x) + r(x)) = \mathbf{o}(\|x\|^n)$, et, en posant $h = g \circ f$, il vient

$$h(x_0 + x) = h(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right) + \mathbf{o}(\|x\|^n).$$

Chaque terme $\psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right)$ est une somme de d'expressions de la forme $\tilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x))$, $1 \leq i_p \leq n$, ou $\tilde{\psi}_j(\ldots, r(x), \ldots)$, les seconds étant des $\mathbf{o}(\|x\|^n)$. Pour conclure, il suffit de voir que $\tilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x))$ est un polynôme homogène de degré $i_1 + \ldots + i_j$ ce qui résulte de la Proposition I.5.5, page 22. □

COROLLAIRE.

Soient E*,* F *et* G *des espaces normés,* U *un ouvert de* E*,* V *un ouvert de* F*,* f *une fonction de* U *dans* V*,* g *une fonction de* V *dans* G*,* x_0 *un point de* U *et* $y_0 = f(x_0)$*. On suppose que* f *est* n *fois différentiable au point* x_0 *et que* g *est* n *fois différentiable au point* y_0*. Soit* $h = g \circ f$*. Pour* $1 \leq p \leq n$*, soit* $\Psi_p(x)$ *le polynôme homogène donné par la formule*

$$\Psi_p(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i_1+\ldots+i_j=p} \frac{1}{j!} d^j g(y_0) \bullet \left(\frac{1}{i_1!} d^{i_1} f(x_0) \bullet (x)^{i_1}, \ldots, \frac{1}{i_p!} d^{i_p} f(x_0) \bullet (x)^{i_p} \right) \right).$$

Alors la différentielle d'ordre p *de* $g \circ f$ *au point* x_0 *est*

$$d^p(g \circ f)(x_0) \bullet (h_1, \ldots, h_p) = \frac{1}{p!} \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_p} \Psi.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition précédente et de la Proposition I.5.7, page 23. □

SOUS-SECTION I.5.3

Opérateurs différentiels

Soit U un ouvert de $\mathbb{K}^n$. Rappelons (c.f. Remarque I.4.4, page 18) que, pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$, on note

$$d^\alpha f(x) = df_{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

Définition I.5.5.

Soient U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et F un espace normé. Si P est un polynôme à n variables de degré p et à coefficients dans $\mathscr{C}(U;F)$,

$$P(x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ |\alpha|\leq p}} c_\alpha(x) x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n},$$

*on appelle **opérateur différentiel associé à** P ou **opérateur différentiel linéaire** l'application D_P de l'ensemble des fonctions p fois différentiables de U dans F définie par*

$$D_P f(x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ |\alpha|\leq p}} c_\alpha(x) d^\alpha f(x).$$

PROPOSITION I.5.15 (*Formule de Leibnitz*).

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, Φ une application bilinéaire de $E\times F$ dans G, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$, f (resp. g) une fonction p fois différentiable de U dans E (resp. F). Soit P un polynôme à n variables de degré p à coefficients dans $\mathscr{C}(U;G)$. Posons

$$P(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1}\dots y_n^{\beta_n}.$$

Alors

$$D_P(\Phi(f,g))(x) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\Phi(d^\alpha f(x), d^\beta g(x)).$$

Démonstration. Il suffit clairement de montrer ceci lorsque P est un monôme $\tilde{M}(x) = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha|\leq p$ et $\alpha_1\geq 1$. En raisonnant par récurrence sur p, et en écrivant $\tilde{M}(x) = x_1 M(x)$, on a $D_{\tilde{M}} = D_{x_1}D_M$. En développant $D_M(x+y)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $D_M\Phi(f,g) = \sum_k \gamma_k\Phi(D_{M'_k}f, D_{M''_k}g)$, où M'_k et M''_k sont des monômes d'où on déduit (Proposition I.1.5, page 3)

$$D_{\tilde{M}}\Phi(f,g) = \sum_k \gamma_k(\Phi(D_{x_1}D_{M'_k}f, D_{M''_k}g) + \Phi(D_{M'_k}f, D_{x_1}D_{M_k}g)),$$

ce qui s'écrit encore $\sum_h \gamma'_h\Phi(D_{N'_h}f, D_{N_h}g)$, la sommation étant étendue aux couples de monômes (N'_h, N''_h) tels que $N'_h = x_1M'_k$ et $N''_h = M''_k$ ou bien $N'_h = M'_k$ et $N''_h = y_1M''_k$ pour un indice k. Ceci donne la Proposition. □

SECTION I.6

Applications

SOUS-SECTION I.6.1

Maxima et minima relatifs

Dans toute cette sous-section on considère des fonction d'un ouvert U d'un espace normé E dans $\mathbb{R}$.

Définition I.6.1.

*Soient E un espace normé, U un ouvert de E et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un **minimum** (resp. **maximum**) **relatif** en $x_0\in U$ s'il existe un voisinage V de x_0 dans U tel que $\forall x\in V$, $f(x)\geq f(x_0)$ (resp. $f(x)\leq f(x_0)$). De plus, on dit que ce minimum (resp. maximum) est **strict** si l'inégalité est stricte pour tout $x\neq x_0$.*

On dira que f admet un **extremum relatif** en x_0 si elle admet un minimum ou un maximum relatif en ce point.

PROPOSITION I.6.1.

> *Soient E un espace normé, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si f est différentiable en x_0 et si elle admet un extremum relatif en x_0 alors $df(x_0) = 0$.*

Démonstration. En effet, pour $h \in E$, la fonction $t \mapsto f(x_0 + th)$ (qui est définie pour $|t|$ assez petit) admet un extremum relatif en $t = 0$ ce qui implique que sa dérivée en 0 est nulle. D'après la Proposition Proposition I.1.4, page 2, on a donc $df(x_0) \bullet h = 0$. □

Rappelons maintenant quelques résultats élémentaires concernant les formes quadratiques. Soit φ un polynôme homogène de degré 2 d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ (on appelle **forme quadratique réelle sur** E un tel polynôme). Il existe donc une unique forme bilinéaire symétrique $\tilde{\varphi}$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x, x)$, et elle est donnée par la formule $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\varphi(x_1 + x_2) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2))$. On dit que φ est **positive** (on écrit $\varphi \geq 0$) si $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ c'est à dire si $\tilde{\varphi}(x, x) \geq 0$ $\forall x$ (on dit aussi que $\tilde{\varphi}$ est positive).

Si E est un espace normé, et si φ est continue, alors $\tilde{\varphi}$ est une forme bilinéaire continue. Dans ce cas les notions algébriques usuelles se définissent, pour nous, dans le cadre topologique :

Définition I.6.2.

> *Soient E un espace normé et φ une forme quadratique réelle continue sur E. On dit que φ est **non dégénérée** si la forme bilinéaire symétrique continue associée considérée comme application de E dans son dual E' est un isomorphisme d'espaces normés (i.e. si l'application $x \mapsto \tilde{\varphi}_x$ où $\tilde{\varphi}_x(y) = \tilde{\varphi}(x, y)$ est bijective et son inverse est continue).*

PROPOSITION I.6.2.

> *Soient E un espace normé et φ une forme quadratique réelle continue sur E.*
> 1. *Si φ est non dégénérée, la relation «$\tilde{\varphi}(x, y) = 0 \; \forall y \in E$» implique $x = 0$.*
> 2. *Si φ est positive et non dégénérée il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, $\forall x \in E$, on a $\varphi(x) \geq \lambda \|x\|^2$.*

Démonstration. Le 1. est évident, et, en dimension finie la réciproque est aussi vraie, mais ce n'est, en général, plus le cas en dimension infinie. Vérifions le 2. Soit $x \mapsto \tilde{\varphi}_x$ l'isomorphisme de E dans E' associé à φ. Comme φ est non dégénérée, par définition, il existe une constante $\mu > 0$ telle que $\|x\| \leq \mu \|\tilde{\varphi}_x\|$ ce qui se traduit par l'existence d'un $y \in E$ de norme inférieure à 1 tel que $\|x\| \leq 2\mu |\tilde{\varphi}(x, y)|$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors $\|x\|^2 \leq 4\mu^2 \varphi(x)\varphi(y) \leq M\mu^2\varphi(x)$, car, φ étant continu, elle est bornée sur la boule unité. □

THÉORÈME I.6.1.

> *Soient E un espace normé, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable en x_0 et si elle admet un minimum relatif en x_0 alors $df(x_0) = 0$ et $d^2f(x_0) \geq 0$.*

Démonstration. En effet, d'après la Proposition I.6.1, de la présente page, la formule de Taylor-Young (Théorème I.5.3, page 21) s'écrit ici $f(x_0 + x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) \bullet (x, x) + r(x)$, avec $r(x) = \mathbf{o}(\|x\|^2)$. L'hypothèse implique donc que, pour $x \in E$ et $|t|$ assez petit, $d^2f(x_0) \bullet (tx, tx) + 2r(tx) \geq 0$, c'est-à-dire, en posant $2r(tx) = t^2\varepsilon(t, x)$, $d^2f(x_0) \bullet (x, x) + \varepsilon(t, x) \geq 0$. Comme $\varepsilon(t, x)$ tends vers zéro quand t tends vers zéro, le Théorème en résulte. □

Bien sûr la réciproque de ce Théorème est fausse. On a seulement le résultat plus faible suivant :

THÉORÈME I.6.2.

> *Soient E un espace normé, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable en x_0 et si $df(x_0) = 0$ et $d^2f(x_0)$ est positive et non dégénérée alors f admet un minimum strict en x_0.*

Démonstration. En effet, la formule de Taylor-Young et la Proposition précédente implique qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$f(x_0 + x) - f(x_0) \geq \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x)\right) \|x\|^2,$$

et, pour $\|x\|$ assez petit, on a $\lambda/2 + \varepsilon(x) > 0$. □

Remarque I.6.1. *1. On a bien sûr des énoncés analogues pour les maxima relatifs.*

2. Le Théorème ci-dessus donne une condition suffisante d'extémum. Mais cette condition n'est naturellement pas nécéssaire. Dans de nombreux exemples, l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral permet de conclure lorsque l'on ne sait pas si $d^2f(x_0)$ est non dégénerée.

SOUS-SECTION I.6.2

$\mathscr{C}^k$-conjugaison

Définition I.6.3.

Soient E, F, E_1 et F_1 des espaces normés, U (resp. U_1) un ouvert de E (resp. E_1), O (resp. O_1) un ouvert de F (resp. F_1), f une fonction de U dans O et f_1 une fonction de U_1 dans O_1.

*1. On dit que f est $\mathscr{C}^k$**-conjuguée** à f_1 s'il existe des difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^k$ φ de U dans U_1 et ψ de O dans O_1 tels que $f_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.*

*2. Soient $x_0 \in U$ et $x_1 \in U_1$. On dit que f est **localement** $\mathscr{C}^k$**-conjuguée** à f_1 au voisinage de x_0 et x_1 s'il existe $V \subset U$ (resp. $W \subset O$) un voisinage de x_0 (resp. $f(x_0)$) et $V_1 \subset U_1$ (resp. $W_1 \subset O_1$) un voisinage de x_1 (resp. $f_1(x_1)$) tels que $f_{|V} : V \to W$, $f_{1|V_1} : V_1 \to W_1$ et $f_{|V}$ est $\mathscr{C}^k$-conjuguée à $f_{1|V_1}$.*

La notion de $\mathscr{C}^k$-conjugaison est facile à retenir en se souvenant des diagrammes commutatifs de la FIG. I.6.1, de la présente page.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & O \arrow[d, "\psi"] \\ U_1 \arrow[r, "f_1"] & O_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_{|V}"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & W \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\ V_1 \arrow[r, "f_{1|V_1}"] & W_1 \end{tikzcd}$$

$$f_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \qquad f_{1|V_1} = \tilde{\psi} \circ f_{|V} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

FIG. I.6.1 – $\mathscr{C}^k$-conjugaison

Par exemple, tout $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme est $\mathscr{C}^k$-conjugué à l'identité.

Dans la suite de cette sous-section nous allons essentiellement considérer des espaces normés de dimension finie. Il est alors particulièrement interressant d'essayer de réduire, par $\mathscr{C}^k$-conjugaison, une fonction donnée à une fonction de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$. Pour ce faire, le langage de **coordonnée locale** est très commode.

Soit E un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et U un ouvert de E. Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, tout élement x de E s'écrit de manière unique $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, et, l'application $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$, si n est la dimension de E. Pour tout i, soit x_i la fonction (linéaire) de E dans $\mathbb{K}$ définie par $x_i(u) = u_i$. Alors, on dit que le n-uplet de fonctions $(x_1, \dots, x_n)$ est un **système de coordonnées linéaires** sur E. Plus généralement :

Définition I.6.4.

*Soient E un espace normé de dimension finie U un ouvert de E et x_0 un point de U. On appelle **système de coordonnées locales en** x_0 **de classe** $\mathscr{C}^k$ la donnée de $\dim E$ fonctions x_i de U dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que l'application $x \mapsto (x_1(x), \dots, x_{\dim E}(x))$ de U dans $\mathbb{K}^{\dim E}$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de x_0. Lorsque les fonctions x_i sont linéaires, on dit que le système est linéaire.*

Le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11) implique aussitôt le critère suivant :

PROPOSITION I.6.3.

Soient E un espace normé de dimension finie et x_0 un point de E. Une application de classe $\mathscr{C}^k$ $x \mapsto (x_1(x), \dots, x_n(x))$ d'un voisinage de x_0 dans $\mathbb{K}^n$ est un système de coordonnées locales de classe $\mathscr{C}^k$ en x_0 si et seulement si les formes linéaires $dx_1(x_0)$, ..., $dx_n(x_0)$ forment une base de E'. En d'autres termes, si le déterminant de la matrice jacobienne en x_0 associée à l'application est non nul.

Avant de poursuivre, précisons l'utilisation que l'on fait généralement des coordonnées locales en dimension finie. Supposons donc que E est un espace normé de dimension finie n et F un espace normé de dimension finie m. Soit x_0 un point de E. Supposons que l'on soit dans la situation suivante : il existe un voisinage U de x_0 dans E, f une application de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans F, V un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ dans F tel que $f(U) \subset V$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ deux systèmes de coordonnées locales aux points x_0 et y_0. Si on note $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ et $\psi = (y_1, \dots, y_m)$, on dit que la fonction $f_1 : (x_1, \dots x_n) \mapsto (f_{11}(x_1, \dots x_n), \dots, f_{1m}(x_1, \dots, x_n))$ définie par $f_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, et qui est $\mathscr{C}^k$-conjuguée à f, est **l'expression de** f **dans les coordonnées locales** (x_i), (y_i).

Reprenons l'exemple d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme d'un ouvert U d'un espace normé E de dimension n dans un espace normé F de même dimension. Si x_0 est un point de U, choisissons un système de coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ de classe $\mathscr{C}^k$ en $y_0 = f(x_0)$. Alors le système $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_i = y_i \circ f$ est clairement un système de coordonnées locales en x_0 (composé de deux difféomorphisme) de classe $\mathscr{C}^k$. Clairement, l'expression de f dans les coordonnées locales (x_i), (y_i) est l'application identique. Ceci peut se généraliser aisément au cas où la différentielle de f au point x_0 est soit surjective soit injective.

PROPOSITION I.6.4.

Soient E et F deux espaces normés de dimensions finies de dimensions respectives n et m, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une application de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$, de U dans F.

1. Si $df(x_0)$ est surjective, f est localement $\mathscr{C}^k$-conjuguée à la projection canonique

$$(x_1, \ldots, x_m, \ldots x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$$

de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$.

2. Si $df(x_0)$ est injective, f est localement $\mathscr{C}^k$-conjuguée à l'injection canonique

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. Montrons tout d'abord le 1. Puisque $df(x_0)$ est surjective on a $n \geq m$. Soit $(y_1, \ldots, y_m)$ un système de coordonnées locales en $f(x_0)$. Posons $x_i = y_i \circ f$ $1 \leq i \leq m$. Comme $df(x_0)$ est surjective, les formes linéaires $dx_i(x_0)$, $1 \leq i \leq m$ sont linéairement indépendantes et on peut trouver $n-m$ formes linéaires x_j $m+1 \leq j \leq n$ sur E de sorte que $(dx_1(x_0), \ldots, dx_m(x_0), x_{m+1}, \ldots, x_n)$ forme une base de E'. La Proposition précédente montre que $(x_1, \ldots, x_m)$ est un système de coordonnées locales en x_0 ce qui termine ce cas.

Vérifions maintenant le 2. Ici $df(x_0)$ est injective ce qui impose $n \leq m$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales en x_0. Posons $F = df(x_0)(E) \oplus S$ et soit $(x'_{n+1}, \ldots, x'_m)$ un système de coordonnées linéaires sur S de sorte que $(x_1, \ldots, x_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_m)$ est un système de coordonnées locales au voisinage de $(x_0, 0)$ dans $U \times S$. Soit $\varphi : U \times S \to F$ la fonction définie par $\varphi(u, s) = f(u) + s$ de sorte que $d\varphi(x_0, 0) \bullet (h, k) = df(x_0) \bullet h + k$, et, par suite, $d\varphi(x_0, 0)$ et un isomorphisme de sorte que φ est un difféomorphisme au voisinage de $(x_0, 0)$ (Théorème I.3.1, page 11). Posons ensuite $y_i = x_i \circ \varphi^{-1}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $y_i = x'_i \circ \varphi^{-1}$ pour $n+1 \leq i \leq m$. Clairement les formes linéaires $dy_i(f(x_0))$, $1 \leq i \leq m$, forment une base de F', ce qui, d'après la Proposition précédente montre que $(y_1, \ldots, y_m)$ est un système de coordonnées locales sur F en $f(x_0)$. Par construction, on a $y_i \circ f = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $y_i \circ f = y_i \circ \varphi(., 0) = x'_i(0) = 0$ pour $n+1 \leq i \leq m$. L'expression de f dans les coordonnées (x_i) et (y_i) est donc bien l'injection canonique de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$. □

THÉORÈME I.6.3 (*Théorème du rang constant*).

Soient E et F deux espaces normés (considérés sur $\mathbb{R}$) de dimensions finies, U un ouvert de E, x_0 un point de U et f une application de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans F. Pour que f soit $\mathscr{C}^k$-conjuguée à une application linéaire en x_0, il faut et il suffit que le rang de $df(x)$ soit constant sur un voisinage de x_0.

Démonstration. La condition est évidement nécessaire, la différentielle d'une application linéaire étant égale à elle même en tout point. Démontrons qu'elle est suffisante. Par translation, on peut supposer que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, et, on peut choisir des coordonnées linéaires (x'_i) sur E et (y'_i) sur F telles que, dans ces coordonnées, $df(x_0)$ soit l'application $(x'_1, \ldots, x'_n) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0)$, r étant le rang de $df(x_0)$. Nous identifions maintenant E à $\mathbb{R}^n$ et F à $\mathbb{R}^m$ par ces coordonnées. Soient f_i, $1 \leq i \leq m$, les composantes de f et considérons l'application φ de U dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi = (f_1, \ldots, f_r, x'_{r+1}, \ldots, x'_n)$. Le choix des coordonnées implique que $d\varphi(0)$ est l'identité, et, par le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11), $x_1 = f_1, \ldots$, $x_r = f_r$, $x_{r+1} = x'_{r+1}, \ldots$, $x_n = x'_n$ est un système de coordonnées locales en 0. Par construction, l'expression de f dans les coordonnées (x_i) et (y'_i) est $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots x_r, F_{r+1}(x), \ldots, F_m(x))$ où les F_j sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de $(x_1, \ldots, x_n)$. La matrice jacobienne de cette application contient la matrice identité $r \times r$, et comme son rang au voisinage de 0 est égal à r, tout bloc $(r+1) \times (r+1)$ que l'on en extrait est de déterminant nul. Par suite, les dérivées partielles de F_j par rapport à toute i-ème coordonnées, $i > r$, sont nulles ce qui montre que les fonction F_j ne dépendent pas de $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Posons alors $y_1 = y'_1, \ldots, y_r = y'_r$, $y_{r+1} = y'_{r+1} - F_{r+1}(y_1, \ldots y_r), \ldots$, et $y_m = y'_m - F_m(y_1, \ldots y_r)$. Ceci nous définit clairement un nouveau système de coordonnées locales au point $0 = f(0)$ (car les fonctions définissant les y_i en fonction des y'_i sont inversibles). Si on exprime alors la fonction f dans les coordonnées (x_i) et (y_i) on trouve clairement $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ ce qui est le résultat cherché. □

Nous avons vu ce que l'on peut dire, en termes de $\mathscr{C}^k$-conjugaison, lorsque $df(x_0)$ est soit injective soit surjective. On peut se poser la question de savoir si l'on peut dire quelque chose quand $df(x_0) = 0$. Sans hypothèse supplémentaire, il est facile de voir que l'on peut avoir à peu près n'importe quoi. C'est pour cette raison que l'on introduit la notion de point critique non dégénéré :

Définition I.6.5.

*Soient U un ouvert d'un espace normé (réel) et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 2$. On dit que $x_0 \in U$ est un **point critique non dégénéré** de f si $df(x_0) = 0$ et si $d^2f(x_0)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (c.f. sous-section précédente).*

Le Théorème suivant est un analogue des résultats précédents dans le cas des point critiques non dégénérés :

THÉORÈME I.6.4 (*Lemme de Morse-Palais*).

Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^{k+2}$, $k \geq 1$, définie sur un voisinage de l'origine d'un espace de Hilbert réel E.On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f. Alors il existe un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$, φ, au voisinage de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}d^2f(0) \bullet (\varphi(x), \varphi(x))$, au voisinage de 0.

Démonstration. Elle est basée sur un Lemme dont la preuve est similaire à celle du Lemme utilisé pour la démonstration du Théorème se Stone-Weierstrass :

LEMME. *Soient E un espace de Banach et $L \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|\mathrm{id}_E - L\| < 1$.Alors il existe une suite de polynômes en L qui converge, dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E)$, vers un endomorphisme R, noté $\sqrt{L}$ tel que $R^2 = L$. De plus, il existe un voisinage U de id_E tel que la fonction $L \mapsto \sqrt{L}$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U sur son image.*

Démonstration du Lemme. Définissons, par récurrence, une suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ en posant $A_0 = 0$, $A_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - L + A_n^2)$. Posons $a = \|\mathrm{id}_E - L\| < 1$. Par récurrence on voit tout d'abord que $\|A_n\| < \sqrt{a}$: en effet, si cela est vrai au rang n, on a $\|A_{n+1}\| \leq \frac{1}{2}(a + a) < \sqrt{a}$. remarquons ensuite que pour tout entier $p \geq 1$ on a $A_{n+p} - A_n = \frac{1}{2}(A_{n+p-1}^2 - A_{n-1}^2)$, et comme les A_i commutent deux à deux (ce sont des polynômes en L), il vient

$$A_{n+p} - A_n = \frac{1}{2}(A_{n+p-1} - A_{n-1}) \circ (A_{n+p-1} + A_{n-1}),$$

d'où on déduit $\|A_{n+p} - A_n\| < \sqrt{a}\,\|A_{n+p-1} - A_{n-1}\|$. Par récurrence on obtient donc $\|A_{n+p} - A_n\| < (\sqrt{a})^{n+1}$. Ceci montre que la suite (A_n) est de Cauchy dans $\mathscr{L}(E)$, et comme cet espace est complet, elle converge vers $B \in \mathscr{L}(E)$. Alors $R = \mathrm{id}_E - B$ est l'endomorphisme cherché. De plus, on remarque que si $L \in B(\mathrm{id}_E, r)$, $r < 1$, alors, $R \in B(\mathrm{id}_E, \sqrt{r})$. Reste à voir que l'endomorphisme $R = \sqrt{L}$ ainsi construit à partir de $L \in B(\mathrm{id}_E, r)$ définit une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cette boule (pour r assez petit). soit $\mathscr{Q}$ l'application de classe$\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{L}(E)$ dans lui même définie par $\mathscr{Q}(A) = A^2$. Sa différentielle étant $d\mathscr{Q}(A) \bullet h = A \circ h + h \circ A$, il en résulta que $d\mathscr{Q}(\mathrm{id}_E)$ est inversible. Le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11) entraîne donc que $\mathscr{Q}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Proposition I.4.11, page 18) dans un voisinage U de id_E. Si on prend r assez petit pour que $B(\mathrm{id}_E, r) \subset U$, l'application $L \mapsto \sqrt{L}$ que nous avons construite est nécessairement l'inverse de $\mathscr{Q}$, ce qui termine la preuve du Lemme. □

Démonstration du Lemme de Morse-Palais. Nous pouvons supposer que U est une boule ouverte de centre 0. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral (Théorème I.5.1, page 21), tout d'abord à f puis ensuite à df, il vient successivement :

$$f(x) = \int_0^1 df(tx) \bullet x dt,$$

et

$$df(tx) = \int_0^1 d^2f(stx) \bullet tx ds,$$

compte tenu des hypothèses, et, par suite

$$f(x) = \int_0^1 \int_0^1 d^2f(stx) \bullet (x)^2 t ds dt.$$

Alors si on pose

$$g(x) = \int_0^1 \int_0^1 d^2f(stx) t ds dt,$$

on peut écrire $f(x) = g(x) \bullet (x)^2$. Ainsi, g est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans $\mathscr{L}(E, E; \mathbb{R})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathscr{L}(E; E')$. Alors, le Théorème sur la caractérisation du dual d'un espace de Hilbert entraîne l'existence de $A(x) \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout h, k dans E on ait

$$g(x) \bullet (h, k) = \langle A(x) \bullet h, k \rangle . \tag{I.6.1}$$

En particulier, il vient

$$\frac{1}{2}d^2f(0) \bullet (x)^2 = g(0) \bullet (x)^2 = \langle A(0) \bullet x, x \rangle ,$$

ce qui montre que $A(0)$ est un isomorphisme puisque 0 est un point critique non dégénéré par hypothèse.

Nous cherchons un difféomorphisme local φ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}d^2f(0) \bullet (x)^2$ c'est-à-dire, d'après ce qui précède, tel que

$$\langle A(x) \bullet x, x \rangle = \langle A(0) \bullet \varphi(x), \varphi(x) \rangle . \tag{I.6.2}$$

Posons $B(x) = A(0)^{-1} \circ A(x)$. puisque g est continu, A l'est aussi (par sa définition même), et, quitte à réduire U, on peut supposer que $A(0)^{-1} \circ A(x)$ est suffisamment voisin de id_E de sorte que $\|\mathrm{id}_E - B(x)\| < 1$ pour tout $x \in U$. D'après le Lemme, $B(x)$ possède une racine carrée $R(x)$. Posons $\varphi(x) = R(x) \bullet x$, et vérifions que φ est le difféomorphisme cherché. Tout d'abord, φ est bien de classe $\mathscr{C}^k$, d'après le Lemme, car g l'est et A et B aussi. On a bien $\varphi(0) = 0$, et $d\varphi(x) \bullet h = dR(x) \bullet (h, x) + R(x) \bullet h$, $h \in E$, et, par suite $d\varphi(0) = R(0) = \mathrm{id}_E$ est un isomorphisme, ce qui entraîne, d'après le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11) que φ est un difféomorphisme local. Pour finir, il nous reste à voir que φ vérifie (I.6.2). Comme $d^2f(z)$ est symétrique (Théorème I.4.1, page 14), il en est de même de $g(x)$. La relation (I.6.1) montre alors que $A(x)$ est égal à son adjoint, et, par suite, $B(x)^* = A(x) \circ A(0)^{-1}$, soit $B(x)^* \circ A(0) = A(x) = A(0) \circ B(x)$. Clairement, dans cette dernière relation on peut remplacer $B(x)$ par une puissance de $B(x)$ et donc par un polynôme en $B(x)$, et, comme, d'après le Lemme, $R(x)$ est limite de polynômes en $B(x)$, on peut aussi remplacer $B(x)$ par $R(x)$. Ainsi on a $R(x)^* \circ A(0) = A(0) \circ R(x)$. Alors, $\langle A(0) \bullet \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle A(0) \circ R(x) \bullet x, R(x) \bullet x\rangle = \langle R(x)^* \circ A(0) \circ R(x) \bullet x, x\rangle$ d'où $\langle A(0) \bullet \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle A(0) \circ B(x) \bullet x, x\rangle$ ce qui est la relation (I.6.2).

C.Q.F.D.

SOUS-SECTION I.6.3

Sous-variétés différentiables, extrema liés

Définition I.6.6.

Soient E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E. On dit qu'une partie M de E est une ***sous-variété (différentiable) de classe*** $\mathscr{C}^k$ ***de*** E ***modelée sur*** F *si tout point x de M possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$, φ, de U sur son image $\varphi(U) \subset E$ vérifiant $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap F$. Le couple (U, φ) s'appelle une carte locale de M au voisinage de x. Si le sous-espace F est de dimension finie d, on dit que la sous-variété M est de* ***dimension*** *d. Si de plus E est aussi de dimension finie et que sa dimension est n, on dit aussi que M est de* ***codimension*** *$n - d$.*

Dans toute la suite, nous ne considérerons que le cas où E est un espace normé réel de dimension finie. Autrement dit nous ne considérerons que des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Notre but est simplement de donner des définitions équivalentes des sous-variétés, ce qui est essentiellement une application du Théorème des fonctions implicites, et de définir le plan tangent à une sous-variété. Par la même occasion, nous donnerons, dans cette sous-section, le Théorème classique des extrema liés qui s'exprime particulièrement bien avec le langage des sous-variétés.

PROPOSITION I.6.5.

Soient E un espace normé de dimension finie n et M une partie de E. Pour que M soit une sous-variété de dimension d de classe $\mathscr{C}^k$ de E, il faut et il suffit que tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U sur lequel soient définies $n - d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$, $d + 1 \leq i \leq n$, telles que :

(i) $U \cap M$ est l'ensemble des zéros communs aux fonctions f_i, $d + 1 \leq i \leq n$;

(ii) les formes linéaires $df_i(x)$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$.

Démonstration. Voyons tout d'abord que les conditions sont nécessaires. Identifions E à $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ et F à $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ (choix de coordonnées linéaires). Alors si (U, φ) est une carte de M (comme dans la définition ci-dessus), et si (x_i) sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$, les fonctions $f_i = x_i \circ \varphi$, $d + 1 \leq i \leq n$, vérifient les conditions (i) et (ii). Réciproquement, supposons que les conditions soient vérifiées en un point x de M. Soient f_i $1 \leq i \leq d$, des formes linéaires sur E telles que

$$(f_1, \ldots, f_d, df_{d+1}(x), \ldots, df_n(x))$$

forment une base de E'. Il en résulte que $(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées locales au point x (Proposition I.6.3, page 29), et, par suite, l'application $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$ d'un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme vérifiant $\varphi(V \cap M) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. □

COROLLAIRE 1.

Soient E et F deux espaces normés de dimensions finies, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans F. Soit y_0 un point de F tel que $f^{-1}(y_0)$ ne soit pas vide et que $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $df(x)$ soit surjective. Alors $f^{-1}(y_0)$ est une sous-variété de E de codimension $\dim F$.

Démonstration. En effet, identifions F à $\mathbb{R}^p$ (par des coordonnées linéaires), soient $(f_1, \ldots, f_p)$ les composantes de f et $(y_0^1, \ldots y_0^p)$ celles de y_0. Posons $g_i = f_i - y_0^i$ de sorte que

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in U \text{ tels que } g_i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq p\}.$$

Puisque $df(x)$ est supposée surjective, les $dg_i(x)$ sont linéairement indépendantes pour $x \in U$, ce qui conclut. □

COROLLAIRE 2.

Pour que $M \subset \mathbb{R}^n$ soit une sous-variété de dimension d, il faut et il suffit que chaque point x de M possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une application $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ vérifiant :

(i) $df(x)$ est surjective pour tout $x \in U$;

(ii) $M \cap U = f^{-1}(y_0)$ pour un $y_0 \in \mathbb{R}^{n-d}$.

Démonstration. En effet, la suffisance résulte du Corollaire précédent et la nécessité est contenue dans la Proposition. □

PROPOSITION I.6.6.

1. Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Notons $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Quitte à permuter les coordonnées (x_i), tout point de M possède un voisinage U tel que $U\cap M$ soit le graphe d'une application f d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (que l'on identifie à $\{(x_1,\dots,x_d,0,\dots,0)\}$) dans $\mathbb{R}^{n-d}$ (que l'on identifie à $\{(0,\dots,0,x_{d+1},\dots,x_n)\}$).

2. Soient E_1 et E_2 deux espaces normés de dimensions finies, U_1 un ouvert de E_1 et f une application de U dans E_2 de classe $\mathscr{C}^k$. Alors le graphe G de f est une sous-variété de $E_1\oplus E_2$ de dimension $\dim E_1$.

Démonstration. Montrons tout d'abord le 1. En effet, utilisons les notations et les conclusions de la Proposition précédente : soit $f\ :\ U\to\mathbb{R}^{n-d}$ l'application dont les composantes sont les f_i. Par la Proposition précédente, on peut extraire de la matrice jacobienne de f un mineur $(n-d)\times(n-d)$ de déterminant non nul ; autrement dit, quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$\mathbb{R}^n=\{(x,y),\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^{n-d}\}$$

de sorte que $df_y(x)$ soit un isomorphisme. D'après le Théorème des fonctions implicites (Théorème I.3.3, page 12), il existe une application g d'un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ telle que $f((x,g(x))=0$ ce qui montre que l'ensemble des zéros de f (i.e. les zéros communs aux f_i) est le graphe de g.

Vérifions maintenant le 2. Identifions E_2 à $\mathbb{R}^r$ par de coordonnées linéaires et soient (f_i) les composantes de f. Le graphe de f est l'ensemble des points $(x,x_1,\dots,x_r)$ de $U_1\times\mathbb{R}^r$ tels que $x_i=f_i(x)$, $1\le i\le r$, c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs aux fonctions

$$g_i(x,x_1,\dots,x_r)=x_i-f_i(x),$$

et, comme les dg_i sont linéairement indépendantes, le résultat découle de la Proposition précédente. □

PROPOSITION I.6.7.

Pour que $M\subset\mathbb{R}^n$ soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ dimension d, il faut et il suffit que chaque point y de M possède un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$ tel que $U\cap M$ soit l'image d'un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ par une application $p\ :\ V\to U$ de classe $\mathscr{C}^k$ vérifiant :

(i) $dp(x)$ est injective pour tout $x\in V$;

(ii) p est un homéomorphisme de V sur $U\cap M$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.

*On dit que le couple (V,p) est une **représentation paramétrique** (ou une **paramétrisation**) de $U\cap M$.*

Démonstration. La nécessité résulte du 1. de la Proposition précédente, montrons la suffisance. Soit $y_0\in M$ et $x_0=p^{-1}(y_0)$. Comme $dp(x_0)$ est injective, si son rang est d, on peut trouver d composantes de p dont les différentielles en x_0 sont linéairement indépendantes. Supposons que ce soit les d premières. Alors si on note $\pi_1\ :\ \mathbb{R}^n=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d}\to\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^d\times\{0\}$ la projection canonique sur le premier facteur, $d(\pi_1\circ p)(x_0)$ est un isomorphisme, et, d'après le Théorème d'inversion locale (Théorème I.3.1, page 11), $\pi_1\circ p$ est un difféomorphisme d'un voisinage, noté encore V, de x_0 sur un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^d$. Comme p est continue, on peut supposer, quitte à réduire V, que U est le produit de $U_1\subset\mathbb{R}^d\times\{0\}$ par un ouvert U_2 de $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-d}$. Soit π_2 la projection canonique sur le second facteur de $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d}$ sur $\mathbb{R}^{n-d}=\{0\}\times\mathbb{R}^{n-d}$. Comme $\pi_1\circ p$ est un difféomorphisme, on peut écrire $p(x)=(\pi_1\circ p(x),\pi_2\circ p\circ(\pi_1\circ p)^{-1}\circ(\pi_1\circ p)(x))$, c'est-à-dire, en posant $y=\pi_1\circ p(x)$, $p(x)=(y,\pi_2\circ p\circ(\pi_1\circ p)^{-1}(y))$, ce qui montre que $U\cap M$ est le graphe de $\pi_2\circ p\circ(\pi_1\circ p)^{-1}\ :\ U_1\to U_2$, et la conclusion résulte du 2. de la Proposition précédente. □

Terminons ces généralités sur les sous-variétés en définissant le plan tangent :

Définition I.6.7.

Soit M une sous-variété d'un espace normé E. On dit qu'un vecteur $v\in E$ est tangent à M en un point x_0 de M s'il existe une application différentiable γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans E telle que $\forall t\in I$, $\gamma(t)\in M$, $\gamma(0)=x_0$ et $\gamma'(0)=v$. L'ensemble des vecteurs tangents à M au point x_0 s'appelle l'espace tangent à M en x_0 et se note $T_{x_0}(M)$ (ou $T_{x_0}M$).

PROPOSITION I.6.8.

Soit M une sous-variété de dimension d d'un espace normé de dimension finie. Alors pour tout x de M, T_xM est un espace vectoriel de dimension d.

Démonstration. En effet, par la définition même des sous-variétés, il existe un voisinage ouvert U d'un point x de M et un difféomorphisme $\varphi\ :\ U\to E=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d}$ tel que $\varphi(U\cap M)\subset\mathbb{R}^d\times\{0\}$, et on peut supposer $\varphi(x)=0$. Alors si γ est une courbe tracée sur M comme dans la Définition ci-dessus, $\varphi\circ\gamma$ est une courbe sur $\mathbb{R}^d\times\{0\}$ et réciproquement. Il en résulte aussitôt que $d\varphi(x)\bullet T_xM=\mathbb{R}^d\times\{0\}$ ce qui montre que $T_xM=d\varphi(x)^{-1}\bullet\mathbb{R}^d\times\{0\}$ est un espace vectoriel de dimension d. □

Suivant la définition équivalente que l'on adopte pour une sous-variété, on a une caractérisation de son plan tangent :

PROPOSITION I.6.9.

Soit M une sous-variété de dimension d d'un espace norme de dimension finie n.

1. Avec les notation de la Proposition I.6.5, T_xM est l'intersection des noyaux des $df_i(x)$.

2. Avec les notations du Corollaire 1 de la Proposition I.6.5, si $f(x) = y_0$, T_xM est le noyau de $df(x)$.

3. Avec les notations de la Proposition I.6.6, 2., $T_{(x,f(x))}G$ est le graphe de $df(x)$.

4. Avec les notation de la Proposition I.6.7, T_xM est $dp(x) \bullet \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Le 1. est immédiat : pour des raisons de dimension, il suffit de voir que T_xM est contenu dans l'intersection des noyaux des $df_i(x)$ ce qui résulte aussitôt de formule de dérivation d'une fonction composée. Le 2. se voit de la même manière. Le 3. est aussi similaire : si γ est tracée sur $\{(u, f(u))\}$, et si π_i, $i = 1, 2$, désigne la projection sur le i-ième facteur, on a $\pi_2 \circ \gamma(t) = f(\pi_1 \circ \gamma(t))$ et le résultat s'obtient en différentiant et en utilisant que $\gamma(0) = (x, f(x))$. Le 4. est tout aussi simple : si γ est une courbe dans V, alors $p \circ \gamma$ est une courbe dans M dont le vecteur tangent en 0 est $dp(x) \bullet \gamma'(0)$, ce qui montre que $dp(x) \bullet \mathbb{R}^d$ est contenu dans T_xM et, comme ces deux espaces ont même dimension (puisque $dp(x)$ est injective), ils sont égaux. □

Nous terminons maintenant ce chapitre par la notion d'extrema liés.

Définition I.6.8.

*Soit M une sous-variété différentiable d'un espace normé de dimension finie E, U un ouvert de E qui coupe M et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. On dit que f présente un **extremum relatif lié en** $x_0 \in U$ sur M si $x_0 \in M$ et si la restriction de f à $U \cap M$ présente un extremum relatif en x_0.*

PROPOSITION I.6.10.

Soit M une sous-variété différentiable d'un espace normé de dimension finie E, U un ouvert de E qui coupe M et f une fonction différentiable de U dans $\mathbb{R}$. Si f a un extremum lié en x_0 sur M, alors la restriction de $df(x_0)$ à l'espace tangent $T_{x_0}M$ est nulle.

Démonstration. Ceci est immédiat : si γ est une courbe tracée sur M passant par x_0 en $t = 0$, alors la fonction $f \circ \gamma$ a un extremum relatif en $t = 0$ ce qui entraîne la nullité de sa dérivée, ce qui prouve la Proposition. □

Cette Proposition peut se traduire de différentes manières en fonction du choix de la description de l'espace tangent à une variété, comme il est dit à la Proposition I.6.9. La plus connue est celle obtenue en utilisant la caractérisation 1. de cette Proposition :

THÉORÈME I.6.5 (*Théorème des multiplicateurs de Lagrange*).

*Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f_i, $1 \leq i \leq k$, des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ dont les différentielles sont linéairement indépendantes en tout point de U, et soit M l'ensemble des zéros communs aux f_i. Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable présentant un extremum lié en $x_0 \in U$ sur M. Alors il existe des constantes c_i, $1 \leq i \leq k$ telles que $df(x_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i df_i(x_0)$. Les nombres c_i sont appelés les **multiplicateurs de Lagrange**.*

Comme pour les extrema libres, on peut donner des conditions de différentielle seconde pour les extrema liés :

PROPOSITION I.6.11.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f_i, $1 \leq i \leq k$, des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ dont les différentielles sont linéairement indépendantes en tout point de U, et soit M l'ensemble des zéros communs aux f_i. Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ deux fois différentiable.

1. Si f présente un minimum lié en $x_0 \in U$ sur M, et si (c_i), $1 \leq i \leq k$, sont les multiplicateurs de Lagrange associés à f et M, alors la restriction à l'espace tangent $T_{x_0}M$ de M en x_0 de la forme bilinéaire $d^2f(x_0) - \sum_{i=1}^{k} c_i d^2 f_i(x_0)$ est positive.

2. Supposons qu'il existe des constantes λ_i, $1 \leq i \leq k$, telles que $df(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i df_i(x_0)$. Alors si la restriction à l'espace tangent $T_{x_0}M$ de la forme bilinéaire $d^2f(x_0) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d^2 f_i(x_0)$ est définie positive, f présente un minimum local lié strict en $x_0 \in U$ sur M.

Démonstration. Montrons tout d'abord le 1. Soit $\gamma : \,]-\eta, \eta[\to M$ une courbe tracée sur M telle que $\gamma(0) = x_0$. On a donc $d^2(f \circ \gamma)(0) \geq 0$ (Théorème I.6.1, page 28). D'après la Proposition I.4.6, page 16, on a $d^2(f \circ \gamma)(0) = d^2f(x_0) \bullet (\gamma'(0))^2 + df(x_0) \bullet \gamma''(0)$.

Comme $f_i(\gamma(t)) = 0$ pour tout i, on a $d^2f_i(x_0) \bullet (\gamma'(0))^2 + df_i(x_0) \bullet \gamma''(0) = 0$, et, en additionnant à l'indentité precedente, il vient
$$d^2(f\circ\gamma)(0) = d^2f(x_0) \bullet (\gamma'(0))^2 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d^2 f_i(x_0) \bullet (\gamma'(0))^2 \geq 0,$$
ce qui termine la preuve par définition du plan tangent.

Démontrons maintenant le 2. Raisonnons par l'absurde. Si x_0 n'est pas un minimum local strict lié, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans M qui converge vers x_0 telle que $f(x_n) \leq f(x_0)$ pour tout $n \geq 1$. Posons $x_n = x_0 + \delta_n s_n$ avec $\|s_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Comme la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on peut extraire de la suite (s_n) une sous-suite convergente ; quitte à changer de notations, nous pouvons donc supposer que la suite (s_n) est convergente de limite s_0. Le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.3) appliquée à chaque f_i entre x_0 et x_n montre alors que $df_i(x_0 + \vartheta\delta_n s_n) \bullet \delta_n s_n = 0$, $0 < \vartheta < 1$, ce qui implique, par passage à la limite quand $n \to \infty$, $df_i(x_0) \bullet s_0 = 0$, ce qui signifie que $s_0 \in T_{x_0}M$. Par ailleurs, la formule de Taylor-Young (Théorème I.5.3, page 21) appliquée à chaque f_i en x_0 donne
$$\delta_n df_i(x_0) \bullet s_n + \frac{\delta_n^2}{2} d^2 f_i(x_0) \bullet (s_n)^2 = \mathbf{o}(\delta_n^2),$$
et, apliquée à f, donne
$$f(x_n) - f(x_0) = \delta_n df(x_0) \bullet s_n + \frac{\delta_n^2}{2} d^2 f(x_0) \bullet (s_n)^2 + \mathbf{o}(\delta_n^2) \leq 0,$$
d'où on déduit, compte tenu de l'hypothèse
$$\frac{\delta_n^2}{2}\left(d^2f(x_0) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d^2 f_i(x_0)\right) \bullet (s_n)^2 + \mathbf{o}(\delta_n^2) \leq 0.$$
En faisant tendre n vers l'infini, cela donne $\left(d^2f(x_0) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d^2 f_i(x_0)\right) \bullet (s_0)^2 \leq 0$ ce qui est une contradiction avec la seconde hypothèse puisque $s_0 \in T_{x_0}M$. □

Exercices

Exercice I.1.
E est un espace normé, $\mathscr{L}(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans lui-même muni de la norme opérateur. Montrer, en utilisant seulement la définition, que l'application $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $\Phi(u) = u^2$ est différentiable en tout point.

Exercice I.2.
E est un espace préhilbertien réel, u un élément de $\mathscr{L}(E)$ (cf. Exercice I.1).

1. Montrer, en utilisant seulement la définition, que l'application $f : E \to \mathbb{R}$; $f(x) = \langle u(x), x\rangle$ est différentiable en tout point et donner sa différentielle.
2. Traiter la question a) en utilisant les théorèmes généraux.
3. Etudier la différentiabilité de la fonction $g :\ g(x) = \langle u(x), x\rangle\, x,\ x \in E$.

Exercice I.3.
E est un espace normé, $\mathscr{L}(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans lui-même muni de la norme opérateur. Etudier la différentiabilité des applications suivantes :

1. $\varphi_p :\ u \in \mathscr{L}(E) \longmapsto u^p\ ;\ p \in \mathbb{N}$,
2. $\psi :\ (u, v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) \longmapsto u^2v^3$.

Exercice I.4.
E est un espace de Banach, Ω est l'espace des éléments $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $id_E + u$ est un isomorphisme de E ($id_E + u$ est bijective et bicontinue).

1. Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit Θ l'application de Ω dans $\mathscr{L}(E)$ définie par $\Theta(u) = (id_E + u)^{-1} \circ (id_E - u)$. Démontrer que Θ est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice I.5.

1. Soit E un espace normé et f une application définie sur un ouvert de E à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en tout point. Démontrer que si f admet un extremum local en un point, sa différentielle y est nulle.
   (a) E est un espace normé, U est un ouvert de E tel que $\overline{U}$ soit compact, et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une application continue, nulle sur la frontière de U et différentiable dans U. Démontrer qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice I.6.

1. Soit $\alpha > 0$. Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Même question avec

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice I.7.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles dans toutes les directions.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice I.8.

Soit E un espace normé, Ω un ouvert convexe de E et f une application convexe différentiable de Ω dans $\mathbb{R}$.

1. Soit x_0 un point de Ω. Montrer que si $f'(x_0) = 0$, f admet en x_0 un minimum absolu.
2. Montrer que l'ensemble $\{x \in \Omega \text{ t.q. } f'(x) = 0\}$ est convexe.

Exercice I.9.

On étudie la différentiabilité d'une norme.

1. Une norme peut elle être différentiable en 0 ?
2. E est un espace de Hilbert réel. Montrer que l'application $f : x \mapsto \|x\|$, où la norme est déduite du produit scalaire, est différentiable dans le complémentaire de l'origine.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x) = \|x\|_\infty$, $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est différentiable en un point x si et seulement si $|x_1| \neq |x_2|$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x) = \|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est différentiable en un point x si et seulement si $|x_1|$ et $|x_2|$ sont non nuls.
5. On munit c_o de la norme du sup. Soit $f : c_0 \to \mathbb{R}$; $f(x) = \|x\|_\infty$, $x \in c_0$. Montrer que f est différentiable en un point x si et seulement si il existe un indice n_0 tel que $|x_{n_0}| > |x_n|$ pour tout $n \neq n_0$.
6. Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé et $f : E \to \mathbb{R}$; $f(x) = \|x\|$. Démontrer que si f est différentiable en $x_0 \neq 0$, alors,
   (a) $df(x_0)(x_0) = \|x_0\|$;
   (b) $\|df(x_0)\| = 1$;
   (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $df(\lambda x_0) = sgn(\lambda) df(x_0)$.

Exercice I.10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Retrouver la formule classique :

$$f(a+h) = f(a) + h \int_0^1 f'(a+th)dt \; ; \; (a,h) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit Φ l'application de l^∞ dans lui-même définie par : $\Phi(x) = (f(x_n))$; $x = (x_n) \in l^\infty$. Démontrer que Φ est différentiable en tout point et calculer sa dérivée.

Exercice I.11.

Soit E l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0 et F l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On équippe E de la norme $\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x'(t)|$ et F de la norme de la convergence uniforme. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ et $\varphi : E \to F$ définies par :

$$\varphi(x) = x' + x^2 \text{ et } \Phi(x) = \int_0^1 \varphi(x)(t)dt \; , \; x \in E.$$

Les applications φ et Φ sont elles différentiables ?

Exercice I.12.
Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et φ l' application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ecrire les matrices jacobiennes de f et φ. Donner les dérivées partielles de $f\circ\varphi$ en fonction de celles de f.

1. Soit A une algèbre normée, a et b deux éléments de A et n un entier ≥ 1. Donner une majoration de $\|a^n - b^n\|$ en fonction de n et $\|a-b\|$.

   (a) Soit E un espace normé, p un entier ≥ 1. Démontrer que l'application $u \mapsto u^p$ de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice I.13.
Soit E l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre d.

1. Montrer que la série $\sum(-1)^n \dfrac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $A\in E$.
2. Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(A) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $\|f(A)-f(B)\| \leq \|A-B\| \max(\cosh\|A\|\,,\ \cosh\|B\|)$.

Exercice I.14.
E et F sont deux espaces normés, Ω un ouvert de E, f une application continue de Ω dans F, dérivable dans $\Omega\setminus\{a\}$ telle que $\lim_{x\to a,\ x\neq a} f'(x) = L$ existe dans $\mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\|f(a+h)-f(a)-L(h)\| \leq \|h\|\,\varepsilon(h)$ où ε est une fonction de limite nulle en 0.
2. En déduire que $f'a)$ existe et $f'(a) = L$.

Exercice I.15.
Soient a et b deux réels $a\neq b$. Montrer qu'il n'existe aucun réel c tel que $e^{ib} - e^{ia} = i(b-a)e^{ic}$. En déduire que la formule des accroissements finis classique ne s'applique pas aux fonctions à valeurs vectorielles.

Exercice I.16.
Soit $f : [A,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et dérivable sur $]a,b[$ $(a\neq b)$.

1. Montrer que si $|f'(x)| \geq \alpha$ pour tout $x\in]a,b[$, alors $|f(b)-f(a)| \geq \alpha(b-a)$.
2. Montrer que ce résultat ne subsiste pas si on remplace dérivée par dérivée à droite, ou si on considère des fonctions à valeurs vertorielles (on pourra prendre $f(x) = \exp(ix)$).
3. Soit $x_0\in]a,b[$. Montrer que $f'(x_0)$ est valeurs d'adhérence de $f'(x)$ pour $x\to x_0$ (considérer $g(x) = f(x)-(x-x_0)f'(x_0)$ et appliquer la question 1.).
4. On pose $f(x) = x^2\exp(i/x)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Prouver que $f'(0)$ est isolé dans l'ensemble des valeurs $f'(x)$. Conclusion ?

Exercice I.17.
Soit $f : [a,b] \to E$ une application continue et dérivable à droite sur $]a,b[$ $(a\neq b$, E espace vectoriel normé). On veut établir qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\|f(a)-f(b)\| \leq (b-a)\,\|f'_d(c)\|$.

1. On suppose $k = \|f(b)-f(a)\|\,(b-a)^{-1} > 0$ et $\|f'_d(x)\| \leq k$ pour tout $x\in]a,b[$. Prouver qu'il existe $x_0\in]a,b[$ et $h>0$ tels que $\|f(x_0+h)-f(x_0)\| < kh$.
2. Conclure en appliquant le théorème des accroissements finis aux segments $[a,x_0]$ et $[x_0+h,b]$.

Exercice I.18.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. On note λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, et on suppose que $m<n$.

1. Soit P un pavé compact (produit d'intervalles fermés bornés) inclus dans U. On suppose que f est k-lipschitzienne sur P. Montrer que $\lambda(f(P)) = 0$ (on pourra subdiviser P en pavés).
2. Soit K un compact inclus dans U. Prouver qu'il existe une réunion finie de pavés compacts Π telle que $K\subset\Pi\subset U$.
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, établir que $\lambda(f(U)) = 0$.

Exercice I.19.
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé. On suppose que f est dérivable sur I et que $f''(a)$ existe $(a\in I)$. pour $(x,y)\in I\times I$, on pose $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x\neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$. Montrer que g est différentiable au point (a,a) (on pourra utiliser la fonction $h(t) = f(t)-f(a)-(t-a)f'(a)-(t-a)^2f''(a)/2$).

Exercice I.20.

1. Soit f $:]a,b[\to E$ une fonction vectorielle admettant une dérivée à droite en t_0. Montrer qu'alors l'application $\|f\|$ admet une dérivée à droite en t_0.

(a) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert connexe de E et a un point de U. Soit $f : U \to F$ différentiable telle que $\|df(u)\| \leq k\,\|f(u)\|$. Montrer que pour u assez proche de a on a $\|f(u)\| \leq \|f(a)\| \exp(k\,\|u-a\|)$.

(b) Soit b un point de F, V un voisinage de b et soit $\varphi : U \times V \to \mathscr{L}(E;F)$ satisfaisant à $\|\varphi(u,v) - \varphi(u,w)\| \leq k\,\|v-w\|$. Montrer qu'il existe au plus une application différentiable f de U dans V telle que $df(u) = \varphi(u, f(u))$ et $f(a) = b$.

(c) Montrer que le résultat précédent est encore vrai si l'on suppose seulement que φ possède une différentielle partielle par rapport à la seconde variable qui est continue.

Exercice I.21.
Déterminer la tangente et la concavité au point $(1,2)$ de la courbe définie implicitement par l'équation

$$x\ln(y) + y\ln(x) = \ln(2).$$

Exercice I.22.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (u,v)$ avec

$$u = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \qquad v = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2})$$

1. Étudier la différentiabilité de f. Calculer son jacobien en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. f est-elle inversible ? Déterminer et construire $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice I.23.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u : E \to E$ une application de classe $\mathbb{C}^1$ et k-Lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que $f : E \to E$ définie par $f(x) = x + u(x)$ est un difféomorphisme. [Indication : pour montrer que f est surjective, on pourra montrer que l'image inverse d'une partie bornée est bornée].

Exercice I.24.
Soit E un espace de Banach. Montrer l'existence de deux voisinages U et V de Id_E dans $\mathcal{L}(E)$ tels que la restriction à U de $u \mapsto u^2$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme entre U et V.

Exercice I.25.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace affine des polynomes unitaires de degré n à coefficients complexes.

Soit $S_n \subset \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynomes unitaires scindés à racines simples et $U_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < \cdots < x_n\}$. Vérifier que U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que S_n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que l'application $\varphi : U_n \to S_n$ définie par $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = (X-x_1)\ldots(X-x_n)$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

Exercice I.26.
Soit $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que le polynome $P_a(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ admet n racines simples distinctes $z_1,\ldots,z_n$. Montrer que pour tout ε positif existe un η positif tel que pour tout $b = (b_1,\ldots,b_n)$ dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant $\sup_{1\leq k\leq n} |b_k - a_k| \leq \eta$ le polynome $P_b(X) = X^n + b_1X^{n-1} + \cdots + b_n$ admet n racines simples distinctes $w_1,\ldots,w_n$ avec $|w_i - z_i| \leq \varepsilon$ pour tout i.

Exercice I.27.
Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ telle que, pour tout t, $A(t)$ admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'on peut trouver des fonctions $V_1,\ldots,V_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continues telles que, pour tout t, la famille $(V_1(t),\ldots,V_n(t))$ est une base de vecteurs propres de $A(t)$. Étudier la différentiabilité des V_i.
2. On définit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+t^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } t<0,\ A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^k \\ t^k & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } t>0 \text{ et } A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que A est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer les vecteurs propres de $A(t)$, conclure.

Exercice I.28.

1. Montrer que, si x et y sont des réels positifs, $x^y = y^x$ est équivalent à $\ln(x)/x = \ln(y)/y$.
2. Étudier la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)/x$.
   En déduire que, pour tout $x \in]1,+\infty[$ différent de e, l'équation $x^y = y^x$ admet exactement deux solutions, dont l'une est x. On note $\psi(x)$ la seconde solution et on pose $\psi(e) = e$. Montrer qu'on définit ainsi une fonction continue de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$.

   (a) Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,e[$ et sur $]e,+\infty[$.

   (b) Montrer qu'il existe une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ différentiable telle que

   $$f(x) = f(e) - [(x-e)g(x)]^2$$

   (c) Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

Exercice I.29 (Lemme de Morse (c.f. Théorème I.6.4)**).**

1. On note $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe $A \in \mathscr{S}$ inversible et on note $\mathscr{F} = \{U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^tUA = AU\}$.
   (a) Montrer que $\Omega = \mathscr{F} \cap \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{F}$ et que l'application $\varphi : \Omega \to \mathscr{S}$ définie par $\varphi(U) =^t UAU$ est un difféomorphisme local en id_n.
   (b) Montrer l'existence d'un voisinage V de A dans $\mathscr{S}$ et d'une application $h : V \to \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $h(A) = \mathrm{id}_n$ et ${}^th(M)Ah(M) = M$ pour tout $M \in V$.
   (c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont des 1 et des -1 ainsi qu'une application $g : V \to \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout $M \in V$, ${}^tg(M)Dg(M) = M$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en 0 et telle que $df(0) = 0$. On suppose que la matrice hessienne de f en 0 est inversible.
   (a) Montrer qu'il existe des fonctions lisses a_{ij} telles que $a_{ij} = a_{ji}$ et $f(x) = \sum_{i,j} x_ix_ja_{ij}(x)$ pour tout x.
   (b) Montrer qu'il existe un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ défini sur un voisinage W de 0 et un entier r tels que, pour tout x dans W, on a
$$f(x) = (\psi_1(x))^2 + \cdots (\psi_r(x))^2 - (\psi_{r+1}(x))^2 - \cdots - (\psi_n(x))^2 .$$

Exercice I.30.

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre e n'est pas algébrique d'ordre 2 (et donc est irrationnel), c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver trois entiers a, b, c non tous nuls tels que $ae^2 + be + c = 0$.

1. Soient a et c deux entiers. On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ae^x + ce^{-x}$ pour tout x réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f en 0.
2. On suppose que $f(1)$ est un entier. Montrer qu'alors $a = c = 0$. Conclure.

Exercice I.31.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer (par exemple par récurrence) qu'il existe une suite (x_n) strictement croissante et à valeurs positives telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout $n > 0$. *Indication :* pour passer du rang $n \geq 1$ au rang $n + 1$, on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice I.32.

Soient E un espâce normé, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. On note $Z(f) = \{x \in I$ tels que $f(x) = 0\}$. Montrer que si $Z(f)$ est infini alors il existe c dans I tel que $f^{(n)}(c) = 0$ pour tout n. Montrer que ce n'est plus valable lorsque $I = \mathbb{R}$.

Exercice I.33 (Théorème de Borel).

1. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\{x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| \leq 1/2\}$ et valant 1 sur $\{x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| \geq 1\}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et m-plate en 0 i.e. telle que $D^\alpha f(0) = 0$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $|\alpha| = \sum_i \alpha_i \leq m$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)f(x)$. Montrer que si $|\alpha \leq m|$, alors
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f_\varepsilon(x) - D^\alpha f(x)| \to 0$$
quand ε tend vers 0.
2. En déduire qu'on peut approcher (en un sens à préciser) toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ m-plate en 0 par des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles au voisinage de 0.
3. Pour tout multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on considère un réel a_α. On pose $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
   (a) Montrer que pour tout m, il existe une fonction g_m de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulle sur un voisinage de 0 telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha(f_m - f_{m-1} - g_m)(x)|$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$.
   (b) Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} = a_\alpha$ pour tout α.

Exercice I.34.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe$\mathscr{C}^2$. On définit le laplacien de f par $\Delta f = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. On note B (resp. $\bar{B}$) la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\Delta f(x) > 0$ pour tout x dans B, montrer que $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$ pour tout $x \in B$.
2. Si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$, montrer que $\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$ pour tout $x \in B$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $\alpha > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$ et on pose $M = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ tels que } \sum_i x_i = \alpha \right\}$. Étudier le maximum global de la rextriction de f à M. Retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.
   (a) On se donne un entier $n \geq 2$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \cdots \lambda_n$. On note $V = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \sum_i \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1 \right\}$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_i x_i^2$. Déterminer le maximum global ge g sur V.

Exercice I.35.
Quel est, parmis tous les triangles ayant un périmètre donné $p > 0$, celui qui a la plus grande aire ?

Exercice I.36.
Soient E et F deux espaces normés et f une application deux fois différentiable d' un ouvert Ω de E dans F. A tout vecteur h de E, on associe l'application $\varphi_h : \Omega \to F$, définie par $\varphi_h(x) = df(x) \bullet h$. Montrer que φ_h est différentiable et exprimer sa différentielle en un point $x \in \Omega$.

Exercice I.37.
Soit E un espace de Hilbert réel, u une application linéaire continue de E dans lui-même et φ l'application de E dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = \langle u(x), x \rangle$. Démontrer que φ est deux fois différentiable et déterminer sa différentielle seconde.

Exercice I.38.
Soit E un espace de Banach, Ω l'ouvert de $\mathscr{L}(E)$ constitué des u tels que $id_E + u$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$ et Φ l'application de Ω dans $\mathscr{L}(E)$ définie par

$$\Phi(u) = (id_E + u)^{-1} \circ (id_E - u) \; ; \; u \in \Omega$$

Démontrer que Φ est de classe C^2 et déterminer sa différentielle seconde.

Exercice I.39.
Ω est un ouvert d'un espace normé E et f une application $n+1$ fois différentiable de Ω dans un espace normé F. Pour tout entier $k \leq n$ et tout $a \in \Omega$, on pose $T_a^k f(x) = f(a) + f'(a) \bullet (x-a) + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \bullet (x-a, \ldots, x-a)$.

1. Calculer $(T_a^k f)^{(p)}$ pour tout entier p.
2. On suppose que Ω est connexe et que $f^{(n+1)} = 0$. Que peut on dire de f ?

Exercice I.40.
On désigne par $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Soit f une application deux fois différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et $\langle f'(x) \bullet h, \; f'(x) \bullet k \rangle = \langle h, k \rangle$ pour tous vecteurs $x, \; h, \; k \; \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $h, \; k \; \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \varphi(x) = \langle f'(x) \bullet h, \; f'(x) \bullet k \rangle$. Calculer la dérivée de φ.
2. Pour $h, \; k, \; l \; \in \mathbb{R}^n$, on pose $A(h,k,l) = \langle f'(x) \bullet h, \; f''(x) \bullet (k,l) \rangle$. Montrer que $A(h,k,l) = -A(k,h,l)$ et $A(h,k,l) = A(h,l,k)$. En déduire que $A(h,k,l) = 0$.
3. Montrer que f'' est nulle et que f est une application linéaire conservant le produit scalaire.

Exercice I.41.
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert convexe de E et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si $f(x) \geq f(y) + f'(y) \bullet (x-y)$ pour tous $x, \; y \; \in \Omega$.
2. On suppose f de classe C^2. Démontrer que f est convexe si et seulement si $d^2 f(x) \bullet (h,h) \geq 0$ pour tout $(x, \; h) \in \Omega \times E$.

Exercice I.42.
Soit E et F deux espaces normés et f une application deux fois différentiable de E dans F. On suppose qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq A$ et $\|f'(x)\| \leq B$.

1. Montrer que pour tous x, y éléments de E, on a
$$\left\| f(x+y) - f(x-y) - 2f'(x) \bullet y \right\| \leq B \left\| y \right\|^2$$
2. En déduire une majoration de $\frac{\left\| f'(x) \bullet y \right\|}{\|y\|}$ pour x, y éléments de E, y non nul.
3. Montrer que pour tout x dans E,
$$\left\| f'(x) \right\| \leq \sqrt{2AB}.$$

Exercice I.43.
Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \rho(x,y) < 0\}$ et soit (x_0, y_0) un point de $fr(\Omega)$. On suppose que $d\rho(x_0, y_0) \neq 0$. Soient f et g deux fonctions C^∞ coincidant sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; \rho(x,y) = 0\}$ au voisinage de (x_0, y_0). Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) et une fonction C^∞, $h : U \to \mathbb{R}$ telle que $f - g = \rho h$ sur U. On pourra considérer le changement de variables local $(x,y) \mapsto (\rho(x,y), y)$ si par exemple, $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

Exercice I.44.
Les sous ensembles suivants sont ils des sous-variétés ? On déterminera l' espace tangent en un point quelconque lorsque cela est possible.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}$ (On cherchera à appliquer le plus de définitions possibles du cours).
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 - y^2 = 0\}$;
4. $\{(t, t^2) \,;\, t \leq 0\} \cup \{(t, -t^2) \,;\, t \geq 0\}$;
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = |x|\}$.

Exercice I.45.
On considère le sous ensemble de $\mathbb{C}^3 \equiv \mathbb{R}^6$ défini par

$$z_1^2 - z_2 z_3 = z_3^2 z_2 - 1 = 0$$

Démontrer que cet ensemble est une sous variété de $\mathbb{R}^6$.

Exercice I.46.
Soit M une C^k sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ de dimension d ; x_0 un point de $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer qu'il existe un point $x \in M$ tel que $d(x_0, M) = d(x_0, x)$ où d est la distance euclidienne.
2. Démontrer qu'un tel point x est tel que $x - x_0$ est orthogonal à l'espace tangent en x_0 à M.

Chapitre II

Chapitre II

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout ce chapitre, les espaces normé considérés seront toujours des espaces normés réels complets c'est-à-dire des **espaces de Banach réels**. Pour toute fonction différentiable x d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach (réel) E, la différentielle $dx(t)$ de x en un point t de l'intervalle de définition de x est **toujours identifiée** à l'élément $dx(t) \bullet 1$ de E et sera, le plus souvent (pour ne pas dire toujours) notée $x'(t)$ pour satisfaire aux habitudes usuelles. De même, les dérivées d'ordre supérieures de x, identifiées à un élément de E seront notées $x''(t)$, $x^{(3)}(t)$, $x^{(n)}(t)$.

Les réferences bibliographiques classiques de base pour ce chapitres sont : [Car67], [Ave83] et [Dem96].

SECTION II.1

Généralités

SOUS-SECTION II.1.1

Définitions

Définition II.1.1.

*Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. On appelle **équation différentielle d'ordre** 1 une équation de la forme*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ ou } x' = f(t, x). \tag{II.1.1}$$

*On dit qu'une fonction x de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E est une **solution** de l'équation* (II.1.1) *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$;
(ii) $x'(t) = f(t, x(t))$, pour tout $t \in I$.

Le sous-ensemble U de la Définition ci-dessus n'est pas nécessairement ouvert, de même que l'intervalle I peut être ouvert, fermé, borné ou non. Dans le cas où une borne de l'intervalle I appartient à I, il est généralement sous-entendu que x est dérivable à droite ou à gauche (suivant le cas) et que cette dérivée vérifie l'équation (II.1.1). D'autre part, il n'est pas nécessaire de supposer, à priori, dans cette Définition que x est de classe $\mathscr{C}^1$: c'est automatique puisque f est continue.

Si E est un produit fini $\prod_{i=1}^{n} E_i$ d'espaces de Banach, et si f_i, $1 \leq i \leq n$, sont les composantes de f, et x_i celles de x, alors l'équation (II.1.1) est un système de n équations différentielles d'ordre 1 à n inconnues

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ 1 \leq i \leq n.$$

De la même manière, on peut définir les équations différentielles d'ordre n :

Définition II.1.2.

*Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E^n$ et f une fonction continue de U dans E. On appelle **équation différentielle d'ordre** n une équation de la forme*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{II.1.2}$$

*On dit qu'une fonction x de classe $\mathscr{C}^n$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E est une **solution** de l'équation* (II.1.2) *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(t, x(t), x'(t), \ldots x^{(n-1)}(t)) \in U$ pour tout $t \in I$;

(ii) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$, pour tout $t \in I$.

Ainsi x est une solution de (II.1.2) si et seulement elle est solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \ldots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = f(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Ceci montre que l'étude des équations différentielles d'ordre n se ramène toujours à celle des équations d'ordre 1. Précisément :

PROPOSITION II.1.1.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E^n$ et f une fonction continue de U dans E et

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{II.1.3}$$

une équation différentielle d'ordre n. Soit $X' = F(t, X)$ l'équation différentielle d'ordre 1 où F est la fonction continue définie sur U par

$$F(t, X) = F(t, (x_0, \ldots, x_{n-1})) = (x_1, \ldots x_{n-1}, f(t, x_0, \ldots x_{n-1})). \tag{II.1.4}$$

Alors, x est solution de (II.1.3) *si et seulement si, il existe une solution $X = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ de* (II.1.4) *telle que $x = x_0$. En particulier, on a $x^{(i)} = x_i$, $0 \leq i \leq n-1$.*

Définition II.1.3.

*Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Soit (t_0, x_0) un point intérieur à U. On appelle «**problème de Cauchy**» en (t_0, x_0) associé à l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ le problème qui consiste à chercher une solution x de l'équation différentielle précédente définie sur un intervalle I contenant t_0 et vérifiant $x(t_0) = x_0$. Le point (t_0, x_0) s'appelle la «**condition initiale**» (ou «**donnée initiale**») du problème de Cauchy.*

Dans la pratique on parle du «**problème de Cauchy** $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$». Si un problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ a une solution, on dit aussi que le point (t_0, x_0) est un **point d'existence locale** pour l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. On dit qu'un point d'existence locale (t_0, x_0) est un point d'**unicité locale** si, étant donné deux solutions au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, définies sur des segments contenant t_0, il existe un segment non réduit à un point contenant t_0 sur le quel les deux solutions sont égales.

Remarque II.1.1. *Soit $x' = F(t, x)$ une équation différentielle d'ordre 1 provenant d'une équation d'ordre n. Alors, en termes de solution de l'équation d'ordre n, un problème de Cauchy (pour l'équation d'ordre 1) s'écrit $x^{(i)}(t_0) = x_0^i \in E$, $0 \leq i \leq n-1$, avec $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in U$.*

On remarquera au passage que la notion de problème de Cauchy est tout à fait naturelle : en effet, si $\varphi : I \to E$ est une solution d'une équation différentielle d'ordre 1, $t_0 \in I$, on a $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du + C$ où C est une constante. C'est cette dernière qui fixe la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.

Avant de poursuivre donnons une interprétation géométrique classique des équations différentielles :

Définition II.1.4.

Soient E un espace normé et Λ un ensemble.

*1. On appelle **champ de vecteurs sur E à paramètre dans Λ** une application X d'une partie U de $\Lambda \times E$ dans E. Si Λ est un espace topologique, on dit que le champ X est continu si l'application X est continue.*

*2. Soit X un champ de vecteurs continu sur E à paramètres dans $\mathbb{R}$ (on dit, dans ce cas, que le paramètre est le temps). On appelle **courbe intégrale du champ X au voisinage de** $(t_0, x_0) \in E$, une courbe différentiable $\gamma : I \to E$, $t_0 \in I$, telle que, pour tout $t \in I$, $(t, \gamma(t)) \in U$, $\gamma(t_0) = x_0$, et, la tangente $\gamma'(t)$ à la courbe en t est égale au vecteur $X(t, \gamma(t))$ (i.e. à tout instant, la tangente à la courbe est donnée par le champ de vecteurs). Autrement dit si $\gamma : I \to E$ est une solution au problème de Cauchy $x' = X(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.*

*3. Dans les conditions du 2., si le champ X est indépendant du temps (i.e. du paramètre, c'est-à-dire $X : U \to E$ où U est un ouvert de E), on dit que X est le «**champ des vitesses**» et l'**équation différentielle** $x' = X(x)$ est dite **autonome**.*

Cette définition est généralement prise comme définition des équations différentielles par les mécaniciens. La distinction entre champ de vecteur dépendant du temps et champ indépendant du temps est en fait illusoire : la première se ramène à la seconde en considérant **l'espace-temps** : en effet, si $X : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ est un champ de vecteurs dépendant du temps, soit $\tilde{E} = \mathbb{R} \times E$ l'espace temps, et $\tilde{X} : U \to \tilde{E}$ le champ de vecteurs définit par $\tilde{X}(t, x) = (1, X(t, x))$. Alors si $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ est une courbe intégrale de $\tilde{X}$, on a tout de suite $\tilde{\gamma}_1'(t) = 1$ et $\tilde{\gamma}_2'(t) = X(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))$, donc, la courbe intégrale telle que $\tilde{\gamma}_1$ vaille t_0 au temps t_0 (i.e. $\tilde{\gamma}_1(t) = t$) à une projection sur E qui est une courbe intégrale du champ X. On voit ainsi que l'on récupère toutes les courbes intégrales du champ X comme des courbes intégrales du champ des vitesses $\tilde{X}$ sur l'espace-temps.

Définition II.1.5.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E.

*1. Soient $x_1 : I_1 \to E$ et $x_2 : I_2 \to E$ deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. On dit que x_2 **prolonge** x_1 si $I_2 \supset I_1$ et si la restriction de x_2 à I_1 coïncide avec x_1.*

*2. On dit qu'une **solution** $x : I \to E$ de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est **maximale** s'il n'existe pas de solution $x_1 : I_1 \to E$ prolongeant x et telle que $I_1 \supsetneq I$.*

PROPOSITION II.1.2.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Toute solution $x : I \to E$ de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ se prolonge en une solution maximale (mais ce prolongement n'est pas nécessairement unique).

Démonstration. Pour fixer les notations, posons $I = |a, b|$, la notation signifiant que les bornes peuvent ou non être incluses dans l'intervalle. Montrons par exemple que x se prolonge en une solution $\tilde{x} : \tilde{I} \to E$ où $\tilde{I} = |a, \tilde{b}|$ avec $\tilde{b} \geq b$ et $\tilde{x}$ maximale à droite (i.e. en $\tilde{b}$). Construisons, par récurrence des prolongements successifs x_i de x, définis sur des intervalle $|a, b_i|$ tels que $b_i \geq b_{i-1}$: si x_{k-1} est construit ($k \geq 1$), soit c_k la borne supérieure des c tels que x_{k-1} se prolonge à $|a, c|$. Il existe donc $b_k \geq b_{k-1}$, $b_k > c_k - 1/k$ si $c_k < +\infty$, $b_k > k$ si $c_k = +\infty$, et $x_k : |a, b_k| \to E$ une solution de l'équation différentielle prolongeant x_{k-1}. Clairement, par construction la suite (c_k) est décroissante et la suite (b_k) est croissante : les suites (c_k) et (b_k) sont donc adjacentes et par suite elles sont convergentes (dans $\bar{\mathbb{R}}$ éventuellement) vers une limite commune $\tilde{b}$. De plus, toujours par construction des x_k, il existe une solution de l'équation différentielle $\tilde{x} : |a, \tilde{b}| \to E$ qui prolonge chaque x_k et que l'on peut, si cela est possible, prolonger en $\tilde{b}$. alors, si $z : |a, c| \to E$ est une solution de l'équation différentielle qui prolonge $\tilde{x}$, elle prolonge chaque x_k ce qui implique $c \leq c_{k+1}$, et, par suite $c \leq \tilde{b}$. □

Tout point d'existence est donc point d'existence pour une solution maximale. Il faut par contre distinguer les notions locales et globales pour ce qui est de l'unicité. On dit qu'un point d'existence locale (t_0, x_0) est un point d'**unicité maximale** s'il n'existe qu'une seule solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Un point d'unicité maximale est bien sûr un point d'unicité locale mais la réciproque est fausse.

Définition II.1.6.

*Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Supposons U de la forme $I \times O$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et O une partie de E. On dit qu'une **solution** x de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est **globale** si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.*

Remarque II.1.2. *On notera qu'une solution globale est bien sûr maximale mais que **la réciproque est fausse**.*

La Proposition suivante se démontre immédiatement par récurrence :

PROPOSITION II.1.3.

Soient E un espace de Banach réel et U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) toute solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$).

On peut d'ailleurs aisément calculer les dérivées successives d'une solution (en dérivant l'équation différentielle) en fonctions de la solution elle même et des dérivées de f.

PROPOSITION II.1.4.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Une fonction $x : I \to E$ est une solution du problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, si et seulement si :

(i) x est continue, $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$;

(ii) $\forall t \in I, x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du.$

Démonstration. En effet, il suffit de remarquer que, les fonctions f et x étant supposées continues, la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$$

est dérivable sur I de dérivée $f(t, x(t))$ ce qui est une propriété élémentaire de l'intégrale. □

On notera, par exemple que si x est à priori dérivable sur I sauf peut être en un nombre fini de points de son intervalle de définition, et vérifie, en dehors de ces points, $x'(t) = f(t, x(t))$, la Proposition ci-dessus implique que x est une solution de l'équation différentielle : en fait, dans cette situation, x' se prolonge par continuité à tout l'intervalle, ce qui implique que x est de clase $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle.

SOUS-SECTION II.1.2

Bouts des solutions maximales

Dans cette sous-section nous allons introduire une notion qui permet, dans certains cas, de dire où se trouvent les extrémités des solutions maximales.

Définition II.1.7.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E, $(t_0, x_0) \in U$ et $\varphi : I \to E$ une solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Posons $I = |\alpha, \beta|$, la notation signifiant que l'intervalle peut être ouvert ou fermé.

*1. Si $\beta < +\infty$, on appelle **bout droit de la solution maximale** φ l'ensemble $\{\beta\} \times \mathscr{A}_d(\varphi)$ où $\mathscr{A}_d(\varphi)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans E) de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers β. Autrement dit, $\mathscr{A}_d(\varphi) = \displaystyle\bigcap_{t \in I} \overline{\varphi(]t, \beta[)}$.*

*2. Si $\alpha > -\infty$, on appelle **bout gauche de la solution maximale** φ l'ensemble $\{\alpha\} \times \mathscr{A}_g(\varphi)$ où $\mathscr{A}_g(\varphi)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans E) de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers α. Autrement dit, $\mathscr{A}_d(\varphi) = \displaystyle\bigcap_{t \in I} \overline{\varphi(]\alpha, t[)}$.*

PROPOSITION II.1.5.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E, $(t_0, x_0) \in U$ et $\varphi : I \to E$ une solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Si $\beta < +\infty$ (resp. $\alpha > -\infty$), et si $f(t, \varphi(t))$ reste borné au voisinage de β (resp. α) (auquel cas on dit que f est bornée sur le graphe de φ au voisinage de β) alors $\mathscr{A}_d(\varphi)$ (resp. $\mathscr{A}_g(\varphi)$) est réduit à un point. Autrement dit, φ a une limite en β (resp. α).

Démonstration. En effet, le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7), pour t_1 et t_2 proches de β on a $\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| \leq M\,|t_1 - t_2|$, ce qui montre, puisque E est complet que $\varphi(t)$ converge dans E lorsque t tend vers β. □

PROPOSITION II.1.6.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E, $(t_0, x_0) \in U$ et $\varphi : I \to E$ une solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Supposons E de dimension finie. Si $\beta < +\infty$ (resp. $\alpha > -\infty$), et si φ reste bornée au voisinage de β (resp. α) alors $\mathscr{A}_d(\varphi)$ (resp. $\mathscr{A}_g(\varphi)$) est un compact connexe non vide.

Démonstration. En effet, si on pose $\mathscr{A}_{d,t}(\varphi) = \overline{\varphi(]t,\beta[)}$, alors $\mathscr{A}_{d,t}$ est un compact connexe non vide et l'intersection $\mathscr{A}_d$ de ces compacts ne peut être vide (famille décroissante). La connexité se voit aussi aisément : si $\mathscr{A}_d(\varphi) \subset O_1 \cup O_2$, où les O_i sont des ouverts rencontrant tous deux $\mathscr{A}_d(\varphi)$ et tels que $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Par compacité de A, il existe deux voisinages ouverts $V_{r_1}(A \cap O_1)$ de $A \cap O_1$ et $V_{r_2}(A \cap O_2)$ de $A \cap O_2$ disjoints. Ainsi, quitte à changer les O_i on peut les supposer disjoints. Si $F = E \setminus (O_1 \cup O_2)$, alors l'intersection des $\mathscr{A}_{d,t} \cap F$ est vide ce qui implique, par définition de la compacité, que l'un d'entre eux est vide. □

SOUS-SECTION II.1.3

Cylindres de sécurité

Définition II.1.8.

> *Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Soit $(t_0, x_0) \in U$. On dit qu'un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ est un **cylindre de sécurité** pour le problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, si toute solution $x : I \to E$ de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ définie sur un intervalle I contenant t_0, contenu dans $[t_0 - T, t_0 + T]$, vérifiant $x(t_0) = x_0$ reste contenue dans $\bar{B}(x_0, r_0)$ (i.e. $x(t) \in \bar{B}(x_0, r_0), \forall t \in I$).*

La Proposition simple, mais importante, suivante montre qu'il existe toujours des cylindres de sécurité.

PROPOSITION II.1.7.

> *Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f une fonction continue de U dans E. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Supposons qu'il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ contenu dans U tel que $M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t,y)\| < +\infty$. Alors le cylindre $C = [t_0 - T_1, t_0 + T_1] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ avec $T_1 = \min\left\{T_0, \dfrac{r_0}{M}\right\}$ est un cylindre de sécurité du problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.*

Démonstration. En effet, si cela était faux, il existerait, par exemple, une solution x définie sur un intervalle $[t_0, t_0 + T_1']$, $T_1' \le T_1$, ne restant pas dans $\bar{B}(x_0, t_0)$, c'est-à-dire telle que, pour certaines valeurs de $t < T_1'$, on ait $\|x(t) - x_0\| > r_0$. Soit τ la borne inférieure des $t \in [t_0, t_0 + T_1']$ tels que $\|x(t) - x_0\| > r_0$, de sorte que $\|x(\tau) - x_0\| = r_0$ et $t_0 < \tau < t_0 + T_1'$. Alors, par définition de M,

$$r_0 = \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(u)du \right\| \le \int_{t_0}^{\tau} \|x'(u)\| \, du = \int_{t_0}^{\tau} \|f(u, x(u))\| \, du \le M(\tau - t_0) < MT_1'$$

ce qui est absurde puisque $T_1' \le \dfrac{r_0}{M}$. □

PROPOSITION II.1.8.

> *1. Il existe un cylindre de sécurité dès que f est bornée sur un cylindre contenu dans U donné a priori.*
>
> *2. Si l'espace E est de dimension finie alors tout cylindre C_0 contenu dans U est compact et la continuité de f implique qu'elle est bornée sur C_0 ; ainsi, dans ce cas, on peut donc prendre pour C_0, dans la Proposition précédente, tout cylindre contenu dans U.*
>
> *3. En général, la continuité en (t_0, x_0) de f permet seulement de dire qu'il existe un cylindre C_0 où f est bornée et donc un cylindre de sécurité qui lui est associé comme dans la Proposition précédente.*
>
> *4. La preuve de la Proposition montre que si on a seulement $M = \sup_{(t,y) \in \tilde{C}_0} \|f(t,y)\| < +\infty$, où $\tilde{C}_0 = [t_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$, alors le cylindre C est de sécurité pour toute solution définie sur un intervalle de la forme $[t_0, t_0 + T_1']$ avec $T_1' \le \min\left\{T_0, \dfrac{r_0}{M}\right\}$. Dans cette situation on dit que $C = [t_0, t_0 + T_1] \times \bar{B}(x_0, r_0)$, $T_1 = \min\left\{T_0, \dfrac{r_0}{M}\right\}$, est un cylindre de sécurité.*
>
> *5. On notera que, d'après le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.2, page 7), dans les conditions de la Proposition précédente, toute solution x définie sur un intervalle I tel que $I \times \bar{B}(x_0, r_0)$ est contenu dans un cylindre de sécurité sur lequel $\|f\|$ est majorée par M, est lipschitzienne de rapport M.*

SECTION II.2

Solutions approchées, Méthode d'Euler

Définition II.2.1.

*Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Nous dirons qu'une fonction continue $\varphi : I = [t_0, t_0 + T] \to E$ est une **solution approchée linéaire (affine) par morceaux à droite de** t_0 au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Il existe une subdivision t_i, $0 \leq i \leq N$, de I telle que $t_N = T$, et, pour tout i, $(t_i, \varphi(t_i)) \in U$;

(ii) pour tout i, $0 \leq i \leq N - 1$, la restriction de φ à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est donnée par $\varphi_{|[t_i,t_{i+1}]}(t) = \varphi(t_i) + (t - t_i)f(t_i, \varphi(t_i))$.

*De même, par symétrie, nous parlerons de **solution approchée linéaire (affine) par morceaux à gauche de** t_0 au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.*

On notera que, étant donné une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$, il existe au plus une seule solution approchée linéaire par morceaux à droite de t_0 au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$: cette méthode de construction est généralement appelée la **méthode d'Euler** ou **méthode de la tangente**. Précisément cette méthode construit la solution approchée comme suit :

PROPOSITION II.2.1 (*Méthode d'Euler*).

Soient U une partie de $\mathbb{R} \times E$, E espace de Banach, et f une application de U dans E. Soit $(t_0, x_0) \in U$.

1. On définit tout d'abord φ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ par $\varphi(t) = x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0)$, t_1 étant choisit de sorte que $(t_1, \varphi(t_1)) \in U$ (si cela est possible bien sûr).

2. on définit ensuite φ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ par $\varphi(t) = \varphi(t_1) + (t - t_1)f(t_1, \varphi(t_1))$, t_2 étant là aussi choisit de sorte que $(t_2, \varphi(t_2)) \in U$.

3. Et ainsi de suite par récurrence sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N - 1$.

Il est clair que cette construction donne une solution approchée linéaire par morceaux à droite de t_0, définie sur un intervalle $[t_0, t_N]$ dont la taille dépend du choix initial de (t_0, x_0) et de f (on peut avoir, sans hypothèses supplémentaires, $t_N \neq t_0$!). On dit que cette solution approchée linéaire par morceaux est associée à la subdivision t_i. De plus, on a :

(i) Sur $]t_i, t_{i+1}[$, φ est dérivable et $\varphi'(t) = f(t_i, \varphi(t_i))$.

(ii) aux points t_i, φ a une dérivée à droite et à gauche et $\varphi'_d(t_i) = f(t_i, \varphi(t_i))$ et $\varphi'_g(t_i) = f(t_{i-1}, \varphi(t_{i-1}))$ (sauf aux extrémités où il n'y en a qu'une sur les deux).

(iii) En notant $\varphi'(t)$ la dérivée de φ en dehors des points t_i, $0 \leq i \leq N$, alors φ' est une fonction en escalier et on a $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi'(u)du$, pour tout t.

Naturellement, si on choisit au hasard le point de départ (t_0, x_0) il se peut que l'on ne puisse même pas entamer le processus de construction car on peut ne pas trouver $t_1 \neq t_0$ tel que $(t_1\varphi(t_1)) \in U$. La FIG. II.2.1 illustre la construction.

Si $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{U}$, on pourra toujours construire une telle solution approchée sur un intervalle $[t_0, t_N]$ assez petit. Plus précisément, si $[t_0, T]$ est assez petit, grâce à la continuité de f, pour toute subdivision (t_i) de $[t_0, T]$ on peut construire une solution approchée associée à cette subdivision : l'idée est que, si la subdivision est assez fine, on espère ainsi approcher une solution exacte. En fait, nous allons procéder de manière plus précise en utilisant les cylindres de sécurité :

PROPOSITION II.2.2.

Soient E un espace de Banach réel et U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'on ait un cylindre $C_0 = [t_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ contenu dans U sur lequel f est bornée par M. Alors si $T \leq T_1 = \min\{T_0, \frac{r_0}{M}\}$, pour toute subdivision (t_i), $1 \leq i \leq N$, de $[t_0, t_0 + T]$, la méthode d'Euler construit une solution approchée linéaire par morceaux associée à la subdivision (t_i) qui reste dans $B(x_0, r_0)$. Autrement dit, le cylindre $[t_0, t_0 + T_1] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ est de sécurité pour toute solution approchée linéaire par morceaux définie sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$. De plus, une telle solution approchée est M-lipschitzienne. Naturellement, on a un énoncé analogue pour les solutions approchées linéaires par morceaux à gauche de t_0.

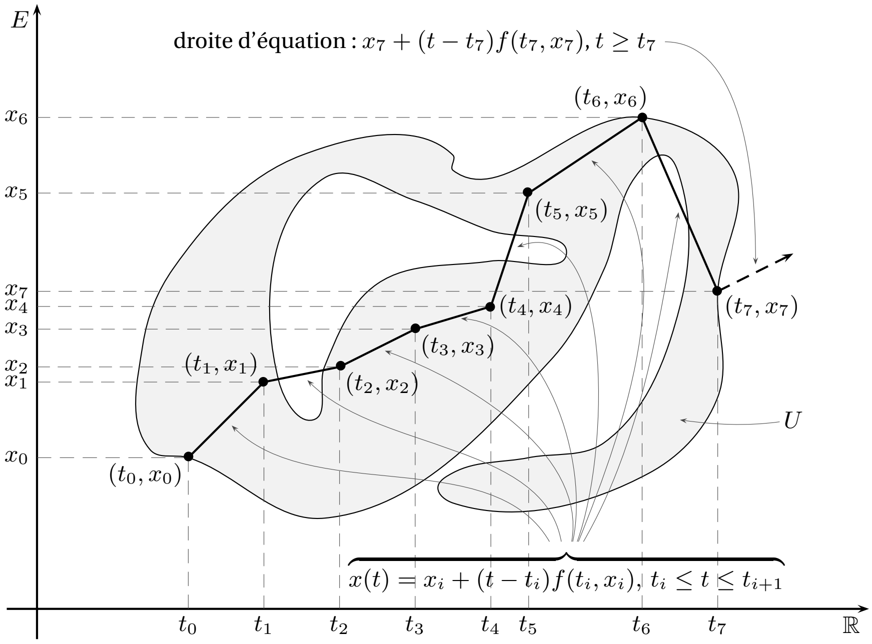

FIG. II.2.1 – Solution approchée par la méthode d'Euler

Démonstration. Reprenons les notations de la définition précédente et raisonnons par récurrence sur i : montrons que $\|\varphi(t) - x_0\| \leq r_0$, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, si l'on suppose $\|\varphi(t_k) - x_0\| \leq r_0$ pour $0 \leq k \leq i$ (ce qui est bien sûr vrai si $i = 0$). En effet, l'hypothèse de récurrence implique $\|f(t_k, \varphi(t_k))\| \leq M$, $1 \leq k \leq i$, ce qui entraîne $\|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})\| \leq (t_{k+1} - t_k)M$ pour $0 \leq k \leq i-1$, et, par suite, en écrivant

$$\varphi(t) - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_i) + \sum_{k=0}^{i-1}(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})),$$

il vient

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq M\left(t - t_i + \sum_{k=0}^{i-1}(t_{k+1} - t_k)\right) = M(t - t_0) \leq r_0.$$

Le fait que φ soit M-lipschitzienne résulte aussitôt de la dernière assertion de la Proposition précédente. □

S'il est clair que, dans les conditions de la Proposition précédente, on peut toujours considérer des solutions approchées linéaires par morceaux définie sur des subdivisions aussi fines que l'on veut, il est moins évident que l'on puisse en construire qui soit, en un certain sens, proches d'une vraie solution. Pour aborder cette question, introduisons tout d'abord une définition :

Définition II.2.2.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$.

*1. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment contenant t_0 est une **solution ε-approchée de classe $\mathscr{C}^1$** au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si $\varphi(t_0) = x_0$ et si*

$$\forall t \in I,\ (t, \varphi(t)) \in U \text{ et} \sup_{t \in I} \|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon.$$

*2. On dit qu'une fonction continue $\varphi : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur un segment $I = [a, b]$ contenant t_0 est une **solution ε-approchée de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux** au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si $\varphi(t_0) = x_0$ et s'il existe une subdivision t_i, $1 \leq i \leq n$, de I, $t_1 = a$, $t_n = b$, telle que, pour tout $t \in I$, φ admette une dérivée à droite $\varphi'_d(t)$ et une dérivée à gauche $\varphi'_g(t)$ en t (sauf bien sûr aux extrémités où il n'y en a qu'une), la restriction de φ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\forall t \in I,\ (t, \varphi(t)) \in U,\ \sup_{t \in I} \|\varphi'_d(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \text{ et } \sup_{t \in I} \left\|\varphi'_g(t) - f(t, \varphi(t))\right\| \leq \varepsilon.$$

Nous avons vu précédemment qu'une solution approchée linéaire par morceaux ne peut s'échapper d'une boule si son intervalle de définition est convenablement relié à un cylindre de sécurité. Pour les solution ε-approchées, il faut modifier un peu ce résultat :

PROPOSITION II.2.3.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'on s'est donné un cylindre $C = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset U$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ contenant t_0 tel que $\sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\| = M < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $T_0 \le \dfrac{r_0}{M+\varepsilon}$ maximum de sorte que $[t_0, t_0 + T_0]$ soit contenu dans I. Alors toute solution ε-approchée $\mathscr{C}^1$ par morceaux $\varphi : [t_0, t_0 + T] \to E$, avec $T \le T_0$, au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, reste dans la boule $\bar{B}(x_0, r_0)$. Naturellement on a un résultat analogue pour un intervalle convenable de la forme $[t_0 - T, t_0]$.

Démonstration. Supposons que cela soit faux. On a donc une telle solution ε-approchée, φ, définie sur un intervalle $[t_0, t_0 + T_1]$, $T_1 \le T_0$, qui sort de la boule $\bar{B}(x_0, r_0)$ pour une valeur de $t < T_1$. Soit τ la borne inférieure des t pour lesquels $\|\varphi(t) - x_0\| > r_0$, de sorte que $\|\varphi(\tau) - x_0\| = r_0$ et $\tau < T_1$. Comme φ est dérivable sauf en un nombre fini de points et est continue, on a

$$r_0 = \|\varphi(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} \varphi'(u)du \right\|,$$

et, par suite

$$\begin{aligned} r_0 &\le \int_{t_0}^{\tau} \left\|\varphi'(u) - f(u, \varphi(u))\right\| du + \int_{t_0}^{\tau} \|f(u, \varphi(u))\| du \\ &\le (M + \varepsilon)(\tau - t_0) \\ &< (M + \varepsilon)T_1, \end{aligned}$$

puisque, par définition de τ, pour $t_0 \le u \le \tau$, on a $f(u, \varphi(u)) \in C$. Mais ceci contredit la définition de T_1. □

L'étape fondamentale pour obtenir les Théorèmes d'existence de solution locale pour les équations différentielles que nous avons en vue est de montrer que, étant donné un cylindre de sécurité, on peut toujours construire des solutions ε-approchées linéaires par morceaux définies dans un intervalle dont la longueur ne dépend que du cylindre de sécurité. Nous allons donner deux preuves de ce résultat : l'une ne faisant aucune hypothèse sur la fonction f et l'autre sous une hypothèse d'uniforme continuité locale. La seconde permettra en plus de contrôler l'erreur faite par la solution approchée en fonction du module de continuité de f.

THÉORÈME II.2.1 (*Théorème d'existence des solutions ε-approchées*).

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'on s'est donné un cylindre $C = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset U$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ contenant t_0 tel que $\sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\| = M < +\infty$. Soit $T_0 \le \dfrac{r_0}{M}$ maximum de sorte que $[t_0, t_0 + T_0]$ soit contenu dans I ; ainsi, $[t_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution ε-approchée, linéaire par morceaux $\varphi : [t_0, t_0 + T_0] \to E$. De plus cette solution est M-lipschitzienne. Naturellement, on a un énoncé analogue sur l'intervalle $[t_0 - T_1, t_0]$ avec $T_1 \le \dfrac{r_0}{M}$ et $[t_0 - T_1, t_0] \subset I$.

Démonstration. Nous pouvons nous restreindre au cas $T_0 > 0$ sinon il n'y a rien à montrer. Nous allons construire φ par la méthode d'Euler ce qui donnera tout de suite la dernière assertion concernant le fait que φ est M-lipschitzienne d'après la Proposition II.2.2 et le Théorème des accroissements finis, Théorème I.2.1, page 6. Nous construisons donc φ en utilisant la méthode d'Euler (Proposition II.2.1). D'après la Proposition II.2.2, page 48, cela revient à montrer qu'il existe une subdivision convenable de $[t_0, t_0 + T_0]$. Définissons tout d'abord t_1 par

$$t_1 = \inf\{t \ge t_0,\ t \le T_0 \text{ tels que } \|f(t_0, x_0) - f(t, x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0))\| > \varepsilon\}.$$

Par continuité de f, on a clairement $t_1 > t_0$. Si $t_1 = T_0$ la construction est terminée. Sinon on recommence le même procédé pour construire t_2 en remplaçant t_0 par t_1 et x_0 par $\varphi(t_1)$. Si $t_2 = T_0$ la construction se termine et sinon on recommence. Supposons que le procédé se poursuive jusqu'à l'étape n (i.e. $t_{n-1} < T_0$). Remarquons tout de suite que la fonction φ ainsi construite est une solution ε-approchée sur l'intervalle $[t_0, t_n]$: cela résulte aussitôt de la Proposition II.2.1 et de la construction, et, de plus, elle est M-lipschitzienne. Pour conclure, il suffit donc de voir que le procédé s'arrête nécessairement c'est-à-dire que, pour n assez grand, on aura automatiquement $t_n = T_0$. Supposons que cela soit faux et que le procédé se poursuive indéfiniment. On construit ainsi une suite strictement croissante (t_n) majorée qui converge donc vers $t' \le T_0$ et une solution approchée φ sur $[t_0, t'[$. Comme φ est M-lipschitzienne, on a

$$\|\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)\| \le M(t_{n+1} - t_n)$$

ce qui montre que la suite $(\varphi(t_n))$ est de Cauchy dans E. Elle converge donc vers une limite x' qui appartient à $\bar{B}(x_0, r_0)$ d'après la Proposition II.2.2, page 48. Considérons alors, pour n donné assez grand la solution approchée φ_n définie sur $[t_0, t']$ et associée à la subdivision t_i, $0 \le i \le n$ (Proposition II.2.2). Si $t \in]t_n, t']$ on a $\varphi_n'(t) = f(t_n, \varphi(t_n))$, et, comme f est continue en (t', x'), pour n assez grand, on aura

$$\|f(t_n, \varphi(t_n)) - f(t, \varphi_n(t)\| \le \varepsilon$$

car

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t_n)\| \leq M(t' - t_n)$$

et $\|\varphi(t_n) - x'\|$ et $t' - t_n$ tendent vers zéro quand $n \to \infty$. Ceci contredit la possibilité de construire t_{n+1}.

C.Q.F.D.

Si on impose une condition d'uniforme continuité à f, le Théorème précédent devient très simple :

PROPOSITION II.2.4.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons qu'il existe $C = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset U$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ contenant t_0 tel que, d'une part, $\sup_{(t,y)\in C} \|f(t,y)\| = M < +\infty$, et, d'autre part, f soit uniformément continue sur C, c'est-à-dire que son module de continuité

$$\omega_f(u) = \sup\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| \text{ tels que } |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\},\ u \geq 0,$$

vérifie $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \omega_f(u) = 0$. Soit $T_0 \leq \frac{r_0}{M}$ maximum de sorte que $[t_0, t_0 + T_0]$ soit contenu dans I. Alors toute solution approchée linéaire par morceaux à droite de t_0 est ε-approchée pour $\varepsilon = \omega_f((M+1)h_{\max})$ où $h_{\max} = \max\{|t_{i+1} - t_i|\,,\ 0 \leq i \leq N-1\}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition II.2.1, page 48. □

L'intérêt des solutions ε-approchées réside dans la propriété suivante :

PROPOSITION II.2.5.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'on ait une suite φ_n, $n \geq 1$, de solutions ε_n-approchées au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, définies dans un même segment I telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ (ce qui est toujours possible par les deux résultats précédents si I est convenablement associé à un cylindre de sécurité comme dans les Propositions précédentes) et qui converge uniformément vers une fonction continue $x : I \to E$ telle que, $\forall t \in I$, $(t, x(t)) \in U$. Alors x est une solution de problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, en posant $\varphi_0 = x$, l'ensemble

$$A = \{(t, \varphi_n(t)),\ n \geq 0,\ t \in I\}$$

est un compact de $\mathbb{R} \times E$ contenu dans U. En effet, si on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des φ_n, $n \geq 0$, alors $\mathscr{A}$ est compact dans l'espace normé $\mathscr{C}_u(I; E)$ (muni de la norme uniforme) (car l'ensemble formé des points d'une suite convergente et de sa limite est toujours compact), et comme l'application $(t, \psi) \mapsto (t, \psi(t))$ est continue de $I \times \mathscr{A}$ dans $\mathbb{R} \times E$, son image A est compacte. Comme f est continue, ceci implique qu'elle est uniformément continue sur A (Proposition **??**, page Proposition II.1.1) et, par suite, la suite des fonctions $u \mapsto f(u, \varphi_n(u))$ converge uniformément, sur I, vers $u \mapsto f(u, x(u))$. Alors, comme, par hypothèse, on a, si $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\left\|\varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_n(u))du\right\| \leq \varepsilon_n(T - t_0),$$

on obtient la conclusion en écrivant

$$\begin{aligned}\left\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du\right\| \ &\leq\ \|x(t) - \varphi_n(t)\| \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u)) - f(u, \varphi_n(u))\|\, du \\ &\quad + \varepsilon_n(T - t_0),\end{aligned}$$

et en appliquant la Proposition II.1.4, page 46. □

SECTION II.3

Théorèmes d'existence et d'unicité généraux

SOUS-SECTION II.3.1

Le cas de dimension finie : le Théorème de Cauchy-Peano-Arzela

THÉORÈME II.3.1 (*Théorème de Cauchy-Peano-Arzela*).

*Soient E un espace normé réel **de dimension finie**, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'on ait $C = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset U$ un cylindre contenu dans U où I est un segment de $\mathbb{R}$ contenant t_0 (un tel cylindre existe toujours si (t_0, x_0) est dans l'intérieur de U, mais ceci n'est pas nécessaire). Soient $M = \sup_{(t,y) \in C} \|f(t, y)\| = M$ (M est fini car C est compact et f continue), $T_1 \leq \dfrac{r_0}{M}$ et $T_2 \leq \dfrac{r_0}{M}$ tous deux maximum de sorte que $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ soit contenu dans I. Alors il existe une solution $x : [t_0 - T_1, t_0 + T_2] \to E$ au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.*

Démonstration. Il nous suffit, par exemple, de montrer l'existence de x sur $[t_0, t_0 + T_2]$, le même raisonnement fournira une solution sur $[t_0 - T_1, t_0]$ et il n'y aura plus qu'à recoller les deux solutions. D'après la Proposition précédente (f est uniformément continue sur C), pour tout $n \geq 1$, il existe une solution $\frac{1}{n}$-approchée, φ_n, définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T_2]$. Comme chaque φ_n est M-lipschitzienne et $\varphi_n(t) \in \bar{B}(x_0, r_0)$, $\forall t$ (Proposition II.2.2, page 48), l'ensemble des φ_n forme une partie équicontinue, et, E étant de dimension finie, $\bar{B}(x_0, r_0)$ est compacte, ce qui montre que $\{\varphi_n(t),\ n \geq 1\}$ est relativement compact. Alors le Théorème d'Ascoli implique qu'il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k \geq 0}$ de la suite (φ_n) qui converge uniformément sur $[t_0, t_0 + T_2]$ vers une fonction continue x. Pour conclure, il suffit d'appliquer la Proposition II.2.5.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

Soient E un espace normé réel de dimension finie, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in \mathring{U}$. Alors il existe une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $x(t_0) = x_0$. De plus, si U est ouvert, l'intervalle de définition de toute solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est ouvert.

Démonstration. La première assertion résulte du Théorème précédent et de la Proposition II.1.2, page 45. La seconde est immédiate : si x est une solution maximale définie sur $]a, b]$, alors $(b, x(b))$ appartient à U qui est ouvert, et, le Théorème précédent dit qu'il existe une solution $\tilde{x}$ au problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(b) = x(b)$. En considérant alors la fonction qui est égale à x sur $]a, b]$ et à $\tilde{x}$ au delà de b, on contredit la maximalité de x. □

Remarque II.3.1. *Dans les résultats d'existence de cette sous-section il n'y a évidement pas unicité de la solution. Par exemple le problème de Cauchy $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$, a trivialement deux solutions (locales ou maximales) : $x = 0$ et $x(t) = t^3$.*

SOUS-SECTION II.3.2

Le cas localement lipschitzien

Définition II.3.1.

*Soient E un espace normé réel de dimension finie, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue de U dans E. On dit que f est **localement lipschitzienne en** x si, pour tout point (t_0, x_0) de U il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et une constante $k \geq 0$ (dépendant du point (t_0, x_0)) tel que, dans $V \cap U$ f soit lipschitzienne de rapport k par rapport à x, c'est-à-dire si, pour tout couple de points (t, y_1) et (t, y_2) de $V \cap U$ on a $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.*

Dans la suite, nous dirons souvent «**localement lipschitzienne**» pour «**localement lipschitzienne en** x».

Dans ce cadre, nous allons démontrer des Théorèmes d'existence et d'unicité (local et maximal). Nous donnerons deux démonstration de l'existence des solutions : l'une utilisant les solutions approchées définies à la section précédente, l'autre basée sur le Théorème du point fixe. Pour la première, il nous faut remplacer l'argument de compacité (nécessité par l'utilisation du Théorème d'Ascoli) utilisé dans la preuve du Théorème de Cauchy-Peano-Arzela par un autre. Cet argument est développé dans la première sous-section :

II.3.2.1 *Lemmes de Gronwall, Lemme fondamental*

L'estimation qui permet de faire converger une suite de solutions ε-approchées est basé sur un Lemme élémentaire :

LEMME DE GRONWALL.
Soit u une fonction continue de $[0, T]$, $T > 0$, dans $\mathbb{R}$ telle que

$$u(t) \leq at + k \int_0^t u(s)ds,\ t \in [0, T],\ a \geq 0,\ k \geq 0.$$

Alors on a $u(t) \leq \frac{a}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$, $0 \leq t \leq T$.

Démonstration. Soit $v(t) = \int_0^t u(s)ds$. Comme u est continue, v est dérivable et on a $v'(t) \leq at + kv(t)$, ce qui est une inéquation différentielle. Posons $w(t) = e^{-kt}v(t)$. Il vient $w'(t) = e^{-kt}(v'(t) - kv(t))$, d'où $w'(t) \leq ate^{-kt}$. Comme $w(0) = 0$, il vient

$$w(t) \leq a \int_0^t se^{-ks}ds = \frac{a}{k^2}\left(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}\right),$$

et, par suite $v(t) \leq \frac{a}{k^2}\left(e^{kt} - 1 - kt\right)$, d'où le résultat puisque $u(t) \leq at + kv(t)$. □

LEMME FONDAMENTAL.
Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E, $(t_0, x_1) \in U$ et $(t_0, x_2) \in U$. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Soient $\varphi_1 : I \to E$ une solution ε_1-approchée $\mathscr{C}^1$ par morceaux au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_1$, et $\varphi_2 : I \to E$ une solution ε_2-approchée $\mathscr{C}^1$ par morceaux au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_2$. On suppose qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que, pour tout $t \in I$, on a

$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq k \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Alors, on a

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous pouvons supposer $t_0 = 0$. D'autre part, il nous suffit de montrer cette estimation pour $t > 0$, le cas $t < 0$ se traitant en changeant t en $-t$. Les solutions φ_i étant ε_i-approchées, on a

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\right\| &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\|\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\|,\end{aligned}$$

où φ_i' désigne la dérivée de φ_i dans un intervalle ou elle est de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. En intégrant l'inégalité précédente, il vient

$$\begin{aligned}\|\varphi(t) - \varphi(0)\| &\leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\|\varphi(u)\|)\, du \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\|\varphi(0)\|)\, t + k\int_0^t \|\varphi(u) - \varphi(0)\|\, du.\end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le Lemme de Gronwall de la présente page à la fonction $u(t) = \|\varphi(t) - \varphi(0)\|$: cela donne

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k} + \|\varphi(0)\|\right)\left(e^{kt} - 1\right),$$

ce qui donne $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{kt} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$, ce qui est l'inégalité cherchée. □

COROLLAIRE.

Soient E un espace de Banach, U une partie de $\mathbb{R} \times E$ et f et g deux fonctions continues de U dans E. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi_1 : I \to E$ (resp. $\varphi_2 : I \to E$) une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x' = g(t,x)$). On suppose qu'il existe une constante k telle que, pour tout $t \in I$, on a $\|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\| \leq k\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ (ce qui est par exemple le cas si f est globalement k-lipschitzienne), et, $\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \varepsilon$, pour $(t,x) \in U$. Alors, pour $t_0 \in I$, on a

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + \varepsilon \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Démonstration. En effet, on a $\|\varphi_2'(t) - f(t,\varphi_2(t))\| \leq \varepsilon$. □

Il existe de nombreuses versions du Lemme de Gronwall qui consistent essentiellement à résoudre des inéquations différentielles linéaires d'ordre 1. Nous avons donné ci-dessus celle qui nous était utile pour le Lemme fondamental. En voici quelques autres qui servent dans la théorie des équations différentielles.

PROPOSITION II.3.1 (*Lemme de Gronwall*).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe des constantes $a \geq 0$ et $k \geq 0$ telles que, pour un $t_0 \in I$, on ait, pour tout $t \in I$, $u(t) \leq a + k\int_{t_0}^t u(s)ds$. Alors on a $u(t) \leq ae^{k|t-t_0|}$, $t \in I$.

Démonstration. Raisonnons pour $t \geq t_0$, l'autre cas se traitant en changeant I en $-I$. Comme

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-k(t-t_0)}\int_{t_0}^t u(s)ds\right) = e^{-k(t-t_0)}\left(u(t) - k\int_{t_0}^t u(s)ds\right) \leq ae^{-k(t-t_0)},$$

en intégrant, il vient $\int_{t_0}^t u(s)ds \leq e^{k(t-t_0)}\frac{a}{k}\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$, et, en réutilisant l'hypothèse, on trouve le résultat. □

PROPOSITION II.3.2 (*Lemme de Gronwall*).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u, v et f des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que u est positive. Si, pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$v(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds + \int_{t_0}^t f(s)ds,\ t \geq t_0,$$

alors

$$v(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t u(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t u(\sigma)d\sigma} f(s)ds.$$

Démonstration. Soit φ la solution de l'équation différentielle $\varphi' = u\varphi + f$ telle que $\varphi(t_0) = \alpha$. Par intégration, l'hypothèse sur v donne

$$\psi(t) = \varphi(t) - v(t) \geq \int_{t_0}^t u(s)\psi(s)ds = \vartheta(t).$$

Comme u est positive, on a $\vartheta' \geq u\vartheta$. Ainsi la fonction $\Phi(t) = e^{-\int_{t_0}^t u(s)ds}\vartheta(t)$ vérifie $\Phi'(t) \geq 0$ et $\Phi(t_0) = 0$ ce qui donne $\Phi(t) \geq 0$. Autrement dit, $\varphi(t) - v(t) \geq 0$, pour $t \geq t_0$. La Proposition résulte donc du fait élémentaire que la solution de l'équation différentielle $\varphi' = u\varphi + f$ telle que $\varphi(t_0) = \alpha$ est

$$\varphi(t) = \alpha e^{\int_{t_0}^t u(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t u(\sigma)d\sigma} f(s)ds.$$

□

PROPOSITION II.3.3 (*Lemme de Gronwall*).

Soient E un espace de Banach, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application continue de I dans E de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux au sens où les points de discontinuité de φ' forment une partie discrète D de I et sont de première espèce (i.e. φ' a une limite à gauche et à droite en tout point de D). Supposons qu'il existe deux constantes $A \geq 0$ et $B \geq 0$ telles que, pour tout $t \in I \setminus D$ on a

$$\|\varphi'(T)\| \leq A\|\varphi(t)\| + B.$$

Alors, pour tous t et t_0 dans I, on a :

1. Si $A > 0$, $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{A|t-t_0|} + \frac{B}{A}\left(e^{A|t-t_0|} - 1\right)$.
2. Si $A = 0$, $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| + B|t - t_0|$.

Démonstration. Supposons tout d'abord $t \geq t_0$. En posant $t = t_0 + s$, $s \geq 0$, il vient $\varphi(t_0 + s) = \int_{t_0}^{t_0+s} \varphi'(u)du + \varphi(t_0)$, d'où

$$\|\varphi(t_0 + s)\| \leq \|\varphi(t_0)\| + Bs + A\int_{t_0}^{t_0+s} \|\varphi(u)\| du.$$

Si $A = 0$, cela donne 2. A partir de maintenant, on suppose $A > 0$. Si on pose $g(s) = \int_{t_0}^{t_0+s} \|\varphi(u)\| du$, l'inégalité précédente s'écrit $g'(s) \leq Ag(s) + Bs + \|\varphi(t_0)\|$, ce qui s'écrit encore $\frac{d}{ds}\left(e^{-As}g(s)\right) \leq Bse^{-As} + e^{-As}\|\varphi(t_0)\|$. Il vient donc, puisque $g(0) = 0$,

$$e^{-As}g(s) \leq B\int_0^s te^{-At}dt + \|\varphi(t_0)\| \int_0^s e^{-At}dt,$$

soit

$$Ag(s) \leq e^{As}\left(\|\varphi(t_0)\| + \frac{B}{A}\right) - \frac{B}{A} - \|\varphi(t_0)\| - Bs.$$

En reportant ceci dans l'inégalité majorant $g'(s)$, il vient $g'(s) \leq e^{As}(\|\varphi(t_0)\| + B/A) - B/A$, ce qui est le 1.

Supposons maintenant $t \leq t_0$. Changeons I en $-I$, t en $-t$ et t_0 en $-t_0$. Si on pose $\vartheta(u) = \varphi(-u)$, on a $\vartheta'(u) = -\varphi'(-u)$ et ainsi

$$\left\|\vartheta'(u)\right\| = \left\|\varphi'(u)\right\| \leq A\|\vartheta(u)\| + B,\ u \in -(I \setminus D).$$

Si $A = 0$, la première partie donne, pour $u \geq -t_0$, $\|\vartheta(u)\| \leq \|\vartheta(-t_0)\| + B|u - (-t_0)|$, ce qui est le résultat voulu. Si $A > 0$, de la même manière, la première partie donne $\|\vartheta(u)\| \leq \|\vartheta(-t_0)\| e^{A(u-(-t_0))} + \frac{B}{A}\left(e^{A(u-(-t_0))} - 1\right)$, pour $u \geq -t_0$ ce qui est, là aussi, le résultat cherché. □

II.3.2.2 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

La première conséquence du Lemme fondamental est un résultat d'unicité :

PROPOSITION II.3.4.
Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Soient $\varphi_i : I \to E$, $i = 1, 2$, deux solutions au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. On suppose qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que, pour tout $t \in I$, on a

$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq k\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Alors les deux fonctions φ_1 et φ_2 sont identiquement égales sur l'intervalle I.

Démonstration. En effet, le Lemme fondamental, page 53, appliqué aux solutions donne immédiatement le résultat. □

On notera que l'on ne fait ici aucune hypothèse ni sur E ni sur la taille de l'intervalle I (il faut seulement que tout soit bien défini c'est-à-dire que $(t, \varphi_i(t)) \in U$). Nous utiliserons cela par la suite.

THÉORÈME II.3.2 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*).
Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue localement lipschitzienne de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$.

*1. Deux solutions au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, sont identiquement égales sur l'intersection de leurs intervalles de définition (en particulier, on a **unicité locale**).*

*2. S'il existe un segment I non réduit à un point contenant t_0 et un voisinage V de x_0 tels que $I \times V \subset U$ alors il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ qui vaut x_0 en t_0. En particulier, si (t_0, x_0) est intérieur à U, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ (**existence et unicité des solutions maximales**).*

Démonstration. Vérifions tout d'abord l'unicité. Soient $\varphi_1 : I_1 \to E$ et $\varphi_2 : I_2 \to E$ deux solutions au problème de Cauchy et $I = I_1 \cap I_2$. Comme f est supposée localement lipschitzienne, la Proposition précédente montre qu'il existe un intervalle J contenu dans I et contenant t_0 sur le quel les deux solutions sont égales. Supposons cet intervalle maximal (pour l'inclusion). S'il n'est pas égal à I, une de ses bornes appartient à l'intérieur de I, et, en réappliquant la Proposition en ce point on aboutit à une contradiction. L'existence elle résulte du Théorème II.2.1 page 50, du Lemme fondamental, page 53, de la Proposition II.2.5 page 51, et de la Proposition II.1.2, page 45. □

Remarque II.3.2. *On notera que l'unicité du Théorème précédent montre en particulier que (dans les conditions du Théorème) deux solutions de $x' = f(t,x)$ définies sur un même intervalle coïncident sur tout l'intervalle si et seulement si elle prennent la même valeur en un point de l'intervalle.*

Vue l'importance de ce Théorème, nous allons donner une seconde démonstration qui ne fait pas appel à l'existence des solutions approchées mais qui utilise simplement le Théorème du point fixe classique. Pour cette démonstration, nous nous contenterons d'établir un résultat d'existence et d'unicité local, l'existence et l'unicité des solutions maximales s'en déduisant comme précédemment.

THÉORÈME II.3.3 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*).

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ soit un cylindre contenu dans U sur lequel $\sup\limits_{(t,y)\in C_0} |f(t,y)| \leq M < +\infty$ et $f(t,y)$ est k-lipschitzienne en y. Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ avec $T = \min\left\{T_0, \dfrac{r_0}{M}\right\}$. Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, qui est définie dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Démonstration à partir du Théorème du point fixe. Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\bar{B}(x_0, r_0)$ valant x_0 en t_0 muni de la norme de la convergence uniforme. Pour toute $u \in \mathscr{F}$ posons

$$F(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Par définition de T, on a $\|F(u)(t) - x_0\| \leq r_0$, ce qui montre que F envoie $\mathscr{F}$ dans lui même. Le Théorème sera démontré si on prouve que F a un unique point fixe (Proposition II.1.4, page 46). Soient u et v dans $\mathscr{F}$. En utilisant que f est k-lipschitzienne il vient immédiatement $\|F(u)(t) - F(v)(t)\| \leq k\,|t - t_0|\,\|u - v\|$. Itérons cette estimation :

$$\begin{aligned}\left\|F^2(u)(t) - F^2(v)(t)\right\| &\leq k^2\,\|u - v\| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\,ds \\ &\leq \frac{(k\,|t - t_0|)^2}{2!}\,\|u - v\|\,.\end{aligned}$$

Par récurrence, on conclut aussitôt que, pour tout n on a $\|F^n(u)(t) - F^n(v)(t)\| \leq \dfrac{(kT)^n}{n!}\,\|u - v\|$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(kT)^n}{n!} = 0$, on voit que, pour n assez grand, F^n est une application contractante de $\mathscr{F}$ dans lui-même. Comme $\mathscr{F}$ est fermé dans $\mathscr{C}_u([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, r_0))$, c'est un espace complet, et la conclusion résulte du Corollaire du Théorème du point fixe classique. ☐

Remarque II.3.3. *Dans l'énoncé ci-dessus, il n'est pas nécessaire d'avoir un cylindre de la forme $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$. Il suffit d'avoir un cylindre $C_0 = I \times \bar{B}(x_0, r_0)$ possédant les même propriétés et de considérer ensuite un cylindre $C = [t_0 - T_1, t_0 + T_2] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ contenu dans C_0 et tel que $T_i \leq \dfrac{r_0}{M}$. L'unique solution au problème de Cauchy est alors définie dans $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$.*

II.3.2.3 Solutions globales

Dans la preuve du Théorème précédent, le fait que $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R_0)$ soit un cylindre de sécurité sert seulement à assurer que l'application F envoie $\mathscr{F}$ dans lui-même. Avec une hypothèse plus forte sur f, le même raisonnement donne une condition suffisante, mais non nécessaire, pour qu'une solution maximale soit globale :

PROPOSITION II.3.5.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $I \times E$ dans E. On suppose qu'il existe une fonction continue $j : I \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout t fixé dans I la fonction $y \mapsto f(t,y)$ soit $k(t)$-lipschitzienne. Alors toute solution maximale de l'équation $x' = f(t,x)$ est globale (i.e. définie dans I tout entier).

Démonstration. En effet, soient $(t_0, x_0) \in I \times E$ et $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ un segment contenu dans I. Reprenons la seconde démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème II.3.3) : notons tout d'abord que $[t_0 - T_1, t_0 + T_2] \times E$ est évidement un cylindre de sécurité, et l'application F de cette preuve envoie l'espace des fonctions continues de $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ dans E (qui est un espace de Banach pour la norme uniforme) dans lui-même. Alors si k est la borne supérieure des valeurs prises par la fonction $k(t)$ sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$, comme précédemment, on voit que F^p est lipschitzienne de rapport $\dfrac{k^p(\max(T_1, T_2))^p}{p!}$ donc contractante pour p assez grand. Ceci montre que l'unique solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ est définie sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ tout entier, ce qui termine la preuve. ☐

II.3.2.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales et à un paramètre

PROPOSITION II.3.6.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E. Soient $I = [\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $r_0 > 0$, tels que, si $C_0 = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset U$, $\|f(t, y)\| \leq M$ pour $(t, y) \in C$, f est k-lipschitzienne en la seconde variable, dans $\bar{B}(x_0, r_0)$, pour tout $t \in I$, et, $\beta - \alpha \leq r_0/2M$ de sorte que $\forall x_1 \in \bar{B}(x_0, r_0/2)$ et $t_1 \in I$, $I \times \bar{B}(x_1, r_0/2)$ soit un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$. Alors l'unique solution φ_{t_1,x_1} au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$ est définie dans I. De plus :

1. L'application $x_1 \mapsto \varphi_{t_1,x_1}$ est $e^{k(\beta-\alpha)}$-lipschitzienne sur $\bar{B}(x_0, r_0/2)$ (i.e. si $x_i \in \bar{B}(x_0, r_0/2)$, $i = 1, 2$, on a, $\forall t \in I$, $\|\varphi_{t_1,x_1}(t) - \varphi_{t_1,x_2}(t)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$ avec $K = e^{k(\beta-\alpha)}$).

2. L'application $t_1 \mapsto \varphi_{t_1,x_1}(t)$ est $Me^{k(\beta-\alpha)}$-lipschitzienne sur I.

En particulier, la fonction $(t, t_1, x_1) \mapsto \varphi_{t_1,x_1}(t)$ est continue sur $I \times I \times \bar{B}(x_0, r_0/2)$.

Démonstration. En effet, c'est une conséquence immédiate du Lemme fondamental, page 53 : pour le 1. c'est évident, et, pour le 2. il suffit d'utiliser en plus que les solutions au problème de Cauchy sont lipschitziennes de rapport M (3. de la Proposition II.1.8, page 47). La dernière assertion résulte de la compacité. □

PROPOSITION II.3.7.

Soient E un espace de Banach réel, Λ un espace topologique, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de $U \times \Lambda$ dans E. Soient $I = [\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $r_0 > 0$, $V(\lambda_0)$ un voisinage d'un point λ_0 de Λ, tels que, si $C_0 = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \times V(\lambda_0) \subset U \times \Lambda$, $\|f(t, y)\| \leq M$ pour $(t, y, \lambda) \in C_0$, f est k-lipschitzienne en la seconde variable, dans $\bar{B}(x_0, r_0)$, pour tout $t \in I$, et tout $\lambda \in V(\lambda_0)$, et, $\beta - \alpha \leq r_0/2M$ de sorte que $\forall x_1 \in \bar{B}(x_0, r_0/2)$, $t_1 \in I$, $\forall \lambda \in V(\lambda_0)$, $I \times \bar{B}(x_1, r_0/2)$ soit un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_1) = x_1$. Pour tout $(t_1, x_1, \lambda) \in I \times \bar{B}(x_0, r_0/2) \times V(\lambda_0)$ soit $\varphi_{t_1,x_1,\lambda}$ l'unique solution au problème de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_1) = x_1$ (qui est définie sur I). Alors la fonction $(t, t_1, x_1, \lambda) \mapsto \varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t)$ est continue de $I \times \bar{B}(x_0, r_0/2) \times V(\lambda_0)$ dans $\bar{B}(x_0, r_0)$.

Démonstration. En effet, t_1, x_1 et λ_1 étant fixés, la fonction $(t, \lambda) \mapsto f(t, \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t), \lambda)$ est continue ce qui implique que la fonction $\lambda \mapsto f(t, \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t), \lambda)$ est continue uniformément par rapport à $t \in I$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(\lambda_1)$ de λ_1 (dépendant à priori de t_1 et de x_1) tel que pour tout $\lambda \in V(\lambda_1)$ on a

$$\left\|\varphi'_{t_1,x_1,\lambda_1}(t) - f(t, \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t), \lambda)\right\| = \|f(t, \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t), \lambda_1) - f(t, \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t), \lambda)\| \leq \varepsilon,\ t \in I,$$

ce qui signifie que $\varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}$ est une solution ε-approchée au problème de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_1) = x_1$. Le Lemme fondamental (page 53) implique alors

$$\|\varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t) - \varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t)\| \leq \varepsilon \frac{e^{k(\beta-\alpha)}}{k}.$$

Alors, grâce à la Proposition précédente, pour $\tilde{t} \in I$ et $\tilde{x} \in \bar{B}(x_0, r_0/2)$, et $\lambda \in V(\lambda_1)$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{\tilde{t},\tilde{x},\lambda}(t) - \varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t)\right\| &\leq \|\varphi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t) - \varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t)\| + \left\|\varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t) - \varphi_{\tilde{t},x_1,\lambda}(t)\right\| + \left\|\varphi_{\tilde{t},x_1,\lambda}(t) - \varphi_{\tilde{t},\tilde{x},\lambda}(t)\right\| \\ &\leq \varepsilon \frac{e^{k(\beta-\alpha)}}{k} + Me^{k(\beta-\alpha)} \left|t_1 - \tilde{t}\right| + e^{k(\beta-\alpha)} \|x_1 - \tilde{x}\|,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque II.3.4. *Quitte à réduire l'intervalle I, on peut donner une démonstration de ce dernier résultat qui n'utilise pas la Proposition précédente, directement à partir du Théorème du point fixe à paramètres appliqué à la fonction $x \mapsto x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s), \lambda_1) ds$ définie sur l'espace des fonctions continues x de I dans $\bar{B}(x_0, r_0/2)$.*

PROPOSITION II.3.8.

Soient E un espace de Banach réel, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E. Soient $I = [\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, $r_0 > 0$, tels que, $C_0 = I \times \bar{B}(x_0, r_0) \subset \overset{\circ}{U}$, $\|f(t, y)\| \leq M$ pour $(t, y) \in C$, et, $\beta - \alpha \leq r_0/2M$ de sorte que $t_1 \in I$, $\forall x_1 \in \bar{B}(x_0, r_0/2)$, $I \times \bar{B}(x_1, r_0/2)$ soit un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$. Pour tous $t_1 \in I$ et $x_1 \in B(x_0, r_0/2)$, soit $\varphi_{t_1,x_1}(t) = \varphi(t, t_1, x_1)$ la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_1) = x_1$. Alors :

1. Supposons que f admette une dérivée partielle df_x par rapport à la seconde variable dans un voisinage de C_0 et que $(t, x) \mapsto df_x(t, x)$ soit continue. Quitte à réduire I et r_0 on suppose de plus que $df_x(t, x)$ est bornée sur C_0 (continuité au point (t_0, x_0)). Alors la fonction $(t, x_1) \mapsto \varphi(t, t_1, x_1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times B(x_0, r_0/2)$. De plus, la fonction $t \mapsto d\varphi_{x_1}(t, t_1, x_1)$ ($d\varphi_{x_1}$ est une fonction de $I \times I \times B(x_0, r_0/2)$ dans $\mathscr{L}(E)$) est dérivable par rapport à t sur I, et est solution du problème de Cauchy $y' = F_{t_1,x_1}(t, y)$, $y(t_1) = \mathrm{id}_E$ où

F_{t_1,x_1} est la fonction, de $I \times \mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$, définie par $F_{t_1,x_1}(t,y) = df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1)) \circ y$.

2. On suppose de plus que f admette une dérivée partielle df_t par rapport à la première variable dans un voisinage de C_0 et que $(t,x) \mapsto df_t(t,x)$ soit continue. Quitte à réduire I et r_0 on suppose aussi que $df_t(t,x)$ est bornée sur C_0 (continuité au point (t_0,x_0)). Alors la fonction $(t,t_1) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times I$. De plus, la fonction $t \mapsto d\varphi_{t_1}(t,t_1,x_1)$ ($d\varphi_{t_1}$ est une fonction de $I \times I \times B(x_0,r_0/2)$ dans E) est dérivable par rapport à t sur I, et est solution du problème de Cauchy $y' = \tilde{F}_{t_1,x_1}(t,y)$, $y(t_1) = f(t_1,x_1)$, où $\tilde{F}_{t_1,x_1}$ est la fonction de $I \times E$ dans E définie par $\tilde{F}_{t_1,x_1}(t,y) = df_x(t,\varphi(t,t_1x_1) \bullet y$. De plus, la fonction $(t,t_1,x_1) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times I \times B(x_0,r_0/2)$.

3. Supposons maintenant que les hypothèses du 1. soient satisfaites et que, en outre, que f dépende d'un paramètre λ appartenant à un espace de Banach Λ, c'est-à-dire que U est un ouvert de $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$. Précisément, suppose que les hypothèses du 1. de l'énoncé sont satisfaites en remplaçant C_0 par $C_0 = I \times \bar{B}(x_0,r_0) \times V_0$ où V_0 est un voisinage fermé d'un point λ_0 de Λ (en supposant df_x continue et bornée sur C_0). De plus, on suppose que f admet une dérivée partielle df_λ par rapport à λ dans un voisinage de C_0 et que cette dernière est continue et bornée sur C_0. Pour tous $t_1 \in I$, $x_1 \in B(x_0,r_0/2)$ et $\lambda \in V_0$ on note $\varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t) = \varphi(t,t_1,x_1,\lambda)$ la solution du problème de Cauchy $y' = f(t,y,\lambda)$, $y(t_1) = x_1$. Alors la fonction $(t,x_1,\lambda) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1,\lambda)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times B(x_0,r_0/2) \times V_0$. De plus, la fonction $t \mapsto d\varphi_\lambda(t,t_1x_1,\lambda)$ ($d\varphi_\lambda$ est une fonction de $I \times I \times B(x_0,r_0/2) \times V_0$ dans $\mathscr{L}(\Lambda;E)$) est dérivable par rapport à t sur I, et est solution du problème de Cauchy $y' = F_{t_1,x_1,\lambda}(t,y)$, $y(t_1) = 0$, où $F_{t_1x_1,\lambda}$ est la fonction de $I \times \mathscr{L}(\Lambda;E)$ dans $\mathscr{L}(\Lambda;E)$ définie par $F_{t_1x_1,\lambda}(t,y) = df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1,\lambda),\lambda) \circ y + df_\lambda(t,\varphi(t,t_1,x_1,\lambda),\lambda)$. Si on suppose que, en outre, les hypothèses du 2. sont aussi satisfaites, la fonction $(t,t_1,x_1,\lambda) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1,\lambda)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times I \times B(x_0,r_0/2) \times V_0$.

Démonstration. Nous pouvons tout d'abord Remarquer que l'hypothèse faite sur df_x implique (Théorème I.2.2, page 7) que f est lipschitzienne d'un rapport k indépendant de $(t_1,x_1,\lambda) \in I \times B(x_0,r_0/2) \times V_0$. Ainsi le Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz (Théorème II.3.3, page 56) donne l'existence et l'unicité des solutions φ_{t_1,x_1} et $\varphi_{t_1,x_1,\lambda}$.

Démontrons tout d'abord le 1. Notons en premier que, pour tout $x \in B(x_0,r_0/2)$, tout $t_1 \in I$ et tout $t \in I$,

$$y \mapsto F_{t_1,x_1}(t,y) = df_x(t,\varphi(t,t_1,x)) \circ y$$

est trivialement $k(t)$-lipschitzienne ce qui implique (Proposition II.3.5, page 56) que le problème de Cauchy $y' = F_{t_1,x_1}(t,y)$, $y(t_1) = \mathrm{id}_E$ admet une unique solution qui est globale (i.e. définie sur I). Fixons $t_1 \in I$ et $x_1 \in B(x_0,r_0/2)$. Soit y la solution du problème de Cauchy $y' = F_{t_1,x_1}(t,y)$, $y(t_1) = \mathrm{id}_E$. Tout revient à montrer que, pour $x \in B(x_0,r_0/2)$,

$$\|\varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1) - y(t) \bullet (x - x_1)\| = \mathbf{o}(\|x - x_1\|). \tag{II.3.1}$$

En effet, si cette inégalité est prouvée, alors $d\varphi_x(t,t_1,x)$ existe en x_1 et vaut $y(t)$, et la fonction $(t,x_1) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ car $d\varphi_x$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi'$ sont continues par rapport à (t,t_1,x_1) : la seconde l'est évidement (solution de l'équation différentielle), et la continuité de la première résulte de la Proposition II.3.7, page précédente, appliquée à l'équation différentielle dont y est solution.

Démontrons donc (II.3.1). Pour $t = t_1$ la relation est évidente puisque le membre de gauche vaut zéro. pour simplifier les notations, posons $z(t) = \varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1) - y(t) \bullet (x - x_1)$ et $A(t) = df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1))$. On a donc

$$z'(t) - A(t) \bullet z(t) = f(t,\varphi(t,t_1,x)) - f(t,\varphi(t,t_1,x_1)) - df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1)) \bullet (\varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1)). \tag{II.3.2}$$

Considérons la fonction $y \mapsto f(t,y) - f(t,\varphi(t,t_1,x_1)) - df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1)) \bullet (y - \varphi(t,t_1,x_1))$. En écrivant la différentielle de cette fonction au point $\varphi(t,t_1,x)$, on majore le second membre de (II.3.2), en norme, par $m\,\|\varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1)\|$, où

$$m = \sup_{0 \le \mu \le 1} \|df_x(t,\mu\varphi(t,t_1,x) + (1-\mu)\varphi(t,t_1,x_1) - df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1))\|$$

(Théorème I.2.2, page 7). La continuité de df_x et la compacité , montrent alors que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left\|z'(t) - A(t) \bullet z(t)\right\| \le \varepsilon\,\|\varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1)\|\,,\ \text{pour}\ \|x - x_1\| \le \eta.$$

Or d'après la Proposition II.3.6, page précédente, on a $\|\varphi(t,t_1,x) - \varphi(t,t_1,x_1)\| \le K\,\|x - x_1\|$, pour une certaine constante K, d'où

$$\left\|z'(t) - A(t) \bullet z(t)\right\| \le K\varepsilon\,\|x - x_1\|\,,\ \text{pour}\ \|x - x_1\| \le \eta.$$

Cette dernière estimation montre que z est une solution $K\varepsilon$-approchée de l'équation $z' = A(t) \bullet z$ telle que $z(t_1) = 0$. Comme la fonction identiquement nulle est une solution et comme $z \mapsto A(t) \bullet z$ est lipschitzienne, de rapport $\alpha = \sup\|A(t)\|$, le Lemme fondamental, page 53, donne

$$\|z(t)\| \le K\varepsilon\,\|x - x_1\|\,\frac{e^{\alpha|t-t_1|}}{\alpha},\ \text{pour}\ \|x - x_1\| \le \eta,$$

ce qui démontre (II.3.1).

Démontrons maintenant le 2. La preuve est similaire à celle du 1. Comme précédemment, pour tout $x \in B(x_0,r_0/2)$, tout $t_1 \in I$ et tout $t \in I$, $y \mapsto \tilde{F}_{t_1,x_1}(t,y) = df_x(t,\varphi(t,x)) \bullet y$ est trivialement $k(t)$-lipschitzienne ce qui implique (Proposition II.3.5, page 56) que le problème de Cauchy $y' = \tilde{F}_{t_1,x_1}(t,y)$, $y(t_1) = f(t_1,x_1)$ admet une unique solution qui est globale (i.e. définie sur I). Fixons $t_1 \in I$ et $x_1 \in B(x_0, r_0/2)$. Soit y la solution du problème de Cauchy $y' = \tilde{F}_{t_1,x_1}(t,y)$, $y(t_1) = f(t_1,x_1)$. Encore une fois, tout revient à montrer que, pour $\tilde{t} \in I$, on a

$$\left\|\varphi(t,t_1,x_1) - \varphi(t,\tilde{t},x_1) - (t_1-\tilde{t})y(t)\right\| = \mathbf{o}(\left|t_1-\tilde{t}\right|). \tag{II.3.3}$$

En effet, si ceci est prouvé, alors $d\varphi_{t_1}(t,t_1,x_1)$ existe en t_1 et la fonction $(t,t_1,x_1) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$: il suffit, d'après ce qui précède, de voir que $d\varphi_{t_1}$ est continue ce qui résulte de Proposition II.3.7, page 57, comme précédemment.

Démontrons donc (II.3.3). Posons $w(t) = \varphi(t,t_1,x_1) - \varphi(t,\tilde{t},x_1) - (t_1-\tilde{t})y(t)$ et $B(t) = df_x(t,\varphi(t,t_1,x_1))$. Un calcul immédiat donne

$$w'(t) - B(t)w(t) = f(t,\varphi(t,t_1x_1)) - f(t,\varphi(t,\tilde{t},x_1)) - B(t)\bullet(\varphi(t,t_1x_1) - \varphi(t,\tilde{t},x_1)).$$

Les même estimations que celles faites dans la preuve du 1. donnent alors $\|w'(t) - B(t)w(t)\| \leq K\varepsilon\left|t_1-\tilde{t}\right|$, pour $\left|t_1-\tilde{t}\right| \leq \eta$, ce qui signifie que w est une solution $K\varepsilon$-approchée de l'équation différentielle $w' = B(t)\bullet w$. Remarquons maintenant que $w(t_1) = \varphi(t_1,t_1,x_1) - \varphi(t_1,\tilde{t},x_1) - (t_1-\tilde{t})f(t_1,x_1)$, et, $\varphi(t_1,t_1x_1) = \varphi(\tilde{t},\tilde{t},x_1)$, ce qui donne, en appliquant le Théorème de Taylor-Lagrange (Théorème I.5.2, page 21) à l'ordre 2 la fonction $t \mapsto \varphi(t,\tilde{t},x_1)$,

$$\|w(t_1)\| = \left|t_1-\tilde{t}\right|\left\|f(t_1,x_1) - f(\tilde{t},x_1)\right\| + \mathbf{o}(\left|t_1-\tilde{t}\right|).$$

Par suite, pour $\left|t_1-\tilde{t}\right| \leq \eta$ (η assez petit), on a $\|w(t_1)\| \leq \varepsilon\left|t_1-\tilde{t}\right|$. Si w_1 est la solution de l'équation différentielle $w' = B(t)\bullet w$ qui vaut $w(t_1)$ en t_1, le Lemme fondamental permet de la comparer à la solution $w_0 = 0$ qui est celle qui vaut 0 en t_1 et donne $\|w_1(t)\| \leq K'\varepsilon\left|t_1-\tilde{t}\right|$. En comparant maintenant w et w_1, à nouveau avec le Lemme fondamental, on obtient $\|w(t)\| \leq K''\varepsilon\left|t_1-\tilde{t}\right|$, ce qui est (II.3.3).

Pour finir, démontrons 3. Fixons t_1 et x_1. Compte tenu de ce qui précède, il nous suffit de voir que $\lambda \mapsto \varphi(t,t_1,x_1)$ est dérivable et que sa dérivée satisfait l'équation différentielle décrite dans l'énoncé. La continuité de $d\varphi_\lambda$ s'en déduira comme dans les preuves du 1. et du 2., ce qui permettra de conclure que φ est $\mathscr{C}^1$ par rapport à toutes les variables. On peut facilement déduire la dérivabilité en λ du 1. ci-dessus démontré : en effet, considérons l'équation différentielle $(x',y') = (f(t,x,\lambda),0)$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = \lambda$. Si on lui applique le résultat montré au 1., on obtient que la solution $x(t) = \varphi(t,t_1,x_1,\lambda)$, $y(t) = \lambda$, est de classe $\mathscr{C}^1$ en (t,x_1,λ), ce qui achève la preuve. □

COROLLAIRE.

Soient E et Λ deux espaces de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E\times\Lambda$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$, de U dans E et $(t_0,x_0,\lambda_0) \in U$. Alors il existe $\eta > 0$ et $r > 0$ tels que, pour tous $t_1 \in I = [t_0-\eta, t_0+\eta]$, $x_1 \in B(x_0,r)$ et $\lambda \in B(\lambda_0,r)$, la solution maximale $\varphi_{t_1,x_1,\lambda}$ au problème de Cauchy $x' = f(t,x,\lambda)$, $x(t_1) = x_1$, est définie dans I, et, la fonction

$$(t,t_1,x_1,\lambda) \mapsto \varphi(t,t_1,x_1,\lambda) = \varphi_{t_1,x_1,\lambda}(t)$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ dans $I \times I \times B(x_0,r) \times B(\lambda_0,r)$.

Démonstration. Pour $k=1$, c'est un cas particulier de la Proposition précédente. Raisonnons par récurrence sur k. Supposons le résultat vrai pour $k-1$. Alors la Proposition précédente dit que les fonctions $d\varphi_t$, $d\varphi_{t_1}$, $d\varphi_{x_1}$ et $d\varphi_\lambda$ sont solutions d'équations différentielles dont le second membre est, par hypothèse de récurrence de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. La Proposition précédente implique donc que ces fonction sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ ce qui termine la preuve. □

SECTION II.4

Le Théorème des bouts

Dans cette section nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'une solution maximale soit définie dans un intervalle le plus grand possible. Nous obtiendrons ce résultat dans deux cas : le cas localement lipschitzien et le cas de dimension finie lorsque la solution maximale est bornée.

THÉORÈME II.4.1 (*Théorème des bouts*).

Soient E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$ et f une fonction continue de U dans E. Soit $\varphi : I \to E$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$. Posons $I = |\alpha,\beta|$. On suppose que :

- *Soit E est de dimension finie et, si $\beta < +\infty$ (resp. $\alpha > -\infty$), f est bornée sur le graphe de φ au voisinage de β (resp. α) ;*
- *Soit f est localement lipschitzienne sur U.*

Alors les éventuels bouts de φ sont contenus dans la frontière de U. Autrement dit, si $\{\beta\}\times\mathscr{A}_d(\varphi)$ (resp. $\{\alpha\}\times\mathscr{A}_g(\varphi)$) rencontre U alors φ n'est pas maximale.

Démonstration. Démontrons par exemple ceci pour les bouts droits. Raisonnons par l'absurde : soit (β, b) un bout droit de φ contenu dans U.

Considérons tout d'abord le premier cas. La Proposition II.1.5, page 46 nous dit alors que $\varphi(t)$ tend vers b lorsque $t \to \beta$. Par ailleurs, le Théorème de Cauchy-Peano-Arzela (Théorème II.3.1, page 52) donne une solution $\tilde{\varphi}$ au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(\beta) = b$, définie au voisinage de β. Alors (Proposition II.1.4, page 46) la fonction égale à φ sur $]\alpha, \beta]$ et $\tilde{\varphi}$ au-delà de β est une solution qui prolonge φ ce qui contredit la maximalité de φ.

Considérons maintenant le second cas. Soit

$$C = [\beta - T, \beta + T] \times \bar{B}(b, r)$$

un cylindre contenu dans U sur lequel f est bornée par M ; quitte à réduire T, nous pouvons supposer $TM < r$ de sorte que C est un cylindre de sécurité. Quitte à réduire à nouveau T et ainsi que r, on peut aussi supposer que f est lipschitzienne de rapport k au voisinage de C. Soit $t_0 \in]\beta - T/2, \beta[$ et $x_0 = \varphi(t_0)$. Soit $\varepsilon_0 = \|x_0 - b\|$. Comme b est une valeur d'adhérence de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers β, on peut choisir t_0 de sorte que ε_0 soit aussi petit que l'on veut. Soit $r_0 = r - \varepsilon_0$. Alors la boule $\bar{B}(x_0, r_0)$ est contenue dans la boule $\bar{B}(b, r)$, et, si t_0 est assez près de β, on peut trouver T_0 tel que $\beta - t_0 < T_0 < \min(T/2, r_0/M)$. Ainsi

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$$

est contenu dans $C \subset U$, donc est un cylindre de sécurité tel que $\beta \in]t_0 - T_0, t_0 + T_0[$. Alors le Théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème II.3.3, page 56) dit qu'il existe une et une seule solution au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Ceci montre que φ se prolonge à $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ ce qui contredit la maximalité de φ. □

Remarque II.4.1. *On notera que, dans les conditions du Théorème des bouts, toute solution maximale est définie sur un intervalle* ***ouvert****.*

PROPOSITION II.4.1.

Soient E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et $(t_0, x_0) \in U$. On suppose que :

- *Soit E est de dimension finie et f est bornée sur U.*
- *Soit f est localement lipschitzienne.*

Soit I un intervalle ouvert contenant t_0 et possédant la propriété suivante : le graphe de toute solution $\varphi : J \to E$ au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, telle que $\bar{J}$ est un segment contenu dans I, est contenu dans un compact de U.

Alors toute solution maximale au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, est définie sur un intervalle contenant I.

Démonstration. Soit φ une telle solution maximale. Supposons φ définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$. Si I n'est pas contenu dans l'intervalle de définition de φ alors, par exemple, on a $\beta \in I$. Si on considère la restriction de φ à un intervalle de la forme $J =]t_0 - \eta, \beta[$, l'hypothèse faite sur I montre que $\varphi(t)$ admet une valeur d'adhérence b, lorsque t tend vers β, telle que (β, b) soit dans U ce qui contredit le Théorème des bouts, page précédente. □

PROPOSITION II.4.2.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue bornée de $I \times E$ dans E. On suppose que :

- *Soit E est de dimension finie.*
- *Soit f est localement lipschitzienne.*

Alors toute solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ est définie sur I tout entier. Autrement dit, les solutions maximales sont globales.

Démonstration. En effet, soit φ une solution maximale et $]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition. Si $\beta \in I$ (en particulier $\beta < +\infty$), la Proposition II.1.5, page 46, montre que φ a une limite, dans E, lorsque t tend vers β. Ceci contredit le Théorème des bouts, page précédente. □

Remarque II.4.2. *On peut énoncer cette Proposition sans supposer f bornée à priori : si φ est une solution maximale sur le graphe de laquelle f est bornée alors φ est nécessairement globale.*

Dans le cas localement lipschitzien, il n'est pas nécessaire de supposer f bornée :

PROPOSITION II.4.3.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue localement lipschitzienne de $I \times E$ dans E. on suppose que, pour tout compact K de I il existe des constantes $A_K > 0$ et $B_K > 0$ telles que, pour $(t,x) \in K \times E$, on a

$$\|f(t,x)\| \le A_K \|x\| + B_K.$$

Alors toute solution maximale de $x' = f(t,x)$ est globale.

Démonstration. Soient $(t_0, x_0) \in I \times E$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to E$ une solution maximale. Supposons par exemple que $\beta \in I$, et soit $K = [t_0, \beta]$. On a donc

$$\left\|\varphi'(t)\right\| \leq A_K \left\|\varphi(t)\right\| + B_K.$$

La Proposition II.3.3, page 54, donne alors

$$\left\|\varphi(t)\right\| \leq \left\|x_0\right\| e^{A_K(\beta - t_0)} + \frac{B_K}{A_K}\left(e^{A_K(\beta-t_0)} - 1\right),$$

d'où on tire une majoration de la forme

$$\left\|\varphi'(t)\right\| \leq MA_K + B_K$$

ce qui implique que (φ' restant bornée quand t tend vers β) $\varphi(t)$ converge dans E quand t tend vers β et contredit le Théorème des bouts. □

PROPOSITION II.4.4.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, O un ouvert de E, $U = I \times O$ et f une fonction continue de U dans E. Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. On suppose que :
- *Soit E est de dimension finie et f est bornée sur le graphe de φ au voisinage des bornes de $]\alpha, \beta[$ qui sont dans I.*
- *Soit f est localement lipschitzienne.*

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Alors, si $\beta \in I$ (resp. $\alpha \in I$), pour tout compact K de O,

$$\varphi^{-1}(K) \cap [\gamma, \beta[$$

(resp. $\varphi^{-1}(K) \cap]\alpha, \gamma]$) est compact.

Démonstration. En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble

$$\{(t, \varphi(t)) \text{ tels que } t \in [\gamma, \beta[\text{ et } \varphi(t) \in K\}$$

posséderait une valeur d'adhérence (β, b) lorsque t tend vers $\beta \in I$ avec $b \in K$, ce qui contredit le Théorème des bouts, page 59. □

PROPOSITION II.4.5.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $I \times E$ dans E. On suppose que :
- *Soit E est de dimension finie.*
- *Soit f est localement lipschitzienne.*

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to E$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $]\alpha, \beta[\neq I$. Alors :

1. f ne reste pas bornée sur le graphe de φ au voisinage des bornes de $]\alpha, \beta[$ qui sont dans I.

2. Si E est de dimension finie et f localement lipschitzienne, alors $\left\|\varphi(t)\right\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers l'une des bornes de $]\alpha, \beta[$ qui sont dans I.

Démonstration. Nous avons déjà vu le 1. lors de la Remarque suivant la page 54. Le 2. est immédiat car, dans le cas contraire, $\varphi(t)$ aurait une valeur d'adherence dans E lorsque t tend vers, par exemple, $\beta \in I$ ce qui contredit encore le Théorème des bouts. □

Remarque II.4.3. *On peut construire un exemple de fonction $f :]0, 1[\times c_0(\mathbb{R})$ telle que l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ admette une solution maximale φ bornée définie sur $]0, 1[$ telle que, lorsque t tend vers zéro $\varphi(t)$ n'ait pas de valeurs d'adhérence dans $c_0(\mathbb{R})$. Ceci montre que, dans le 2. de la Proposition précédente et dans la Proposition II.1.6, page 46, l'hypothèse de finitude de la dimension est nécessaire.*

PROPOSITION II.4.6.

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, O un ouvert de E, $U = I \times O$ et f une fonction continue de U dans E. On suppose que :
- *Soit E est de dimension finie.*
- *Soit f est localement lipschitzienne.*

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to E$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Soit B_1 (resp. B_2) un convexe fermé borné de E contenant l'origine. Soit $t_0 \in]\alpha, \beta[$. On suppose que l'image par f de la partie du graphe de φ correspondant à l'intervalle $]\alpha, t_0]$ (resp. $[t_0, \beta[$) est contenue dans B_1 (resp. B_2). Alors

$$I \cap]t_0 - T_1, t_0] \subset]\alpha, t_0]$$

(resp. $I \cap]t_0, t_0 + T_2] \subset [t_0, \beta[$) avec

$$T_1 = \sup\{\lambda > 0 \text{ tels que } -\lambda B_1 \subset O - \varphi(t_0)\}$$

(resp. $T_2 = \sup\{\lambda > 0$ tels que $\lambda B_2 \subset O - \varphi(t_0)\}$).

Démonstration. Vérifions par exemple l'assertion concernant T_1. Si

$$I \cap]-\infty, t_0] =]\alpha, t_0],$$

il n'y a rien à montrer, supposons donc $\alpha \in I$. Il faut montrer que $t_0 - T_1 \geq \alpha$. D'après la Proposition II.1.5, page 46, $\varphi(t)$ possède une limite a telle que, d'après le Théorème des bouts (page 59), (α, a) appartient à la frontière de U. D'autre part, le Théorème des accroissements finis (Théorème I.2.4, page 8) montre que, pour $t \in]\alpha, t_0]$, on a

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \in (t - (t_0)B_1 \subset -(t_0 - \alpha)B_1$$

(car $0 \in B_1$). Comme B_1 est fermé, on a aussi

$$a - \varphi(t_0) \in -(t_0 - \alpha)B_1.$$

Si on avait $t_0 - T_1 < \alpha$, on aurait

$$-(t_0 - \alpha)B_1 \subset O - \varphi(t_0),$$

et par suite $a \in O$. Ceci donnerait $(\alpha, a) \in U$ ce qui contredit le Théorème des bouts, page 59. □

SECTION II.5

Équations différentielles linéaires

SOUS-SECTION II.5.1

Définitions, existence et unicité des solutions

Définition II.5.1.

*Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n à coefficients continus sur I une équation différentielle de la forme*

$$x^{(n)} = B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \bullet x^{(i)}, \tag{II.5.1}$$

où, B est une fonction continue de I dans E, et, les A_i sont des fonctions continues de I dans $\mathscr{L}(E)$. Lorsque $B = 0$ on dit que l'équation (II.5.1) *est **homogène**. L'équation différentielle linéaire homogène obtenue en remplaçant $B(t)$ par 0 dans* (II.5.1) *est dite **associée** à* (II.5.1).

Par opposition, si B est non identiquement nulle, l'équation (II.5.1) est dite «**avec second membre**».

Comme il a été dit à la Proposition II.1.1, page 44, toute équation différentielle d'ordre n se ramène à une équation différentielle d'ordre 1, ce qui ramène une équation différentielle linéaire d'ordre n à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Considérons alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $x' = A(t) \bullet x + B(t)$. Clairement l'application $f : (t, y) \mapsto A(t) \bullet y + B(t)$ de $I \times E$ dans E est telle que, pour tout compact K de I, il existe deux constantes C_K et D_K telle que $\|f(t, y)\| \leq C_K \|y\| + D_K$, pour tout $(t, y) \in K \times E$. Alors la Proposition II.4.3, page 60 implique :

PROPOSITION II.5.1.

Soient E un espace de Banach et $x^{(n)} = B(t) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(t) \bullet x^{(i)}$ une équation différentielle linéaire, les fonctions B et A_i étant continues sur un intervalle I.

1. Pour tout $(t_0, x^0) \in I \times E^n$, la solution maximale de l'équation vérifiant $x^{(i)}(t_0) = x_i^0$ est globale. De plus, deux solutions maximales sont identiques si et seulement si elles sont égales ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en un point de I. En d'autres termes, si φ_i, $1 \leq i \leq k$, sont des solutions de l'équation telles qu'il existe des constantes λ_i et un réel $t \in I$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i^{(j)}(t) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i \equiv 0$.

2. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est solution de l'équation homogène associée. En particulier, si φ_0 est une solution de l'équation, toute autre solution est de la forme $\varphi_0 + \varphi$ où φ est une solution de l'équation homogène associée.

3. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est un sous-espace vectoriel $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}^1(I;E)$. De plus, pour tout $t \in I$, l'application qui à une solution $\varphi \in \mathscr{S}$ associe $(\varphi^{(i)}(t))_{0 \le i \le n-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{S}$ sur E^n. En particulier, si E est de dimension finie, $\mathscr{S}$ l'est aussi.

Démonstration. En effet, d'après ce qui a été dit avant l'énoncé, il suffit de voir ceci pour les équations d'ordre 1, et alors, la fonction $(t,y) \mapsto A(t) \bullet y + B(t)$ est clairement $k(t)$-lipschitzienne par rapport à y (Proposition II.3.5, page 56). Le 2. et le 3. sont alors évident. □

SOUS-SECTION II.5.2

Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

THÉORÈME II.5.1.

*Soient E un espace de Banach et $x' = A(t) \bullet x$ une équation différentielle linéaire homogène de degré 1, A étant une application continue d'un intervalle I dans $\mathscr{L}(E)$. Soit $\tilde{A}$ l'application de I dans $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ définie par $\tilde{A}(t) \bullet f = A(t) \circ f$, $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la solution φ de l'équation différentielle qui vaut $x_0 \in E$ au point t_0 de I est $\varphi(t) = R(t,t_0) \bullet x_0$ où $t \mapsto R(t,t_0)$ est la fonction de I dans $\mathscr{L}(E)$ qui est solution de l'équation différentielle linéaire $x' = \tilde{A}(t) \bullet x$ qui vaut id_E en t_0. $R(t,t_0)$ s'appelle la **résolvante** (ou le **noyau résolvant**) de l'équation différentielle linéaire homogène.*

Démonstration. En effet, l'équation $x' = \tilde{A}(t) \bullet x$ étant linéaire, $t \mapsto R(t,t_0)$ est globale d'après la Proposition II.5.1, page ci-contre. En dérivant alors $\varphi(t) = R(t,t_0) \bullet x_0$, il vient $\varphi'(t) = R'(t,t_0) \bullet x_0 = (A(t) \circ R(t,t_0)) \bullet x_0 = A(t) \bullet \varphi(t)$, et, clairement, $\varphi(t_0) = x_0$. □

PROPOSITION II.5.2.

Soit $R(t,t_0)$ la résolvante d'une équation différentielle linéaire homogène $x' = A(t) \bullet x$ de degré 1.

1. Pour tous t, t_0 et t_1 dans I, on a $R(t,t_0) = R(t,t_1)R(t_1,t_0)$ (la composition dans $\mathscr{L}(E)$ étant notée comme un produit), $R(t,t_0)$ est inversible (dans $\mathscr{L}(E)$) et $(R(t,t_0))^{-1} = R(t_0,t)$.

2. $(t,s) \mapsto R(t,s)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $I \times I$ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(E)$. De plus, si A est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $(t,s) \mapsto R(t,s)$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Démonstration. En effet, la première formule résulte aussitôt de l'unicité de la Proposition II.5.1, et la seconde s'en déduit. Le 2. en résulte : clairement $t \mapsto R(t,t_0)$ est $\mathscr{C}^1$, donc (Proposition I.4.10, page 17), il en est de même de $t \mapsto R(t_0,t)$. La conclusion résulte alors de la Proposition I.4.14, page 19. □

PROPOSITION II.5.3 (*Formule de Lagrange*).

Soient E un espace de Banach et $x' = A(t) \bullet x + B(t)$ une équation différentielle linéaire avec second membre à coefficients continus sur un intervalle I. Soit $R(t,s)$ la résolvante de l'équation homogène associée. Alors pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, la solution globale de l'équation avec second membre qui vaut x_0 en t_0 est donnée par la formule

$$\varphi(t) = R(t,t_0) \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s) \bullet B(s)ds.$$

Démonstration. En effet, utilisons la méthode classique de variation de la constante : cherchons la solution sous la forme $\varphi(t) = R(t,t_0) \bullet y(t)$. En dérivant, il vient $\varphi'(t) = R'(t,t_0) \bullet y(t) + R(t,t_0) \bullet y'(t) = A(t) \bullet (R(t,t_0) \bullet y(t)) + R(t,t_0) \bullet y'(t)$, et y doit satisfaire $R(t,t_0) \bullet y'(t) = B(t)$ c'est-à-dire $y'(t) = R(t_0,t) \bullet B(t)$ d'après la Proposition précédente. Comme il faut $y(t_0) = x_0$, il vient $y(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0,s) \bullet B(s)ds$, et il n'y a plus qu'à remarquer que

$$R(t,t_0) \bullet \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s) \bullet B(s)ds\right) = R(t,t_0) \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} (R(t,t_0)R(t_0,s)) \bullet B(s)ds.$$

□

II.5.2.1 *Cas où E est de dimension finie*

Dans cette sous-sous-section nous supposons que l'espace de Banach E est de dimension finie n. Comme E peut être un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il faut préciser ce que l'on appelle la dimension de E. Si E est donné, à priori, comme espace vectoriel réel, il s'agit bien sûr de de sa dimension sur $\mathbb{R}$; s'il est donne comme espace sur $\mathbb{C}$ de dimension n, il est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$. Comme ce que nous allons faire est valable dans les deux cas, nous allons considérer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, si $x' = A(t) \bullet x + B(t)$ est une équation différentielle linéaire, on considère ici que B est une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$ et A une fonction continue de I dans l'espace des matrice carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si on note $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ et $x(t) = (x_i(t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$, l'équation différentielle devient un système de n équations différentielles à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + B_i(t),\ 1 \leq i \leq n.$$

Dans toute la suite de cette sous-sous-section, nous utiliserons la notation ci-dessus pour les équations différentielles linéaires à coefficients continus sur I , espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

Si l'équation différentielle est homogène, sa résolvante est donc une application de $I \times I$ dans l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et on peut considérer son déterminant. De même, on peut considérer la trace de $A(t)$ que nous noterons $\mathrm{Tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$.

Dans ces conditions :

PROPOSITION II.5.4.

Soit $x' = A(t)\bullet x$ une équation différentielle linéaire homogène, A étant une fonction continue d'un intervalle I dans un espace normé de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Soit $R(t,t_0)$ sa résolvante. Alors

$$\det R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)ds}.$$

Démonstration. En effet, posons $u(t) = R(t,t_0)$ de sorte que $u'(t) = A(t) \circ u(t)$. La définition de la dérivée et la Proposition II.5.2, page précédente donnent

$$\begin{aligned} u(t+h)\circ u(t)^{-1} &= (u(t) + hu'(t) + h\varepsilon(h)) \circ u(t)^{-1} \\ &= \mathrm{id}_E + hA(t) + h\varepsilon_1(h), \end{aligned}$$

et, si on pose $\delta(t) = \det u(t)$, il vient $\delta(t+h)\delta(t)^{-1} = 1 + h\mathrm{Tr}(A(t)) + h\varepsilon_2(h)$. Ceci signifie exactement que δ est la solution de l'équation différentielle linéaire $\delta' = \mathrm{Tr}(A(t))\delta$, $\delta(t_0) = 1$, dont la solution est $\delta(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)ds}$. □

D'après la Proposition II.5.1, page 62, $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène si et seulement si, pour chaque (ou pour un) $t \in I$, $(\varphi_i(t))_{1\leq i\leq n}$ est une base de E.

D'autre part, si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un n-uple d'éléments de l'espace des solutions, on a $\varphi_j(t) = R(t,t_0) \bullet \varphi_j(t_0)$ (Théorème II.5.1, page précédente), ce qui fait que, si on note $W : I \to E^n$ l'application $t \mapsto (\varphi_i(t))_{1\leq i\leq n}$, et, $\tilde{R}(t,t_0) : E^n \to E^n$ l'application $(x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto (R(t,t_0)\bullet x_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $W(t) = \tilde{R}(t,t_0)\bullet W(t_0)$. En particulier, si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ et une base de l'espace des solutions, en adoptant une écriture matricielle, on a $R(t,t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$ (on considère ici $W(t)$ et $W(t_0)$ comme des matrices carrées d'ordre n inversibles). Ceci amène la définition suivante :

Définition II.5.2.

Soit $x' = A(t) \bullet x$ une équation différentielle linéaire homogène de degré 1, A étant une fonction continue d'un intervalle I dans un espace normé de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathscr{S}$ l'espace des solutions de l'équation différentielle.

1. *Une base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathscr{S}$ est appelés un* ***système fondamental de solutions****.*
2. *Si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système fondamental de solutions, la matrice carrée $W(t)$ d'ordre n dont les vecteurs colonne sont les $\varphi_i(t)$ est appelée* ***une matrice fondamentale*** *ou* ***matrice Wronskienne*** *de l'équation différentielle. Le déterminant $w(t)$ de $W(t)$ est appelé le* ***Wronskien*** *du système $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$.*

PROPOSITION II.5.5.

Soit $x' = A(t) \bullet x + B(t)$ une équation différentielle linéaire de degré 1, A étant une fonction continue d'un intervalle I dans un espace noprmé de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Soit $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, $W(t)$ la matrice fondamentale associée et $w(t)$ son Wronskien. Alors :

1. *$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)ds}$.*
2. *Soit φ_0 la solution de l'équation homogène qui vaut x_0 en t_0, et, soit φ_1 la solution de l'équation avec*

second membre qui vaut 0 *en* t_0*. Alors* $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ *est la solution de l'équation avec second membre qui vaut* x_0 *en* t_0*, et on a :*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= W(t)W(t_0)^{-1} \bullet x_0, \\
\varphi_1(t) &= \int_{t_0}^{t} W(t)W(s)^{-1}B(s)ds, \\
\varphi(t) &= W(t)W(t_0)^{-1} \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t)W(s)^{-1}B(s)ds \\
&= W(t)\left(W(t_0)^{-1} \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}B(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème II.5.1, page 63, et de la Proposition II.5.3, page 63. □

SOUS-SECTION II.5.3

Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n

Comme nous l'avons déjà dit, l'étude de ces équation se ramène à celle des équations d'ordre 1. Précisons cela :

PROPOSITION II.5.6.

Soient E *un espace de Banach et*

$$x^{(n)} = B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \bullet x^{(i)}, \tag{II.5.2}$$

B *étant une fonction d'un intervalle* I *dans* E *et* A_i *une fonction de* I *dans* $\mathscr{L}(E)$*, une équation linéaire d'ordre* n*. Soit* $A(t) \in \mathscr{L}(E^n)$ *la matrice*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_E & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mathrm{id}_E \\ A_0(t) & A_1(t) & \dots & \dots & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation (II.5.2) *est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1 $x' = A(t) \bullet x + C(t)$ *où*

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $R(t, t_0)$ *la résolvante de l'équation homogène associée* $x' = A(t) \bullet x$*, de sorte que* $R(t, t_0)$ *est une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathscr{L}(E)$*. Soit* $(R_i(t, t_0))_{0 \le i \le n-1}$ *la première ligne de cette matrice. Alors :*

1. La solution φ *de l'équation homogène associée à* (II.5.2) *telle que* $\varphi^{(i)} = x_0^i$*,* $0 \le i \le n-1$*, en* t_0 *est égale à* $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} R_i(t, t_0) \bullet x_0^i$*.*

2. On a $R(t, t_0) = (R_i^{(j)}(t, t_0))_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le n-1}}$*, et, pour tout* i*,* $t \mapsto R_i(t, t_0)$ *est solution de l'équation différentielle* $R_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \circ R_i^{(j)}$*,* $R_i^{(j)}(t_0, t_0) = \delta_{ij}\mathrm{id}_E$*.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate des résultats de la sous-section précédente : le 2. s'obtient en dérivant la formule du 1. donnant la solution φ. □

II.5.3.1 Équation différentielles linéaires scalaires d'ordre n

C'est le cas où $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les A_i et b sont donc des fonctions scalaires que l'on note alors a_i, et l'équation s'écrit

$$x^{(n)} = b(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)}. \tag{II.5.3}$$

L'identification de cette équation avec une équation d'ordre 1 que nous venons de voir donne une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $\mathbb{K}^n$ comme espace de Banach. On peut donc lui appliquer les résultats de la Sous-sous-section II.5.2.1, page 64.

Contentons nous simplement de traduire ces résultats en termes d'équation scalaire d'ordre n.

Soit

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} \tag{II.5.4}$$

l'équation homogène associée. Alors :

1. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (II.5.4) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^n(I;\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$ de dimension n. Pour tout $t \in I$, l'application $\pi_t : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\pi_t(\varphi) = (\varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ est un isomorphisme.
2. Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ est une base de $\mathscr{S}$, le système $(\Phi_1, \ldots \Phi_n)$, où $\Phi_j = (\varphi_j, \ldots, \varphi_j^{(n-1)})$, est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle d'ordre 1 associée. Le wronskien de ce système est appelé le wronskien de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$.
3. D'une manière générale, si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ est un système de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$, on appelle wronskien de ce système le déterminant $w(t)$ de la matrice, dite matrice wronskienne du système,

$$W_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

   Alors, si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ est un n-uple d'éléments de $\mathscr{S}$, c'est une base de $\mathscr{S}$ si et seulement si son wronskien ne s'annule pas en un point de I. Dans ce cas il ne s'annule en aucun point de I, et vérifie (Proposition II.5.5, page 64)

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a_{n-1}(s)ds}.$$

4. Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ est une base de $\mathscr{S}$, la solution de (II.5.3) qui vaut x_0 en t_0 s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int_{t_0}^t \frac{b(s)w_j(s)}{w(s)} ds,$$

   où φ_0 est la solution de l'équation homogène (II.5.4) qui vaut x_0 en t_0, w est le wronskien du système $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ et w_j le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice wronskienne $W_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ la j-ieme colonne par le vecteur $(0, \ldots, 0, 1)$.

SOUS-SECTION II.5.4

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Nous dirons ici qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est à coefficient constant si elle s'écrit

$$x' = A \bullet x + B(t) \tag{II.5.5}$$

où A est un élément de $\mathscr{L}(E)$, E espace de Banach, et B une fonction continue d'un intervalle I dans E (en fait usuellement, on dit que l'équation est à coefficients constants si B est une fonction constante, mais cette hypothèse suplémentaire n'apporte rien de plus).

PROPOSITION II.5.7.

La résolvante $R(t) = R(t,0)$ de l'équation différentielle homogène

$$x' = A \bullet x \tag{II.5.6}$$

associée à (II.5.5) *est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(E)$ qui est la solution de l'équation différentielle $R' = A \circ R$*

qui vaut id_E *en* 0 *et s'écrit* $R(t) = \exp tA = e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n$. *De plus la solution de* (II.5.6) *qui vaut* $x_0 \in E$ *en* $t_0 \in \mathbb{R}$, *est égale à*

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \bullet x_0.$$

Démonstration. En effet, d'après le Théorème II.5.1, page 63, il suffit de vérifier que $\exp tA$ est bien solution de l'équation différentielle $R' = A \circ R$ ce qui résulte aussitôt du Théorème I.2.5, page 8, appliqué aux somme partielles de la série définissant $\exp tA$ □

De la Proposition II.5.3, page 63, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE.
La solution de l'équation différentielle (II.5.5) *qui vaut* x_0 *en* t_0 *est donnée par la formule*

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} (\exp(t - s)A) \bullet B(s)ds.$$

II.5.4.1 *Cas où E est de dimension finie*

Nous nous contentons de considérer le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Ceci nous permet d'utiliser la théorie de réduction des matrices à coefficients complexes. Précisément, nous allons utiliser le Lemme suivant :

LEMME. *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Soient λ_i, $1 \leq i \leq p$, les valeurs propres de A d'ordres de multiplicité respectifs k_i. Pour chaque i, soit E_i le sous-espace caractéristique associé à λ_i (i.e. $E_i = \ker(A - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{k_i}$). Alors,* $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ *et E_i est de dimension k_i, $1 \leq i \leq p$.*

Chaque E_i est clairement stable par A, considérée comme endomorphisme de E, et on peut considérer la restriction A_i de A à E_i.

Dans ces conditions l'équation différentielle linéaire homogène $x' = A \bullet x$ est équivalente au système d'équations linéaires homogènes

$$x_i' = A_i \bullet x_i,\ 1 \leq i \leq p,$$

où x_i est une fonction à valeurs dans E_i. Les résultats de la sous-section précédente montrent que la solution de chacune de ces équations s'écrit $x_i(t) = \exp(tA_i) \bullet u_i$ où $u_i \in E_i$. En écrivant $\exp(tA_i) = e^{\lambda_i t} \exp(t(A_i - \lambda_i))$, et en utilisant que E_i est le sous-espace caractéristique associé à λ_i, on obtient que $\exp(tA_i)$ est le produit de $e^{\lambda_i t}$ par un polynôme de degré $\leq k_i - 1$ en A_i. En résumé :

PROPOSITION II.5.8.
Soit $x' = A \bullet x$ une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, A étant une matrice complexe carrée d'ordre n. Alors, avec les notations de ci-dessus, pour chaque valeur propre λ_i (de multiplicité k_i) de A, l'équation différentielle possède des solutions à valeurs dans le sous-espace caractéristique E_i associé à λ_i, de la forme $e^{\lambda_i t} Q_i(t)$, où Q_i est un polynôme de degré $\leq k_i - 1$ à valeurs dans E_i , qui forment un espace vectoriel de dimension k_i. De plus, toute solution de l'équation différentielle s'écrit $x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} Q_i(t)$ la sommation s'étendant à toutes les valeurs propres distinctes de A.

II.5.4.2 *Cas des équations d'ordre n*

Il suffit de reprendre les résultats des sous-sections précédentes. Par exemple, si

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \bullet x^{(i)}$$

est une équation homogène, $A_i \in \mathscr{L}(E)$, et si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{id}_E \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix},\ \exp(tA) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_{n-1}(t) \\ R_0'(t) & R_1'(t) & \dots & R_{n-1}'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_0^{(n-1)}(t) & R_1^{(n-1)}(t) & \dots & R_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

la solution de
$$x^{(n)} = B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i \bullet x^{(i)}$$
qui s'annule ainsi que ses $n-1$ premières dérivées en t_0 est $x(t) = \int_{t_0}^{t} R_{n-1}(t-s) \bullet B(s)ds$.

Dans le cas particulier où E est de dimension 1, ces équations se ramènent aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants que nous avons vus à la sous-sous-section précédente. Par exemple, pour l'équation différentielle $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$, l'équation caractéristique (donnant les valeurs propres de la matrice, une fois l'équation ramenée à l'ordre 1) est $\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$. Ainsi, l'équation admet des solutions de la forme $e^{\lambda_i t} q_i(t)$; où λ_i est une racine de l'équation caractéristique et q_i un polynôme de degré $\leq k_i$, où k_i est l'ordre de la racine λ_i. La solution générale de l'équation s'écrit alors $\sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t)$.

SOUS-SECTION II.5.5

Stabilité des solutions des équations différentielles linéaires

Donnons tout d'abord la définition générale de solution stable d'une équation différentielle :

Définition II.5.3.

Soient E un espace de Banach, U une partie de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction continue de U dans E et (t_0, x_0) un point de U. Supposons que la solution maximale φ_{t_0,x_0} au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ soit définie sur un intervalle contenant $[t_0, +\infty[$. Dans ces conditions ;

*1. On dit que φ_{t_0,x_0} est **stable** s'il existe $r > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $x_1 \in B(x_0, r_0)$, la solution maximale φ_{t_0,x_1} au problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_1$ soit définie sur $[t_0, +\infty[$ et vérifie $\|\varphi_{t_0,x_0}(t) - \varphi_{t_0,x_1}(t)\| \leq C \|x_0 - x_1\|$ pour tout $t \in [t_0, +\infty[$.*

*2. On dit que φ_{t_0,x_0} est **asymptotiquement stable** si elle est stable et s'il existe $r_1 > 0$ et une fonction $\epsilon : [t_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = 0$ et $\|\varphi_{t_0,x_0}(t) - \varphi_{t_0,x_1}(t)\| \leq \epsilon(t) \|x_0 - x_1\|$ pour $\|x_0 - x_1\| \leq r_1$ et $t \in [t_0, +\infty[$.*

La Proposition II.5.8 donne immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION II.5.9.

Soit A une matrice carré à coefficients complexes d'ordre n et considérons l'équation différentielle $x' = A \bullet x$. Alors :

1. Si toutes les valeurs propres de A ayant une multiplicité strictement plus grande que 1 ont une partie réelle srtictement négative et si celles de multiplicité 1 ont une partie réelle négative ou nulle toute solution de l'équation différentielle reste bornée sur $[0, +\infty[$. En particulier toute solution est stable.

2. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle srtictement négative, toutes les solutions de l'équation différentielles tendent vers zéro quand $t \to +\infty$. En particulier elles sont toutes asymptotiquement stables.

PROPOSITION II.5.10.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $[t_0, +\infty[$, E un espace normé de dimension finie, et A une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = A(t) \bullet x$ sont stables.

2. Toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = A(t) \bullet x$ sont bornées.

Démonstration. En effet, soit $R(t, t_0)$ la résolvante de l'équation de sorte que toute solution s'écrit $x(t) = R(t, t_0) \bullet x_0$ (Théorème II.5.1, page 63). Alors si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, et si chaque solution est bornée on a
$$\sup_{1\leq i\leq n} \sup_{t\geq t_0} \|R(t, t_0) \bullet e_i\| < +\infty,$$

et, par suite $\sup_{t\geq t_0} \|R(t,t_0)\| < +\infty$ ce qui implique aussitôt la stabilité des solutions. Réciproquement, si toutes les solutions sont stables, la stabilité de la solution nulle entraîne qu'il existe $r > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour $\|x_0\| \leq r$, on a $\|\varphi_{t_0,x_0}(t)\| \leq C\|x_0\|$ (avec les notation de la définition ci-dessus). Il s'en suit alors que

$$\|R(t,t_0)\| = \sup_{\|x_0\|\leq 1} \|R(t,t_0) \bullet x_0\| \leq C/r,$$

ce qui implique la propriété 2. □

Nous terminons cette sous-section en donnant un résultat de stabilité pour une équation différentielle qui est une perturbation d'une équation linéaire :

PROPOSITION II.5.11.

Soit A une matrice carré d'ordre n à coefficients complexes dont les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne en x, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[t_0,+\infty[$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une boule ouverte $B(0,a)$, $a > 0$, contenue dans U et que $\|f(t,x)\| \leq \epsilon(x)\|x\|$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Alors la fonction identiquement nulle est une solution de l'équation différentielle

$$x' = A \bullet x + f(t,x) \tag{II.5.7}$$

qui est asymptotiquement stable.

Démonstration. Tout d'abord, l'hypothèse faite sur f montre que $f(t,0) = 0$ ce qui implique que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation différentielle. Soit $x = \varphi_{t_0,x_0}$ la solution de (II.5.7) qui vaut x_0 en t_0 (elle existe d'après le Théorème II.3.2, page 55). Si elle est définie sur $]\alpha,\beta[$, du Corollaire de la Proposition II.5.7, page 67, on déduit que, pour $t_0 \leq t \leq \beta$, on a

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \bullet f(s,x(s))ds$$

car x est solution de l'équation différentielle linéaire $x' = A \bullet x + f(t,\varphi_{t_0,x_0}(t))$.

Soit $\delta > 0$, $\delta < a$, tel que, pour $\|x\| \leq \delta$ on ait $\|f(t,x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{k}\|x\|$, où $k \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ seront fixés plus loin. Choisissons $\|x_0\| < \delta$. Soit $t_1 > t_0$ tel que, pour $t_0 \leq t \leq t_1$ on ait $\|x(t)\| \leq \delta$. Alors, pour $t_0 \leq t \leq t_1$ on a

$$\|x(t)\| \leq \left\|e^{(t-t_0)A}\right\| \|x_0\| + \frac{\varepsilon}{k}\int_{t_0}^{t} \left\|e^{(t-s)A}\right\| \|x(s)\| \, ds. \tag{II.5.8}$$

Remarquons maintenant que l'hypothèse faite sur A implique que l'on peut trouver $k \geq 1$, $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\left\|e^{(t-t_0)A}\right\| \leq k e^{-(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)},$$

$t \geq t_0$. En reportant ceci dans (II.5.8), il vient

$$e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} \|x(t)\| \leq k\|x_0\| + \varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\varepsilon)(s-t_0)} \|x(s)\| \, ds, \ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Alors la Proposition II.3.1, page 54, donne $e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)}\|x(t)\| \leq k\|x_0\| e^{\varepsilon(t-t_0)}$ c'est-à-dire $\|x(t)\| \leq k\|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$, pour le même intervalle en t. On en déduit que si $\|x_0\| < \delta/2k$, sur tout intervalle $[t_0,t_1]$ sur lequel on a $\|x(t)\| \leq \delta$, on a automatiquement $\|x(t)\| \leq \delta/2$. En conséquence, si x est définie sur $]\alpha,\beta[$, on a nécéssairement $\|x(t)\| \leq \delta$ sur $[t_0,\beta[$. Montrons maintenant que $\beta = +\infty$: en effet, dans le cas contraire, puisque $\|x(t)\| \leq \delta \leq a$, le bout droit de x contiendrait un élément (β,b) avec $\|b\| \leq \delta < a$ ce qui contredit le Théorème des bouts (page 59). Enfin, sous la condition $\|x_0\| < \delta/2k$ on a $\|x(t)\| \leq \delta$ sur $[t_0,+\infty[$ ce qui, comme on vient de le voir, implique $\|x(t)\| \leq K\|x_0\| e^{-\alpha t}$, et assure que la solution nulle est asymptotiquement stable. □

SECTION II.6

Éléments d'études qualitatives en dimension 1

Dans cette section, nous allons simplement donner les outils de base des études qualitatives d'équations différentielles d'ordre 1 lorsque l'espace E est $\mathbb{R}$, sans donner d'exemples concrets d'utilisations.

Définition II.6.1.

Soient U une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$.

*1. Pout tout $M = (t, x) \in U$, soit D_M la droite passant par M de pente $f(t, x)$. L'application $M \mapsto D_M$ s'appelle le **champ des tangentes** associé à l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.*

*2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la courbe d'équation $f(t, x) = \lambda$ s'appelle l'**isocline** λ de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.*

*3. On dit qu'une courbe dans U est **fortement infranchissable** si aucune solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$, autre que elle lorsqu'elle est elle même solution, ne peut le couper.*

L'isocline 0 joue un rôle particulier : si on pose

$$U_+ = \{(t, x) \text{ tels que } f(t, x) > 0\},$$

$$U_- = \{(t, x) \text{ tels que } f(t, x) < 0\}$$

et

$$\Gamma_0 = \{(t, x) \text{ tels que } f(t, x) = 0\},$$

toute solution de l'équation différentielle est croissante dans U_+, décroissante dans U_- et stationnaire sur Γ_0.

Si la fonction f est localement lipschitzienne, le Théorème de Cauchy-Lipschitz (page 55) montre que toute solution est fortement infranchissable.

Définition II.6.2.

Soient U une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$.

*1. Une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ dérivable est dit une **barrière inférieure** pour l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ si $(t, \alpha(t) \in U$, pour tout $t \in I$, et si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \forall t \in I$.*

*2. Une fonction $\beta : I \to \mathbb{R}$ dérivable est dit une **barrière supérieure** pour l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ si $(t, \beta(t) \in U$, pour tout $t \in I$, et si $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \forall t \in I$.*

*3. Une barière est dite **forte** si les inégalités des définition ci-dessus sont strictes pour tout $t \in I$ et **faible** sinon.*

PROPOSITION II.6.1.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $(t, \alpha(t)) \in U$ et $(t, \beta(t)) \in U$, pour tout $t \in I$.

1. Si α (resp. β) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $\alpha(t_0) \leq \varphi(t_0)$ (resp. $\beta(t_0) \geq \varphi(t_0)$) alors pour tout $t \in]t_0, +\infty[\cap I$ on a $\alpha(t) < \varphi(t)$ (resp. $\beta(t) > \varphi(t)$). On traduit cette propriété en disant qu'une barrière forte est fortement infranchissable.

2 Si de plus f est localement lipschitzienne, si α (resp. β) est une barrière inférieure (resp. supérieure) et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $\alpha(t_0) \leq \varphi(t_0)$ (resp. $\beta(t_0) \geq \varphi(t_0)$) alors pour tout $t \in]t_0, +\infty[\cap I$ on a $\alpha(t) \leq \varphi(t)$ (resp. $\beta(t) \geq \varphi(t)$). On traduit cette propriété en disant que, lorsque f est localement lipschitzienne, une barrière est faiblement infranchissable.

Démonstration. Démontrons tout d'abord le 1. pour une barrière inférieure forte. Supposons tout d'abord $\alpha(t_0) < \varphi(t_0)$. S'il existe $t > t_0$ tel que $\alpha(t_0) \geq \varphi(t_0)$, soit t_1 l'infimum de l'ensemble de ces t de sorte que $\alpha(t_1) = \varphi(t_1)$ et $\varphi'(t_1) > \alpha'(t_1)$. Alors $\varphi - \alpha$ est strictement croissante au voisinage de t_1 et comme elle est strictement positive à gauche de t_1, on ne peut avoir $\alpha(t_1) = \varphi(t_1)$. Si $\alpha(t_0) = \varphi(t_0)$, on a $\varphi'(t_0) > \alpha'(t_0)$, ce qui implique que $\varphi - \alpha$ est strictement croissante au voisinage de t_0 et on remplace t_0 par $t_0' > t_0$ pour refaire le raisonnement précédent.

Démontrons maintenant le 2. pour une barrière inférieure. Pour $t_1 \in [t_0, \sup I[$, soit A_{t_1} l'ensemble des $t \geq t_0$ tels que $\alpha(s) \leq \varphi(s)$ pour $s \in [t_0, t]$. Il est clair que A_{t_1} est fermé et non vide, et si $c = \sup A_{t_1}$, on a $A_{t_1} = [t_0, c]$. Supposons $c < t_1$. Alors $(c, \varphi(c)) \in U$ et il existe un cylindre de sécurité $C = [c - l, c + l] \times [\varphi(c) - r, \varphi(c) + r]$, $[c - l, c + l] \subset I$, contenu dans U au voisinage duquel f est k-lipschitzienne pour un $k > 0$. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 étant choisit assez petit de sorte que, quitte à réduire éventuellement l, C soit un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy $x' = f_\varepsilon(t, x), x(c) = \varphi(c)$, avec $f_\varepsilon(t, x) = f(t, x) + \varepsilon$. Comme α est une barrière inférieure sur $[c - l, c + l]$ pour f c'est une bérrière inférieure forte pour f_ε pour le même intervalle. Soit φ_ε la solution maximale du problème de Cauchy $x' = f_\varepsilon(t, x), x(c) = \varphi(c)$. Le 1. de la Proposition montre alors que $\alpha(t) < \varphi_\varepsilon(t)$ pour $t \in]c, c + l]$. D'autre part, le Corollaire du Lemme Fondamental (page 54) donne $|\varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{k}\left(e^{k|t-c|} - 1\right)$, $t \in [c - l, c + l]$. En faisant tendre ε vers zéro, il vient alors $\alpha(t) < \varphi(t)$ pour $t \in]c, c + l]$, ce qui contredit la définition de c. On a donc $c = t_1$ ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque II.6.1. *Une barrière faible peut être infranchissable sans que f soit localement lipschitzienne.*

Définition II.6.3.

Soient U une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$ telles que $(t, \alpha(t) \in U$ et $(t, \beta(t) \in U$, pour tout $t \in I$. Supposons que α (resp. β) soit une barrière inférieure (resp. supérieure) infranchissable pour l'équation différentielle $x' = f(t,x)$.

*1. Si $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pour tout $t \in I$, on dit que l'ensemble $T(\alpha,\beta) = \{(t,x) \in U$ tels que $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t),\ t \in I\}$ est un **entonnoir**.*

*2. Si $\alpha(t) \geq \beta(t)$, pour tout $t \in I$, on dit que l'ensemble $S(\alpha,\beta) = \{(t,x) \in U$ tels que $\alpha(t) \geq x \geq \beta(t),\ t \in I\}$ est un **anti-entonnoir**.*

PROPOSITION II.6.2.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$ telles que $(t, \alpha(t) \in U$ et $(t, \beta(t) \in U$, pour tout $t \in I$. Supposons que α (resp. β) soit une barrière inférieure (resp. supérieure) pour l'équation différentielle $x' = f(t,x)$.

1. Supposons $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pour tout $t \in I$ (i.e. $T(\alpha,\beta)$ est un entonnoir, les barrières étant infranchissables d'après la Proposition précédente). Alors toute solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ telle que, pour un $t_0 \in I$, on ait $\alpha(t_0) \leq \varphi(t_0) \leq \beta(t_0)$, est telle que $\alpha(t) \leq \varphi(t) \leq \beta(t)$, pour $t \in [t_0, +\infty[\cap I$.

2. Supposons $\alpha(t) \geq \beta(t)$, pour tout $t \in I$ (i.e. $S(\alpha,\beta)$ est un anti-entonnoir). Alors, pour tout $t_0 \in I$, il existe $x_0 \in [\beta(t_0), \alpha(t_0)]$ tel que la solution maximale φ du problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, soit définie sur $[t_0, +\infty[\cap I$ et vérifie $\beta(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha(t)$ sur cet intervalle.

3. Dans les conditions du 2., si de plus $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est positive ou nulle dans $S(\alpha,\beta)$ et si $\lim\limits_{t \to \sup I} \alpha(t) - \beta(t) = 0$, alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ qui reste dans $S(\alpha,\beta)$.

Démonstration. Le 1. résulte aussitôt de la Proposition précédente. Montrons le 2. Pour $t \in I$, soient ν_t et μ_t les solutions maximales au problèmes de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t) = \alpha(t)$ et $x(t) = \beta(t)$ respectivement. En raisonnant à t décroissant (i.e. en «inversant» le sens du temps) la Proposition précédente, l'unicité du Théorème de Cauchy-Lipschitz et le Théorème des bouts (page 59), montrent que ν_t et μ_t sont définis sur $]-\infty, t] \cap I$ et vérifient $\beta(s) \leq \mu_t(s) \leq \nu_t(s) \leq \alpha(s)$ sur cet intervalle. Soit $t_0 \in I$. Pour $t \geq t_0$, $t \in [t_0, +\infty[\cap I$, soit $P_t(t_0) = [\eta_t(t_0), \nu_t(t_0)]$. Soient $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Comme $\beta(t) \leq \mu_{t_2}(t) \leq \nu_{t_2}(t) \leq \alpha(t)$ pour $t \in]-\infty, t_2] \cap I$, par définition des ν_t et μ_t et par l'unicité du Théorème de Cauchy-Lipschitz, on doit avoir $\mu_{t_1}(t) \leq \mu_{t_2}(t) \leq \nu_{t_2}(t) \leq \nu_{t_1}(t)$ sur $]-\infty, t_1] \cap I$, ce qui montre que $P_t(t_0)$, $t \in [t_0, +\infty[\cap I$, est une famille décroissante des compacts non vides. Soit x_0 un point de leur intersection (qui est non vide par compacité). Si φ est définie sur $]\alpha_1, \beta_1[$, on a alors $\beta(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha(t)$ sur $]\alpha_1, \beta_1[\cap[t_0, +\infty[\cap I$ (φ est «coincée» par les ν_t et μ_t). Enfin le Théorème des bouts entraîne que $([t_0, +\infty[\cap I) \subset [t_0, \beta_1[$.

Vérifions maintenant le 3. Si $\varphi_1 \ :]\alpha_1, \sup I[\to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 \ :]\alpha_2, \sup I[\to \mathbb{R}$ sont deux solutions telles que $\beta(t) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \in \alpha(t)$ dans $[t_0, \sup I[$, $t_0 \in I$ (deux solutions ne peuvent se couper), on a $\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t) = \displaystyle\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,u)du \geq 0$, et si $\varphi_2(t_1) - \varphi_1(t_1) > 0$, pour un $t_1 \geq t_0$, par croissance de $\varphi_2 - \varphi_1$, on contredit l'hypothèse $\lim\limits_{t \to \sup I} \alpha(t) - \beta(t) = 0$. □

Exercices

Exercice II.1.

Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et soit (I, X) une solution de $X' = A(t)X$. On suppose que la matrice $A(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Trouver une équation différentielle satisfaite par ${}^tX \circ X$.
2. En déduire que si $X(t_0)$ est orthogonale ($t_0 \in I$), alors $X(t)$ est orthogonale pour tout $t \in I$.

Exercice II.2.

Soit E un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace de ses endomorphismes continus. Soit $A \in \mathscr{C}(E)$. On considère l'équation différentielle

$$X' + X \circ A \circ X = 0.$$

1. Montrer qu'il existe un solution maximale (I, φ) avec $\varphi(0) = Id_E$.

2. Montrer que φ est $\mathscr{C}^\infty$.
3. Montrer que I contient l'intervalle $|t| < ||A||^{-1}$ et que dans cet intervalle, on a $\varphi(t) = (Id_E + tA)^{-1}$.

Exercice II.3.
Soit E l'espace de Banach des suites de réels qui tendent vers 0 à linfini, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose $f(t,x) = (|x_n|^{1/2} + 1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que f est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E.
2. Soit $a > 0$ et $(]-a,a[, x)$ une solution de $x' = f(x)$ avec $x(0) = 0$. Montrer que $x_n(t) > 0$ pour $t \in]0,a[$.
3. En déduire que x_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,a[$ avec $x_n''(t) > 1/2$ ($t \in]0,a[$).
4. Prouver que $x_n(t) \geq t^2/4$ pour $t \in]0,a[$.
5. Conclusion ?

1. Soit $f(t,x) = 2|x|^{1/2}$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Donner l'allure des courbes intégrales de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$.
   (a) Dans quel ouvert U faut-il poser cette équation pour que tout problème de Cauchy admette une unique solution maximale ?
   (b) (facultatif) Mêmes questions avec $f(t,x) = |1 - x^2|^{1/2}$.

Exercice II.4.
Soient φ et ψ deux fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi < \psi$. Soient c et d deux nombres réels.

1. Montrer qu'il existe un intervalle I comprenant c et deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que
$$u'(t) = \varphi(t, u(t)),\ v'(t) = \psi(t, v(t))$$
et $u(c) = v(c) = d$.
2. Montrer que pour tout $t \in I$, $v(t) > u(t)$ si $t > c$ et $v(t) < u(t)$ si $t < c$.
3. On suppose seulement que $\varphi \leq \psi$. Montrer que $(v(t) - u(t))(t - c) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

1. Soit $t_0 > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy $x' = \gamma^2 + x^2$, $x(t_0) = 0$.
   (a) Soit $(]\alpha,\beta[, \varphi)$ la solution maximale du problème de Cauchy
   (b) Montrer que β est fini [on pourra utiliser la méthode de comparaison].
   (c) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\varphi(t)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers α^+.
   (d) Prouver que $\alpha > 0$ si t_0 est assez grand.
   (e) Etablir que quand t_0 tend vers $+\infty$, $\beta - t_0$ et α sont équivalents à $\pi t_0^{-1/2}/2$.

Exercice II.5.
Soit E un espace de Hilbert réel, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathscr{L}(E)$ une application continue. Montrer que les solutions $Y : I \to E$ de l'équation $Y' = A(t)Y$ sont de norme constante si et seulement si $A(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in I$.

Exercice II.6.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $A : I \to \mathscr{L}(E)$ continue et $t_0 \in I$. On considère la solution $Y : I \to \mathscr{L}(E)$ du problème de Cauchy
$$Y' = A(t) \circ Y \qquad Y(t_0) = Id_E$$
Montrer que $Y(t)$ est inversible pour tout t.

Exercice II.7.
Soit $\ell : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ une application continue, de période ω.

1. Soit E l'espace vectoriel des solutions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de l'équation $y' = \ell(t)y$. Montrer que l'application $T : E \to E$ définie par $Ty(t) = y(t+\omega)$ est un endomorphisme de E. En déduire que l'équation $y' = \ell(t)y$ posséde une solution pour laquelle $y(t+\omega) = \lambda y(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant le fait que la résolvante vérifie
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad R(t,0) = R(t,\omega) \circ R(\omega, 0)$$
3. Que se passe-t'il quand ℓ est constante ?

Exercice II.8.
Soit p un entier positif et $a_1, \ldots, a_p$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considére l'équation différentielle
$$y^{(p)} + a_1(x).y^{(p-1)} + \cdots + a_p(x).y = 0$$
Montrer que pour tout x_0 réel, il existe α positif tel qu'aucune solution non nulle de cette équation différentielle n'a plus de $p-1$ zéros sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Étudier le cas particulier de l'équation $y^{(3)} = y'$, conclure.

Exercice II.9.
Soit a un réel positif. Expliciter toutes les solutions de l'équation $y''-a^2y=0$. En effectuant le changement de variables $t=\sin(\theta)$, en déduire les solutions sur $]-1,1[$ de

$$(1-t^2)y''-ty'-a^2y=0$$

Décrire toutes les solutions de l'équation précédente.

Exercice II.10.
Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, croissante, telle que $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=+\infty$. Soit $f:[t_0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y''+\phi(t)y$. Étudier la fonction $f(t)^2+f'(t)^2/\phi(t)$; montrer que f est bornée.

Exercice II.11.
Soit $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^{+\infty}|\phi(t)|\,dt$ converge. Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y''+\phi(t)y$. Si f est bornée, montrer que $f'(t)$ a une limite en $+\infty$, et que cette limite est nulle. En déduire que deux solutions bornées sont nécessairement colinéaires. Conclusion ?

Exercice II.12.
Soient $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, et $y_1,y_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $y''+a(t)y'+b(t)y$. Montrer que y_1 et y_2 n'ont pas de zéro commun, et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 se trouve nécessairement un zéro de y_2 ; en déduire que ce zéro est unique.

Exercice II.13.
Soient P,Q,R trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad P(x)>0\qquad Q(x)<R(x)$$

Soient y et z deux fonctions vérifiant

$$P(x)y''(x)+P'(x)y'(x)+Q(x)y(x)=P(x)z''(x)+P'(x)z'(x)+R(x)z(x)=0$$

1. Calculer la dérivée de $P(x).(y'(x)z(x)-y(x)z'(x))$, et en déduire qu'entre deux zéros consécutifs de z se trouve un zéro de y.
2. Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $0<\omega^2<\phi(t)<\Omega^2$ pour tout t avec ω et Ω réels positifs. Déduire de la question précédente que toute solution de $y''+\phi(t)y=0$ admet une infinité de zéros, et que la distance entre deux zéros consécutifs est comprise entre π/Ω et π/ω.

Exercice II.14.
Soit I un intervalle réel et $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$.

1. Montrer que, si $y:I\to\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y''=f(x)y$, la fonction $z(x)=y(x)^3$ est solution de

$$(E)\qquad z^{(4)}=10f(x)z''+10f'(x)z'+(9f(x)^2-3f''(x))z$$

2. Soit (y_1,y_2) un système fondamental de solutions de $y''=f(x)y$. On pose

$$z_1(x)=y_1(x)^3\qquad z_2(x)=y_1(x)^2y_2(x)\qquad z_3(x)=y_1(x)y_2(x)^2\qquad z_4(x)=y_2(x)^3$$

Montrer que (z_1,z_2,z_3,z_4) est un système fondamental de solutions de (E).

Exemples de Sujets et de Corrigés d'Examens

Examen partiel de l'année universitaire 2000-2001

Sujet

Exercice I
Question de cours

1. Soient E_1, E_2, E_3 et F des espaces normés. Soit f une application multilinéaire continue de $E = \prod_{i=1}^{3} E_i$ dans F.
   (a) Donner explicitement la différentielle $df(x)$ de f en un point $x \in E$.
   (b) En déduire (en justifiant clairement chaque étape) un calcul explicite des différentielles seconde et troisième de f, $d^2f(x)$ et $d^3f(x)$, en un point x.
2. Soient E, F et G trois espaces normés. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Soient f un application de U dans V et g une application de V dans G. Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est différentiable en x_0 et g différentiable en y_0.
   (a) Donner explicitement la différentielle de $h = g \circ f$ en x_0.
   (b) On suppose que f et g sont deux fois différentiables en x_0 et y_0 respectivement. Calculer explicitement (en justifiant clairement chaque étape) la différentielle seconde $d^2h(x_0)$ de h en x_0.

Exercice II

Soit E un espace de Banach. Soit $F = \mathscr{L}(E)$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de E dans lui même. Pour tout entier $k \geq 1$, soit P_k l'application de F dans lui-même définie par $P_k(u) = \overbrace{u \circ \ldots \circ u}^{k \text{ fois}}$.

1. Montrer que P_k est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur F.
2. Calculer explicitement la différentielle $dP_k(u)$ de P_k en un point $u \in F$.
3. Montrer que P_k est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de id_E.

Exercice III

Soient E un espace de Banach et $I = [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

1. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans E. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 aux points x et $x + h_0$ ou x et $x - h_0$, montrer que si $\sup_{x\in I} \|\varphi(x)\| \leq A$ et $\sup_{x\in I} \|d^2\varphi(x)\| \leq B$, alors $\sup_{x\in I} \|d\varphi(x)\| \leq 2A/h_0 + Bh_0/2$.
2. Soit f une fonction de I dans E de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$ on a
$$\sup_{x\in I} \left\|d^{2n} f(x)\right\| \leq (2n)!Mk^n$$
où M et k sont des constantes indépendantes de n.
   (a) En utilisant le 1. donner une majoration de $\sup_{x\in I} \left\|d^{2n+1} f(x)\right\|$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire que la série de Taylor de f en x_0 converge, dans E, vers $f(y)$ pour tout y dans un voisinage de x_0 que l'on précisera.

Exercice IV

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application de E dans F de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $df(x)$ est inversible et $\left\|(df(x))^{-1}\right\| \leq A$.

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\gamma :]t_0 - h, t_0 + h[\to F$ une fonction continue telle que $\gamma(t_0) \in f(E)$. Montrer que, pour $h_1 \leq h$ assez petit, il existe une fonction continue $\tilde\gamma :]t_0 - h_1, t_0 + h_1[\to E$ telle que $f \circ \tilde\gamma = \gamma$.
2. Soient $[a, b]$ un intervalle, $\tilde\gamma_1$ et $\tilde\gamma_2$ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans E telles que $f \circ \tilde\gamma_1 = f \circ \tilde\gamma_2$ et $\tilde\gamma_1(a) = \tilde\gamma_2(a)$.
   (a) Soit T l'ensemble des $t \in [a, b]$ tels que $\tilde\gamma_1(t) = \tilde\gamma_2(t)$. Montrer que T est fermé.
   (b) Montrer que T est ouvert.
   (c) Conclure que $\tilde\gamma_1 = \tilde\gamma_2$.
3. Soit $\gamma : [0, 1] \to F$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\gamma(0) \in f(E)$. Soit T l'ensemble des $t \in]0, 1]$ pour lesquels il existe $\tilde\gamma : [0, t] \to E$ continue telle que $f \circ \tilde\gamma = \gamma$.
   (a) Déduire du 1. que T est non vide.
   (b) Soit τ la borne supérieure de T. Déduire du 2. qu'il existe $\tilde\gamma : [0, \tau[\to E$ continue telle que $f \circ \tilde\gamma = \gamma$.
   (c) Soit (t_n) une suite dans $[0, \tau[$ qui converge vers τ. En utilisant l'hypothèse sur df (et le théorème des accroissements finis) montrer que, pour tous p et q entiers
$$\|\tilde\gamma(t_p) - \tilde\gamma(t_q)\| \leq A \sup_{t\in[0,1]} \|d\gamma(t)\| \, |t_p - t_q| \,,$$
   et en déduire que $\tilde\gamma$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \tau]$.
   (d) En raisonnant par l'absurde, déduire du 1. que $\tau = 1$.
4. Soient $x \in E$ et $y \in F$. En appliquant ce qui précède à la fonction $\gamma(t) = (1 - t)f(x) + ty$, montrer que f est surjective (i.e. $f(E) = F$).

Corrigé

Exercice I

Cet exercice étant une question de cours, donnons brièvement les réponses :

1. (a) $df(x) \bullet (h_i) = f(h_1, x_2, x_3) + f(x_1, h_2, x_3) + f(x_1, x_2, h_3)$.
   (b) $d^2f(x) \bullet ((h_i), (k_i)) = f(h_1, k_2, x_3) + f(k_1, h_2, x_3) + f(h_1, x_2, k_3) + f(k_1, x_2, h_3) + f(x_1, h_2k_3) + f(x_1, k_2, h_3)$,
   $d^3f(x) \bullet ((h_i), (k_i), (l_i)) = f(h_1, k_2, l_3) + f(k_1, h_2, l_3) + f(h_1, l_2, k_3) + f(k_1, l_2, h_3) + f(l_1, h_2k_3) + f(l_1, k_2, h_3)$.
2. (a) $dh(x_0) \bullet h = dg(f(x_0)) \circ df(x_0) \bullet h$.
   (b) $d^2h(x_0) \bullet (h, k) = d^2g(y_0) \bullet (df(x_0) \bullet h, df(x_0) \bullet k) + dg(y_0) \bullet (d^2f(x_0) \bullet (h, k))$.

Exercice II

1. P_k est la composée de l'application linéaire $u \mapsto (u, \dots, u)$ et de l'application multilinéaire $(u_1, \dots, u_k) \mapsto u_1 \circ \dots \circ u_k$.
2. $dP_k(u) \bullet h = \sum_{i=0}^{k-1} u^i \circ h \circ u^{k-i-1}$ où $u^j = \overbrace{u \circ \dots \circ u}^{j \text{ fois}}$.
3. $dP_k(\mathrm{id}_E) = k\mathrm{id}_E$, et le théorème d'inversion locale donne le résultat.

Exercice III

1. Supposons par exemple $[x, x + h_0] \subset [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$. La formule de Taylor-Lagrange donne
$$\|\varphi(x + h_0) - \varphi(x) - d\varphi(x_0)h_0\| \leq Bh_0^2/2,$$
d'où le résultat.
2. Par le 1., $\left\|d^{2n+1}f(x)\right\| \leq \dfrac{2(2n)!Mk^n}{h_0} + \dfrac{(2n+2)!Mk^{n+1}h_0}{2} \leq (2n+1)!M_1k^n$, où M_1 est une constante ne dépendant que de M, k et h_0.
3. Le reste dans la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f sur un intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$ se majore donc par $M_2k^{n/2}h^n$, et tend vers zéro si $hk^{1/2} < 1$.

Exercice IV

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \gamma(t_0)$. Par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme au voisinage de x_0. Donc f^{-1} est définie et continue au voisinage de $\gamma(t_0)$. La continuité de γ implique donc que $\tilde{\gamma} = f^{-1} \circ \gamma$ est définie et continue au voisinage de t_0.
2. (a) Immédiat les fonctions étant continues.
   (b) Si $t_1 \in T$, f est un difféomorphisme au voisinage de $\tilde{\gamma}_i(t_1)$ donc $\tilde{\gamma}_i = f^{-1} \circ (f \circ \gamma_i)$ est déterminé au voisinage de t_1.
   (c) Par connexité.
3. (a) Immédiat.
   (b) Si $0 < t_1 < t_2 < \tau$, et si $\tilde{\gamma}_i$ est définie sur $[0, t_i]$ et vérifie $f \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma$, le 2. implique que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont égales sur $[0, t_1]$. On peut alors définir $\tilde{\gamma}$ sur $[0, \tau[$ en posant, pour $0 < t < \tau$, $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_{\tilde{t}}$, où $t < \tilde{t} < \tau$ et $\tilde{\gamma}_{\tilde{t}}$ est continue sur $[0, \tilde{t}]$ et vérifie $f \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{t}} = \gamma$ (cette définition ne dépend pas du choix de $\tilde{\gamma}_{\tilde{t}}$.
   (c) Le théorème des accroissements finis donne $\|\tilde{\gamma}(t_p) - \tilde{\gamma}(t_q)\| \leq \sup_{t \in I} \|d\tilde{\gamma}(t)\| \, |t_p - t_q|$, et comme $df(\tilde{\gamma}(t)) \circ d\tilde{\gamma}(t) = d\gamma(t)$, il vient $\|d\tilde{\gamma}(t)\| \leq \left\|df(\tilde{\gamma}(t))^{-1}\right\| \|d\gamma(t)\|$, ce qui donne l'inégalité en utilisant l'hypothèse. Il en résulte que $\tilde{\gamma}(t_n)$ est une suite de Cauchy dans E qui converge donc vers $a \in E$, ce dernier étant complet. La fonction $\tilde{\gamma}$ prolongée par a en τ est alors continue.
   (d) Si $\tau < 1$, le 1. montre $(\gamma(\tau) = f(a) \in f(E))$ qu'il existe $\tilde{\gamma}_1$ de $[\tau, \tau + h]$ telle que $f \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma$ et $\tilde{\gamma}_1(\tau) = a$. En prolongeant alors $\tilde{\gamma}$ par $\tilde{\gamma}_1$ sur $[\tau, \tau + h]$, on contredit la maximalité de τ.
4. En effet, le 3. montre qu'il existe $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to E$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. En particulier $f(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = y$, ce qui montre que $y \in f(E)$.

Examen de la session de Juin 2001

Sujet

A

Soit E un espace de Hilbert réel de dimension finie $n \geq 2$ et de produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Soient $g(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, $f(x) = \langle u(x), x \rangle$, $x \in E$, et $S = g^{-1}(1)$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et, pour tous $x, h \in E$, calculer explicitement $df(x) \bullet h$ et $dg(x) \bullet h$.
2. Montrer que la restriction de f à S admet un maximum.
3. Montrer qu'il existe $a_1 \in S$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que $df(a_1) = \lambda_1 dg(a_1)$.
4. Montrer que $(\mathbb{R}a_1)^\perp$ est stable par u et, en raisonnant par récurrence, en déduire que E admet une base de vecteurs propres de u.

B

Questions de cours préliminaires.

1. Donner la définition d'un cylindre de sécurité pour un problème de Cauchy. Démontrer que si U est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, E espace de Banach, et $f : U \to E$ une fonction continue, pour tout point $(t_0, x_0) \in U$, il existe un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) pour le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.
2. Soient E espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : U \to E$ une fonction continue. Soient $\varphi_i : I \to E$, I segment de $\mathbb{R}$, $i = 1, 2$, deux solution ε_i-approchées, $\varepsilon_i \geq 0$, de classe $\mathscr{C}^1$, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $t \in I$, on a
$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq k \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$
Soit $t_0 \in I$. Posons $x_i = \varphi_i(t_0)$, $i = 1, 2$. Démontrer que, pour tout $t \in I$ on a
$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$
On pourra appliquer, sans le redémontrer, le lemme de Gronwall (c'est-à-dire : *si* u *est une fonction continue de* $[0, T]$, $T > 0$, *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $u(t) \leq at + k \int_0^t u(s)ds,\ t \in [0, T],$ *avec* $a \geq 0$, *et* $k > 0$, *alors on a* $u(t) \leq \frac{a}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$, *pour* $0 \leq t \leq T$) à la fonction $u(t) = \|\varphi(t) - \varphi(0)\|$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.
3. Soient E espace de Banach et U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soient f et g deux fonctions continues de U dans E telles que $\delta = \sup_{(t,x)\in U} \|f(t, x) - g(t, x)\| < +\infty$. Soient $\varphi : I \to E$ (resp. $\psi : I \to E$) une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (resp. $x' = g(t, x)$). On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que, pour tout $t \in I$, $\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq k \|\varphi(t) - \psi(t)\|$. Déduire du 2. une majoration explicite de $\|\varphi(t) - \psi(t)\|$, $t \in I$, en fonction de δ, k et des valeurs prises par φ et ψ en un point t_0 de I.

Problème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Dans tout le problème on suppose donnée une solution φ, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

Soit α une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall t \in I$, $(t, \alpha(t)) \in \Omega$.

I

On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ et qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\alpha(t_0) \leq \varphi(t_0)$.

1. Supposons tout d'abord $\alpha(t_0) < \varphi(t_0)$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > t_0$ tel que $\alpha(t) \geq \varphi(t)$. Soit $t_1 = \inf\{t > t_0,\ t \in I,\ \text{tels que } \alpha(t) \geq \varphi(t)\}$. Montrer que $\alpha(t_1) = \varphi(t_1)$, que $\varphi - \alpha$ est strictement croissante au voisinage de t_1 et conclure à une contradiction.
   (b) En déduire que $\alpha(t) < \varphi(t)$, pour tout $t > t_0$, $t \in I$.
2. On suppose maintenant que $\alpha(t_0) = \varphi(t_0)$. Montrer que $\alpha(t) < \varphi(t)$ pour $t > t_0$ assez proche de t_0, et, en utilisant la question précédente, conclure que $\alpha(t) < \varphi(t)$, pour tout $t > t_0$, $t \in I$.

II

A partir de maintenant on suppose que f est localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $\beta = \sup I$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ et qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\alpha(t_0) \leq \varphi(t_0)$.

1. Pour tout $t_2 \in [t_0, \beta[$, soit $A_{t_2} = \{t \in [t_0, t_2] \text{ tels que } \alpha(s) \leq \varphi(s),\ \text{pour } s \in [t_0, t]\}$. Montrer que A_{t_2} est un intervalle fermé non vide que l'on notera dans la suite $[t_0, c]$.
   On suppose dans la suite de cette question que $c < t_2$.
   (a) Pout tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(t, x) = f(t, x) + \varepsilon$, $(t, x) \in \Omega$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $l > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$, le problème de Cauchy $x' = f_\varepsilon(t, x)$, $x(c) = \varphi(c)$, admet une solution φ_ε définie dans l'intervalle $J = [c-l, c+l] \subset I$ et à valeurs dans le segment $[\varphi(c)-r, \varphi(c)+r]$, les intervalles J et $[\varphi(c)-r, \varphi(c)+r]$ étant tels que f soit k-lipschitzienne, pour un $k > 0$, en la seconde variable dans $J \times [\varphi(c) - r, \varphi(c) + r]$ (on pourra montrer l'existence d'un cylindre de sécurité convenable).

(b) Montrer que pour $t \in J$, on a
$$|\varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leq \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{k|t-c|} - 1\right).$$

(c) En utilisant le résultat de la partie I, montrer que $\alpha(t) < \varphi_\varepsilon(t)$ pour $t \in]c, c+l[$, et en déduire que $\alpha(t) \leq \varphi(t)$ sur le même intervalle.

(d) Conclure à une contradiction.

2. Conclure que $\alpha(t) \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$.

Corrigé

A

1. f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composées d'applications linéaires et bilinéaires continues (E est de dimension finie), et un calcul immédiat donne $dg(x) \bullet h = 2\langle x, h\rangle$ et $df(x) \bullet h = 2\langle u(x), h\rangle$ puisque u est symétrique.
2. Comme S est fermé et borné, et que l'espace est de dimension finie, c'est un compact. f y admet donc un maximum.
3. Comme, pour $x \in S$, $dg(x) \neq 0$ ($dg(x) \bullet x = \|x\|^2 \neq 0$), S est une sous-variété de E, et on peut appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange.
4. La relation $df(a_1) = \lambda_1 dg(a_1)$ signifie exactement que a_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_1. Alors, si $x \in E_1 = (\mathbb{R}a_1)^\perp$, on a $\langle u(x), a_1\rangle = \langle x, u(a_1)\rangle = 0$, ce qui montre que E_1 est stable par u. Comme $E = (\mathbb{R}a_1) \oplus E_1$, en recommençant le même raisonnement que précédemment avec E_1 à la place de E, on trouve un second vecteur propre $a_2 \in E_1$, et $E_2 = ((\mathbb{R}a_1) \oplus (\mathbb{R}a_2))^\perp$ est aussi stable par u. Par récurrence on en déduit le résultat demandé.

B

Questions de cours préliminaires : voir le cours.

Problème

I

1. (a) Par définition de l'inf et continuité des fonctions, on a $\alpha(t_1) \geq \varphi(t_1)$. Si on avait $\alpha(t_1) > \varphi(t_1)$, la continuité des fonctions contredirait la définition de t_1. On a donc $\alpha(t_1) = \varphi(t_1)$. Ceci implique $\alpha'(t_1) < f(t_1, \alpha(t_1)) = f(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1)$, et, par continuité de $\varphi' - \alpha'$, on a $\varphi' - \alpha' > 0$ au voisinage de t_1. Ceci implique que, pour $t < t_1$ assez proche de t_1, on a $\varphi(t) < \alpha(t)$ et contredit la définition de t_1.

   (b) La contradiction précédente montre que l'hypothèse de départ de la question précédente est fausse ce qui est le résultat.

   (c) Si $\alpha(t_0) = \varphi(t_0)$, on a $\alpha'(t_0) < \varphi'(t_0)$, et, par continuité, $\varphi - \alpha$ est strictement croissante au voisinage de t_0 ce qui montre qu'il existe $t_0' > t_0$ tel que, sur $]t_0, t_0']$ on a $\varphi(t) > \alpha(t)$. On peut alors appliquer le raisonnement fait aux deux questions précédentes, en remplaçant t_0 par t_0', et obtenir $\varphi(t) > \alpha(t)$ pour $t > t_0'$, ce qui permet de conclure.

II

1. (a) Soit $C_0 = [c-l_0, c+l_0] \times [\varphi(c)-r, \varphi(c)+r]$ un cylindre contenu dans Ω sur le quel $|f|$ est majorée par M et tel que f soit k-lipschitzienne sur C_0. En prenant alors, pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$, et $l < \dfrac{r}{M+1}$, le cylindre $[c-l, c+l] \times [\varphi(c)-r, \varphi(c)+r]$ est de sécurité pour le problème de Cauchy $x' = f_\varepsilon(t, x)$, $x(c) = \varphi(c)$.

   (b) Comme φ_ε est une solution ε-approchée du problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(c) = \varphi(c)$, qui est définie sur l'intervalle J, on peut appliquer la troisiemme question de cours préliminaire ce qui donne l'inégalité.

   (c) Il suffit d'appliquer le résultat de la partie I en remplaçant f par f_ε, I par $[c-l, c+l]$ et t_0 par c (car $\alpha'(t) < f_\varepsilon(t, \alpha(t))$ sur $[c-l, c+l]$) pour obtenir $\alpha(t) < \varphi_\varepsilon(t)$ sur $]c, c+l]$. Comme l est indépendant de ε, on obtient alors la dernière inégalité en utilisant le (b) et en faisant tendre ε vers zéro.

   (d) Comme on a supposé $c < t_2$, quitte à réduire l, on peut supposer $c + l \leq t_2$ (et bien sûr $l > 0$). La question précédente contredit alors la définition de c.
2. Immédiat.

Examen de la session de Septembre 2001

Sujet

Exercice I

Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) > 0, \forall x \in E$. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\left\|d^2 f(x)\right\| \leq M, \forall x \in E$.

1. Soient $x, h \in E$ et $s \in \mathbb{R}$. En écrivant $f(x + sh)$ avec la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$f(x) + sdf(x) \bullet h + \frac{1}{2}s^2 M \|h\|^2 > 0, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire que, $\forall x \in E$, $\|df(x)\| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

Exercice II

Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace des matrices carrées d'ordre n complexes. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t + \omega) = A(t)$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x' = A(t) \bullet x. \qquad (E)$$

Soit S l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des solutions de (E). Pour toute $x \in S$, on pose $\tilde{x}(t) = x(t + \omega)$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme de S sur lui même.
2. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $R(t, t_0)$ la résolvante de (E). Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $R(t_0 + \omega, t_0)$ associé à la valeur propre λ. Soit φ_0 la solution de (E) qui vaut x_0 en t_0.
   (a) Montrer que $\widetilde{\varphi_0}(t_0) = \lambda\varphi_0(t_0)$.
   (b) En déduire que $\widetilde{\varphi_0} = \lambda\varphi_0$.

Exercice III

Question de cours préliminaire. Énoncer le théorème des bouts.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible et qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $\left\|(df(x))^{-1}\right\| \leq k$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on considére l'équation différentielle

$$x' = (df(x))^{-1} \bullet u. \qquad (E_u)$$

1. Montrer que, $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, (E_u) admet une solution x définie au voisinage de x_0 telle que $x(t_0) = x_0$.
2. Monter que toute solution de (E_u) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Soit φ_u la solution de (E_u) qui vérifie $\varphi_u(0) = 0$.
   (a) Calculer $\dfrac{d}{dt}\left(f(\varphi_u(t))\right)$;
   (b) En déduire que $f(\varphi_u(t)) = tu + u_0$, pour un $u_0 \in \mathbb{R}^n$.
4. En déduire que $f(\varphi_u(1)) = u$ et conclure que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ (i.e. que f est surjective).

Exercice IV

Question de cours préliminaire. Énoncer le théorème d'inversion locale.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, $df(x) \neq 0$ et qu'il existe une fonction continue $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \Omega$, $df(x) = h(x)dg(x)$. Soit $x_0 \in \Omega$ fixé.

1. Montrer que, $\forall x \in \Omega$, $h(x) \neq 0$ et $dg(x) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe des formes linéaires f_i, $i = 2, \dots, n$, sur $\mathbb{R}^n$ telles que $(df(x_0), f_2, \dots, f_n)$ soit une base de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $F(x) = (f(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, les f_i, $i = 2, \dots, n$, étant les formes linéaires de la question précédente. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_1 de x_0 tel que F soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V_1 sur son image.
4. Soit $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $G(x) = (g(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, les f_i, $i = 2, \dots, n$, étant les formes linéaires de la question 2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_2 de x_0 tel que G soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V_2 sur son image.
5. Soit $V = V_1 \cap V_2$. Déduire de ce qui précède que $H = G \circ F^{-1}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $F(V)$ sur $G(V)$ tel que $H \circ F = G$.
6. Pour tout $y \in F(V)$, on pose $H(y) = (h_1(y), \dots, h_n(y))$. Montrer que
$$\frac{\partial h_1}{\partial y_1}(f(x), f_2(x), \dots, f_n(x))df(x) + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial h_1}{\partial y_i}(f(x), f_2(x), \dots, f_n(x))f_i(x) = \frac{1}{h(x)}df(x).$$
7. En déduire que, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, et $\forall y \in F(V)$, on a $\dfrac{\partial h_1}{\partial y_i}(y) = 0$.
8. Conclure qu'il existe un voisinage W de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g = \varphi \circ f$ sur un voisinage de x_0.

Corrigé

Exercice I

1. En effet, par la formule de Taylor on a $0 < f(x+sh) = f(x) + sdf(x) \bullet h + \displaystyle\int_0^1 (1-t)d^2 f(x+tsh) \bullet (sh)^2 dt$, et comme l'intégrale se majore, par hypothèse, par $\dfrac{1}{2}s^2 M \|h\|^2$, on obtient l'inégalité voulue.
2. Comme l'inégalité précédente est valable pour tout $s \in \mathbb{R}$, en la considérant comme une inéquation du second degré en s, il vient $s^2(df(x) \bullet h)^2 - 2s^2 M \|h\|^2 f(x) \leq 0$, c'est-à-dire $|df(x) \bullet h| \leq \sqrt{2Mf(x)}\,\|h\|$, ce qui donne le résultat en prenant le sup pour $\|h\| \leq 1$.

Exercice II

1. Il est clair que si $x \in S$ alors $\tilde{x} \in S$. De plus, si $x \in S$ et si $y(t) = x(t - \omega)$, on a $y \in S$ et $x = \tilde{y}$. Enfin $x \mapsto \tilde{x}$ est clairement linéaire.
2. (a) En effet, on a $\varphi_0(t) = R(t, t_0) \bullet x_0$ ce qui donne $\widetilde{\varphi_0}(t_0) = R(t_0 + \omega, t_0) \bullet x_0 = \lambda x_0 = \lambda \varphi_0(t_0)$.
   (b) $\widetilde{\varphi_0}$ et $\lambda\varphi_0$ sont donc deux solutions de l'équation différentielle qui prennent la même valeur en t_0. Elles sont donc égales par unicité du problème de Cauchy.

Exercice III

Question de cours préliminaire. Voir le cours.

1. Comme f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et comme l'application $u \mapsto u^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, l'application $x \mapsto (df(x))^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, donc, en particulier, lipschitzienne. La conclusion résulte donc du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Comme $x \mapsto (df(x))^{-1} \bullet u$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne, ceci résulte du théorème des bouts.
3. (a) $\dfrac{d}{dt}\left(f(\varphi_u(t))\right) = df(\varphi_u(t)) \bullet \varphi_u'(t) = df(\varphi_u(t)) \bullet \left((df(\varphi_u(t)))^{-1} \bullet u\right) = u$.
   (b) Immédiat.
4. En faisant $t = 0$ dans la question précédente, il vient $u_0 = 0$ et on conclut aussitôt.

Exercice IV

Question de cours préliminaire. Voir le cours.

1. Évident.
2. C'est le théorème de la base incomplète en dimension finie puisque $df(x_0) \neq 0$.
3. C'est une conséquence du théorème d'inversion locale puisque $dF(x) = (df(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.
4. Idem compte tenu du 1.
5. Immédiat.
6. D'après la question précédente on a $h_1(F(x)) = g(x)$. La formule s'obtient en dérivant cette égalité et en utilisant l'hypothèse faite sur df et dg.
7. Comme F est un difféomorphisme sur V, pour $x \in V$, les formes linéaires $df(x)$, f_2, ..., f_n sont indépendantes. Le résultat résulte donc de la formule de la question précédente.
8. Soient W un voisinage de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ et U un voisinage de $(f_2(x_0), \dots, f_n(x_0))$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que $W \times U \subset F(V)$. Alors si $\forall x \in W$, si on note $\tilde{y} = (y_2, \dots, y_n)$, la question précédents montre que $\tilde{y} \mapsto h_1(x, \tilde{y})$ est constante dans U. Si on note $\tilde{y}_0 = (f_2(x_0), \dots, f_n(x_0))$, on a, pour $y = (y_1, \tilde{y}) \in W \times U$, $h_1(y) = h_1(y_1, \tilde{y}_0)$ ce qui montre que la formule $\varphi(y_1) = h_1(y)$, $y = (y_1, \tilde{y}) \in W \times U$, définit une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ dans W. Comme $H \circ F = G$, si x appartient à un voisinage assez petit de x_0, on aura $F(x) \in W \times U$ et par suite $h_1(F(x)) = \varphi(f(x))$, ce qui est le résultat.

Examen de la session de Mai 2002

Sujet

Exercice I

1. *Question de cours.*
   (a) Énoncer avec précision puis démontrer le résultat d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle linéaire.
   (b) Donner la définition de la résolvante d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Énoncer et démontrer ses propriétés fondamentales.
2. Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. Soient A, B, C et D des fonctions continues de I dans $\mathscr{L}(E)$.

   Soit (x, y) une solution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = A(t) \circ x + B(t) \circ y \\ y' = C(t) \circ x + D(t) \circ y \end{array} \right. .$$

   Montrer que, si $y(t)$ est inversible pour tout $t \in I$, alors $t \mapsto z(t) = x(t) \circ (y(t))^{-1}$ est solution d'une équation différentielle que l'on explicitera.

Exercice II

Soient A et B deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $A(t) + {}^tB(t) = 0$. Soit y (resp. z) une solution de l'équation différentielle $y' = A(t) \bullet y$ (resp. $z' = B(t) \bullet z$).

1. Calculer la dérivée de $t \mapsto \langle y(t), z(t) \rangle$, où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $R_A(t, t_0)$ (resp. $R_B(t, t_0)$) la résolvante de l'équation $y' = A(t) \bullet y$ (resp. $z' = B(t) \bullet z$). Déduire de la première question que ${}^tR_B(t, t_0) \circ R_A(t, t_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
3. En déduire que si $A(t) = -{}^tA(t)$ pour tout t, alors $R_A(t, t_0)$ est orthogonale, pour tous t et t_0.

Exercice III

Soit $\bar{B}$ la boule (pour la norme euclidienne $\|.\|$) fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon $r_0 > 0$ fixé. Soient f_i, $1 \leq i \leq n$, des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'un voisinage de $\bar{B}$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$. On se donne $h > 1$ fixé une fois pour toutes.

1. Montrer que f est lipschitzienne par rapport à la première variable x dans $\bar{B}$, uniformément par rapport à la seconde variable α, pour $\|\alpha\| \leq 1$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\|\alpha\| \leq \delta$, le problème de Cauchy $x' = f(x, \alpha)$, $x(0) = 0$, admet une unique solution $\varphi_\alpha(t)$ définie sur $I = [-h, h]$.

Dans la suite, on note $\varphi(t, \alpha) = \varphi_\alpha(t)$ cette solution, $(t, \alpha) \in I \times B(0, \delta)$.

3. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathring{I} \times B(0, \delta)$.
4. Soit $\Delta_\alpha(t) = t\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \alpha) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}(t, \alpha), \quad (t, \alpha) \in \mathring{I} \times B(0, \delta)$.
   (a) Montrer que Δ_α est solution de l'équation différentielle $z' = df_x(\varphi(t, \alpha), \alpha) \bullet z$ (où df_x est la différentielle partielle de f par rapport à la première variable).
   (b) En déduire que Δ_α est identiquement nulle.
5. Montrer qu'il existe une fonction ψ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\varphi(t, \alpha) = \psi(t\alpha)$ (considérer $\psi(u) = \varphi(1, u)$).
6. Montrer que, si $\{f_1(0), \cdots, f_n(0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, ψ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine.

Exercice IV

A

Soient u et v deux fonctions continues positives d'un intervalle $[t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \geq 0$ tel que

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

1. Soient $h(t)$ le second membre de l'inégalité ci-dessus et $C(t) = h(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$. Montrer que $C'(t) \leq 0$.
2. En déduire que $u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$.

B

Soient E un espace de Banach et U un ouvert de E. Soit $f : U \to E$ une fonction k-lipschitzienne et soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x_0 \in U$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit $F : U \times \mathbb{R} \to E \times \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(z) = F(x, y) = (f(x), yg(x))$, $z = (x, y) \in U \times \mathbb{R}$. On note $z_0 = (x_0, y_0)$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$z' = F(z), \qquad z(t_0) = z_0. \tag{*}$$

Soient $z_1 = (x_1, y_1) : I \to U \times \mathbb{R}$ et $z_2 = (x_2, y_2) : I \to U \times \mathbb{R}$ deux solutions de (**??**) définies sur un intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$ et posons $z = (x, y) = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

3. Montrer que $x \equiv 0$.
4. Montrer que, pour $t \geq t_0$, $t \in I$, on a $|y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |y(s)|\, |g(x_1(s)|\, ds$.
5. En déduire que $z_1 \equiv z_2$.

Corrigé

Exercice I

1. Voir le cours
2. D'après le cours, $(y^{-1})'(t) = -y(t)^{-1} \circ y'(t) \circ y(t)$, ce qui donne aussitôt $z'(t) = A(t) \circ z(t) + B(t) - z(t) \circ C(t) \circ z(t) - z(t) \circ D(t)$. L'équation différentielle cherchée est donc : $z' = A(t) \circ z - z \circ C(t) \circ z - z \circ D(t) + B(t)$.

Exercice II

1. On a :
$$\begin{aligned}(\langle y(t), z(t)\rangle)' &= \langle y'(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z'(t)\rangle \\ &= \langle A(t) \bullet y(t), z(t)\rangle + \langle y(t), B(t) \bullet z(t)\rangle \\ &= \big\langle (A(t) +^t B(t)) \bullet y(t), z(t)\big\rangle = 0.\end{aligned}$$
2. Si y_0 et z_0 sont des points de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $y(t) = R_A(t, t_0) \bullet y_0$ et $z(t) = R_B(t, t_0) \bullet z_0$. La question précédente donne alors $\langle R_A(t, t_0) \bullet y_0, R_B(t, t_0) \bullet z_0\rangle = \langle y_0, z_0\rangle$ soit $\big\langle {}^tR_B(t, t_0) \circ R_A(t, t_0) \bullet y_0, z_0\big\rangle = \langle y_0, z_0\rangle$. Ceci étant valable pour tous y_0 et z_0, on obtient le résultat.
3. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $A = B$.

Exercice III

1. Soit $M_1 = \max_i \sup_{x\in\bar{B}} \|df_i(x)\|$. Prenons $\|\alpha\| = \sum_i |\alpha_i|$. Le théorème des accroissements finis donne aussitôt, pour $x_i \in \bar{B}$, $i = 1, 2$, $\|f(x_1, \alpha) - f(x_2, \alpha)\| \leq M_1 \|\alpha\| \|x_1 - x_2\|$, ce qui donne le résultat demandé.
2. On a $\|f(x, \alpha)\| \leq M \|\alpha\|$ avec $M = \max_i \sup_{x\in\bar{B}} \|f_i(x)\|$. Par suite, pour$\|\alpha\| \leq \delta$, $\sup_{x\in\bar{B}} \|f(x, \alpha)\| \leq \delta M$, et on peut choisir δ de sorte que $h\delta M \leq r_0$ ce qui signifie que $[-h, h] \times \bar{B}$ est un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy considéré. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne alors une solution définie sur l'intervalle $[-h, h]$.
3. C'est le résultat du cours sur la régularité des solutions d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre.
4. (a) En utilisant le fait que φ_α est solution de l'équation différentielle $x' = f(x, \alpha)$, il vient immédiatement :
$$\begin{aligned}\Delta'_\alpha(t) &= \sum_i \alpha_i f_i(\varphi(t, \alpha)) + t \sum_i \alpha_i (df_i)_x(\varphi(t, \alpha)) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, \alpha) - \\ &\quad - \sum_i \alpha_i f_i(\varphi(t, \alpha)) - \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j (df_j)_x(\varphi(t, \alpha)) \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}(t, \alpha) \\ &= df_x(\varphi(t, \alpha), \alpha) \bullet \Delta_\alpha(t).\end{aligned}$$
   (b) En effet, Δ_α est solution d'une équation différentielle linéaire homogène et $\Delta_\alpha(0) = 0$.
5. La question 3. montre que $t \mapsto \psi_\alpha(t) = \psi(t\alpha) = \varphi(1, t\alpha)$ est $\mathscr{C}^\infty$ dans $]-1, 1[$. De plus, la question 4. (b) implique que $\psi'_\alpha(t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(1, t\alpha) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}(1, t\alpha) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1, t\alpha) = \sum_i \alpha_i f_i(\psi_\alpha(t))$, pour $|t| \leq 1$. Comme $\psi_\alpha(0) = \varphi(1, 0) = 0$ (car φ_0 est solution de $x' = 0$, $x(0) = 0$), on conclut que ψ_α est solution du problème de Cauchy $x' = f(x, \alpha)$, $x(0) = 0$, et, par unicité de cette solution, on en déduit que $\psi_\alpha(t) = \varphi_\alpha(t)$, $|t| \leq 1$.
6. On a $\psi'_\alpha(0) = d\psi(0) \bullet \alpha = \sum_i \alpha_i f_i(0)$, ce qui montre (puisque $\{f_i(0)\}$ est une base) que $d\psi(0)$ est surjective. Comme on est en dimension finie, il n'y a plus qu'à appliquer le théorème d'inversion locale.

Exercice IV

1. En effet, $C'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t v(s)ds\right)[u(t)v(t) - h(t)v(t)]$ et il suffit d'utiliser que $u \leq h$ et $v \geq 0$.
2. Par la question précédente, $C(t) \leq C(t_0) = a$ ce qui conclut puisque $u \leq h$.
3. x_1 et x_2 sont deux solutions du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$. Comme f est localement lipschitzienne, l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz donne le résultat.
4. Par la question précédente, on a $y'_i = y_i g(x_1)$, $i = 1, 2$. Donc $y'(t) = y(t)g(x_1(t))$, et il n'y a plus qu'à intégrer.
5. On a déjà $x_1 \equiv x_2$ et l'égalité $y_1 \equiv y_2$ résulte de la question précédente et de la question 2.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE

BIBLIOGRAPHIE

[Ave83] A. AVEZ – *Calcul différentiel*, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures, Masson, Paris, 1983.

[Car67] H. CARTAN – *Calcul différentiel*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY – *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.