LICENCE DE MATHÉMATIQUES PURES

Topologie

Philippe Charpentier

Université Bordeaux I
Année universitaire 2000-01

PHILIPPE CHARPENTIER
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES
351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE
Adresse électronique: `Philippe.Charpentier@math.u-bordeaux.fr`

Introduction

Ce polycopié a été réalisé durant l'année universitaire 2000-2001 alors que j'enseignais les certificats de Licence LA1 et LA2. J'ai choisi de faire une présentation assez exhaustive (donc ne correspondant pas toujours exactement au contenu des programmes officiels de la Licence de Bordeaux) pour préparer aux compléments de topologie du certificat d'Analyse Fonctionnelle de Maîtrise affin d'éviter au maximum les « trous » que j'ai pu constater en travaillant à la préparation de l'oral de l'agrégation.

La présentation tâche toujours de dégager en premier les concepts généraux même si on ne les utilise que dans des cas particuliers. C'est ainsi que, par exemple toutes les notions topologiques que l'on doit introduire lors de l'étude des espaces métriques sont définies dans le cadre général des espaces topologiques ; cela permet de bien distinguer les notions de nature topologique de celles de nature métrique. Ceci amène évidemment à rajouter un certain nombre de définitions concernant les espaces topologiques. Dans le chapitre sur les espaces métriques, seul le théorème d'Ascoli à été rajouté.

Dans le même état d'esprit, pour que la notion de série, et de série multiple, dans un espace normé soit bien comprise, j'introduis celle de famille sommable et je décris précisément les liens qui existent entre les deux notions. Cette notion permet de plus d'étudier les espaces fondamentaux $l_I^p(E)$ et $c_0(E)$ ainsi que de traiter, en toute généralité, la théorie des espaces de Hilbert. Dans le chapitre sur les espaces normés, par rapport au programme officiel, j'ai rajouté les théorèmes classiques liés au théorème de Baire (Sous-section III.4.3, page 61) et le théorème de Hahn-Banach (Sous-section III.4.4, page 62). Pour des raisons de cohérence, je considère que ce dernier théorème doit être enseigné en Licence. En annexe, j'ai développé les notions de théorie des ensembles relatives à l'axiome du choix, au lemme de Zorn (utile pour le théorème de Hahn-Banach) et à la cardinalité des ensembles. A titre de référence, citons les ouvrages suivants qui ont inspiré bien des points : [Die68], [Rud70], [DS67]. Pour la partie théorie des ensembles, les courageux pouront consulter [Bou67].

Les exercices des fins de chapitre sont dûs à Gérard Galusinski.

Philippe Charpentier

Table des matières

CHAPITRE I

LES NOMBRES RÉELS

SECTION I.1

Une construction de $\mathbb{R}$

Rappelons tout d'abord que l'on appelle **suite de Cauchy** de rationnels une suite (x_n) de rationnels telle que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, $p, q \geq n_0$ implique $\mid x_p - x_q \mid < \varepsilon$.

Les deux propositions suivantes, dont les démonstrations sont évidentes constituent une définition mathématique de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION I.1.1.

Soit $\mathscr{C} = \{\tilde{x} = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\tilde{x}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}\}$. Alors $\mathscr{C}$ est un anneau commutatif unitaire non intègre pour les opérations

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),\ (x_n)(y_n) = (x_n y_n),$$

et un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ pour la multiplication externe

$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n).$$

PROPOSITION I.1.2.

*Soit $\mathscr{Z} = \{\tilde{x} \in \mathscr{C} \text{ t.q. } \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0\}$. Alors $\mathscr{Z}$ est un idéal et un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ et le quotient $\mathscr{C} / \mathscr{Z}$ est donc un anneau commutatif unitaire et un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Par définition ce quotient est appelé l'ensemble des **nombres réels** et est noté $\mathbb{R}$.*

Remarque I.1.1. *Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition de $\mathbb{R}$:*

1. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont des classes d'équivalence de suites de rationnels : si $x \in \mathbb{R}$, et si $\tilde{x}$ appartient à la classe d'équivalence de x, alors $x = \tilde{x} + \mathscr{Z}$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, soit $\tilde{\alpha} = (\alpha_n) \in \mathscr{C}$ définie par $\alpha_n = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors l'application $i\ :\ \alpha \mapsto \tilde{\alpha} + \mathscr{Z}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneau injectif. On identifie alors $\mathbb{Q}$ et $i(\mathbb{Q})$ et, par abus de langage, on dit que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

3. Si (x_n) est une suite de rationnels qui converge, dans $\mathbb{Q}$, vers $r \in \mathbb{Q}$, alors $(x_n) + \mathscr{Z} = r$ dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME I.1.1.

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif.

LEMME. *Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Il existe $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ tel que, si (x_n) est une suite de rationnels appartenant à la classe d'équivalence x, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour $n \geq n_0$, on a $| x_n | > r$.*

Démonstration. Puisque $x \neq 0$, on a $(x_n) \notin \mathscr{Z}$. Par suite il existe une sous-suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) et un rationnel $s > 0$ tel que, $\forall k$, $| x_{n_k} | > s$. La conclusion du lemme en découle aisément (avec par exemple $r = s/4$) car (x_n) est de Cauchy. □

Démonstration du Théorème I.1.1. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ et si (x_n) est une suite de rationnels appartenant à la classe d'équivalence x, alors, pour $p, q \geq n_0$ on a

$$\left| \frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q} \right| \leq \frac{| x_p - x_q |}{r^2},$$

ce qui prouve que $y = (\alpha_n)$, avec $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$, pour $n \geq n_0$, est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Alors, clairement $y + \mathscr{Z}$ est l'inverse de x. □

$\mathbb{R}$ hérite aisément de l'ordre défini sur $\mathbb{Q}$. En effet, on dira que $x \in \mathbb{R}$ est strictement positif si il existe une suite (x_n) dans la classe de x telle qu'il existe un entier n_0 et un rationnel $a > 0$ tels que, pour $n \geq n_0$, on a $x_n > a > 0$. Pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}$ on définit alors la relation $x \leq y$ (ou $x < y$) par $y - x \geq 0$ (ou $y - x > 0$). Le lemme du Théorème I.1.1 montre que cet ordre est total :

PROPOSITION I.1.3.

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné et archimédien.

Le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien résulte de la même propriété pour $\mathbb{Q}$, et on vérifie sans difficultés que l'ordre est compatible avec la structure de corps (i.e. $a \geq b$ et $c \geq d$ implique $a + c \geq b + d$, et, $a \geq b$ et $c \geq 0$ implique $ac \geq bc$).

De la même manière on définit la valeur absolue en posant, pour $x \in \mathbb{R}$: $| x | = \max(x, -x)$. Puis on définit les suites convergentes de nombres réels comme d'habitude en utilisant la valeur absolue.

THÉORÈME I.1.2.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset$, où $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement compris entre $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$.

Démonstration. On peut supposer $x + \varepsilon > 0$ quitte à changer x en $-x$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tel que $n > 1/2\varepsilon$. Pour la même raison, l'ensemble des entiers strictement positifs plus grands que $n(x + \varepsilon)$ est non vide et admet donc un plus petit élément m qui vérifie donc $\dfrac{m-1}{n} < x + \varepsilon < \dfrac{m}{n}$. Alors on a $\dfrac{m-1}{n} > x - \varepsilon$ car, dans le cas contraire, on aurait $2\varepsilon = (x + \varepsilon) - (x - \varepsilon) \leq \dfrac{m}{n} - \dfrac{m-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ ce qui contredit la définition de n, et un rationnel cherché est $\dfrac{m-1}{n}$. □

THÉORÈME I.1.3.

*1. Une suite de nombres réels est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{R}$ est **complet**.*

*2. Soit $([a_n, b_n])$ une suite d'intervalles fermés emboîtés de $\mathbb{R}$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un intervalle fermé non vide. De plus, si $\lim_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$, cette intersection est réduite à un point (**axiome des segments emboîtés**).*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le 2. résulte aisément du 1. : en effet, comme la suite (a_n) (resp. (b_n)) est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) on voit facilement qu'elle est de Cauchy ; donc les limites $\lim_n a_n$ et $\lim_n b_n$ existent, et, si on les note respectivement a et b on a clairement $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$.

Démontrons donc le 1. Comme il est clair que toute suite convergente est de Cauchy, supposons que (x_n) soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et montrons qu'elle est convergente. Soit (ε_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. D'après le Théorème I.1.2, pour tout n il existe $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ tel que $| x_n - \alpha_n | < \varepsilon_n$. Clairement (α_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et définit donc un réel x. Pour conclure, il suffit de voir que $\lim_n \alpha_n = x$ ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME. *Soit α un nombre réel et (α_n) une suite de rationnels de la classe d'équivalence de α. Alors la suite (α_n) converge vers α dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. En effet, il faut voir que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $| \alpha - \alpha_n | < \varepsilon$. Vérifions par exemple que $\alpha - \alpha_n < \varepsilon$, pour $n \geq n_0$. Pour cela, il faut montrer qu'il existe (β_m) et (ε_m) dans les classes respectives de α et ε, m_0 et $a < 0$ tels que, pour $m \geq m_0$ (et $n \geq n_0$) on a $\beta_m - \alpha_n - \varepsilon_m < a$. Comme (α_m) est de Cauchy et $\varepsilon > 0$, il suffit clairement de prendre $\beta_m = \alpha_m$. □

□

COROLLAIRE 1.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. Montrons que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. S'il l'était, on aurait $[0;1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Coupons $[0,1]$ en trois intervalles fermés de même longueurs I_1^1, I_1^2, I_1^3. L'un de ces intervalles, I_1, est tel que $x_1 \notin I_1$. Coupons ensuite I_1 en trois segments égaux et choisissons I_2 un qui ne contient pas x_2. En recommençant de même avec I_2 et ainsi de suite, on construit une suite d'intervalles fermés emboîtés I_n dont le diamètre tend vers zéro et d'après le Théorème I.1.3, on a $\bigcap_n I_n = \{x\}$. Clairement $x \neq x_n, \forall n$, ce qui est absurde. □

COROLLAIRE 2.

> $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Ceci résulte de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (Théorème I.1.2) et du fait que, par le corollaire précédent, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas vide (d'après la Proposition B.2.1, page 112, $\mathbb{Q}$ est dénombrable), car si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Rappelons maintenant que si A est une partie de $\mathbb{R}$, on appelle **borne supérieure** de A (resp. **borne inférieure** de A) le plus petit (s'il existe) (resp. le plus grand) des majorants (resp. minorants) de A et on le note $\sup A$ (resp. $\inf A$). En d'autres termes, $a = \sup A$ si et seulement si $\forall x \in A$, $x \leq a$ et, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x \leq a$.

THÉORÈME I.1.4.

> *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (et de même pour les parties non vides minorées avec la borne inférieure).*

Démonstration. En effet, soient A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, $a_1 \in A$ et m_1 un majorant de A. Posons $I_1 = [a_1, m_1]$. Soit b le milieu du segment $[a_1, m_1]$. Si b est un majorant de A, on pose $I_2 = [a_1, m_2]$, avec $m_2 = b$; sinon cela signifie qu'il existe $a_2 \in A$ tel que $b < a_2 \leq m_1$ et on pose $I_2 = [a_2, m_1]$. Puis on recommence le même procédé en remplaçant I_1 par I_2, et ainsi de suite. On construit ainsi une suite de segments emboîtés I_n dont le diamètre tend vers zéro. D'après le Théorème I.1.3, on a $\bigcap_n I_n = \{x\}$. On vérifie alors facilement que x est la borne supérieure de A. □

Notation I.1.1. *On note* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

SECTION I.2

Suites de nombres réels

Si (x_n) est une suite de nombres réels, on appelle **valeur d'adhérence** dans $\mathbb{R}$ (resp. $\bar{\mathbb{R}}$) de la suite (x_n) tout nombre réel $y \in \mathbb{R}$ (resp. $y \in \bar{\mathbb{R}}$) tel qu'il existe une suite (x_{n_k}) extraite de la suite (x_n) telle que $\lim_k x_{n_k} = y$. Dans la suite nous noterons $\mathscr{V}(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ et $\bar{\mathscr{V}}(x_n)$ le même ensemble dans $\bar{\mathbb{R}}$.

On dit qu'une suite de nombres réels (x_n) est bornée s'il existe deux réels a et b tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$.

THÉORÈME I.2.1 (*Théorème de Bolzano-Weierstrass*).

> *Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels. Alors $\mathscr{V}(x_n) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $A_n = \{x_m,\ m \geq n\}$. Alors A_n est une partie bornée de $\mathbb{R}$ (i.e. majorée et minorée) et, d'après le Théorème I.1.4, elle admet une borne supérieure y_n. La suite (y_n) est décroissante et minorée et donc converge vers la borne inférieure y de $\{y_n\}$. Comme, pour tout entier k il existe un entier $n_k \geq k$ tel que $y_k - x_{n_k} \leq 1/k$, quitte à extraire de la suite (n_k) une suite strictement croissante, on construit aisément une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers y. □

Remarque I.2.1. *1. Avec les notations de ci-dessus, si on note m la borne inférieure de $A = \bigcap_n \overline{A_n}$ et M le borne supérieure de A, alors $\mathscr{V}(x_n) \subset [m, M]$.*

2. Si (x_n) est une suite quelconque de nombres réels, alors $\bar{\mathscr{V}}(x_n)$ est toujours non vide.

La seconde partie de la remarque résulte du fait que, si la suite est non bornée, par hypothèse, $+\infty$ ou $-\infty$ est une valeur d'adhérence.

DÉFINITION I.2.1.

> *Soit (x_n) une suite de nombres réels. La borne supérieure (resp. inférieure) de $\bar{\mathscr{V}}(x_n)$ s'appelle la* ***limite supérieure*** *(resp.* ***inférieure****) de la suite (x_n) et se note $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ (resp. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$) ou $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} x_n$).*

Remarque I.2.2. *(x_n) étant une suite de nombres réels, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \in \bar{\mathscr{V}}(x_n)$ et $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \in \bar{\mathscr{V}}(x_n)$.*

Exercices

Exercice I.1 (Structure des groupes additifs de $\mathbb{R}$).
Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et $A = \{x \in G,\ x > 0\}$.

1. Montrer que si $a = \inf A > 0$, alors $a \in A$ et $G = a\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $\inf A = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. Montrer que f admet une plus petite période non nulle.
4. Soit α un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Q}$. Montrer, en considérant l'ensemble $\{n\alpha + 2p\pi;\ (n,p) \in \mathbb{Z}^2\}$, que $X = \{\cos n\alpha;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice I.2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application croissante telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = kx$.
2. En déduire toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
et
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \ f(xy) = f(x)f(y).$$

Exercice I.3.

1. Soit un nombre réel $x \in [0, 1[$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) de nombres entiers appartenant à l'ensemble $\{0, 1, \dots, 9\}$ tels que $x = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x_n}{10^n}$.
   (b) Montrer qu'une telle suite (x_n) est unique si l'on ajoute la condition que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, x_n \neq 9\}$ est infini.
2. Une autre preuve de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$:
Supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N}^* \to [0, 1[$ et désignons par b_n le n-ième terme du développement décimal propre de $\varphi(n)$. Choisissons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre x_n de l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ avec $x_n \neq b_n$ et soit x le réel dont le développement décimal est $0, x_1x_2 \dots x_n \dots$. Que peut on penser de x ?

Exercice I.4.

1. Montrer que toute série absolument convergente de nombres réels est convergente.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ converge dans $\mathbb{R}$. On désignera par l sa somme.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < l < 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n!}$.
4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice I.5.
Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Exprimer, à l'aide de la notion de sous suite, la propriété :
« la suite (u_n) ne tend pas vers l ».

Exercice I.6.

1. Démontrer qu'une suite bornée converge si et seulement si ses limite supérieure et inférieure sont égales.
2. Soit (u_n) une suite numérique et L sa limite supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$. Montrer que L est caractérisé par les propriétés suivantes :
   (a) Quel que soit $\lambda < L$ l'ensemble E_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n > \lambda$ est infini.
   (b) Quel que soit $\lambda > L$ l'ensemble E_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n > \lambda$ est fini.

3. Caractériser de façon analogue la limite inférieure.

Exercice I.7.
Soit (x_n) une suite réelle telle que les sous suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers les nombres réels α et β respectivement. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite (x_n) ? Déterminer la limite supérieure de la suite $(a_n^{\frac{1}{n}})_{n>0}$ où $a_n = (1 + \dfrac{(-1)^n}{n})^{n^2}$.

Exercice I.8.
1. Démontrer la règle de Cauchy :
   « Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes, et soit :
   $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{n}}$ $(0 \leq L \leq +\infty)$.
   Si $L < 1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
   Si $L > 1$ la série $\sum u_n$ est divergente. »
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière complexe, son rayon de convergence R vérifie : $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
3. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Quel est celui de la série entière $\sum a_n^2 x^n$?

Exercice I.9.
Soit $x = (x_n)$ une suite réelle bornée telle que la suite $(x_{n^2} + 2x_n)$ converge vers une limite l.
1. Soit α une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Montrer que $l - 2\alpha$ est une autre valeur d'adhérence de la suite (x_n).
2. Itérer le procédé précédent et prouver que la suite (x_n) converge.

Exercice I.10.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application croissante de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une limite à droite et à gauche en tout point de I.

Chapitre II

ESPACES MÉTRIQUES

Dans ce chapitre, on pose les bases de l'analyse : les notions d'espace topologique et d'espace métrique sont constamment utilisées en analyse. On a choisi de ne traiter en détails que les espaces métriques. Néanmoins, tout espace métrique étant un espace topologique, on a décidé de donner, à part, la définition d'espace topologique ainsi que les principales terminologies qui lui sont attachées. Dans tout le cours qui suit, on pourra ainsi distinguer, dans l'étude des espaces métriques, ce qui résulte de la structure d'espace topologique sous-jacente et ce qui résulte de la structure métrique. De plus, en analyse fonctionnelle, on est amené, de façon quasi nécessaire, à considérer certains espaces topologiques qui ne sont pas des espaces métriques : par exemple la topologie de la convergence simple (c.f. Exemple II.6.1, page 22) est fortement utilisée dans l'étude des espaces de formes linéaires.

SECTION II.1

Vocabulaire topologique

Dans cette section, on donne la définition d'espace topologique ainsi que l'essentiel du vocabulaire topologique de base.

DÉFINITION II.1.1.

On appelle **espace topologique** *un ensemble E muni d'une partie $\mathscr{T}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathscr{T}$;

2. Toute réunion d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$;

3. toute intersection ***finie*** *d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$.*

Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés les **ouverts** *de l'espace topologique E. De plus les complémentaires de ouverts de E sont appelés les* **fermés** *de E. $\mathscr{T}$ est parfois appelée la* **topologie** *de E.*

On notera donc que toute intersection de fermés est un fermé et que toute réunion finie de fermés est un fermé et que E et $\emptyset$ sont des fermés (une partie de E peut être à la fois ouverte et fermée).

Exemple II.1.1 (L'espace topologique $\mathbb{R}$). *Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si, $\forall x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est contenu dans U. Il est bien clair que ceci défini une topologie sur $\mathbb{R}$.*

DÉFINITION II.1.2.

Soit E un espace topologique. Soit A une partie de E.

*1. On appelle **adhérence** de A l'intersection de tous les fermés contenant A (elle existe puisque E est un fermé qui contient A) et on la note $\bar{A}$. $\bar{A}$ est un fermé et les éléments de $\bar{A}$ sont appelés les **points adhérents** à A.*

*2. On appelle **intérieur** de A la réunion de tous les ouverts contenus dans A (elle existe, puisque $\emptyset$ est ouvert, mais peut être vide) et on la note $\mathring{A}$. $\mathring{A}$ est un ouvert et les éléments de $\mathring{A}$ sont appelés les **points intérieurs** de A.*

*3. L'ensemble $\bar{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé la **frontière** de A et se note généralement $\mathrm{Fr}(A)$.*

*4. Un point a de A est dit **isolé** (dans A) s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.*

DÉFINITION II.1.3.

*Soit E un espace topologique. On dit qu'une partie A de E est un **voisinage** d'un point $x \in E$ s'il existe un ouvert O contenant x et contenu dans A. En particulier $x \in A$ est intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de x et A est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points. Plus généralement, si A est une partie de E on appelle **voisinage** de A toute partie de E contenant un ouvert contenant A.*

Exemple II.1.2. *Dans l'espace topologique $\mathbb{R}$, un voisinage de x est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert de la forme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.*

DÉFINITION II.1.4.

*Un espace topologique E est dit **séparé** si étant donnés deux points distincts x et y de E, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

PROPOSITION II.1.1.

Soient E un espace topologique et A une partie de E.

1. Un point x de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A.

*2. Supposons que A soit infinie. On dit que $x \in E$ est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x contient une infinité de points de A (ce qui implique en particulier $x \in \bar{A}$).*

Démonstration. En effet, dans le cas contraire il existe un ouvert O contenant x et ne rencontrant pas A. Alors le complémentaire de O est un fermé contenant A et ne contenant pas x. □

PROPOSITION II.1.2.

Soient E un espace topologique et A une partie de E. Alors $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

Démonstration. En effet, si x n'appartient pas à $\mathring{A}$ alors tout ouvert O contenant x rencontre le complémentaire de A. □

PROPOSITION II.1.3.

Soient E un espace topologique et A et B deux parties de E. Alors :

1. Si $A \subset B$, $\bar{A} \subset \bar{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$;

2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Démonstration. Montrons par exemple la première égalité du 2. L'inclusion $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ provient du 1. ; d'autre part $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ ce qui donne l'inclusion inverse. □

Remarque II.1.1. *On notera que, en général, on a seulement les relations $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ et pas des égalités, comme le montre l'exemple $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2]$ pour la seconde. Un autre exemple est fourni par : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: dans ce cas $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\bar{B} = \mathbb{R}$, $\mathring{A} = \emptyset$ et $\mathring{B} = \emptyset$ (le fait que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ a été vu au Théorème I.1.2, page 2 et le fait que $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ au Corollaire 2 du Théorème I.1.3, page 3).*

DÉFINITION II.1.5.

*Soient E un espace topologique et $A \subset B$ deux parties de E. On dit que A est **dense** dans B si $\bar{A} \supset B$.*

DÉFINITION II.1.6.

*Un espace topologique E est dit **séparable** s'il contient un sous-ensemble dense dans E dénombrable.*

Exemple II.1.3. *Comme nous l'avons déjà vu $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui fait que $\mathbb{R}$ est séparable.*

DÉFINITION II.1.7.

Soient E un espace topologique et A une partie de E.

*1. On dit que A est **rare** si l'intérieur de son adhérence est vide ou, ce qui revient au même, que l'intérieur de $E \setminus A$ est dense.*

*2. On dit que A est **maigre** si elle est contenue dans une réunion dénombrable d'ensembles rares (i.e. si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides).*

Exemple II.1.4. *Dans $\mathbb{R}$ tout ensemble fini est rare. De même l'ensemble des points d'une suite convergente est rare. Par contre un ensemble dénombrable n'est pas rare en général : $\mathbb{Q}$ n'est pas rare puisqu'il est dense dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est toutefois maigre puisque dénombrable. Par contre, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas maigre : c'est une conséquence immédiate du Théorème de Baire (page 25).*

PROPOSITION II.1.4.

*Soit E un espace topologique et soit A une partie de E. Soit $\mathscr{T}_1 = \{A \cap O,\, O \in \mathscr{T}\}$. Alors A muni de $\mathscr{T}_1$ est un espace topologique. $\mathscr{T}_1$ est appelée la **topologie induite** par celle de E et on parle du **sous-espace topologique** A de E.*

La vérification de la proposition ci-dessus est immédiate.

DÉFINITION II.1.8.

Soit E un espace topologique, $\mathscr{T}$ la topologie de E.

*1. On dit qu'une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{T}$ est une **base pour la topologie** de E si tout ouvert de E est réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.*

*2. Soit x un élément de E. Soit $\mathscr{V}$ une famille de voisinages de x. On dit que $\mathscr{V}$ est une **base de voisinages** de x si tout voisinage de x contient un élément de la famille $\mathscr{V}$.*

En particulier, la famille des ouverts contenant x est une base de voisinages de x.

DÉFINITION II.1.9.

Soient E un espace topologique de topologie $\mathscr{T}$, et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Soient $E/\mathscr{R}$ l'ensemble quotient de l'ensemble E par la relation $\mathscr{R}$ et π la surjection canonique de E sur $E/\mathscr{R}$.

*1. L'ensemble $\mathscr{T}/\mathscr{R} = \{O \subset E/\mathscr{R}$ tels que $\pi^{-1}(O) \in \mathscr{T}\}$ est une topologie sur $E/\mathscr{R}$ appelée la **topologie quotient** de $\mathscr{T}$ par $\mathscr{R}$. On appelle **espace topologique quotient** de E par $\mathscr{R}$, l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ muni de la topologie quotient $\mathscr{T}/\mathscr{R}$.*

*2. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation **fermée** (resp. **ouverte**) si $\forall O \in \mathscr{T}$ (resp $\forall F$ fermé pour , $\mathscr{T}$), $\pi(O)$ (resp. $\pi(F)$) est ouvert (resp. fermé) pour $\mathscr{T}/\mathscr{R}$.*

Remarque II.1.2. *Il se peut qu'un espace topologique E soit séparé sans que l'espace topologique quotient $E/\mathscr{R}$ le soit.*

SECTION II.2

Espaces métriques, définition et premières propriétés

DÉFINITION II.2.1.

*On appelle **distance** sur un ensemble E une application $d\,:\, E \times E \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :*
1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in E$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$;
*4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$ (**inégalité triangulaire**).*

*De plus, on appelle **espace métrique** un ensemble E muni d'une distance d.*

Dans toute la suite, la distance d'un espace métrique E sera toujours notée d, sauf lorsque cela peut prêter à confusion, auquel cas la notation sera alors précisée.

Remarque II.2.1. *Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés 1. 3. et 4. de la définition ci-dessus, la propriété 2. étant remplacée par $\forall x \in E$, $d(x,x) = 0$ (i.e. la réciproque n'étant pas nécéssairement vérifiée) s'appelle un* ***écart*** *sur E.*

Comme application quasi-immédiate de l'inégalité triangulaire, on peut noter l'inégalité souvent utile suivante :

PROPOSITION II.2.1.

Soient E un espace métrique (de distance d) et x, y, z trois points de E. Alors $\mid d(x,z) - d(y,z) \mid \leq d(x,y)$.

DÉFINITION II.2.2.

Soit E un espace métrique.

1. Soient A et B deux parties non vides de E. On appelle ***distance de*** *A* ***à*** *B le nombre réel positif, noté $d(A,B)$, défini par $d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$;*

2. Soit A une partie non vide de E. On appelle diamètre de A le nombre réel positif, noté $\delta(A)$, défini par $\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x,y)$; on dit que A est ***borné*** *si son diamètre est fini.*

Remarque II.2.2. *Si $A = \{x\}$ on note simplement $d(\{x\}, B) = d(x,B)$. De plus on vérifie aisément que $d(A,B) = \inf_{x \in A} d(x,B)$.*

PROPOSITION II.2.2.

Soient E un espace métrique, A une partie non vide de E et x et y deux points de E. Alors $\mid d(x,A) - d(y,A) \mid \leq d(x,y)$.

Démonstration. En effet, par l'inégalité triangulaire, $d(x,A) = \inf_{z \in A} d(x,z) \leq d(x,y) + \inf_{z \in A} d(y,z) = d(x,y) + d(y,A)$, l'autre inégalité s'obtenant en échangeant les rôles de x et y. □

PROPOSITION II.2.3.

Soient E un espace métrique et A et B deux parties bornées de E. Alors $A \cup B$ est bornée et $\delta(A \cup B) \leq d(A,B) + \delta(A) + \delta(B)$.

Démonstration. En effet, on peut supposer $\delta(A \cup B) > \max(\delta(A), \delta(B))$ ce qui implique $\delta(A \cup B) = \sup_{x \in A, y \in B} d(x,y)$. Alors, si $a \in A$, $b \in B$ et $x \in A$ et $y \in B$, on a, par l'inégalité triangulaire, $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$, ce qui donne $d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$, donc, $\delta(A \cup B) \leq d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$ d'où le résultat. □

DÉFINITION II.2.3.

Soit E un espace métrique.

1. On appelle ***boule ouverte*** *(resp.* ***boule fermée, sphère***) ***de centre*** *x* ***et de rayon*** *r l'ensemble $B(x,r) = \{y \in E \text{ t.q. } d(y,x) < r\}$ (resp. $\bar{B}(x,r) = \{y \in E \text{ t.q. } d(y,x) \leq r\}$, $S(x,r) = \{y \in E \text{ t.q. } d(y,x) = r\}$;*

2. On dit qu'une partie O de E est ***ouverte*** *si $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$.*

PROPOSITION II.2.4.

Soit E un espace métrique. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des ouverts de E. Alors E muni de $\mathscr{T}$ est un espace topologique, les boules ouvertes forment une base pour la topologie de E et les boules ouvertes centrées en un point x une base de voisinages de x. On dit que $\mathscr{T}$ est la ***topologie définie par la distance de*** *E.*

Démonstration. En effet, il est clair qu'une réunion d'ensembles ouverts est ouverte et, si O_1 et O_2 sont deux ouverts, si $x \in O_1 \cap O_2$, et si $B(x,r_1) \subset O_1$ et $B(x,r_2) \subset O_2$, en posant $r = \min\{r_1, r_2\}$, on a $B(x,r) \subset O_1 \cap O_2$. □

Remarque II.2.3. *1. Les boules ouvertes centrées en x et de rayons rationnels (en fait $1/n$) forment aussi une base de voisinages de x. Tout point admet donc une base dénombrable de voisinages.*

2. Un espace métrique est séparé (c.f. Définition II.1.4, page 8).

3. Soit A une partie d'un espace métrique E. Pour $r > 0$, soit $V_r(A) = \{x \in E \text{ t.q. } d(x,A) < r\}$. Alors $V_r(A)$ est un voisinage de A mais l'ensemble des $V_r(A)$, $r > 0$, ne forme pas, en général, une base de voisinages de A (voir toutefois Proposition II.8.16, page 35). Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si on prend $A = \mathbb{R} = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, alors

$$V_r(A) = \{(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ \mid y \mid < r\},$$

et le voisinage ouvert

$$V = \{(x,y),\ \mid y \mid < \max\{1, 1/x\}\}$$

de A ne contient aucun $V_r(A)$; de même, si $B = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, pour tout $r > 0$, $V_r(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(1/n, r)$ ne contient pas le voisinage ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(1/n, 1/n)$ de B.

DÉFINITION II.2.4.

On dit qu'un espace topologique est **métrisable** *si sa topologie peut être définie par une distance.*

Remarque II.2.4. *Si d est un écart (Remarque II.2.1, page précédente) sur un ensemble E, on peut définir des boules et des sphères de la même manière que ci-dessus pour une distance, puis une topologie sur E, comme dans la Proposition précédente, qui n'est, à priori, pas séparée. On obtient ainsi un espace « semi-métrique » que l'on appelle, par abus de langage, un espace métrique. Bien que nous ne considérerons pas, pour la théorie, de tels espaces dans ce chapitre, il peut arriver, dans les exemples et dans les chapitres qui suivent, que l'on fasse appel à cette notion.*

PROPOSITION II.2.5.

Une boule fermée et une sphère sont des ensembles fermés. De plus, on a $\bar{B}(x,r) \supset \overline{B(x,r)}$, l'inclusion pouvant être stricte (c.f. Exemple 7, Section II.3, page 13).

Démonstration. En effet, si $y \notin \bar{B}(x,r)$, cela signifie que $d(x,y) > r$, et, si on pose $\rho = \dfrac{d(x,y)-r}{2}$, l'inégalité triangulaire montre que $\bar{B}(x,r) \cap B(y,\rho) = \emptyset$ ce qui montre que le complémentaire de $\bar{B}(x,r)$ est ouvert. La preuve pour la sphère est similaire. □

PROPOSITION II.2.6.

Soit E un espace métrique.

1. Soit A une partie de E. Alors un point x de E est adhérent à A si et seulement si $d(x,A) = 0$.

2. Tout fermé est l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles ouverts, et tout ouvert est réunion d'une suite croissante de fermés. Plus précisément, si F est fermé on a

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_{1/n}(F) = \bigcap_{r>0} V_r(F)$$

(c.f. le 3. de la Remarque II.2.3, page précédente) .

Démonstration. Si $x \in \bar{A}$ alors toute boule ouverte de rayon strictement positif rencontre A ce qui montre que $d(x,A) = 0$; réciproquement, si $d(x,A) = 0$, pour tout $r > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x,y) < r$ ce qui signifie que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. La première assertion du 2. en résulte, et la seconde s'obtient par passage au complémentaire. □

PROPOSITION II.2.7.

Pour qu'un espace métrique E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe une base dénombrable pour sa topologie.

Démonstration. La condition est clairement suffisante car si (O_n) est une telle base et si $a_n \in O_n, \forall n$, alors $\{a_n\}$ est clairement dense dans E. Inversement, supposons que E soit séparable et soit $\{a_n\}$ un sous-ensemble dense dénombrable. Montrons que la famille d'ouverts $\{B(a_n, 1/m)\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*}$ est une base pour la topologie de E. Pour cela il suffit de voir que tout boule $B(x,r)$, $r > 0$, contient un élément $B(a_n, 1/m)$ de la famille tel que $x \in B(a_n, 1/m)$. Puisque $\{a_n\}$ est dense dans E, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe n_p tel que $a_{n_p} \in B(x, r/p)$, . Alors, si p est assez grand, on peut trouver m tel que la boule $B(a_{n_p}, 1/m)$, avec $1/p < 1/m < r/2$, réponde à la question. □

DÉFINITION II.2.5.

Soient E un ensemble et $d_1$et d_2 deux distances sur E.

1. On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** *si les topologies qu'elles définissent sur E sont les mêmes.*

2. On dit que d_1 et d_2 sont **équivalentes** *s'il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que $cd_1 \leq d_2 \leq Cd_1$.*

On notera que, clairement, deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Par contre la réciproque est en général fausse.

PROPOSITION II.2.8.

Soient E un espace métrique et E_1 un sous-ensemble de E. Soit d_1 la restriction à $E_1 \times E_1$ de la distance de E. Alors d_1 est une distance sur E_1et la topologie définie par d_1 sur E_1 est la topologie induite par celle de E. On parle alors du **sous-espace métrique** *E_1.*

La démonstration de cette proposition est immédiate.

Remarque II.2.5. *Soient E un espace métrique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. En général, l'espace topologique quotient $E/\mathscr{R}$ n'est pas métrisable (i.e. sa topologie n'est pas définie par une distance).*

SECTION II.3

Exemples

1. La fonction $(x,y) \to \mid x-y \mid$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
   Plus généralement, la fonction $(x,y) \to \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$ appelée la distance Euclidienne. Pour $1 \le p < \infty$, $(x,y) \to \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^p\right)^{1/p}$ est aussi une distance sur $\mathbb{R}^n$.
   Pour le voir, on utilise l'inégalité de Minkowski qui se déduit de celle de Hölder :
   Soient a_i et b_i $1 \le i \le n$ des nombres réels positifs, et deux réels p et q de $[1,+\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors on a (**Inégalité de Hölder**) :
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}. \tag{II.3.1}$$
   En effet, la fonction $x \mapsto x^q$ étant convexe, on a $\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i d_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right)^q \le \frac{\sum_{i=1}^n c_i d_i^q}{\sum_{i=1}^n c_i}$, ce qui donne, puisque $\frac{q-1}{q}=\frac{1}{p}$,
   $$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \le \left(\sum c_i\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^q\right)^{1/q},$$
   et, si on applique cette inégalité à $c_i = a_i^p$ et $d_i = \frac{b_i}{a_i^{p/q}}$, on obtient (II.3.1).
   On en déduit alors aisément l'**inégalité de Minkowski** :
   $$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}. \tag{II.3.2}$$
   En effet, si q est tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, en écrivant $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}a_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}b_i$, (II.3.1) donne
   $$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right),$$
   d'où on déduit le résultat en utilisant que $q(p-1)=p$ puis que $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.
   Plus généralement encore, on note $l^p(\mathbb{C})$ (resp. $l^p(\mathbb{R})$) l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes (resp. réels) telles que
   $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty$$
   si $1 \le p < +\infty$, et $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < +\infty$ si $p=+\infty$. Sur ces ensembles, les fonctions $((x_n),(y_n)) \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$ (resp. $((x_n),(y_n)) \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|$) sont des distances, ce qui se déduit immédiatement de (II.3.2) pour $1 \le p < +\infty$ et est évident pour $p=+\infty$.
2. Soient A un ensemble et E un espace métrique. Soit $\mathscr{F}(A;E)$ l'ensemble des fonctions de A dans E. Alors
   $$d_u(f,g) = \sup_{x\in A}\{\min(1, d(f(x),g(x))\}$$
   est une distance sur $\mathscr{F}(A;E)$ appelée la **distance de la convergence uniforme** sur A et $\mathscr{F}(A;E)$ muni de cette distance se note généralement $\mathscr{F}_u(A;E)$.
3. Soit A un ensemble et $F=\mathscr{B}(A;E)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans un espace métrique E. Alors $d_u(f,g) = \sup_{x\in A} d(f(x),g(x))$ définit sur F une distance « presque » équivalente à la distance de la convergence uniforme sur A, dans le sens où elle est égale à la distance de la convergence uniforme sur A sur toute partie de diamètre plus petit que 1 et équivalente à la distance de la convergence uniforme sur A sur toute partie bornée. On note cet espace $\mathscr{B}_u(A;E)$.

4. Soient A un ensemble, E un espace métrique et $\mathscr{F}(A;E)$ l'ensemble des fonctions de A dans E. Soit $\mathscr{P} = (A_n)$ une famille dénombrable de parties de A telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Pour chaque n, soit
$$d_n(f,g) = \sup_{x\in A_n} \{\min(1, d(f(x), g(x))\}$$
la distance de la convergence uniforme sur A_n (ce n'est pas nécessairement une distance sur $\mathscr{F}(A;E)$, mais, à priori, seulement un écart). Alors
$$d_u(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}$$
est une distance sur $\mathscr{F}(A;E)$ appelée la **distance de la convergence uniforme sur les** A_n. Une suite de fonctions converge pour cette distance si et seulement si elle converge uniformément sur chaque A_n.
5. Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I. Alors
$$d(f,g) = \mid f(x_0) - g(x_0) \mid + \sup_{t\in I} \mid f'(t) - g'(t) \mid,$$
$x_0 \in I$, est une distance sur I.
6. Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $E = \mathscr{C}(I;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. Alors $d_1(f,g) = \int_a^b \mid f(t) - g(t) \mid dt$ est une distance sur E ainsi que $d_2(f,g) = \left(\int_a^b \mid f(t) - g(t) \mid^2 dt\right)^{1/2}$.
7. Soit E un ensemble. Posons $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,x) = 0$. Alors d est une distance sur E et l'espace métrique obtenu est appelé un **espace métrique discret**. On notera que, pour cet espace, on a $\{x\} = B(x,1) = \overline{B(x,1)}$ alors que $\bar{B}(x,1) = E$.
8. Soit p un nombre premier. Pour tout entier $n > 0$, soit $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n, en facteurs premiers. Clairement on a
$$v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n'),\ n, n' > 0. \tag{II.3.3}$$
Si $x = \pm r/s$ est un nombre rationnel non nul, r et s entiers > 0, on pose $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$, ce qui ne dépend pas de la représentation de x d'après (II.3.3). De même, on voit que (II.3.3) est vraie pour des rationnels non nuls. On pose alors, pour x et y rationnels
$$\begin{aligned} &d(x,y) = p^{-v_p(x-y)} \text{ si } x \neq y,\\ &d(x,x) = 0. \end{aligned} \tag{II.3.4}$$
Alors $d(.,.)$ est une distance sur $\mathbb{Q}$ appelée la **distance p-adique.** De plus elle vérifie l'inégalité
$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}. \tag{II.3.5}$$
Les distances vérifiant l'inégalité (II.3.5) sont dites **ultramétriques**.

SECTION II.4

Continuité dans les espaces topologiques et métriques

SOUS-SECTION II.4.1

Suites dans un espace métrique

DÉFINITION II.4.1.

Soient E un espace métrique et (x_n) une suite dans E. On dit que la suite (x_n) converge vers $x \in E$ si, pour tout voisinage V de x, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a $x_n \in V$ et on écrit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Remarque II.4.1. *On peut naturellement donner une définition semblable dans un espace topologique quelconque. Mais la notion ainsi définie n'a, en général, pas beaucoup d'intérêt.*

De la définition on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

PROPOSITION II.4.1.

Soit E un espace métrique.

1. Pour qu'une suite (x_n) dans E converge vers x il faut et il suffit que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique $d(x, x_n) < \varepsilon$. Il revient au même de dire que $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$.

2. Soit (x_n) une suite dans E. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ alors pour toute suite (x_{n_k}) extraite de la suite (x_n) on a $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

DÉFINITION II.4.2.

Soit (x_n) une suite dans un espace métrique E. On dit que $x \in E$ est une ***valeur d'adhérence*** *de la suite (x_n) s'il existe une suite extraite (x_{n_k}) telle que $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est parfois noté $\mathscr{V}(x_n)$.*

Si une suite (x_n) converge vers x alors x est l'unique valeur d'adhérence de (x_n). Mais la réciproque n'est pas vraie ; par exemple, dans $\mathbb{R}$ la suite définie par $x_{2n} = 1$, $x_{2n+1} = n$ a 1 comme unique valeur d'adhérence et ne converge pas.

PROPOSITION II.4.2.

Soit (x_n) une suite dans un espace métrique E. Soit $x \in E$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. x est valeur d'adhérence de (x_n) ;
2. Pour tout voisinage V de x et tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq m$ tel que $x_n \in V$;
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq m$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Cette proposition est évidente.

PROPOSITION II.4.3.

Soient E un espace métrique et A une partie de E. Soit $a \in E$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. $a \in \bar{A}$;
2. a est valeur d'adhérence d'une suite de points de A ;
3. a est limite d'une suite de points de A.

Démonstration. Vérifions simplement que 1. implique 3. : par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n \in B(a, 1/n)$. Alors la suite (a_n) répond à la question. □

PROPOSITION II.4.4.

Soit (x_n) une suite dans espace métrique E. Soit $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si A est infini et si x est point d'accumulation de A alors x est valeur d'adhérence de la suite (x_n).

Démonstration. En effet, ceci se voit en remarquant que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_p \in \mathbb{N}$, aussi grand que l'on veut tel que $d(x, x_{n_p}) < 1/p$. □

On remarquera que la réciproque de cette Proposition n'est pas vraie en général : une valeur d'adhérence d'une suite n'est pas nécessairement un point d'accumulation de l'ensemble des points de la suite comme la montre l'exemple $x_n = (-1)^n$.

SOUS-SECTION II.4.2

Fonctions continues

DÉFINITION II.4.3.

Soient E et E' deux espaces topologiques et f une application de E dans E'. On dit que f est ***continue en*** *$x_0 \in E$ si, pour tout voisinage V' de $f(x_0)$ dans E', il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que $f(V) \subset V'$. De plus, on dit que f est* ***continue*** *si elle est continue en tout point de E.*

Il revient au même de dire que, pour tout voisinage V' de $f(x_0)$ dans E', $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0 dans E. Dans le cas des espaces métriques, cette définition s'exprime aisément en termes de distances et de suites :

PROPOSITION II.4.5.

Soient E et E' deux espaces métriques de distances respectives d et d' et f une application de E dans E'. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en $x_0 \in E$;

2. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, $\mathrm{d}(x_0, x) < \delta$ implique $\mathrm{d}'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$;

3. Pour toute suite (x_n) dans E qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$ dans E'.

Démonstration. Pour voir que 3. implique les deux autres propriétés, on raisonne par l'absurde et on contredit facilement, par exemple, le 2. □

La propriété suivante est importante et complètement générale :

THÉORÈME II.4.1.

Soient E et E' deux espaces topologiques et f une fonction de E dans E'. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue ;

2. Pour tout ouvert O' de E', $f^{-1}(O')$ est un ouvert de E ;

3. Pour tout fermé F' de E', $f^{-1}(F')$ est un fermé de E ;

4. pour toute partie A de E $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Démonstration. Comme un ensemble est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points (c.f. Définition II.1.3), l'équivalence 1. $\Leftrightarrow$ 2. résulte de la définition ; 2. $\Leftrightarrow$ 3. s'obtient par passage au complémentaire ; 3. $\Rightarrow$ 4. en résulte aussitôt (car $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé contenant A) ; enfin 4. $\Rightarrow$ 3. car si F' est fermé, et si $F = f^{-1}(F')$, alors $f(\bar{F}) \subset \overline{F'} = F'$, donc $\bar{F} \subset f^{-1}(F') = F$. □

PROPOSITION II.4.6.

Soient E, E' et E'' trois espaces topologiques, $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0. En particulier, si f et g sont continues, $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstration. En effet, si W est un voisinage de $g \circ f(x_0)$ alors $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de x_0 par hypothèse. □

Si E est un espace topologique et si $F \subset E$ est un sous-espace de E, alors l'injection $i : F \to E$ est continue comme le montre la définition de la topologie induite (Définition II.1.4, page 9). On en déduit la propriété suivante :

PROPOSITION II.4.7.

Soient E et E' deux espaces topologiques, $f : E \to E'$ une fonction continue en x_0 et F un sous-espace de E contenant x_0. Alors la restriction $f_{|F}$ de f à F est continue en x_0.

Naturellement, la restriction $f_{|F}$ d'une application $f : E \to E'$ à un sous-espace F peut être continue sans que f soit elle même continue aux points de F.

PROPOSITION II.4.8.

Soient E un espace métrique et A et B deux parties non vides de E. Si $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Démonstration. En effet, d'après la Proposition II.2.2, page 10, la fonction $g(x) = d(x, A) - d(x, B)$ est continue sur E, strictement négative sur A et strictement positive sur B. Il suffit donc de prendre $U = g^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $V = g^{-1}(]0, +\infty[)$. □

DÉFINITION II.4.4.

Soient E et E' deux espaces topologiques et $f : E \to E'$. On dit que f est un ***homéomorphisme*** si elle est bijective et si f et f^{-1} sont toutes deux continues. De plus, dans ce cas, on dit que les espaces E et E' sont ***homéomorphes***.

La propriété suivante résulte des définitions :

PROPOSITION II.4.9.

Soient E un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur E. Soient E_1 et E_2 les espaces métriques obtenus en munissant E des distances d_1 et d_2 respectivement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ;

2. L'application identique est un homéomorphisme de E_1 sur E_2 ;

3. *Pour tout espace topologique F et toute fonction $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) *$f : E_1 \to F$ est continue ;*
   (b) *$f : E_2 \to F$ est continue.*

On traduit cette Proposition en disant que deux distances sont topologiquement équivalentes si elle définissent les même fonctions continues.

La Proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition des topologies quotients :

PROPOSITION II.4.10.

Soient E un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Alors la surjection canonique de E sur $E/\mathscr{R}$ est continue de l'espace topologique E sur l'espace topologique $E/\mathscr{R}$.

SOUS-SECTION II.4.3

Continuité uniforme, isométries

DÉFINITION II.4.5.

Soient E et E' deux espaces métriques. On dit qu'une fonction $f : E \to E'$ est ***uniformément continue*** *si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) < \delta$ implique $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

L'important dans cette définition est que le δ ne dépend pas de x ni de y ; c'est donc une propriété plus forte que la continuité : toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse. De plus, ***la continuité est une notion topologique*** alors que ***la continuité uniforme est une notion métrique***.

Exemple II.4.1. *Si A est un sous-ensemble non vide d'un espace métrique E alors $x \to d(x, A)$ est uniformément continue.*

En effet, ceci résulte de la Proposition II.2.2, page 10.

La proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION II.4.11.

La composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

DÉFINITION II.4.6.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques de distances respectives d_1 et d_2. On dit qu'une application $f : E_1 \to E_2$ est une ***isométrie*** *si, $\forall x, y \in E$, on a $d(f(y), f(y)) = d(x, y)$. Dans ce cas, et si f est surjective, on dit que les espaces E_1 et E_2 sont* ***isométriques****.*

Une isométrie bijective est naturellement un homéomorphisme uniformément continu ainsi que son inverse.

La Proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION II.4.12.

Soient E un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur E. Si ces distances sont équivalentes, pour tout espace métrique F, toute fonction $f : E \to F$ est uniformément continue pour d_1 si et seulement elle est uniformément continue pour d_2.

On traduit cette Proposition en disant que les fonctions uniformément continues sont les même pour deux distances équivalentes. On remarquera toutefois que la réciproque de cette propriété n'est pas vraie : il se peut que, pour deux distances non équivalentes les fonctions uniforméments continues soient les même (c'est par exemple le cas si d_1 est une distance non bornée et que l'on considère $d_2 = \min\{1, d_1\}$). En fait ce qui compte ici est ce que l'on appelle la *structure uniforme* de l'espace métrique. Pour avoir une idée sur cette notion, les plus courageux pouront consuter [Bou65] Chapitre 2.

SOUS-SECTION II.4.4

Limites

DÉFINITION II.4.7.

Soient E et E' deux espaces topologiques, A une partie de E, $a \in \bar{A}$ tel que $\forall V$ voisinage de a, $V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$, et f une fonction de A dans E. On dit que f a une ***limite*** *$b \in E'$ lorsque x tend vers a, $x \in A \setminus \{a\}$, et on écrit*

$$b = \lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x),$$

si la fonction $g : A \cup \{a\} \to E'$ définie par $g(x) = f(x)$, si $x \in A \setminus \{a\}$, et, $g(a) = b$, est continue du sous-espace topologique $A \cup \{a\}$ dans E'.

On notera que la condition « $\forall V$ voisinage de a, $V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$ » n'est pas nécessaire pour formuler la définition, mais, si a est un point isolé de A, la définition ne dit rien, et l'unicité de la remarque ci-dessous n'est plus vraie. Cette condition est donc supposée satisfaite dans toute la suite.

En termes de voisinages, cette définition se traduit comme suit :

PROPOSITION II.4.13.

Étant donné deux espaces topologiques E et E', soient $A \subset E$, $a \in \bar{A}$, $b \in E'$ et $f : E \to E'$. Alors

$$b = \lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$$

si et seulement si, pour tout voisinage V' de b dans E', il existe un voisinage V de a dans E tel que

$$f((V \cap A) \setminus \{a\}) \subset V'.$$

Remarque II.4.2. *1. Soient E et E' des espaces topologiques, $a \in E$ et $f : E \to E'$. Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que*

$$f(a) = \lim_{x \to a, x \in E \setminus \{a\}} f(x).$$

2. Si E' est séparé, f ne peut avoir qu'une seule limite lorsque x tend vers $a \in \bar{A}$ en restant dans $A \setminus \{a\}$.

3. On peut aussi définir $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ pour $a \in \bar{A}$. Si $a \notin A$, cela ne change rien ; par contre si $a \in A$, l'existence de cette limite est équivalente à la continuité en a de f.

Le 2. de la remarque ci-dessus est clair en vertu de la Proposition précédente et de la Définition II.1.4, page 8.

Dans le cas des espaces métriques, on peut exprimer cette définition avec la distance et les suites :

PROPOSITION II.4.14.

Soient E et E' deux espaces métriques de distances respectives d et d', $A \subset E$, $a \in \bar{A}$, $b \in E'$ et $f : E \to E'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$;

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $x \in A$, $x \neq a$, $d(x, a) < \delta$ implique $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

3. Pour toute suite (x_n) d'éléments de $A \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Démonstration. 2. est la traduction de 1. en termes de boules. L'équivalence entre 3. et les deux autres propriétés résulte de la Proposition II.4.5, page 15. □

Les propriétés résumées dans la proposition suivante sont toutes immédiates :

PROPOSITION II.4.15.

1. Si $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$, alors $b \in \overline{f(A \setminus \{a\})}$.

2. Si $f : E \to E'$ est telle que $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$ et si $g : E' \to E''$ est continue alors

$$g(b) = \lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} g \circ f(x).$$

3. Si $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$ et si $B \subset A$, $a \in \bar{B}$ alors $b = \lim\limits_{x \to a, x \in B \setminus \{a\}} f(x)$.

De la même manière que l'on a défini les limites supérieures et inférieures de suites de nombres réels (Définition I.2.1, page 3), on peut définir les limites supérieures et inférieures d'une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$:

DÉFINITION II.4.8.

*Soient E un espace métrique, f une fonction de E dans $\bar{\mathbb{R}}$, $A \subset E$ et a un point de E. On appelle **limite supérieure** (resp. **inférieure**) de f lorsque x tend vers a en restant dans A le nombre*

$$\varliminf_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x) = \inf_{r>0} \sup_{x \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap A} f(x)$$

(resp. $\displaystyle\varlimsup_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{x \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap A} f(x)$).

Naturellement, cette définition s'interprète aussitôt en termes de suites :

PROPOSITION II.4.16.

Soient E un espace métrique, f une fonction de E dans $\bar{\mathbb{R}}$, $A \subset E$ et a un point de E. Alors

$$b = \varliminf_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$$

(resp. $b = \displaystyle\varlimsup_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$) si et seulement si :

(a) Pour toute suite (x_n) d'éléments de $A \setminus \{a\}$ qui converge vers a on a

$$\varliminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq b$$

(resp. $\displaystyle\varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq b$) ;

(b) Il existe une suite (x_n) d'éléments de $A \setminus \{a\}$ qui converge vers a telle que

$$\varliminf_{n \to \infty} f(x_n) = b$$

(resp. $\displaystyle\varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) = b$).

SECTION II.5

Espaces connexes

SOUS-SECTION II.5.1

Connexité

DÉFINITION II.5.1.

*On dit qu'un espace topologique E est **connexe** si on ne peut pas le mettre sous la forme $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints non vides. Une partie A de E est dite **connexe** si l'espace topologique (pour la topologie induite) A l'est.*

On ferra attention au fait que, pour une partie, la connexité est une proporiété de la topologie induite. Précisément, si A n'est pas connexe, cela signifie qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 de l'espace E tels que $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$ et $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, **ce qui n'implique pas** $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Exemple II.5.1. *Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe ($\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap \{x < \sqrt{2}\}) \cup (\mathbb{Q} \cap \{x > \sqrt{2}\})$).*

On peut même dire plus : les seules parties de $\mathbb{Q}$ qui sont connexes sont les parties réduites à un point : $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu (c.f. Définition II.5.3, page 20).

Par contre :

PROPOSITION II.5.1.

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration. Soit A un connexe de $\mathbb{R}$. Si A n'est pas un intervalle, il existe trois points x, y et z dans $\mathbb{R}$ tels que $x < z < y$, x et y dans A et z dans le complémentaire de A. Ceci contredit la connexité de A puisque

$$A \subset]-\infty, z[\cup]z, +\infty[.$$

Vérifions maintenant que tout intervalle est connexe. Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$. Si A n'est pas connexe, il existe deux ouverts O_i, $i = 1, 2$, tels que $A \cap O_i \neq \emptyset$ $i = 1, 2$, et $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Soit x un point de $A \cap O_1$. Par hypothèse sur les O_i, on peut, par exemple, supposer qu'il existe $y \in A \cap O_2$, $y > x$. Soit alors

$$\beta = \sup\{z \text{ t.}q.\ [x, z[\subset A \cap O_1.$$

Alors $[x, \beta[\subset A \cap O_1$ et $\beta < y$. Clairement on ne peut avoir ni $\beta \in O_1$ ni $\beta \in O_2$ donc $\beta \notin A$ ce qui contredit le fait que A soit un intervalle. □

PROPOSITION II.5.2.

Dans un espace topologique toute union d'une famille de connexes dont l'intersection est non vide est connexe.

Démonstration. Soit C_i, $i \in I$, une telle famille. Supposons

$$\bigcup_{i \in I} C_i = O_1 \cup O_2,$$

O_i ouverts non vides de $\bigcup_{i \in I} C_i$ disjoints. Comme chaque C_i est connexe, il est soit contenu dans O_1 soit dans O_2. Comme ils ont tous un point en commun, ils sont tous contenus soit dans O_1 soit dans O_2. □

PROPOSITION II.5.3.

Soit A une partie connexe d'un espace topologique E. Tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Démonstration. En effet, supposons $B = O_1 \cup O_2$, les O_i étant des ouverts disjoints de B. Comme A est connexe, on doit avoir, par exemple, $A \cap O_1 = \emptyset$. Ceci qui implique $B \cap O_1 = \emptyset$ car si $x \in B \cap O_1$, O_1 est un voisinage de $x \in \bar{A}$ donc $O_1 \cap A \neq \emptyset$. □

PROPOSITION II.5.4.

Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques, f une application continue de E_1 dans E_2 et A une partie connexe de E_1. Alors $f(A)$ est connexe.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition et du Théorème II.4.1, page 15. □

La Proposition suivante est souvent très utile pour montrer qu'un espace est connexe :

PROPOSITION II.5.5.

Un espace topologique E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

Démonstration. Ceci est presque immédiat. La nécessité vient du fait que $\{0\}$ et $\{1\}$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\{0, 1\}$, et la suffisance se voit de même en raisonnant par l'absurde. □

PROPOSITION II.5.6.

*Soit E un espace topologique. La relation $x\mathscr{R}y$ entre éléments de E définie par « il existe une partie connexe de E qui contient x et y » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences pour cette relation sont appelées les **composantes connexes** de E. La classe d'équivalence contenant un élément x de E est la réunion des connexes de E contenant x et s'appelle la **composante connexe de** x. Lorsque l'on parle des composantes connexes d'une partie A d'un espace topologique E il s'agit toujours (sauf mention expresse du contraire) des composantes connexes de l'espace topologique A muni de la topologie induite par celle de E.*

Démonstration. Cette Proposition résulte de la Proposition II.5.2. □

DÉFINITION II.5.2.

*Un espace topologique E est dit **totalement discontinu** si ses composantes connexes sont toutes réduites à un seul point.*

DÉFINITION II.5.3.
Un espace topologique est dit ***localement connexe*** *si tout point admet une base de voisinages connexes.*

Exemple II.5.2. $\mathbb{R}^n$ *est un espace métrique localement connexe (en fait localement connexe par arc c.f. sous-section suivante).*

PROPOSITION II.5.7.
Pour qu'un espace topologique soit localement connexe il faut et il suffit que les composantes connexes des ouverts soient ouvertes. En particulier, dans un espace topologique localement connexe, tout point admet une base de voisinages ouverts connexes.

Démonstration. La preuve de cette propriété est très simple. En effet, si E est localement connexe, la conclusion résulte de la Proposition II.5.2 car, un point d'une composante connexe d'un ouvert possède un voisinage connexe contenu dans l'ouvert et ce voisinage est donc contenu dans la composante. Réciproquement, si V est un voisinage ouvert d'un point, la composante connexe du point dans V est un ouvert connexe contenu dans V. □

Remarque II.5.1. *Il est clair que la connexité locale n'implique pas la connexité. De même la connexité n'implique pas la connexité locale. Par exemple, dans* $\mathbb{R}^2$*, l'ensemble constitué du segment* $[0,1]$ *de* $\mathbb{R}$ *et de tous les segments* $\{(x,y),\ y \in [0,1],\ x \in \mathbb{Q}\}$ *est connexe (car il est connexe par arc c.f. sous-section suivante), mais les points qui ne sont pas sur* $\mathbb{R}$ *n'ont pas de voisinages connexes.*

Voici deux exemples classiques d'utilisation de la connexité :

PROPOSITION II.5.8.
Tout ouvert de $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est localement connexe, les composantes connexes de O sont ouvertes, et, comme $\mathbb{Q} \cap O$ est dense dans O, les composantes connexes de O sont les composantes connexes des rationnels de O et forment donc un ensemble dénombrable. □

PROPOSITION II.5.9 (*Théorème de Darboux*).
Soit f *une fonction dérivable de* $]0,1[$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors* $f'(]0,1[)$ *est un intervalle. En d'autres termes,* f' *vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Soit
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 < x < y < 1\}.$$
A est clairement un connexe (vérification facile en utilisant par exemple la connexité par arcs vue a la sous-section suivante). Soit g la fonction définie sur A par
$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$
D'après le théorème des accroissements finis, pour $(x,y) \in A$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(x,y) = f'(c)$. On a donc $g(A) \subset f'(]0,1[)$. D'autre part, si $x \in]0,1[$, on a $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} g(x,y)$ ce qui entraîne $f'(]0,1[) \subset \overline{g(A)}$. Le résultat découle donc de la Proposition II.5.3 et de la Proposition II.5.1. □

SOUS-SECTION II.5.2

Connexité par arcs

DÉFINITION II.5.4.
1. On dit qu'un espace topologique est ***connexe par arcs*** *si, étant donnés deux points* x *et* y *de* E*, il existe une application continue* f *de* $[0,1]$ *dans* E *telle que* $f(0) = x$ *et* $f(1) = y$*. On dit qu'une partie de* E *est connexe par arcs si le sous-espace correspondant est connexe par arcs.*
2. On dit qu'un espace topologique est ***localement connexe par arcs*** *si, tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.*

PROPOSITION II.5.10.
Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

Démonstration. Supposons $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts non vides disjoints. Soit $x \in O_1$ et $y \in O_2$; par hypothèse, il existe une fonction continue f de $[0,1]$ dans E telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Soit $t = \sup\{s \text{ t.q. } \forall r \in [0,s[,\ f(r) \in O_1\}$. On ne peut pas avoir $t = 1$ car f est continue ; on a donc $t < 1$. D'autre part, pour la même raison, on ne peut avoir ni $f(t) \in O_1$ ni $f(t) \in O_2$ ce qui est une contradiction. □

Remarque II.5.2. *Comme il a été dit dans la remarque de la sous-section précédente, la connexité par arc n'implique pas la locale connexité.*

Exemple II.5.3. *Soit A le graphe, dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, pour $x \in]0,1[$. A est évidement connexe par arcs, donc connexe, et par suite (Proposition II.5.3), $\bar{A}$ est connexe. Or on voit facilement que $\bar{A}$ est la réunion du graphe de la fonction et de l'intervalle $[-1,1]$ de l'axe des ordonnées ; on constate alors que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs (le graphe « n'atteint » jamais l'axe des ordonnées).*

Cet exemple montre que la réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

PROPOSITION II.5.11.

> *Soient E et F deux espaces topologiques, A une partie connexe par arcs de E et f une application continue de E dans F. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

Cette proposition est immédiate.

PROPOSITION II.5.12.

> *Soit E un espace topologique. La relation $x\mathscr{R}y$ définie entre deux éléments de E par « il existe un chemin continu dans E qui joint x à y » est une relation d'équivalence. Les classes pour cette relation sont appelées les **composantes connexes par arcs** de E. La classe d'équivalence contenant un élément x est appelée la **composante connexe par arcs de** x.*

Le fait que, dans cette Proposition, $\mathscr{R}$ soit une relation d'équivalence se vérifie en utilisant l'inverse d'un chemin continu (i.e. parcouru dans le sens inverse) et la juxtaposition de deux chemins.

PROPOSITION II.5.13.

> *Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

Démonstration. En effet, soit O un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit x_0 un point de O, et soit U l'ensemble des points de O qui peuvent être joints par un chemin continu contenu dans O. Toute boule de $\mathbb{R}^n$ étant connexe par arcs, U est ouvert ; d'autre part, si $y \in \bar{U}$, et si $y \in O$, alors, pour la même raison $y \in U$. Ceci montre que U est à la fois ouvert et fermé dans O ce qui termine la preuve. □

SECTION II.6

Produit d'espaces topologiques et d'espaces métriques

DÉFINITION II.6.1.

> *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques et soit $E = \prod_{i\in I} E_i$ le produit des ensembles E_i. Soit $\mathscr{T}$ la famille de parties de E définies comme étant les réunions quelconques d'ensembles de la forme $\prod_{i\in I} O_i$, où O_i est un ouvert de E_i et $O_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i. Alors $\mathscr{T}$ est une topologie sur E appelée la **topologie produit** des topologies des E_i. E muni de cette topologie s'appelle **l'espace topologique produit des** E_i et se note $E = \prod_{i\in I} E_i$.*

En effet, la seule chose à vérifier est que l'intersection de deux ensemble de la forme $\prod_{i\in I} O_i$, où O_i est un ouvert de E_i et $O_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i, est encore de la même forme, ce qui est évident.

Cette définition a pour conséquence immédiate la description suivante des voisinages des points pour la topologie produit :

PROPOSITION II.6.1.

Soient E_i une famille d'espaces topologiques et E le produit de ceux-ci. Soit $x = (x_i)$ un point de E. Alors les ensembles de la forme $V = \prod_{i \in I} V_i$ où V_i est voisinage de x_i et $V_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i, forment une base de voisinage de x.

Exemple II.6.1. *Soient A un ensemble et E un espace topologique. Soit $\mathscr{F}(A; E)$ l'ensemble des applications de A dans E. Identifions $\mathscr{F}(A; E)$ avec E^A (i.e. on identifie une fonction avec l'ensemble des valeurs qu'elle prend). Alors la topologie produit sur E^A s'appelle la* ***topologie de la convergence simple sur*** *$\mathscr{F}(A; E)$. L'espace topologique ainsi obtenu se note parfois $\mathscr{F}_s(A; E)$.*

A titre d'exercice, on pourra écrire explicitement une base de voisinages d'une fonction f pour cette topologie pour comprendre intuitivement cette terminologie.

Remarque II.6.1. *Si $E = \prod_{i \in I} E_i$ est le produit des espaces topologiques E_i, on peut considérer les projections canoniques p_i (i.e. $p_i((x_j)) = x_i$). Alors, p_i est continue de E dans E_i.*

Ceci est une conséquence facile de la définition et du fait que, si $W_j = \prod_{i \in I} U_i^j$ avec $U_i^j = E_j$ si $i \neq j$, $U_i^i = O_i$ ouvert de E_i, alors $W_j = \prod_{i \in I} U_i^j = p_i^{-1}(O_i)$.

PROPOSITION II.6.2.

Soient E l'espace topologique produit d'une famille d'espaces E_i, F un espace topologique et f une application de F dans E. Alors f est continue si et seulement si les applications $p_i \circ f$ sont continues.

Démonstration. Ceci s'obtient facilement par la remarque ci-dessus et le Théorème II.4.1, page 15. □

La topologie produit est en fait définie de sorte que cette proposition soit vraie (i.e. la topologie produit est la moins fine rendant continues les projections).

PROPOSITION II.6.3.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques de distances respectives d_1 et d_2. Alors, sur $E_1 \times E_2$ les trois distances

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_1, y_2)\},$$
$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

et

$$d''(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$$

*sont équivalentes et définissent la topologie produit. E muni de l'une de ces distances s'appelle l'****espace métrique produit*** *de E_1 et E_2.*

Démonstration. Le fait que ces distances sont équivalentes est très simple. Vérifions que d définit la topologie produit. Soit $x = (x_1, x_2)$ un point de E. Alors, pour d, la boule ouverte de centre x et de rayon r est le produit des boules ouvertes de centres x_i et de rayon r dans chaque E_i. Toute réunion de boules ouvertes pour d est donc un ouvert pour la topologie produit et la réciproque s'obtient tout aussi immédiatement. □

Un produit infini d'espaces métriques n'est pas, en général un espace métrique. Toutefois :

PROPOSITION II.6.4.

Un produit dénombrable d'espaces métriques E_n, $n \in N$, est un espace métrique dont la topologie est définie par la distance d donnée par la formule

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

où d_n désigne la distance de E_n, $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$.

Démonstration. Soit $B(x, r)$ une boule ouverte pour d. Puisque la série $\sum 1/2^n$ est convergente, il existe n_0 tel que, $B(x, r)$ contiennent l'ensemble des $y = (y_n)$ tels que $d_n(x_n, y_n) < r/4$ pour $n \leq n_0$. On déduit facilement le résultat de cette remarque. □

La propriété suivante est immédiate :

PROPOSITION II.6.5.

Soient $E = E_1 \times E_2$ un espace métrique produit, F un espace métrique et f une application de F dans E. Pour que f soit uniformément continue, il faut et il suffit que les fonctions $p_i \circ f$, $i = 1, 2$ le soient.

La description faite ci-dessus de la topologie produit montre que, la plupart du temps, pour vérifier une propriété sur un espace produit il suffit de la vérifier sur chacun des facteurs. La proposition suivante est une liste de telles propriétés et la démonstration en est laissée au lecteur :

PROPOSITION II.6.6.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques et E leur produit.
1. Pour qu'une suite $z_n = (x_n, y_n)$ soit convergente, il faut et il suffit que les suites (x_n) et (y_n) le soient.
2. Pour que E soit un espace de l'un des types suivants
- borné ;
- séparable,
- connexe,
- localement connexe,
il faut et il suffit que E_1 et E_2 soient tous deux du même type.

SECTION II.7

Espaces métriques complets

SOUS-SECTION II.7.1

Suites de Cauchy, espaces métriques complets

DÉFINITION II.7.1.

Soit E un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) dans E est **de Cauchy** *si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $p, q \geq n_0$ implique $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.*

On notera que cette notion fait appel à la distance de E : ce n'est pas une notion topologique. Ainsi elle n'est pas nécessairement stable si on remplace la distance de E par une distance topologiquement équivalente (c.f. Exemple 3), mais elle l'est si on la remplace par une distance équivalente.

PROPOSITION II.7.1.

Soit E un espace métrique.
1. Toute suite convergente dans E est de Cauchy.
2. Si une suite de Cauchy dans E possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Démonstration. Le 1. est évident, vérifions le 2. Soit (x_n) de Cauchy et (x_{n_k}) extraite telle que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc deux entiers n_0 et k_0 tels que $p, q \geq n_0$ et $k \geq k_0$ impliquent $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ et $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Si $m_0 \geq \max\{n_0, n_{k_0}\}$, on a alors, pour $n \geq m_0$, $d(x_n a) < 2\varepsilon$. □

DÉFINITION II.7.2.

Un espace métrique E est dit **complet** *si toute suite de Cauchy de E est convergente.*

PROPOSITION II.7.2.

Soit E un espace métrique et F un sous-espace. Si F est complet, il est fermé dans E. Si E est complet, F est fermé si et seulement si il est complet.

Ceci est immédiat.

La proposition suivante se montre directement à partir des définitions (c.f. Proposition II.6.6, page 23) :

PROPOSITION II.7.3.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $E_1 \times E_2$ est complet si et seulement si les espaces E_1 et E_2 sont tous deux complets. De même, un produit dénombrable d'espaces métriques (c.f. Proposition II.6.4, page 22) est complet si et seulement si chaque facteur est complet.

DÉFINITION II.7.3.

*Soient E et E' deux espaces métriques, $A \subset E$, $f : A \to E'$. On appelle **oscillation de f dans** A, et on note $\Omega(f; A)$, le diamètre de $f(A)$:*

$$\Omega(f; A) = \delta(f(A)).$$

*Soit $a \in \bar{A}$. On appelle **oscillation de f au point a par rapport à** A le nombre*

$$\Omega(f; a, A) = \inf_{V \text{ voisinage de } a} \delta(f(V \cap A)).$$

PROPOSITION II.7.4.

Soient E et E' deux espaces métriques. On suppose que E' est complet. Soient $A \subset E$ et $a \in \bar{A}$. Pour que

$$\lim_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$$

existe, il faut et il suffit que l'oscillation de f au point a par rapport à $A \setminus \{a\}$ soit nulle, et de même pour $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ (c.f. Définition II.4.7).

COROLLAIRE.

Dans les conditions de la Proposition, pour que $\lim\limits_{x \to a, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$ existe, il faut et il suffit que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, $x_n \neq a$, qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans E'.

Démonstration. La condition est bien sûr nécessaire. Pour voir quelle est suffisante, on raisonne par l'absurde : si la limite n'existe pas, il existe une suite (x_n) dans $A \setminus \{a\}$ qui converge vers a telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas. Comme E' est complet cela implique que $(f(x_n))$ n'est pas de Cauchy. □

PROPOSITION II.7.5 (*Propriété de Cantor*).

Soit E un espace métrique complet. Soit (F_n) une suite de sous-ensembles fermés non vides de E décroissante au sens de l'inclusion et telle que le diamètre de $\delta(F_n)$ vérifie

$$\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0.$$

Alors l'intersection des F_n est exactement un point.

Démonstration. En effet, pour tout n soit $x_n \in F_n$. La décroissance et la propriété sur le diamètre impliquent que la suite (x_n) est de Cauchy et donc converge vers $x \in E$ puisque E est complet. Puisque $\bigcap\limits_n F_n \subset F_m$ pour tout m, il en résulte que son diamètre est nul, ce qui termine la preuve. □

Remarque II.7.1. *ATTENTION : si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés d'un espace métrique complet dont le diamètre ne tends pas vers zéro, il se peut que l'intersection des F_n soit vide : c'est le cas par exemple de $F_n = [n, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Cela peut aussi se produire avec une suite décroissante de fermés bornés (c.f. Exemple 2, page 26).*

PROPOSITION II.7.6.

Soit E un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
(ii) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.
(iii) Tout ensemble ouvert non vide est non maigre (Définition II.1.7, page 9).
(iv) Le complémentaire d'un ensemble maigre est dense.
(v) Toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés vérifiant $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$ est telle que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense.

Démonstration. (i) et (ii) sont équivalents par passage au complémentaire, (ii) implique clairement (iii) qui implique tout aussi facilement (iv). Voyons que (iv) implique (v) : si

$$x \in E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n,$$

comme il existe n_0 tel que $x \in F_{n_0}$, on a $x \in \mathrm{Fr}(F_{n_0})$. Comme $\mathrm{Fr}(F_n)$ est rare, la réunion de ces ensembles est maigre, ce qui montre (v). Reste à voir que (v) implique (i). Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Clairement l'hypothèse implique que E n'est pas maigre (s'il est non vide) et, par suite, la réunion des complémentaires des U_n ne peut être égale à E c'est-à-dire que l'intersection des U_n est non vide. Si on remarque que tout ouvert de E vérifie automatiquement la propriété (v) (en effet, si F_n, $n \geq 1$, est une suite de fermés d'un ouvert O de E dont la réunion des intérieurs (dans O) est dense dans O, on a $F_n = \tilde{F}_n \cap O$, $n \geq 1$, où $\tilde{F}_n$ est un fermé de E, et, en posant $\tilde{F}_0 = E \setminus O$, on obtient une suite $\tilde{F}_n$, $n \geq 0$, de fermés de E dont la réunion des intérieurs (dans E) est dense dans E, ce qui implique que

$$\bigcup_{n\geq 1} \left(\overset{\circ}{\tilde{F}}_n \cap O \right)$$

est dense dans O, d'où le résultat), le raisonnement ci-dessus donne aussitôt la conclusion. □

Les propriétés introduites dans la Proposition précédente se justifient par le Théorème essentiel suivant :

THÉORÈME II.7.1 (*Théorème de Baire*).

Un espace métrique complet vérifie les conditions équivalentes de la Proposition II.7.6 ci-dessus.

Démonstration. Démontrons ce théorème sous la forme de l'assertion sur les fermés. Soit donc $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieurs vides de E et montrons que le complémentaire de $\bigcup_n F_n$ rencontre toute boule ouverte. Soit B_0 une telle boule. Puisque $E \setminus F_1$ est dense et ouvert il contient une boule ouverte B_1 de rayon $\varepsilon < 1$ d'adhérence contenue dans B_0. De même $E \setminus (F_2)$, donc $E \setminus (F_1 \cup F_2)$, contient une boule ouverte B_2 de rayon $< 1/2$ d'adhérence contenue dans B_1. En recommençant de même avec F_3 et B_2, et ainsi de suite, on construit une suite décroissante de boules ouvertes B_n de rayons tendant vers zéro et telles que $\bar{B}_n \subset B_{n-1}$ et

$$B_n \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

La Proposition II.7.5 montre que l'intersection des B_n contient un point, qui, par construction, est dans le complémentaire de la réunion des F_n, ce qui termine la preuve. □

Remarque II.7.2. *L'importance de ce Théorème a entraîné l'utilisation de nombreuses terminologies.*

1. Une intersection dénombrable d'ouverts denses s'appelle un G_δ et une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides un F_σ. Un sous-ensemble maigre (Définition II.1.7, page 9) d'un espace topologique est contenu dans un F_σ.

2. Un espace métrique est dit de **première catégorie de Baire** *s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles dont les adhérences sont d'intérieurs vides. Dans le cas contraire, il est dit de* **seconde catégorie de Baire***. Le Théorème de Baire implique donc qu'un espace métrique complet est de seconde catégorie de Baire.*

Ce Théorème a de nombreuses applications non évidentes en analyse. Les deux Propositions suivantes en sont des exemples très classiques. La première, que nous utiliserons au chapitre suivant, est parfois appelée « le principe de la borne uniforme » et la seconde est connue sous le nom de « Théorème de Sunyer et Balaguer » (une autre application tout aussi classique est le résultat de l'exercice I page 95) :

PROPOSITION II.7.7.

Soient E un espace métrique complet (ou un espace de Baire) et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. Si

$$\forall x \in E,\ \sup_{i\in I} f_i(x) < +\infty,$$

alors, pour tout ouvert U de E il existe un ouvert non vide O_U contenu dans U tel que

$$\sup_{x\in O_U} \sup_{i\in I} f_i(x) < +\infty.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat avec $U = E$ quitte à l'appliquer ensuite à une boule fermée de E. Soit $F_n = \{x \in E \text{ t.q. } \forall i \in I,\ f_i(x) \leq n\}$. $F_n est$ fermé, comme intersection de fermés, et $E = \bigcup_n F_n$ par hypothèse. D'après le théorème de Baire, il existe n_0 tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide ce qui est le résultat cherché. □

PROPOSITION II.7.8.

> *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ (dépendant à priori de x !) tel que $f^{(n)}(x) = 0$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f. Alors f est un polynôme.*

Démonstration. Soit O l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ au voisinage desquels il existe une dérivée de f qui est identiquement nulle. Il est clair que O est un ouvert. Si l'on montre que $O = \mathbb{R}$ alors la démonstration est terminée en vertu de la remarque suivante :

Soit I un intervalle ouvert (borné ou non) contenu dans O. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}$ est identiquement nulle sur I. On peut bien sûr supposer I non vide. Soit x_0 un point de I. Par hypothèse, il existe un entier n et un intervalle ouvert contenant x sur lequel $f^{(n)}$ s'annule. Soit $J =]\alpha, \beta[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans I sur lequel $f^{(n)}$ s'annule. Supposons $J \neq I$: par exemple, $\beta \in I$. Par continuité, pour tout entier $p \geq 0$, $f^{(n+p)}(\beta) = 0$. Par ailleurs ; il existe un entier m tel que $f^{(m)}$ est identiquement nulle au voisinage de β. Alors la formule de Taylor-Young appliquée en β à un ordre suffisament grand montre que f est un polynôme de degré n au voisinage de β ce qui contredit la définition de J.

Soit maintenant $F = \mathbb{R} \setminus O$. Comme F est fermé, c'est un espace métrique complet. Remarquons tout d'abord que F ne possède pas de points isolés : en effet, si $x_0 \in F$ était isolé dans F, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que les intervalles $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ seraient contenus dans O, et, d'après ce qui précède il existerait une dérivée de f identiquement nulle sur ces deux intervalles ce qui implique $x_0 \in O$. Appliquons maintenant le Théorème de Baire à F. Soit $F_n = \{x \in \ \text{tels que } f^{(n)}(x) = 0\}$. Les F_n sont des fermés de F, et, par hypothèse, F est réunion des F_n. Le Théorème de Baire implique donc qu'il existe n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non nul (dans F bien sûr). En d'autres termes, il existe $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in F_{n_0}$ tel que f^{n_0} est nulle sur $H =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap F$.

Remarquons maintenant que, en tout point y de H, on a $f^{(n_0+p)}(y) = 0$, pour tout entier $p \geq 0$. En effet, comme F n'a pas de points isolés, y est limite d'une suite infinie de points de H. En appliquant le Théorème de Rolle entre deux points de cette suite, on conclut qu'il existe une suite infinie de points qui converge vers y et sur lesquels $f^{(n_0+1)}$ s'annule. En répétant ce procédé, par récurrence, pour tout entier $p \geq 0$, on produit une suite infinie qui converge vers y sur laquelle $f^{(n_0+p)}$ s'annule. Ceci prouve notre assertion par continuité.

Comme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus H$ est un ouvert, c'est une réunion dénombrable d'intervalles d'ouverts $I_n =]a_n, b_n[$ deux à deux disjoints (Proposition II.5.8, page 20). Pour chacun de ces intervalles I_n, il existe un entier m_n tel que $f^{(m_n)}$ est nulle sur I_n. Alors, en appliquant la formule de Taylor en a_n à un ordre suffisament élevé, on conclut que f est un polynôme de degré n_0 sur I_n. Il en résulte que $f^{(n_0)}$ est identiquement nulle sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ce qui contredit le fait que $x_0 \in F$ et termine la preuve.

C.Q.F.D.

Il existe des espaces topologiques (non nécessairement métriques (c.f. Proposition II.8.22, page 37)) qui vérifient les conclusions du Théorème de Baire. Ceci a amené à introduire la terminologie suivante :

DÉFINITION II.7.4.

> *On dit qu'un **espace topologique** E est **de Baire** s'il vérifie les conclusions du Théorème de Baire, c'est-à-dire les propriétés équivalentes de la Proposition II.7.6.*

PROPOSITION II.7.9.

> *Tout ouvert d'un espace topologique de Baire est de Baire.*

Démonstration. Supposons donc que O est un ouvert d'un espace de Baire E, et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de O. Alors les U_n sont denses (dans E) dans $\bar{O}$ et si $U = E \setminus \bar{O}$, $\tilde{U}_n = U_n \cup U$ est dense dans E. Par hypothèse, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{U}_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cup U$ est dense dans E ce qui implique que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans O. □

SOUS-SECTION II.7.2

Exemples d'espaces métriques complets

1. $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne est un espace métrique complet. En effet, cela résulte facilement du fait que $\mathbb{R}$ est complet (Théorème I.1.3 page 2), car si on a une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$, les suites coordonnée par coordonnée sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (Proposition II.7.3).
2. Les espaces $l^p(\mathbb{C})$ et $l^p(\mathbb{R})$ (c.f. Exemple 1, page 12) sont des espaces métriques complets. De plus, l'espace $c_0(\mathbb{C})$ (resp. $c_0(\mathbb{R})$) formé des suites de $l^\infty(\mathbb{C})$ (resp. $l^\infty(\mathbb{R})$) qui tendent vers zéro à l'infini est un sous-espace fermé donc un espace métrique complet. L'espace $l^1(\mathbb{R})$ fournit un exemple très simple d'une suite décroissante de sous-ensembles bornés fermés dont l'intersection est vide (alors qu'il est complet) : soit e_n l'élément de cet espace dont la i-ième coordonnée vaut δ_{in} (symbole de Kronecker qui signifie $\delta_{in} = 1$ si $i = n$ et $\delta_{in} = 0$ sinon. Soit alors $F_n = \{e_j,\ j \geq n\}$; il est clair que les F_n sont bornés et que leur intersection est vide ; enfin ils sont fermés car F_n ne peut contenir aucune suite de Cauchy (infinie) puisque la distance de e_n à e_m est égale à 2 si $n \neq m$.

3. Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'application $(x, y) \mapsto d'(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \mid \mathrm{Arctg}(x) - \mathrm{Arctg}(y) \mid$ est une distance qui définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ ($t \mapsto 2/\pi \mathrm{Arctg}(t)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Toutefois $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour d' : les suites (n) et $(\mathrm{cotg}(1/n))$ sont de Cauchy pour d' mais ne convergent pas.
4. $\mathscr{F}_u(A; E)$ Exemple 2, page 12, l'ensemble des applications d'un ensemble A dans un espace métrique complet E muni de la distance de la convergence uniforme est complet. En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy de fonctions pour la convergence uniforme, alors, pour tout $x \in A$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans E et donc converge, et on conclut facilement.
5. $\mathscr{B}_u(I; \mathbb{C})$ (Exemple 3, page 12) est un espace métrique complet car une limite uniforme de fonctions bornées est bornée et, si (f_n) est une suite de Cauchy de fonctions bornées pour la convergence uniforme, alors la limite est une fonction bornée. Plus généralement, l'espace $\mathscr{B}_u(A, E)$ des fonctions bornées d'un ensemble A dans un espace métrique complet E muni de la métrique de la convergence uniforme est complet.
6. Soient E un espace topologique et E' un espace métrique. On note $\mathscr{C}_u(E; E')$ l'espace métrique des fonctions continues de E dans E' muni de la distance de la convergence uniforme (Exemple 3, page 12). Si E' est complet alors $\mathscr{C}_u(E; E')$ est aussi complet. En effet, on vérifie sans peine qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.
7. $\mathscr{C}^1(I; \mathbb{C})$ (Exemple 5, page 13) est un espace métrique complet. En effet, si (f_n) est de Cauchy dans cet espace, la suite (f'_n) converge uniformément sur I, et, comme $(f_n(x_0))$ converge, un théorème nous dit que (f_n) converge uniformément vers une fonction dérivable f dont la dérivée est la limite des f'_n.
8. L'Exemple 6, page 13, fournit un espace métrique non complet. En effet, pour simplifier les notations, supposons $I = [0, 2]$ et considérons la suite de fonctions continues (f_n) définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \text{ sur } [0, 1], \\ 1 \text{ sur } [1, 2]. \end{cases}$$
Cette suite est bien de Cauchy car $\displaystyle\int_0^2 \mid f_p(x) - f_q(x) \mid dx \leq 2 \int_0^1 f_p(x)dx \leq \frac{2}{p+1}$, si $q \geq p$. Supposons donc que cette suite converge vers une fonction continue f ce qui signifie que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mid f_n - f \mid dx = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \mid f_n - f \mid dx = 0.$$
La seconde condition donne $\displaystyle\int_1^2 \mid f - 1 \mid dx = 0$ ce qui entraîne (puisque f est continue) $f \equiv 1$ sur $[1, 2]$, et comme,
$$\int_0^1 \mid f \mid dx \leq \int_0^1 \mid f_n - f \mid dx + \int_0^1 \mid f_n \mid dx,$$
ce qui précède montre que $\displaystyle\int_0^1 \mid f \mid dx = 0$ et, par suite, $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$ ce qui conduit à une contradiction puisque f est continue.
9. Un exemple d'application du Théorème de Baire est le suivant : soit f une fonction positive intégrable au sens de Riemann sur un segment $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Les ensemble $\overline{\{f \geq 1/n\}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont évidemment d'intérieurs vides, et il résulte du Théorème II.7.1 que leur réunion l'est aussi et contient $\{f > 0\}$.

SOUS-SECTION II.7.3

Théorèmes de prolongement

PROPOSITION II.7.10.

Soient E et F deux espaces métriques et f et g deux applications continues de E dans F.
1. L'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E.
2. Pour que $f \equiv g$ il faut et il suffit que l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = g(x)$ soit dense dans E.
3. Supposons que $E = \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \leq g(x)$ est fermé dans E.
4. Supposons encore $E = \mathbb{R}$. Pour que $f \leq g$ il faut et il suffit que l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \leq g(x)$ soit dense dans E.

La vérification de cet énoncé est évidente.

PROPOSITION II.7.11.

Soient E et F deux espaces métriques, A un sous-ensemble dense de E et f une application de A dans F. Pour qu'il existe une application continue $\bar{f}$ de E dans F coïncidant avec f dans A il faut et il suffit que, $\forall x \in E$, $\lim\limits_{y \to x, y \in A} f(y)$ existe dans F. De plus l'application $\bar{f}$ est alors unique.

Démonstration. Comme A est dense dans E, la condition est clairement nécessaire d'après la Remarque II.4.2, 3., page 17, appliquée à $\bar{f}$. Supposons donc la condition satisfaite. On pose donc $\bar{f}(x) = \lim\limits_{y \to x, y \in A} f(y)$, $x \in E$. L'hypothèse implique tout d'abord que $\bar{f}_{|A} = f$, et il reste à voir que $\bar{f}$ est continue. Soient $x \in E$ et W un voisinage fermé de $\bar{f}(x)$ dans F. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de x dans E tel que $f(\underline{A \cap V}) \subset W$. Puisque $\bar{f}(y)$, $y \in V$, est la limite de f par rapport à A c'est aussi la limite de f par rapport à $A \cap V$ et, par suite $\bar{f}(y) \in \overline{f(A \cap V)} \subset W$. □

PROPOSITION II.7.12.

Soient E un espace métrique, A un sous-ensemble de E dense dans E, F un espace métrique complet et f une application uniformément continue de A dans F. Alors f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue $\bar{f}$ de E dans F.

Démonstration. En vertu de la Proposition précédente et de la Proposition II.7.4, page 24, il suffit de voir que l'oscillation de f par rapport à A en un point quelconque x de E est nulle ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse de continuité uniforme. □

THÉORÈME II.7.2 (*Théorème de Tietze-Urysohn*).

Soient$E$ un espace métrique, A une partie fermée de E et f une application continue bornée de A dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une fonction continue g de E dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans A et qui est telle que $\sup\limits_{x \in E} g(x) = \sup\limits_{y \in A} f(y)$ et $\inf\limits_{x \in E} g(x) = \inf\limits_{y \in A} g(y)$.

Démonstration. Comme on peut supposer f non constante, quitte à la remplacer par $y \mapsto \alpha f(y) + \beta$, $\alpha \neq 0$, on peut supposer $\inf\limits_{y \in A} f(y) = 1$ et $\sup\limits_{y \in A} f(y) = 2$. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pour } x \in A, \\ \dfrac{\inf\limits_{y \in A} (f(y) d(x, y))}{d(x, A)}, & \text{pour } x \in E \setminus A. \end{cases}$$

L'hypothèse $1 \leq f \leq 2$ implique $1 \leq g \leq 2$ il reste donc seulement à montrer que g est continue. Comme g est continue sur $\overset{\circ}{A}$ par construction, montrons tout d'abord qu'elle est aussi continue sur $E \setminus A$. Sur cet ensemble $d(x, A)$ est non nulle et continue (Proposition II.2.2, page 10) et il faut donc voir que $h(x) = \inf\limits_{y \in A} f(y) d(x, A)$ est continue en tout point x de $E \setminus A$. Or, si $r = d(x, A) > 0$, pour $d(x, x') \leq \varepsilon < r$, on a $f(y)d(x, y) \leq f(y)d(x', y) + 2\varepsilon$ donc $h(x) \leq h(x') + 2\varepsilon$. De même on a $h(x') \leq h(x) + 2\varepsilon$ ce qui donne le résultat.

Reste à voir la continuité en un point frontière x de A. Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de f, il existe $r > 0$ tel que pour $y \in B(x, r) \cap A$, on a $\mid f(y) - f(x) \mid \leq \varepsilon$. Soit x' tel que $d(x, x') \leq r/4$. Si $x' \in A$, on a $\mid g(x) - g(x') \mid = \mid f(x) - f(x') \mid \leq \varepsilon$; supposons donc $x' \in E \setminus A$. Pour $y \in A$ et $d(x, y) \geq r$, on a $d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq 3r/4$ donc $\inf\limits_{y \in A, d(x,y) \geq r} \big(f(y) d(x', y)\big) \geq 3r/4$ et comme $f(x) d(x, x') \leq 2d(x', x) \leq r/2$ il vient

$$\inf_{y \in A} \big(f(y) d(x', y)\big) = \inf_{y \in A, d(x,y) < r} \big(f(y) d(x', y)\big).$$

On a donc

$$(f(x) - \varepsilon)\, d(x', A) \leq \inf_{y \in A} \big(f(y) d(x', y)\big) \leq (f(x) + \varepsilon)\, d(x', A),$$

ce qui montre bien que $\mid g(x') - f(x) \mid \leq \varepsilon$ et termine la preuve. □

SOUS-SECTION II.7.4

Complétion d'un espace métrique

Au Chapitre I, nous avons construit $\mathbb{R}$ de sorte que ce soit le « plus petit » espace métrique contenant $\mathbb{Q}$ qui soit complet. Ce procédé de « complétion » est général :

THÉORÈME II.7.3.

*Soit E un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\hat{E}$ tel qu'il existe une isométrie $\hat{T}$ de E dans $\hat{E}$ telle que $\hat{T}(E)$ soit dense dans $\hat{E}$ (**existence du complété**). De plus si $\tilde{E}$ est un autre espace métrique complet pour lequel il existe une isométrie $\tilde{T}$ de E dans $\tilde{E}$ telle que $\tilde{T}(E)$ soit dense dans $\tilde{E}$ alors $\hat{E}$ et $\tilde{E}$ sont isométriques (**unicité du complété**).*

Démonstration. Vérifions tout d'abord l'unicité. $\tilde{T} \circ \hat{T}^{-1}$ est une isométrie de $\hat{T}(E)$ dans $\tilde{E}$ et se prolonge dont en une isométrie ϑ_1 de $\hat{E}$ dans $\tilde{E}$ (Proposition II.7.12, page ci-contre). De même $\hat{T} \circ \tilde{T}^{-1}$ se prolonge en une isométrie ϑ_2 de $\tilde{E}$ dans $\hat{E}$. Ces deux isométries sont inverses l'une de l'autre car ceci est vrai si on les considère comme applications entre $\hat{T}(E)$ et $\tilde{T}(E)$ (unicité de la Proposition II.7.12). Démontrons maintenant l'existence. Considérons l'espace métrique complet $F = \mathscr{C}_u(E; \mathbb{R}_+)$ (Exemple 6, page 27) et notons d_F la distance sur F. Considérons l'application $\hat{T}$ de E dans F définie par $\hat{T}(x) = d_x$ avec $d_x(y) = d(x, y)$. Alors l'inégalité triangulaire

$$| d(x, z) - d(y, z) | \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

montre que, pour x et y dans E, $d_F(\hat{T}(x), \hat{T}(y)) = \min(1, d(x, y))$. Soit $\hat{E}$ l'adhérence de $\hat{T}(E)$ dans F. Comme nous venons de le voir, pour tous x et y dans E, $\sup_{z\in E} | \hat{T}(x)(z) - \hat{T}(y)(z) |= d(x, y) < +\infty$; par suite, pour toutes f et g dans $\hat{E}$, on vérifie sans difficultés que l'on a aussi $\sup_{z\in E} | f(z) - g(z) |< +\infty$. On pose alors, pour f et g dans $\hat{E}$ $\hat{d}(f, g) = \sup_{z\in E} | f(z) - g(z) |$, et comme les boules de rayons plus petits que 1 sont les même que pour d_F, $\hat{E}$ muni de $\hat{d}$ est un espace métrique complet qui répond à la question. ☐

SOUS-SECTION II.7.5

Théorèmes du point fixe

Rappelons que l'on dit qu'une application f d'un ensemble E dans lui-même a un point fixe s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. Le théorème classique suivant est un résultat d'existence dans le cadre des espaces métriques complets.

THÉORÈME II.7.4 (*Théorème du point fixe classique*).

*Soient E un espace métrique complet et T une application de E dans lui même telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tous x et y dans E, on a $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ (on dit alors que T est **strictement contractante** ou **lipschitzienne** de rapport k). Alors T admet un unique point fixe.*

Démonstration. Soit x_0 un point de E, et, pour tout entier $n \geq 1$ posons $x_n = T(x_{n-1})$. L'hypothèse faite sur T implique $d(x_q, x_{q+1}) \leq k^q d(x_0, x_1)$, et, par suite

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq k^n \left(\sum_{l=0}^{p-1} k^l\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n \left(\sum_{l=0}^{\infty} k^l\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite (x_n) est de Cauchy et donc converge vers $x \in E$. Comme $x_{n+1} = T(x_n)$, et comme T est continue, on a bien $T(x) = x$. Ceci achève la preuve, l'unicité étant évidente. ☐

COROLLAIRE.

Soit T une application d'un espace métrique complet E dans lui même telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et un entier $n \geq 1$ tels que T^n (itérée n fois de T) soit strictement contractante de rapport k. Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Par le Théorème précédent, il existe $x \in E$ tel que $T^n(x) = x$. Alors $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T(x) = T^n(T(x))$, ce qui signifie que $T(x)$ est point fixe de T^n. L'unicité du Théorème précédent montre donc que $T(x) = x$. ☐

On notera que l'hypothèse du corollaire n'implique pas, en général, que T est continue.

PROPOSITION II.7.13.

Soient E un espace métrique complet, Λ un espace topologique et T une application de $E \times \Lambda$ dans E telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tous x et y dans E, et tout $\lambda \in \Lambda$, on a $d(T(x, \lambda), T(y, \lambda)) \leq kd(x, y)$. Sup-

posons que, pour tout $x \in E$ la fonction $\lambda \mapsto T(x, \lambda)$ soit continue. Alors l'unique point fixe x_λ de l'application $x \mapsto T_\lambda(x) = T(x, \lambda)$ est une fonction continue de $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. En effet, si λ_0 est un point de Λ, on a

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) &\leq d(T_\lambda(x_\lambda), T_\lambda(x_{\lambda_0})) + d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})) \\ &\leq kd(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(T(x_{\lambda_0}, \lambda), T(x_{\lambda_0}, \lambda_0)), \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$(1-k)d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq d(T(x_{\lambda_0}, \lambda), T(x_{\lambda_0}, \lambda_0)),$$

et la conclusion en découle aussitôt. □

Un des plus célèbre théorèmes de point fixe est le théorème suivant dont la démonstration, assez difficile, dépasse quelque peu le cadre de ce cours :

THÉORÈME II.7.5 (*Théorème du point fixe de Brouwer*).

Toute fonction continue de la boule unité fermé euclidienne de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

Il n'y a évidement pas d'unicité dans cet énoncé. Dans le cas $n = 1$ la preuve est toute simple. Pour $n \geq 2$, les choses sont toutes différentes et la preuve dépasse le niveau Mathématique abordé ici : la plus simple est basée sur la géométrie différentielle. Nous ne la donnons ici qu'a titre documentaire.

Démonstration. Soient B la boule unité euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de B dans elle même.

Considérons tout d'abord le cas où f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (i. e. indéfiniment dérivable) et raisonnons par l'absurde : nous allons construire, sous l'hypothèse que f n'a pas de point fixe, une fonction g de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que $g(0) \neq g(1)$ et $g' \equiv 0$ ce qui est absurde.

Puisque f n'a pas de point fixe, la droite qui joint un point x de B et $f(x)$ coupe la sphère unité en deux points. Pour tout $x \in B$, considérons donc $h(x) \in \mathbb{R}$ la plus grande racine de l'équation (en α)

$$\|x + \alpha(x - f(x))\|^2 = 1$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne et montrons que $h : B \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$. Cette équation s'écrit $P(\alpha) = 0$ où P est le polynôme

$$P(X) = \|x\|^2 - 1 + 2 < x, x - f(x) > X + \|x - f(x)\|^2 X^2.$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta =< x, x - f(x) >^2 + (1 - \|x\|^2) \|x - f(x)\|^2 .$$

Si $\|x\| < 1$, on a $\Delta > 0$; si $\|x\| = 1$, on ne peut avoir $< x, x - f(x) >= 0$ car, dans le cas contraire, par le Théorème de Pythagore, on aurait

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|f(x) - x\|^2 > 1$$

puisque f n'a pas de point fixe. Ainsi, dans tous les cas on a $\Delta > 0$. Ceci implique que la fonction

$$h(x) = \frac{- < x, x - f(x) > + \sqrt{\Delta}}{\|x - f(x)\|^2}$$

est $\mathscr{C}^\infty sur\ B$.

Soit $F : B \times I \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$F(x, t) = x + th(x)(x - f(x)),$$

et définissons la fonction g par

$$g(t) = \int_B D_0(t, x_1, \ldots x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$D_0(t, x) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(t, x)\right),$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ désignant le vecteur colonne $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $1 \leq j \leq n$.

Pour $i \geq 1$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0) + t\frac{\partial}{\partial x_i}(h(x)(x - f(x))).$$

Par suite, $D_0(0, x_1, \ldots, x_n) = 1$ ce qui donne $g(0) = \mathrm{vol}(B)$. Par ailleurs, si $D_0(1, x) \neq 0$, $x \in B$, le théorème d'inversion locale montre que $y \mapsto F(1, y)$ est un difféomorphisme au voisinage de x ce qui est absurde puisque $F(1, y)$ appartient à la sphère unité pour tout $y \in B$. Par conséquent, on a $D_0(1, x) = 0$, $\forall x \in B$, et, par suite, $g(1) = 0$.

Calculons maintenant $g'(t)$. Par dérivation sous le signe intégral, on a

$$g'(t) = \int_B \frac{\partial D_0}{\partial t}(t, x) dx.$$

Par ailleurs, en utilisant la multilinéarité du déterminant, un calcul fastidieux mais sans difficultés montre que

$$\frac{\partial D_0}{\partial t}(t, x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial D_i}{\partial x_i}(t, x),$$

avec $D_i = \det\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}, \ldots, \widehat{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)$, où, par convention, l'écriture $\widehat{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}$ signifie que le terme correspondant n'y est pas.

Considérons alors la forme différentielle

$$\Omega = \sum_{i=1}^n D_i(t, x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots dx_n,$$

avec la même convention de notation que précédemment. Comme

$$d\Omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

le calcul précédent et la formule de Stokes montrent que $\int_S \Omega = g'(t)$, où S désigne la sphère unité. Or, si $x \in S$, $h(x) = 0$, et donc $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$, ce qui implique $\Omega = 0$ et ainsi $g'(t) = 0$. Ceci termine la démonstration lorsque f est $\mathscr{C}^\infty$.

Considérons maintenant le cas général d'une fonction continue de B dans elle même. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite (f_n) de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de B dans elle même qui converge uniformément vers f sur B. Ce qui précède montre que, pour tout n, f_n possède un point fixe x_n. Comme B est compacte, la suite (x_n) possède un point d'accumulation $x \in B$ qui est clairement un point fixe pour f.

C.Q.F.D.

SECTION II.8

Espaces compacts

SOUS-SECTION II.8.1

Espaces topologiques compacts

DÉFINITION II.8.1.

*Un espace topologique E est **compact** s'il est séparé (c.f. Définition II.1.4, page 8) et si, de tout recouvrement de l'espace par des ouverts (i.e. $E = \bigcup_{i\in I} O_i$, O_i ouvert de E, $i \in I$), on peut extraire un sous-recouvrement fini (i.e. il existe une partie finie J de I telle que $E = \bigcup_{i\in J} O_j$). En ternes de parties fermées, cette définition signifie que si (F_i), $i \in I$, est une famille de fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est vide alors il existe une partie finie J de I telle que $\bigcap_{j\in J} F_j$ est vide, ou encore que, si pour toute partie finie $J \subset I$, $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. On dit qu'une **partie** A de E est **compacte** si le sous-espace topologique A l'est, et on dit que A est **relativement compacte** si $\bar{A}$ est compacte.*

Clairement, il n'est pas nécéssaire de considérer des recouvrements par des **ouverts de $\boldsymbol{A}$** pour définir une partie compacte :

Remarque II.8.1. *Une partie A d'un espace topologique est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A **par des ouverts de $\boldsymbol{E}$**, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Dans toute la suite, et pour simplifier, nous ne considérerons que des espaces séparés.

PROPOSITION II.8.1.

Soit E un espace topologique séparé et A une partie de E. Si A est compacte alors elle est fermée. Si E est compacte et si A est fermée, alors A est compacte. En particulier, tout sous-ensemble d'une partie relativement compacte est relativement compacte.

Démonstration. Supposons tout d'abord A compacte dans E séparé. Soit $x \notin A$. Pour tout $y \in A$, puisque E est séparé, il existe deux voisinages $V_{x,y}$ et V_y, l'un de x l'autre de y, ne se rencontrant pas. Les V_y, $y \in A$ forment un recouvrement de A et on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$. Comme $\bigcap_{j=1}^{n} V_{x,y_j}$ est un voisinage de x, on en conclut que $x \notin \bar{A}$. Supposons maintenant E compact et A fermée. Soit (O_i) un recouvrement de A par des ouverts (de A) ; pour chaque i, il existe (par définition de la topologie de A c.f. Définition II.1.4, page 9) U_i ouvert de E tel que $O_i = A \cap U_i$; alors la famille $(E \setminus A, U_i)$, $i \in I$, est un recouvrement de E dont on peut, par hypothèse, extraire un sous-recouvrement fini. On en déduit que l'on peut extraire un sous-recouvrement fini de A du recouvrement (O_i). ☐

PROPOSITION II.8.2.

Soient E un espace topologique séparé, K une partie compacte de E et $x \in E \setminus K$. Alors, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $K \subset U$ et $x \in V$. De plus, si K_1 et K_2 sont deux compacts disjoints de E, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $K_1 \subset O_1$ et $K_2 \subset O_2$.

Démonstration. Comme E est séparé, si $y \in K$, il existe deux ouverts disjoints U_y et V_y tels que $y \in U_y$ et $x \in V_y$. Si on recouvre K par un nombre fini de U_y, U_{y_i}, $1 \leq i \leq n$, il suffit de prendre $U = \bigcup_i U_{y_i}$ et $V = \bigcap_i V_{y_i}$. La seconde assertion en résulte, car $\forall x \in K_2$, d'après ce qui précède, il existe deux ouverts disjoints U_x et V_x tels que $K \subset U_x$ et $x \in V_x$, et, en recouvrant K_2 par un nombre fini de V_x, à savoir V_{x_i}, $1 \leq i \leq n$, il suffit de prendre $O_1 = \bigcap_{1\leq i\leq n} U_{x_i}$ et $V = \bigcup_{1\leq i\leq n} V_{x_i}$. ☐

Dans un espace métrique cette propriété est élémentaire, comme nous l'avons déjà vu (Proposition II.4.8, page 15).

PROPOSITION II.8.3.

Soient E_1, E_2 deux espaces topologiques séparés et f une application continue de E_1 dans E_2. Soit A une partie compacte de E_1. Alors, $f(A)$ est compacte.

Démonstration. En effet, soit (O_i) un recouvrement de $f(A)$ par des ouverts de E_2. Alors $(f^{-1}(O_i))$ est un recouvrement ouvert de A (c.f. Théorème II.4.1, page 15) dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. En prenant les O_i correspondant au même ensemble fini d'indices, on obtient un recouvrement fini de $f(A)$. □

COROLLAIRE.

Soient E_1, E_2 deux espaces topologiques séparés et f une application continue bijective de E_1 sur E_2. Si $E_1 est$ compact alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. En effet, d'après le Théorème II.4.1, page 15, il suffit de voir que si F est un fermé de E_1 alors $f(F)$ est fermé dans E_2. Or ceci résulte des Propositions II.8.1 et II.8.3. □

PROPOSITION II.8.4.

Soient E un espace topologique séparé et A une partie compacte de E. Tout sous-ensemble infini de A admet au moins un point d'accumulation (qui est nécessairement dans A).

Démonstration. En effet, soit X un sous-ensemble infini de A. Si la conclusion de la Proposition était fausse, puisque E est séparé, pour chaque $x \in A$, il existerait un voisinage ouvert V_x de x tel que $X \cap V_x \subset \{x\}$. Comme A est compact, on peut trouver x_i, $1 \leq i \leq n$, tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de A ce qui implique $X \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ et contredit le fait que X est infini. □

La proposition suivante est élémentaire et la preuve est laissée au lecteur :

PROPOSITION II.8.5.

Pour un espace topologique séparé, deux quelconques des propriétés suivantes impliquent la troisiemme :
1. E est compact ;
2. E est homéomorphe à un espace discret ;
3. E est fini.

PROPOSITION II.8.6.

Soient $E_1 et$ E_2 deux espaces topologiques et F un espace métrique. Soit f une application de $E_1 \times E_2$ dans F.

1. Si, pour tout $y \in E_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur E_1 et si, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur E_2, uniformément par rapport à $x \in E_1$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall y \in E_2$, il existe un voisinage $V(y)$ de y dans E_2 tel que, $\forall x \in E_1$, $d(f(x, z), f(x, y)) \leq \varepsilon$ pour $z \in V(y)$) alors f est continue sur $E_1 \times E_2$.

2. Supposons E_1 compact. Si f est continue sur $E_1 \times E_2$ alors la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur E_2, uniformément par rapport à $x \in E_1$ (évidement $\forall y \in E_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur E_1).

Démonstration. Le 1. est immédiat : en écrivant

$$d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) \leq d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_1)) + d(f(x_2, y_1), f(x_2, y_2)),$$

l'hypothèse donne aussitôt la continuité en (x_1, y_1). Vérifions le 2. Fixons $y \in E_2$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in E_1$, il existe $V(x)$ et $V_x(y)$ voisinages de x et y respectivement, tels que

$$d(f(x', y'), f(x, y)) \leq \varepsilon \text{ pour } (x', y') \in V(x) \times V_x(y).$$

Recouvrons E_1 par un nombre fini de tels $V(x)$: $V(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Pour conclure il suffit alors de prendre, comme voisinage de y, l'intersection des $V_{x_i}(y)$. □

THÉORÈME II.8.1 (*Théorème de Tychonoff*).

Un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact.

Nous ne donnerons pas ici de démonstration de ce Théorème. On peut montrer qu'il est équivalent à l'axiome du choix de la théorie des ensembles : du moins pour un produit quelconque non dénombrable, ce qui est le cas le plus intéressant. Par exemple l'espace des fonctions d'un ensemble A dans un espace topologique compact E muni de la topologie de la convergence simple (c.f. Exemple II.6.1, page 22) est compact. Toutefois, nous donnerons une démonstration de ce Théorème dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques à la sous-section suivante (Proposition II.8.18, page 36).

PROPOSITION II.8.7.

Soient E un espace topologique compact et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Alors l'espace topologique $E/\mathscr{R}$ est séparé si et seulement si la relation $\mathscr{R}$ est fermée. De plus, si ces conditions sont satisfaites, $E/\mathscr{R}$ est compact.

Démonstration. La dernière assertion est immédiate (Proposition II.4.10, page 16 et Proposition II.8.3, page 31). Démontrons l'équivalence. Supposons tout d'abord l'espace $E/\mathscr{R}$ séparé, et soit F un fermé de E, et posons $\tilde{F} = \pi(F)$. Si $\tilde{x} \notin \tilde{F}$, pour tout $\tilde{y} \in \tilde{F}$, il existe, par hypothèse, un voisinage ouvert $V(\tilde{y})$ de $\tilde{y}$ et un voisinage $V_{\tilde{y}}(\tilde{x})$ de $\tilde{x}$ tels que $V(\tilde{y}) \cap V_{\tilde{y}}(\tilde{x}) = \emptyset$. π étant la surjection canonique de E sur $E/\mathscr{R}$, $V_{\tilde{y}} = \pi^{-1}(V(\tilde{y}))$ est un ouvert de E, et, lorsque $\tilde{y}$ parcourt $\tilde{F}$, ces voisinages forment un recouvrement de F. Comme F est compact, on peut trouver $\tilde{y}_i$, $1 \leq i \leq n$, tels que les $V_{\tilde{y}_i}$ recouvrent F. Alors, les $V(\tilde{y}_i)$ forment un recouvrement de $\tilde{F}$, et $\bigcap_{1\leq i\leq n} V_{\tilde{y}_i}(\tilde{x})$ est un ouvert qui ne rencontre pas $\tilde{F}$. Ceci montre que $\tilde{F}$ est fermé. Réciproquement, supposons que $\mathscr{R}$ est fermée. Soient $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ deux points distincts de $E/\mathscr{R}$. Posons $[x] = \pi^{-1}(\tilde{x})$ et $[y] = \pi^{-1}(\tilde{y})$. Alors, $[x]$ et $[y]$ sont deux compacts disjoints de E, par hypothèse, et il existe donc deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $[x] \subset O_1$ et $[y] \subset O_2$. Posons $F = E \setminus O_1$. $\tilde{F} = \pi(F)$ est donc un fermé de $E/\mathscr{R}$ contenant $\tilde{y}$ et ne contenant pas $\tilde{x}$. Alors, si, $F_1 = \pi^{-1}(\tilde{F})$, $E \setminus F_1$ est un ouvert $O_{1,1}$ de E contenant $[x]$, ne rencontrant pas $[y]$ et tel que $\pi^{-1}(\pi(O_{1,1})) = O_{1,1} \subset O_1$. En échangeant les rôles de O_1 et O_2 on construit de même un ouvert $O_{2,1}$ contenant $[y]$ et tel que $\pi^{-1}(\pi(O_{2,1})) = O_{2,1} \subset O_2$. Ceci termine la preuve car $\pi(O_{1,1})$ et $\pi(O_{2,1})$ sont deux ouverts de $E/\mathscr{R}$ qui séparent $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. □

SOUS-SECTION II.8.2

Espaces métriques compacts

DÉFINITION II.8.2.

> *Soit E un espace métrique. On dit que E est* **précompact** *si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des ensembles de diamètre $< \varepsilon$. En d'autres termes, s'il existe un sous-ensemble fini F de E tel que $d(x, F) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$.*

PROPOSITION II.8.8.

> *Tout espace métrique précompact est borné et séparable.*

Démonstration. En effet, si E est précompact, il est clairement borné, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une partie finie A_n de E telle que $\forall x \in E$, $d(x, A_n) < 1/n$. Si $A = \bigcup_n A_n$, on a $d(x, A) = 0$ $\forall x \in E$, ce qui signifie que $\bar{A} = E$. □

Remarque II.8.2. *La Proposition précédente montre que tout espace métrique précompact admet une base dénombrable pour sa topologie. Réciproquement :*

PROPOSITION II.8.9.

> *Tout espace topologique compact admettant une base dénombrable d'ouverts est métrisable.*

Démonstration. Soit U_n, $n \geq 1$, une base dénombrable d'ouverts d'un espace topologique compact E, et notons Δ la diagonale de $E \times E$. Tout voisinage d'un point de Δ contient un voisinage de la forme $U_n \times U_n$, et, comme Δ est compact, tout voisinage de Δ contient une réunion finie d'ensemble de la forme $U_n \times U_n$. Les réunions finies de ces ensembles forment donc un système fondamental V_n, $n \geq 1$, de voisinages ouverts de Δ. Remarquons de plus que les V_n sont symétriques (dans le sens où $(x, y) \in V_n$ équivaut à $(y, x) \in V_n$), et, quitte à les remplacer par les $V_{n+1} \cap V_n$, on peut supposer la suite V_n décroissante. De plus, Δ étant compact, il possède une base de voisinages compacts (Proposition II.8.2, page 31), et, on peut supposer aussi $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$.

Remarquons maintenant que si $x \in E$ et si $V(x)$ est un voisinage de x, alors il existe $m \geq 1$ tel que $(x, y) \in V_m$ implique $y \in V(x)$: en effet, dans le cas contraire, les ensembles $\{y$ tels que $(x, y) \in \bar{V}\} \cap (E \setminus V(x)\}$ formeraient une suite décroissante de compacts non vides, donc d'intersection non vide,, et il existerait $y \in E \setminus V(x)$ tel que $(x, y) \in \bar{V}_m$ pour tout m ce qui est absurde.

Pour k entier, notons $\overset{k}{V}_m = \{(x, y) \in E \times E$ tels que $\exists z_i \in E,\ 1 \leq i \leq k,$ tels que $z_1 = x,\ z_k = y,$ et $(z_i, z_{i+1}) \in V_n\}$. Voyons tout d'abord que les $\overset{2}{V}_n$, $n \geq 1$, forment une base de voisinages de Δ. En effet, remarquons tout d'abord que si $x \neq y$, il existe deux voisinages ouverts $V(x)$ et $V(y)$ de x et y disjoints, et, par ce qui précède, il existe m tel que $(x, z) \in V_m$ et $(y, z) \in V_m$ impliquent $z \in V(x) \cap V(y)$ ce qui est impossible. Par ailleurs, on a clairement $\overset{2}{V}_m \subset \bar{\overset{2}{V}}_m \subset \overset{2}{V}_{m-1}$, et, on voit facilement que $\bar{\overset{2}{V}}_m$ est fermé. Alors, n étant fixé, $\bar{\overset{2}{V}}_m \cap ((E \times E) \setminus V_n)$ est une suite décroissante de compacts qui, s'il sont non vides, contiennent un point (x, y) ce qui est impossible d'après ce qui précède. Ainsi, quitte à considérer une sous-suite de la suite V_n, on peut supposer que $\overset{2}{V}_n \subset V_{n-1}$.

En répétant éventuellement le procédé précédent, on se ramène finalement au cas où la base V_n, $n \geq 1$, de voisinages de Δ est telle que les V_n forment une suite décroissante de voisinages symétriques tels que $\bar{V}_n \subset V_{n-1}$ et $\overset{3}{V}_n \subset V_{n-1}$. On définit alors une fonction

g sur $E \times E$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in V_n,\ \forall n, \\ 2^k & \text{si } \begin{cases} (x,y) \in V_n,\ 1 \leq n \leq k, \\ \text{et } (x,y) \notin V_{k+1}, \end{cases} \\ 1 & \text{si } (x,y) \notin V_1. \end{cases}$$

Remarquons que g est positive, symétrique et que $g(x,x) = 0$, et qu'elle « définit » la topologie de E : en effet, pour $x \in E$, si $V(x)$ est un voisinage de x, alors, pour m assez grand, nous avons déjà vu que $(x,y) \in V_m$ implique $y \in V(x)$, et, par suite $g(x,y) \leq \varepsilon$, pour ε assez petit, implique aussi $y \in V(x)$; inversement, la relation $g(x,y) \leq 2^k$ signifie $(x,y) \in V_k$ et comme $V_k est$ ouvert, il existe un voisinage V de x tel que $\{x\} \times V \subset V_k$. Posons enfin

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1})$$

l'$\inf$ étant pris sur toutes les suites finies z_i, $0 \leq i \leq p$, telles que $z_0 = x$ et $z_p = y$.

Il est clair que f est un écart sur E. Pour conclure, il suffit donc de montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} g(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y),\ (x,y) \in E \times E.$$

Pour le voir, fixons x et y et montrons que si z_i est une suite finie à p éléments telle que $z_0 = x$ et $z_p = y$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x,y)$. Raisonnons par récurrence sur p. Pour $p = 1$ ceci est évident, supposons donc le résultat vrai pour toute suite finie à $p-1$ éléments et montrons le pour une suite z_i à p éléments. Soit $a = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1})$. Si $a \geq 1/2$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $a < 1/2$. Soit h le plus petit entier tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{h} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$, de sorte que $\displaystyle\sum_{i=0}^{h-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$ et $\displaystyle\sum_{i=h+1}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$ (si $h \neq 0$). L'hypothèse de récurrence implique $g(x, z_h) \leq a$ et $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Soit k le plus petit entier tel que $2^{-k} \leq a$. On a donc $k \geq 2$ et, $(x, z_h) \in V_k$, $(z_{h+1}, y) \in V_k$, et, comme $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$, $(z_h, z_{h+1}) \in V_k$. ceci implique $(x,y) \in \overset{3}{V}_k \subset V_{k-1}$ donc $g(x,y) \leq 2^{1-k} \leq 2a$.

C.Q.F.D.

Le Théorème suivant est une caractérisation fondamentale des espaces métriques compacts :

THÉORÈME II.8.2.

Pour un espace métrique E les conditions suivantes sont équivalentes :
1. E est compact ;
2. Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence ;
3. E est précompact et complet.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que 1. $\Rightarrow$ 2. Soit (x_n) une suite dans E et soit A l'ensemble des points de cette suite ; si A est fini, il n'y a rien à montrer, et , si A est infini, cela résulte de la Proposition II.8.4 et de la Proposition II.4.4, page 14. Démontrons maintenant que 2. $\Rightarrow$ 3. La complétude de E résulte de la Proposition II.7.1, page 23, et, pour conclure, raisonnons par l'absurde et supposons que E n'est pas précompact. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ne puisse pas recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon α. On peut ainsi construire, par récurrence, une suite (x_n) dans E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_i, x_n) > \alpha$, pour $i < n$: en effet, x_1 étant quelconque, si x_i est construit pour $1 \leq i \leq n-1$, $E \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \alpha)$ est non vide, par hypothèse, et on prend x_n dans cet ensemble. La suite (x_n) ainsi construite ne peut évidement pas avoir de valeur d'adhérence.

Démontrons maintenant 3. $\Rightarrow$ 1. Pour simplifier les notations nous pouvons supposer que le diamètre de E (qui est borné par hypothèse) est inférieur à $1/2$ (quitte à multiplier la distance par un nombre positif convenable ce qui ne change rien aux hypothèses 3. et 1.). Supposons que E ne soit pas compact c'est à dire qu'il existe un recouvrement ouvert (O_i) de E dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini, et construisons, par récurrence une suite de boules ouvertes $(B_n) = (B(x_n, 1/2^n))$, telle que, $\forall n$, $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, et B_n ne peut être recouverte par une sous-famille finie de la famille (O_i) : $B_0 = E$ convient par hypothèse, et, si B_i est construite pour $0 \leq i \leq n-1$, soit (V_k) un recouvrement de E par des boules de rayon $1/2^n$ (précompacité) ; parmi les V_k qui rencontrent B_{n-1}, il y en a une B_n qui ne peut pas être recouverte par une sous-famille finie des (O_i) (sinon B_{n-1} pourrait l'être), et la récurrence se poursuit. Par construction (et l'inégalité triangulaire) on a $d(x_{n-1}, x_n) \leq 1/2^{n-2}$, d'où on déduit, pour $n \leq p < q$,

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \ldots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}},$$

ce qui montre que (x_n) est de Cauchy et donc converge vers x. Or, il existe i_0 tel que $x \in O_{i_0}$, et, comme O_{i_0} est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{i_0}$. Si $y \in B_n$, on a $d(x,y) < d(x,x_n) + 1/2^{n-1}$ ce qui implique que, pour n assez grand, $B_n \subset B(x,r) \subset O_{i_0}$ et contredit la définition des B_n. □

Une propriété très utile des espaces métriques compacts est la Propriété de Lebesgue :

PROPOSITION II.8.10 (*Propriété de Lebesgue*).

Soient E un espace métrique compact et (O_i) un recouvrement ouvert de E. Il existe $\alpha > 0$ tel que toute boule de rayon α soit contenue dans l'un des O_i.

Démonstration. En effet, puisque (O_i) est un recouvrement de E, $\forall x \in E$, il existe O_i et $r_x > 0$ tels que $B(x, r_x) \subset O_i$. Les boules $B(x, r_x/2)$, $x \in E$, formant un recouvrement de E, il existe un nombre fini de points x_j, $1 \leq j \leq n$, tels que les boules $B(x_j, r_{x_j}/2)$, $1 \leq j \leq n$, forment un recouvrement de E. Soit $\alpha = \min\{r_{x_j}, 1 \leq j \leq n\}$; alors si $x \in E$, il existe j tel que $x \in B(x_j, r_{x_j}/2)$ ce qui implique $B(x, \alpha) \subset B(x_j r_{x_j})$, ce qui donne la conclusion. □

PROPOSITION II.8.11.

Dans un espace métrique compact, toute suite qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

Démonstration. En effet, dans le cas contraire, il existerait $\alpha > 0$ et une suite extraite de la suite initiale dont tous les éléments seraient en dehors d'une boule de rayon α. D'après le Théorème II.8.2, cette sous-suite aurait une valeur d'adhérence qui serait une seconde valeur d'adhérence de la suite initiale. □

PROPOSITION II.8.12.

Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un espace métrique E' est uniformément continue.

Démonstration. En effet, si cela était faux, il existerait $\alpha > 0$, et deux suites (x_n) et (y_n) tels que $d(x_n, y_n) < 1/n$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$. Mais ceci est impossible car, par le Théorème II.8.2, une sous-suite (x_{n_k}) de la suite (x_n) converge vers a, ce qui implique que (y_{n_k}) converge elle aussi vers a. □

PROPOSITION II.8.13.

Dans un espace métrique complet, tout ensemble précompact est relativement compact.

Démonstration. Si $A \subset E$ est précompact, $\forall \varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées B_k de rayon ε et il en est de même de $\bar{A}$ qui est donc compact par le Théorème II.8.2 (et la Proposition II.7.2, page 23). □

PROPOSITION II.8.14.

Les parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties bornées. Autrement dit une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. La condition étant nécessaire, il faut voir qu'elle est suffisante. D'après le Théorème II.8.1, il suffit de le faire pour $n = 1$ (car alors un cube fermé de $\mathbb{R}^n$ est compact) et, alors, d'après le Théorème II.8.2, il suffit de montrer qu'une partie bornée de $\mathbb{R}$ est précompacte, et il suffit de le faire pour un segment ce qui est évident. □

PROPOSITION II.8.15.

Soient E un espace métrique compact non vide et f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Alors $f(E)$ est borné et f atteint des bornes (i.e. il existe a et b dans E tels que $f(a) = \sup_{x\in E} f(x)$ et $f(b) = \inf_{x\in E} f(x)$).

Démonstration. En effet, puisque $f(E)$ est fermé borné dans $\mathbb{R}$ (Proposition II.8.3), $\sup f(E)$ et $\inf f(E)$ sont dans $f(E)$. □

PROPOSITION II.8.16.

Soient E un espace métrique et A une partie de E.

1. A est relativement compacte si et seulement si toute suite de points de A possède une valeur d'adhérence dans E.

2. Si A est compacte, les ensembles $V_r(A)$ (c.f. Remarque II.2.3, page 10) forment un système fondamental de voisinages de A.

3. La réunion de deux ensembles relativement compacts est relativement compacte.

4. Si A et B sont deux parties compactes disjointes, on a $d(A, B) > 0$.

5. Si A est compact et si B est fermé et $A \cap B = \emptyset$, il existe $r > 0$ tel que $V_r(A) \cap V_r(B) = \emptyset$.

Démonstration. Le 1. résulte immédiatement du Théorème II.8.2, vérifions le 2. Soit U un voisinage de A ; puisque $x \mapsto d(x, E \setminus U)$ est continue et > 0 dans A, son $\inf$ est atteint sur A et est un nombre $r > 0$; alors $V_r(A) \subset U$. Le 3. est évident, et le 4. se voit en notant que $x \mapsto d(x, B)$ atteint son minimum sur A qui est nécessairement > 0. Enfin, si le 5. était faux, on aurait $A \cap V_r(B) \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$; en prenant $r = 1/n$, on construirait ainsi une suite x_n d'éléments de $A \cap V_{1/n}(B)$ dont on pourait extraire une sous-suite convergente vers x dans A ce qui donnerait $x \in A \cap B$ puisque B est fermé. □

PROPOSITION II.8.17.

Soient E un espace métrique et A une partie compacte de E. Alors A est connexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de points de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points $x_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, tels que $x_1 = x$, $x_n = y$, et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire (la compacité n'interviens pas ici). Soit $a \in A$ fixé, et soit E_a l'ensemble des points de E pour lesquels la condition est vérifiée. Alors E_a est non vide, évidemment ouvert, et fermé car si $x \in \bar{E}_a \cap A$, la boule $B(x, \varepsilon)$ contient un point de A. Comme A est connexe on a $E_a = A$. Réciproquement, supposons que A ne soit pas connexe et écrivons $A = O_1 \cup O_2$ où les O_i sont des ouverts de A disjoints non vides. Comme A est fermé, les O_i le sont aussi, et ce sont donc des compacts et la contradiction vient en prenant $\varepsilon < d(O_1, O_2)$ (4. de la Proposition précédente). □

Nous savons déjà qu'un produit quelconque d'espaces compacts est compact : c'est le Théorème de Tychonoff que nous n'avons pas démontré. Dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces métrique, la preuve est beaucoup plus simple :

PROPOSITION II.8.18.

Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable d'espaces métriques compacts. Alors le produit des E_n (c.f. Proposition II.6.4, page 22) est compact.

Démonstration. La preuve de ce résultat utilise une méthode importante et souvent utile appelée le **procédé diagonal**. D'après le Théorème II.8.2, il nous faut montrer que si (X_n) est une suite dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$, on peut extraire de (X_n) une sous-suite convergente. Notons X_n^i la i-ème coordonnée de X_n. Puisque E_1 est compact, on peut extraire de (X_n) une sous-suite $(X_{1,n})$ telle que $(X_{1,n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans E_1. De même, on peut extraire de $(X_{1,n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(X_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(X_{2,n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente, de sorte que $(X_{2,n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_{2,n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes. En procédant ainsi de suite par récurrence, on construit $(X_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $1 \leq i \leq p$, $(X_{p,n}^i)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans E_i. Alors la suite $(X_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que, pour tout $i \geq 1$, $(X_{n,n}^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E_i, ce qui montre que $(X_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\prod_{n\geq 1} E_n$. □

SOUS-SECTION II.8.3

Espaces localement compacts

DÉFINITION II.8.3.

*On dit qu'un espace topologique E est **localement compact** si tout point de E admet une base de voisinages compacts.*

Dans le cas des espaces métriques, cette définition signifie que, pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$, tel que, pour $t \leq r$, $\bar{B}(x, t)$ est compacte.

PROPOSITION II.8.19.

Soit E un espace topologique dont tout point admet un voisinage compact. Soit K un compact de E et U un ouvert de E contenant K. Alors il existe un ouvert V tel que $\bar{V}$ soit compact et $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. En particulier, E est localement compact.

Démonstration. Si $U = E$, il suffit de recouvrir K par un nombre fini de voisinages compacts de points de K ce qui est possible puisque K est compact. Ceci implique, dans tous les cas, que K est contenu dans un ouvert G relativement compact. Supposons $U \neq E$ et soit $A = E \setminus U$. D'après la Proposition II.8.2, page 31, pour tout $x \in A$, il existe un ouvert W_x contenant K tel que $x \notin \bar{W}_x$. Alors les ensembles $A \cap \bar{G} \cap \bar{W}_x$, $x \in A$, forment un famille de fermés dans un espace compact dont l'intersection est vide. Elle possède donc une sous-famille finie $A \cap \bar{G} \cap \bar{W}_{x_i}$, $1 \leq i \leq n$, d'intersection vide. Il suffit donc de prendre $V = G \bigcap_{1\leq i\leq n} W_{x_i}$. □

PROPOSITION II.8.20.

Soit E un espace métrique localement compact.

1. Tout sous-espace ouvert et tout sous-espace fermé est localement compact.

2. Soit A une partie compacte de E. Il existe $r > 0$ tel que $V_r(A)$ (Remarque II.2.3, page 10) soit relativement compact.

Démonstration. Le 1. est évident, vérifions le 2. Pour tout $x \in A$, il existe V_x voisinage compact de x. Les intérieurs de ces voisinages forment un recouvrement de A dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. On a ainsi V_{x_i}, $1 \leq i \leq n$, tels que $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ est un voisinage compact de A. Il suffit d'appliquer alors la Proposition II.8.16. □

PROPOSITION II.8.21.

Soit E un espace métrique localement compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une suite croissante (U_n) d'ouverts relativement compacts dans E tel que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ et $E = \bigcup_n U_n$;

2. E est réunion dénombrable de sous-ensembles compacts ;

3. E est séparable.

Démonstration. Clairement 1. implique 2. Si $E = \bigcup_n K_n$ avec K_n compact alors chaque K_n est séparable (Proposition II.8.8, page 33) et donc E aussi. Montrons maintenant que 3. implique 1. D'après la Proposition II.2.7, page 11, E possède une base dénombrable O_n pour sa topologie ; pour tout $x \in E$, si V_x est un voisinage compact de x, il existe n_x tel que $x \in O_{n_x} \subset V_x$, ce qui montre que l'on peut supposer que les O_n sont relativement compacts. On définit alors les U_n par récurrence de la manière suivante : $U_1 = O_1$, et, U_n étant défini, U_{n+1} est la réunion de O_{n+1} et de $V_r(\bar{U}_n)$ avec r convenablement choisi grâce à la Proposition II.8.20. □

On remarquera qu'un espace métrique vérifiant la condition 1. de la proposition est nécessairement localement compact.

PROPOSITION II.8.22.

Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du Théorème de Baire (Théorème II.7.1, page 25) : il suffit de remplacer les boules construites par récurrence par des voisinages compacts ce qui est possible par hypothèse. On obtient ainsi une suite décroissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts non vides contenus dans $\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{n} F_i\right) \cap O$. On conclut en utilisant le fait que, par définition de la compacité, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. □

THÉORÈME II.8.3 (*Théorème de Tietze-Urysohn*).

Soit E un espace topologique localement compact. Soient K un sous-ensemble compact de E et V un ouvert contenant K. Alors, il existe une fonction continue f de E dans $[0,1]$ telle que $f_{|K} \equiv 1$ et $f_{|E\setminus V} \equiv 0$.

Démonstration. D'après la Proposition II.8.19, page précédente, il existe un ouvert relativement compact W tel que $K \subset W \subset \bar{W} \subset V$. Construisons alors une fonction continue g de E dans $[0,1]$ telle que $g_{|K} \equiv 0$ et $g_{|E\setminus W} \equiv 1$ ($f = 1 - g$ répond ainsi à la question). Pour cela, montrons qu'il existe une famille d'ouverts U_t, $t \in [0,1]$, de E vérifiant les conditions suivantes :

(i) $K \subset U_0$;

(ii) $U_1 \subset W$;

(iii) pour $0 \leq t \leq t' \leq 1$, on a $\bar{U}_t \subset U_{t'}$.

Construisons tout d'abord les U_t lorsque t est un nombre dyadique c'est-à-dire de la forme $t = \frac{k}{2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$. Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on pose $U_1 = W$, et, d'après la Proposition II.8.19, il existe un ouvert relativement compact U_0 tel que $K \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1$. Supposons les $U_{k/2^p}$ construits pour $1 \leq p \leq n-1$ et $1 \leq k \leq 2^p$. Pour définir les $U_{k/2^n}$, il nous suffit de définir les $U_{(2k+1)/2^n}$, et comme $\frac{k}{2^{n-1}} \leq \frac{2k+1}{2^n} \leq \frac{k+1}{2^{n-1}}$, il suffit de réappliquer la Proposition II.8.19. On définit alors U_t pour tout réel $t \in [0,1]$ en posant $U_t = \bigcup_{r<t,\ r \text{ dyadique}} U_r$. Clairement (i) et (ii) sont satisfaites et la densité des nombres dyadiques implique (iii). On définit alors la fonction g par $g(x) = 1$ si $x \in E \setminus U_1$ et, si $x \in U_1$, $g(x) = \inf\{t \text{ tels que } x \in U_t\}$. pour terminer la preuve, il suffit de voir que g est continue. Soit $x \in E$ et $a = g(x)$. Séparons trois cas :

$0 < a < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset]0,1[$. Alors, par définition de g, $U_{a+\varepsilon} \cap E \setminus \bar{U}_{a-\varepsilon}$ est un voisinage de x sur lequel g est comprise entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$, ce qui montre la continuité de g en x.

$a = 0$. Dans ce cas, U_ε, $\varepsilon > 0$, est un voisinage de x sur lequel g est comprise entre 0 et ε.

$a = 1$. De même, pour $\varepsilon > 0$, $E \setminus \bar{U}_{1-\varepsilon}$ est un voisinage de x sur lequel g est comprise entre $1-\varepsilon$ et 1.

□

SOUS-SECTION II.8.4

Compactification d'un espace

Comme pour la notion de complétude, on cherche ici a réaliser un espace topologique comme un sous-espace dense d'un espace topologique compact. Pour que cela soit possible, il faut faire des hypothèses sur l'espace de départ. Nous donnerons ici deux exemples de ce type.

PROPOSITION II.8.23 (*Compactifié d'Alexandrov*).

> *Soit E un espace topologique localement compact non compact. Il existe un espace topologique compact $\tilde{E}$ tel que E soit un sous-espace dense de $\tilde{E}$ tel que $\tilde{E} \setminus E$ soit réduit à un point. Ce point est dit point à l'infini. De plus, si $\hat{E}$ est un espace topologique compact tel que :*
> *(i) il existe $\Phi : E \to \hat{E}$ qui est un homéomorphisme de E sur $\Phi(E)$,*
> *(ii) $\hat{E} \setminus \Phi(E)$ est réduit à un point,*
> *(iii) $\Phi(E)$ est dense dans $\hat{E}$,*
> *alors $\tilde{E}$ et $\hat{E}$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Définissons formellement $\tilde{E} = E \cup \{\infty\}$. Si $\mathscr{T}$ est la topologie de E, on définit celle de $\tilde{E}$ par

$$\tilde{\mathscr{T}} = \mathscr{T} \cup \{O \cup (\tilde{E} \setminus K),\ O \text{ ouvert de } E,\ K \text{ compact de } E\}.$$

$\tilde{\mathscr{T}}$ est bien une topologie car

$$(E \setminus K_1) \cap (E \setminus K_2) = E \setminus (K_1 \cup K_2)$$

et

$$\bigcup_i (\tilde{E} \setminus K_i) = \tilde{E} \setminus (\bigcap_i K_i)$$

et sa restriction à E est $\mathscr{T}$. Enfin, E est bien dense dans $\tilde{E}$ car un voisinage de ∞ contient, par définition, le complémentaire d'un compact de E et que ce dernier ne peut être vide puisque E n'est pas compact par hypothèse. L'unicité de ce compactifié se voit facilement, car, si i est l'injection de E dans $\tilde{E}$, $h = \Phi \circ i^{-1}$ est un homéomorphisme de $i(E)$ sur $\Phi(E)$. Si $\{\hat{\infty}\} = \hat{E} \setminus \Phi(E)$, on pose $h(\infty) = \hat{\infty}$, et il faut vérifier que h ainsi prolongée est un homéomorphisme de $\tilde{E}$ sur $\hat{E}$ c'est-à-dire qu'elle est continue en ∞ (Corollaire de la Proposition II.8.3, page 31). Or, si $\hat{V}$ est un voisinage ouvert de $\hat{\infty}$, $\hat{E} \setminus \hat{V}$ est un compact contenu dans $\Phi(E)$, donc $h^{-1}(\hat{E} \setminus \hat{V})$ est compact dans $i(E) = E$, ce qui montre que

$$h^{-1}(\hat{V}) = \{\infty\} \cup (\tilde{E} \setminus h^{-1}(\hat{E} \setminus \hat{V}))$$

est un voisinage de ∞ dans $\tilde{E}$. □

Pour donner l'autre exemple classique de compactifié, il nous faut introduire une nouvelle terminologie :

DÉFINITION II.8.4.

> On dit qu'un espace topologique E est **complètement régulier** si étant donné $x \in E$ et F un fermé ne le contenant pas, il existe une application continue de E dans $[0, 1]$ nulle en x et valant 1 sur F.

On notera qu'un espace métrique est toujours complètement régulier d'après le Théorème de Tietze-Urysohn (Théorème II.7.2, page 28).

PROPOSITION II.8.24 (*Compactifié de Stone-Čech*).

> *Soit E un espace topologique complètement régulier. Il existe un espace topologique compact $\tilde{E}$ tel que E soit homéomorphe à un sous-espace dense de $\tilde{E}$.*

Démonstration. Soit $\Phi = \mathscr{F}(\mathscr{C}(E, [0, 1]), [0, 1])$ muni de la topologie de la convergence simple (c.f. Exemple II.6.1, page 22) qui en fait un espace compact d'après le Théorème de Tychonoff (Théorème II.8.1, page 32). La définition de la topologie de la convergence simple montre facilement que l'application $F : E \to \Phi$ définie par $F(x) = e_x$ avec $e_x(f) = f(x), \forall f \in \mathscr{C}(E, [0, 1])$ est continue, et, l'hypothèse de régularité de l'espace implique que F est injective (si x et y sont deux points distincts, il existe une fonction continue de E dans $[0, 1]$ telle que $f(x) \neq f(y)$), et, par suite, F est une bijection continue de E sur $F(E)$. De plus, l'hypothèse de régularité implique aussi que cette bijection est bicontinue (nous laissons cette démonstration en exercice au lecteur). Il suffit alors de prendre $\tilde{E} = \overline{F(E)}$. □

SOUS-SECTION II.8.5

Applications aux espaces de fonctions continues

II.8.5.1 Approximation des fonctions continues

THÉORÈME II.8.4 (*Théorème de Dini*).

> *Soient E un espace topologique compact et (f_n) une suite croissante (ou décroissante) de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue g. Alors la suite (f_n) converge uniformément.*

Démonstration. Supposons par exemple la suite croissante. Puisque la suite est croissante, la convergence simple implique que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, il existe un entier n_x tel que $m \geq n_x$ implique $0 \leq g(x) - f_m(x) < \varepsilon$. Comme g et f_{n_x} sont continues, la croissance de la suite implique encore qu'il existe un voisinage V_x de x tel que $\forall y \in V_x$, $0 \leq g(y) - f_m(y) \leq \varepsilon$, $m \geq n_x$. Comme E est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de V_x : V_{x_i}, $1 \leq i \leq n$. Si n_0 est le plus grand des n_{x_i}, $1 \leq i \leq n$, pour $m \geq n_0$, et tout x de E on a $0 \leq g(x) - f_m(x) \leq \varepsilon$, ce qui démontre le théorème. □

Le théorème qui suit est un résultat fondamental en analyse. Il a de très nombreuses conséquences dans toutes les branches de cette discipline :

THÉORÈME II.8.5 (*Théorème de Stone-Weierstrass*).

Soient E un espace topologique compact et $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme sur E (c.f. Exemple 6, page 27). Soit A une sous-algèbre de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ contenant les constantes et séparant les points de E (i.e. si x et y sont deux points distincts de E, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$). Alors A est dense dans $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$.

La démonstration utilise le lemme suivant :

LEMME. *Il existe une suite croissante de polynômes réels (P_n) qui converge uniformément la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur le segment* $[0,1]$.

Démonstration du Lemme. On définit P_n par récurrence en prenant $P_1 = 0$ et

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n^2(t)\right),\ n \geq 1. \tag{II.8.1}$$

Si on montre que $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall n$, on aura aussi montré que la suite est croissante, positive et bornée, ce qui implique qu'elle converge simplement vers une fonction g qui, d'après (II.8.1), doit vérifier $g(t) = g(t) + 1/2(t - g^2(t))$, ce qui entraîne $g(t) = \sqrt{t}$, et le Théorème de Dini permet de conclure à la convergence uniforme. Vérifions donc l'inégalité annoncée par récurrence :

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t))\right),$$

et comme, par hypothèse de récurrence, $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$, l'inégalité est prouvée. □

Démonstration du Théorème de Stone-Weierstrass. Si$f \in A$, $a = \sup\limits_E \mid f \mid$, et si P_n sont les polynômes du Lemme, alors la suite $(P_n(f^2/a^2))_n$ converge uniformément vers $\mid f \mid /a$, ce qui montre que $\mid f \mid \in \bar{A}$, puisque A est une algèbre contenant les constantes. Maintenant, si f et g sont dans $\bar{A}$, comme

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + \mid f - g \mid) \text{ et } \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - \mid f - g \mid),$$

$\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ appartiennent aussi à $\bar{A}$.

Remarquons ensuite que, puisque A sépare les points, si x et y sont deux points distincts de E, si α et β sont deux réels et si $g \in A$ sépare x et y, la fonction

$$f = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{g - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

vérifie $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Soit maintenant $f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $x \in E$. D'après ce qui précède, pour $z \in E$, il existe $h_z \in A$ telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. Par continuité, il existe V_z voisinage de z tel que, pour $y \in V_z$, $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Si on recouvre E par un nombre fini de tels voisinages V_{z_i}, et que l'on considère la fonction $g_x = \inf\limits_i h_{z_i}$, on obtient une fonction qui est dans $\bar{A}$, d'après la première partie de la preuve, et qui vérifie $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$, $\forall y \in E$. Par continuité, il existe un voisinage V_x de x tel que $g_x(w) \geq f(w) - \varepsilon$ pour $w \in V_x$. Recouvrons encore une fois E par un nombre fini de voisinages V_{x_i} et posons $\varphi = \sup\limits_i g_{x_i}$, de sorte que $\varphi \in \bar{A}$. Il est alors clair que $\mid \varphi(w) - f(w) \mid \leq \varepsilon$, pour tout $w \in E$, ce qui termine la preuve. □

Dans le cas de l'espace $\mathscr{C}(E,\mathbb{C})$, le Théorème peut être faux. On a simplement le résultat plus faible, mais tout aussi important, suivant :

COROLLAIRE (*Théorème de Stone-Weierstrass complexe*).

Soient E un espace topologique compact, A une sous-algèbre de $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{C})$ contenant les constantes et séparant les points de E. Si $\forall f \in A$, la conjuguée $\bar{f}$ (conjugaison dans $\mathbb{C}$) appartient aussi à A, alors A est dense dans $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{C})$.

Démonstration. On remarque que l'hypothèse implique que, pour $f \in A$, $\Re f$ et $\Im f$ sont dans A. Par suite, si A_0 désigne l'algèbre des fonctions de A qui sont à valeurs réelles, A_0 vérifie les hypothèses du Théorème de Stone-Weierstrass (réel) et est donc dense dans $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$. Comme $A = A_0 + iA_0$ et $\mathscr{C}(E,\mathbb{C}) = \mathscr{C}(E,\mathbb{R}) + i\mathscr{C}(\mathscr{E},\mathbb{R})$, la conclusion est immédiate. □

Ce Théorème a de nombreuses conséquences classiques. Par exemple :

PROPOSITION II.8.25.

1. Si E est un espace métrique compact, les espaces métriques $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{C})$ sont séparables.

2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction continue sur K est limite uniforme (sur K) d'une suite de polynômes.

3. Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique de période 2π est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.

Démonstration. Le 2. est immédiat, et le 3. se voit aussi facilement en identifiant les fonctions continues 2π périodiques aux fonctions continues sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ qui est compact (voir Exemple 3, page 76). Vérifions le 1. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on remarque qu'il suffit de faire la preuve pour $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$. Soit (U_n) une base dénombrable pour la topologie de E (Proposition II.8.8, page 33) et soit $g_n(x) = d(x, E \setminus U_n)$ (qui est continue, Proposition II.2.2, page 10). Soit $A_{\mathbb{Q}}$ l'algèbre engendré, sur $\mathbb{Q}$, par les g_n. Il est clair que, si A est l'algèbre engendrée sur $\mathbb{R}$ par les g_n, alors $A_{\mathbb{Q}}$ est uniformément dense dans A. Comme $A_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, il nous suffit de montrer que A est dense dans $\mathscr{C}_u(E,\mathbb{R})$. Comme A contient les constantes, d'après le Théorème de Stone-Weierstrass, il suffit de voir que A sépare les points de E. Or, si $x \neq y$, il existe U_n tel que $x \in U_n$ et $y \notin U_n$, ce qui implique $g_n(x) \neq 0$ et $g_n(y) = 0$. □

II.8.5.2 Équicontinuité, Théorème d'Ascoli

DÉFINITION II.8.5.

*Soit E un espace. On suppose qu'il existe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts relativement compacts de E tels que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ et $E = \bigcup_n U_n$ (c.f. Proposition II.8.21, page 37). Soit F un espace métrique et $\mathscr{C}(E,F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F. On note $\mathscr{C}_c(E,F)$, l'espace $\mathscr{C}(E,F)$ muni de la distance de la convergence uniforme sur la famille de parties $(\bar{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c.f. Exemple 4, page 13). La topologie correspondante s'appelle la **topologie de la convergence uniforme sur les compacts**.*

On pourra remarquer que cette topologie ne dépend pas vraiment de la suite (U_n) choisie : si on prend une autre suite d'ouverts possédant les même propriétés, la distance obtenue avec cette nouvelle suite est topologiquement équivalente à la première. En fait, on peut démontrer (exercice facile) qu'une suite (f_n) converge pour la distance de la définition ci-dessus si et seulement si, pour tout compact K de E, elle converge uniformément sur K.

DÉFINITION II.8.6.

*Soient E et F deux espaces métriques. Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{C}(E,F)$. On dit que $\mathscr{A}$ est **équicontinu** (ou **uniformément équicontinu**) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour x et y dans E vérifiant $d_E(x,y) \leq \eta$, on a $d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, pour toute $f \in \mathscr{A}$. On dit que $\mathscr{A}$ est **équicontinu en $x_0 \in E$** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour y dans E vérifiant $d_E(x_0,y) \leq \eta$, on a $d_F(f(x_0), f(y)) \leq \varepsilon$, pour toute $f \in \mathscr{A}$. Si A est une partie de E, on dit que $\mathscr{A}$ est **équicontinue sur** A si elle est équicontinue en tout point de A.*

PROPOSITION II.8.26.

Soient E et F deux espaces métriques. Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{C}(E,F)$. Soit A une partie compacte de E. Si $\mathscr{A}$ est équicontinue sur A, alors $\mathscr{A}_{|A} = \{f_{|A},\ f \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{C}(A;F)$ est équicontinue. En particulier, si E est compact, l'équicontinuité en tout point de E équivaut à l'équicontinuité.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in A$, il existe $B(x, r_x)$ une boule, telle que, pour y et z dans cette boule et dans A, on a $d_F(f(y), f(z)) \leq \varepsilon$, pour toute $f \in \mathscr{A}_{|A}$. D'après la Propriété de Lebesgue (Proposition II.8.10, page 35), il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $B(x,\alpha) \cap A$ soit contenu dans une des boules $B(x, r_x)$; ceci dit exactement que $\mathscr{A}_{|A}$ est équicontinue. □

THÉORÈME II.8.6 (*Théorème d'Ascoli*).

Soit E et F des espaces métriques. On suppose qu'il existe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts relativement compacts de E tels que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ et $E = \bigcup_n U_n$. Soit A une partie de $\mathscr{C}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de E ;

2. Pour tout compact K de E, $A_{|K} = \{f_{|K},\ f \in A\}$ est équicontinue dans $\mathscr{C}(K,F)$ et, pour tout $x \in E$, $\{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact dans F.

Démonstration. Démontrons tout d'abord que 1. implique 2. Remarquons en premier que $A_{|K}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur K (si $(f_{|K,n})$ est une suite dans $A_{|K}$, il existe une sous-suite (f_{n_p}) convergente pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts et $(f_{n_p|K})$ converge uniformément sur K). Soit $\varepsilon > 0$. On peut donc recouvrir $A_{|K}$ par un nombre fini de boules (pour la distance de la convergence uniforme sur K) B_i de rayons ε. Si f_i sont les centres de ces boules, l'inégalité triangulaire donne aussitôt, pour $f \in B_i$, $d_F(f(x), f(y)) \leq 2\varepsilon + d_F(f_i(x), f_i(y))$, et, comme les f_i sont uniformément continues (Proposition II.8.12, page 35) et en nombre fini, l'équicontinuité de $A_{|K}$ en résulte. La seconde partie du 2. se montre aisément : si $(f_n(x))$ est une suite dans $\{f(x),\ f \in A\}$, la compacité relative de A implique qu'il existe une sous-suite (f_{n_p}) qui converge pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ; comme $\{x\}$ est un compact, on a le résultat voulu.

Démontrons maintenant que 2. entraîne 1. Soit (f_n) une suite dans A. Soit $\varepsilon > 0$ et K compact de E fixés. $A_{|K}$ étant équicontinu, soit η_K tel que $d_E(x, y) \leq \eta_K$, $x, y \in K$, implique $d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, $f \in A_{|K}$, et recouvrons K par un nombre fini de boules $B(x_i, r_i)$ avec $r_i < \eta_K$. La seconde hypothèse du 2. montre qu'il existe une suite extraite (f_{n_p}) de la suite (f_n) telle que, pour tout p et q, et tout i, on a $d_F(f_{n_p}(x_i), f_{n_q}(x_i)) \leq \varepsilon$, et, par suite, $d_F(f_{n_p}(x), f_{n_q}(x)) \leq 3\varepsilon$, pour tout $x \in K$. Appliquons cette construction à $\varepsilon = 1/3$: on construit ainsi une suite $(f_{1,n})$ extraite de (f_n) telle que $\sup\limits_{x\in K} d_F(f_{1,p}(x), f_{1,q}(x)) \leq 1$, $\forall p, q$. Puis on recommence de même avec $\varepsilon = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ et (f_n) remplacée par $(f_{1,n})$ ce qui donne une nouvelle suite extraite $(f_{2,n})$ vérifiant $\sup\limits_{x\in K} d_F(f_{2,p}(x), f_{2,q}(x)) \leq 1/2$, $\forall p, q$. Par récurrence, on construit ainsi $(f_{l,n})$ extraite de $(f_{l-1,n})$ telle que

$$\sup_{x\in K} d_F(f_{l,p}(x), f_{l,q}(x)) \leq 1/l,\ \forall p, q.$$

On considère maintenant la suite diagonale $(f_{n,n})$; pour $m \geq n$, elle vérifie $\sup\limits_{x\in K} d_F(f_{m,m}(x), f_{n,n}(x)) \leq 1/n$; comme de plus, par hypothèse, pour tout $x \in K$, la suite $(f_{n,n}(x))$ est contenue dans un compact de F, donc dans une partie complète de F (Théorème II.8.2, page 34), elle converge vers $f(x)$ et on a $\sup\limits_{x\in K} d_F(f_{m,m}(x), f(x)) \leq 1/n$, $m \geq n$. Ainsi, on a extrait de la suite (f_n) une sous-suite uniformément convergente sur K, vers une fonction définie et continue sur K. Soit maintenant (U_n) une suite d'ouverts de E vérifiant les propriétés décrites dans la Définition II.8.5 ; en appliquant ce qui précède au compact $K = \bar{U}_1$, on trouve une suite (f_n^1) de la suite (f_n) qui converge uniformément sur $\bar{U}_1$ vers une fonction f^1 définie et continue sur $\bar{U}_1$; en recommençant de même avec $K = \bar{U}_2$ et (f_n^1), on construit une seconde sous-suite (f_n^2) qui converge uniformément sur $\bar{U}_2$ vers une fonction f^2 définie et continue sur $\bar{U}_2$, qui vérifie $f^2_{|\bar{U}_1} = f^1$; par récurrence, on construit ainsi une sous-suite (f_n^p) de la suite (f_n^{p-1}) qui converge uniformément sur $\bar{U}_p$ vers f^p qui prolonge f^{p-1}. La suite (f_n^n) est alors convergente pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts vers une fonction définie et continue sur E tout entier.

C.Q.F.D.

La proposition suivante montre une utilisation de l'équicontinuité à la métrisabilité de certains espaces topologiques :

PROPOSITION II.8.27.

Soient E et E' deux espaces métriques de distances d et d', E étant supposé séparable, et $A = \{a_n\}$ une partie dénombrable dense de E. Soit $\mathscr{F}_s(E; E')$ l'espace topologique des fonctions de E dans E' muni de la topologie de la convergence simple (c.f. Exemple II.6.1, page 22). Soit $\mathscr{G}$ une partie de $\mathscr{F}_s(E; E')$ équicontinue en tout point de E. Soit $\mathrm{d}_{\mathscr{A}}$ la distance de la convergence uniforme sur la famille de parties $\mathscr{A} = \{\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}\}$ (c.f. Exemple 4, page 13). Alors $\mathrm{d}_{\mathscr{A}}$ définit la topologie induite sur $\mathscr{G}$ par celle de $\mathscr{F}_s(E; E')$: on dit que la topologie de la convergence simple est métrisable sur $\mathscr{G}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{G}$. On voit très facilement que tout voisinage de f pour $d_{\mathscr{A}}$, est un voisinage de f pour la topologie de la convergence simple. C'est la réciproque qu'il faut démontrer. Soit $f \in \mathscr{G}$; la définition de la topologie produit montre qu'il suffit de voir que, pour $x \in E$ quelconque, l'ensemble $V = \{g \in \mathscr{G} \text{ t.q. } d'(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$ contient une boule ouverte pour $d_{\mathscr{A}}$ centré en f. Or, comme $\mathscr{G}$ est équicontinue en x et A dense dans E, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall h \in \mathscr{G}$, $d'(h(x), h(a_{n_x})) < \varepsilon/4$; l'inégalité triangulaire donne alors $d'(f(x), g(x)) < \varepsilon/2 + d'(f(a_{n_x}), g(a_{n_x}))$, $g \in \mathscr{G}$. Par suite, $d_{\mathscr{A}}(f, g) < \dfrac{\varepsilon}{3 \times 2^{n_x}}$ implique $d'(f(x), g(x)) < \varepsilon$, ce qui montre bien que la boule ouverte pour $d_{\mathscr{A}}$ centré en f de rayon $\dfrac{\varepsilon}{3 \times 2^{n_x}}$ est contenue dans V. □

Exercices

Exercice II.1.

1. Montrer qu'on définit une topologie sur $\mathbb{R}$ en disant qu' une partie de $\mathbb{R}$ est ouverte si elle est vide ou de complémentaire au plus dénombrable.

On admettra que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est elle-même au plus dénombrable, de même qu'une réunion finie.

2. Quelles sont les suites convergentes pour cette topologie ?

Exercice II.2.

1. Soit E un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité).
2. Montrer que l'on définit sur $\mathbb{R}$ une topologie T de la façon suivante :
   « Une partie A de E est ouverte si elle est vide ou bien si pour tout $x \in A$ et tout $y \geq x$, alors $y \in A$. »
3. Soit $x \in A$, déterminer l'adhérence du singleton $\{x\}$ pour T. Peut-il être fermé, ouvert ?
4. La topologie T est-elle séparée ?

Exercice II.3.

Soit E un espace topologique. Démontrer les assertions suivantes :

1. Un point x est dans la frontière d'une partie A de E si et seulement si tout voisinage de x rencontre A et son complémentaire.
2. Si A et B sont deux parties ouvertes disjointes de E, alors les parties$\mathring{\bar{A}}$ et$\mathring{\bar{B}}$ sont disjointes.
3. Si A et B sont deux parties fermées de E dont la réunion est E, alors $\overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}} = E$.
4. Une partie A de E est fermée si et seulement si sa frontière $fr(A)$ est incluse dans A.
5. Une partie A de E est ouverte si et seulement si $A \bigcap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

Exercice II.4.

Dans R muni de la topologie usuelle, déterminer l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants :

1. $A =]0,\ 1]$; $A =]0,\ 1[\cup]1,\ 2]$ $\quad A = \mathbb{Q}$. ?
2. Même question dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle pour l'ensemble $A =]0,\ 1] \times \{0\}$ (comparer avec 1.) et $A = \{(x, y)\ tq\ x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 0)\ tq\ 1 < x < 2\}$.

Exercice II.5.

1. On munit $\mathbb{R}^+$ de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Les ensembles $[0, 1]$, $[0, 1[$ sont ils ouverts dans $\mathbb{R}^+$?
2. Soit E un espace topologique, F une partie de E. On munit F de la topologie induite par E. Comparer pour une partie A de F l'adhérence et l'intérieur de A dans E et F respectivement.
3. Soit E un espace topologique, $A,\ B,\ D$ des parties de E telles que $A \cup B = E$ et $D \subseteq A \cap B$. On suppose que D est un ouvert de A et B. Montrer que D est un ouvert de E.

Exercice II.6.

Soit E un espace topologique et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E telle que tout point $x \in E$ admette un voisinage V disjoint de tous les F_i sauf au plus un nombre fini (i.e. : $\exists \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$; $\forall i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\ V \cap F_i = \emptyset$).

1. Montrer que la réunion des F_i est fermée.
2. On suppose en plus que $\bigcup_{i \in I} F_i = E$. Montrer qu' un ensemble S de E est fermé si et seulement si $S \cap F_i$ est fermé pour tout $I \in I$.

Exercice II.7.

Soit E un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant E. Montrer qu'un ensemble A de E est fermé dans E si et seulement si chaque ensemble $A \cap U_i$ est fermé dans U_i.

Exercice II.8.

Soit E un ensemble. Posons $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$. Montrer que d est une distance sur E. Déterminer $B(x, 1)$, $\bar{B}(x, 1)$, $\overline{B(x, 1)}$.

Exercice II.9.

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et soit $\mathscr{C}^1(I\,;\,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I. Pour f et g éléments de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$, on pose $d(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)| + \sup_{t \in I} |f'(t) - g'(t)|$. Montrer que d est une distance sur $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$.

Exercice II.10.

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $E = \mathscr{C}(I\,;\,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. On définit sur $E \times E$ les fonctions d et δ de la façon suivante :

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \text{ et } \delta(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que d et δ sont des distances sur$E$.

Exercice II.11.
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support borné.
On considère les applications d et δ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; ; \; x \in \mathbb{R},$$

et,

$$\delta(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx.$$

1. Montrer que d et δ sont des distances sur E.
2. Ces distances sont elles équivalentes, topologiquement équivalentes ?

On rappelle que le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points où elle est non nulle.

Exercice II.12.
1. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la fonction $\delta = \dfrac{d}{1+d}$ est une distance sur E topologiquement équivalente à d. Ces deux distances sont elles équivalentes ?
2. Soit A un ensemble et B l'ensemble des fonctions bornées de A dans un espace métrique (E, d). Soit (A_n) une famille dénombrable de parties de A telles que $\bigcup_n A_n = A$. Pour chaque n, soit $d_n(f, g) = \sup_{x \in A_n} d(f(x), g(x))$. Pour f et g éléments de B, on pose $\delta(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$.
   Montrer que δ est une distance et qu'une suite de fonctions (f_k) de B converge vers une fonction f si et seulement si la suite (f_k) converge uniformément vers f sur chaque A_n.

Exercice II.13.
Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On définit δ de la façon suivante : a et b étant deux points de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\delta(a, b) = \begin{cases} d(a, b) & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont alignés avec l'origine,} \\ d(a, 0) + d(b, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que δ est une distance. Déterminer les boules ouvertes pour δ et les suites convergentes pour δ.
2. On considère l'application δ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\delta(z, z') = |z - z'|$ si $|z| = |z'|$ et $\delta(z, z') = |z| + |z'|$ si $|z| \neq |z'|$.
3. Démontrer que δ est une distance. Déterminer les boules ouvertes pour δ et les suites convergentes pour δ.

Exercice II.14.
1. $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie usuelle. Soit $A = \{x = (x_k)_{1 \le k \le n} \, tq \, \forall k \in \mathbb{N} \; 1 \le k \le n, \; |x_k| < \dfrac{1}{k}\}$. Montrer que A est ouvert.
2. On désigne par l^∞ l'espace des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n \ge 1}$ et, pour $x = (x_k)_{k \ge 1}$, $y = (y_k)_{k \ge 1} \in l^\infty$ on pose $d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k - y_k|$. Montrer que d est une distance sur l^∞ et que l'ensemble $B = \{x = (x_k)_{k \ge 1} \, tq \, \forall k \in \mathbb{N} \; |x_k| < \dfrac{1}{k}\}$ est d'intérieur vide dans l^∞ .

Exercice II.15.
Soient les fonctions d et δ définies par $d(x, y) = |x - y|$ et $\delta(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$où x et y sont des réels strictement positifs. Montrer que δ définit une distance sur $]0, +\infty[$. Les distances d et δ sont elles équivalentes, topologiquement équivalentes ?

Exercice II.16.
On désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites de nombres complexes. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à E, on pose $val(x) = \min\{n \in \mathbb{N}, \; x_n \neq 0\}$ si $x \neq 0$ et $val(0) = \infty$. On définit $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ par $d(x, y) = e^{-val(x-y)}$ (convention $e^{-\infty} = 0$).
1. Montrer que d est une distance sur E vérifiant :

$$\forall \, (x, y, z) \in E^3 \; d(x, z) \le \max\{d(x, y), \; d(y, z)\}.$$

2. Montrer que deux boules ouvertes de même rayon dans (E, d) sont disjointes ou confondues.
3. Soit $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E avec $x^p = (x_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$. Démontrer que la suite $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Quelle est alors la limite de la suite $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$?

Exercice II.17.
On reprend les notations de l'exercice II.2 et soit une application $f : E \to E$. Démontrer que f est continue si et seulement si elle est croissante.

Exercice II.18.
1. Soit α un réel compris entre 0 et 1 et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ l'application définie par $f(x) = x^\alpha$. Prouver que f est uniformément continue.

2. Les fPonctions $x \longmapsto \cos x^2$ et $x \to \cos\sqrt{x}$ sont elles uniformément continues sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice II.19.
On définit sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ la fonction δ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par $\delta(x, y) = |x - y|$ si $|x| = |y|$ et $\delta(x, y) = |x| + |y|$ sinon.

1. Montrer que δ est une distance.
2. Caractériser les boules ouvertes pour δ.
3. $\mathbb{C}$ est il complet pour la distance δ ?

Exercice II.20.
Soit E un espace métrique connexe non borné. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, la sphère $S(x, r)$ est non vide.

Exercice II.21.
Soit E un espace topologique, A et B des fermés de E tels que $A \cap B$ et $A \cup B$ soient connexes. Montrer que A et B sont connexes. L'hypothèse « fermée » est elle essentielle ?

Exercice II.22.
Soit E un espace topologique connexe, f et g deux fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$, sans zéros communs et dont le produit est nul. Montrer que l'une des deux fonctions est nulle.

Exercice II.23.
Montrer que toute fonction continue sur un connexe à valeurs dans un espace séparé et localement constante est constante. Enoncer et démontrer la réciproque.

Exercice II.24.
Soit E un espace topologique tel que pour tout $(x, y) \in E \times E$, il existe une partie connexe $C(x, y)$ de E contenant x et y. Démontrer que E est connexe.

Exercice II.25.
Soit E un espace topologique et A une partie connexe de E. Montrer que si A rencontre une partie B de E et son complémentaire, elle rencontre sa frontière $\mathrm{Fr}(B)$.

Exercice II.26.
Soit E un espace totalement ordonné. On appelle intervalle ouvert I de E toute partie de la forme $]a, b[= \{x \in E$ tels que $a < x < b\}$ ou $]., b[= \{x \in E$ tells que $x < b\}$ ou $]a, .[= \{x \in E$ tels que $x > a\}$.

1. Montrer qu' il existe une topologie sur E telle que les intervalles ouverts en forment une base.
2. Cette topologie est elle séparée ?
3. On suppose que E est connexe. Montrer que :
   (a) Pour tout $(x, y) \in E^2,\ x < y$, l'intervalle $]x,\ y[$ est non vide.
   (b) Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure (On pourra s'intéresser à l'ensemble des majorants de A).

Exercice II.27.

1. Montrer qu'une couronne de $\mathbb{R}^2$ est connexe.
2. Montrer que toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

Exercice II.28.
Démontrer que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont une coordonnée au moins est irrationnelle est connexe.

Exercice II.29.
Peut il y avoir deux espaces homéomorphes parmi les trois suivants : $A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 < 1\}$; $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice II.30.
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $x \in A$, le segment $[0, x]$ soit contenu dans A.

1. Montrer que A est connexe.
2. On suppose, en plus, que A est bornée. Montrer que le complémentaire de A est connexe.

Exercice II.31.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue, injective. En considérant l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\},$$

démontrer que f est une application strictement monotone.

Exercice II.32.
Déterminer les composantes connexes de chacun des espaces suivants :

1. $E = \mathbb{R} \setminus \{a\}$;
2. $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$;
3. $E = \mathbb{R}^2 \setminus D$ où D est une droite ;
4. $E = \mathbb{R}^3 \setminus P$ où P est un plan ;
5. E est le complémentaire d'une couronne dans $\mathbb{R}^2$; $E = \mathbb{Q}$.

Exercice II.33.
Soit $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \right) \cup ([0,1] \times \{0\})$. Montrer que X est connexe mais non localement connexe.

Exercice II.34.
Donner un exemple d'espace localement connexe, non connexe.

Exercice II.35.
Soient n un entier ≥ 3, f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_n^2,$$

et,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } f(x) \neq 0\}.$$

Montrer que

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } f(x) > 0\},$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } f(x) < 0 \text{ et } x_n > 0\},$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } f(x) < 0 \text{ et } x_n < 0\},$$

sont trois ouverts connexes de E et que ce sont les composantes connexes de E.

Exercice II.36.
Soit une famille d'espaces topologiques $(E_i)_{i \in I}$ et $E = \prod_{i \in I} E_i$ leur produit.

1. Soit $(x^n)_n$ une suite d'éléments de E où pour chaque n, $x^n = (x_i^n)_i$. Montrer que la suite $(x^n)_n$ converge dans E vers $x = (x_i)$ si et seulement si pour tout i la suite $(x_i^n)_n$ converge vers x_i dans E_i.

Pour chaque $i \in I$, on note p_i la projection canonique de rang i.

2. Montrer que p_i est ouverte, est elle fermée ?
3. Soit X un espace topologique et f une application de X dans E. Montrer que f est continue si et seulement si chaque $f_i = p_i \circ f$ est continue.
4. Supposons que pour chaque $i \in I$, A_i soit un fermé de E_i. Montrer que le produit des A_i est fermé dans E. Le résultat est il vrai pour des ouverts ?
5. Supposons que pour chaque $i \in I$, A_i soit une partie de E_i. Montrer que $\prod_i \overline{A_i} = \overline{\prod_i A}_i$

Exercice II.37.
Soit E et F deux espaces topologiques et une application continue $f : E \to F$. On suppose que F est séparé. Prouver que le graphe $\Gamma(f) = \{(x,y) \text{ t.q. } y = f(x)\}$ est fermé dans le produit $E \times F$. Réciproque ? Donner une deuxième démonstration dans le cas ou les espaces E et F sont métriques.1) Soit une famille d'espaces topologiques $(E_i)_{i \in I}$ et $E = \prod_{i \in I} E_i$ leur produit.

Exercice II.38.
Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques non vides et $E = E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit. Montrer que E est connexe si et seulement si E_1 et E_2 le sont.

Exercice II.39.
Soit $(E_n, d_n)_n$ une suite d'espaces métriques, $E = \prod_n E_n$ et $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$. Montrer que d est une distance et que la topologie associée à d est la topologie produit.

Exercice II.40.

1. d et d' sont deux distances équivalentes sur un ensemble E. Montrer que si d et d' sont équivalentes (E, d') est complet dès que (E, d) l'est. Cette propriété est elle vraie si d et d' sont seulement topologiquement équivalentes ?
2. Montrer que si $Id : (E, d) \to (E, d')$ est uniformément continue, toute suite de Cauchy dans (E, d) est une suite de Cauchy dans (E, d').
3. On considère sur $\mathbb{R}$ les deux distances suivantes : $d_1(x, y) = |x - y|$; $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$. Sont elles topologiquement équivalentes ? L'identité de $(\mathbb{R}, d_1)$ dans $(\mathbb{R}, d_2)$ est elle uniformément continue ? Les suites de Cauchy pour d_1 et d_2 sont elles les mêmes ?
4. Soit f une isométrie surjective entre deux espaces métriques. Montrer que si l'un des deux est complet, l'autre aussi.
5. Ce dernier résultat est il vrai si f est seulement un homéomorphisme ?

Exercice II.41.
Montrer que les espaces suivants sont complets :

1. E est l'espace $\mathscr{C}([0, 1],\ \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la distance de la convergence uniforme.
2. E est l'espace l^∞ des suites de nombres complexes bornées, muni de la distance $d(x, y) = \sup\limits_{n \geq 0} |x_n - y_n|$.
3. E est l'espace l^1 des suites de nombres complexes $x = (x_n)$ telles que la série $\sum |x_n|$ converge, muni de la distance
$$d(x, y) = \sum_{n \geq 0} |x_n - y_n|.$$
4. E est l'espace $\mathbb{C}$ muni de la distance « S.N.C.F. »

Exercice II.42.
Montrer que $E = C([0, 1],\ \mathbb{R})$ muni de la distance $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ n' est pas complet.

Exercice II.43.
On désigne par c_0 l'espace des suites réelles qui tendent vers 0 muni de la distance $d(x, y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ et par c_{00} le sous ensemble des suites réelles nulles à partir d' un certain rang.

1. Montrer que c_0 est complet.
2. Montrer que c_{00} est dense dans c_0. L'espace métrique c_{00} est il complet ?

Exercice II.44.
Montrer que tout espace métrique complet sans point isolé est infini non dénombrable.

Exercice II.45.
On considère une application continue $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \geq 1$, la suite $f(nx)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0. En considérant les ensembles $F_n = \{x \geq 1 : p \in \mathbb{N}\ p \geq n \Rightarrow |f(px)| \geq \varepsilon\}$, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice II.46.
Soit $E = \mathscr{C}([0, 1],\ \mathbb{R})$. A tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on associe l'ensemble F_n des fonctions $f \in E$ telles que :

$$\begin{cases} |f(t)| \leq 1,\ \forall t \in [0, 1] \\ |f(0)| \geq \dfrac{1}{2} \\ f(t) = 0,\ \forall t \in [\dfrac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles F_n sont non vides, que la suite (F_n) est décroissante et que l'intersection des ensembles F_n est vide.
2. On munit E de la distance d : $d(f, g) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.
3. (a) Montrer que pour tout $n > 0$, F_n est fermé.
   (b) Que peut on en déduire ?
4. On munit E de la distance d_1 : $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$.
   (a) Montrer que pour tout couple de fonctions $(f, g) \in E \times E$, $d_1(f, g) \leq \dfrac{2}{n}$.
   (b) Que peut on en déduire ?

Exercice II.47.

1. Soit f :$]a, b] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet un prolongement $\widetilde{f}$, uniformément continu, à l'intervalle $[a, b]$.
2. Soit f :$]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f'(x)$ admette une limite réelle quand x tend vers a. Montrer que f admet un prolongement $\widetilde{f}$, dérivable, à l'intervalle $[a, b]$.

Exercice II.48.

1. Donner un exemple d'une application contractante d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans lui même, n'admettant pas de point fixe.
2. Soit $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(t) = t + \frac{1}{t}$. Montrer que pour tous réels $u, v \in [1, +\infty[$ tels que $u \neq v$, on a $|f(u) - f(v)| < |u - v|$. L'application f admet elle un point fixe ? Commentaire ?

Exercice II.49.
Etudier la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{1}{u_n})$.

Exercice II.50.

1. E est un espace topologique séparé, $(x_n)_n$ une suite de points de E convergente vers un élément $x \in E$. Démontrer que l'ensemble $\{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x\}$ est un compact de E.
2. Démontrer qu'une application d'un espace métrique E dans un autre est continue si et seulement si sa restriction à tout compact de E est continue.

Exercice II.51.
Soit K un espace topologique compact et $C(K)$ l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si une famille finie de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à $C(K)$ est sans zéros communs ($\bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0) = \emptyset$) alors, il existe des fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $C(K)$ telles que $u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n = 1$.
2. Soit I un idéal de $C(K)$. Montrer que $I = C(K)$ si et seulement si $\bigcap\limits_{f \in I} f^{-1}(0) = \emptyset$.

Exercice II.52.
Soit E un espace topologique séparé et $A,\ B$ deux compacts disjoints de E.

1. Montrer qu'il existe des ouverts U et V de E tels que $U \supseteq A$; $V \supseteq B$ et $U \bigcap V = \emptyset$.
2. Soit E un espace métrique.
   (a) Soient $A,\ B$ deux compacts disjoints de E, montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = d(A,\ B)$. Redonner, dans ce cas une démonstration de 1.
   (b) Montrer que si A est une partie compacte de E, et B une partie fermée telles que $A \cap B = \emptyset$, alors $d(A, B) > 0$.
   (c) Montrer que $d(A, B)$ peut être nul si A et B sont disjoints, mais seulement fermés, tandis que la proriété du 1. reste vraie (utiliser la fonction $x \to d(x, A) - d(x, B)$).

Exercice II.53.
Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante de parties compactes d'un espace métrique E et A leur intersection. Montrer que la suite des diamètres des A_n tend vers le diamètre de A.

Exercice II.54.
Montrer qu' un espace métrique dans lequel toute boule fermée est compacte est un espace complet.

Exercice II.55.
E est un espace topologique séparé et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides.

1. Que peut on dire de l'intersection des K_n ?
2. Si Ω est un ouvert contenant l'intersection des K_n, montrer qu'il existe un entier n tel que Ω contienne K_n.
3. On suppose en plus que les K_n sont connexes. Montrer que l'intersection des K_n est connexe. Montrer que ce résultat n'est plus vrai si les K_n sont seulement fermés.

Exercice II.56.
X et Y sont deux espaces topologiques ; Y est compact.

1. Montrer que la projection $p_X : X \times Y \to X$ est fermé.
2. On suppose que $f : X \to Y$ est une application dont le graphe est fermé. Montrer que f est continue.

On donnera deux démonstrations des questions 1. et 2. dont une en supposant que les espaces X et Y sont métriques.

Exercice II.57.
Soient Λ et X deux espaces topologiques compacts, et soit f une application continue de $\Lambda \times X$ dans un espace séparé Y telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $x \to f(\lambda, x)$ soit injective. Soit alors $y_0 \in Y$.

1. Montrer que l'ensemble Λ_0 des λ dans Λ tels que l'équation $y_0 = f(\lambda, x)$ ait une solution, est fermé dans Λ_0.
2. Montrer que la solution $x = \varphi(\lambda)$ de cette équation est une fonction continue de λ sur Λ_0.

Donner de ces deux questions une autre démonstration, en supposant que les espaces Λ et X sont métriques.

Exercice II.58.
Soit $l^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ muni de la distance $d : d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Montrer que la suite $(e^n)_n$ où e^n est l'élément de l^2 dont toutes les composantes sont nulles sauf celle de rang n égale à 1 ne contient pas de sous-suites de Cauchy. En déduire que la boule unité fermée de l^2 n'est pas compacte.

Exercice II.59.
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme. Donner un exemple d'une suite bornée de E n'admettant aucune sous-suite convergente.

Exercice II.60.
1. Soit Γ le cercle $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1\}$ et soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ une application continue.
   (a) Montrer que $f(\Gamma)$ est un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$.
   (b) Montrer que tout $t \in]a,b[$ possède au moins deux antécédents.
   (c) Existe-t-il des applications continues injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?
2. Soit l'application $\Phi : \Gamma \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[$ définie par : $\Phi(x,y) = 2 \arctan \frac{y}{x+1}$.
   (a) Calculer $\exp(i\Phi(z))$ pour $z \in \Gamma \setminus \{-1\}$ et $\Phi(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.
   (b) En déduire que Φ est une bijection continue de $\Gamma \setminus \{-1\}$ sur $]-\pi, \pi[$.
   (c) On suppose maintenant que f est une application continue injective de Γdans lui même.
      i. Montrer que $-1 \in f(\Gamma)$ (supposer le contraire et considérer l'application $\Phi \circ f$). En déduire que f est surjective.
      ii. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice II.61.
Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \times E \ ; \ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

En considérant l'application $\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$, montrer que f admet un point fixe.

Exercice II.62.
Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application isométrique, i.e. vérifiant, pour tous $x, y \in E$: $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, et soit x un élément de E.

On définit une suite (x_n) par la donnée de son premier terme $x_0 = x$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
1. Montrer que la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})_n$ tend vers x.
3. En déduire que f est surjective donc bijective.

Exercice II.63.
Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^p$. On veut montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant K. Soit $E = \{r > 0 \ / \ \exists x \in \mathbb{R}^p \ ; \ K \subseteq \bar{B}(x,r)$.
1. Montrer que E admet une borne inférieure $R \geq 0$.
2. En considérant une suite (r_n) d'éléments de E et une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^p$ telles que $K \subseteq \bar{B}(x_n, r_n)$, montrer l'existence d'une boule $\bar{B}(x,R)$ contenant K.

Exercice II.64.
Soit $l^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ muni de la distance $d : d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et B l'ensemble des éléments $x \in l^2$ tels que $|x_n| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que B est compact. On pourra s'aider des deux faits suivants :
1. L'ensemble B_N des $x = (x_n)_{1\leq n \leq N} \in \mathbb{R}^N$ tels que pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$, on ait $|x_n| \leq \dfrac{1}{n}$, est compact. Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie A de B_N telle que la distance de tout point de B_N à A soit $\leq \varepsilon$.
2. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\sum_{n \geq N} \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon^2$.

Exercice II.65.
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $\lim_{||x|| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(xy)$. Montrer que f admet un minimum absolu.

1. Les espaces $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ sont ils localement compacts ?
   (a) Montrer que toute surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ est continue. Moralité ?

Exercice II.66.
Montrer que dans un espace localement compact, l'intersection de deux sous espaces localement compacts est localement compact.

Exercice II.67.
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice II.68.
Soit (E,d) un espace métrique compact. Démontrer que $C(E,\mathbb{R})$ l' espace des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme est séparable.

Indication : si (x_n) est une suite dense de points de E, considérer les fonctions $g_n :\ g_n(x) = d(x, x_n)$.

Exercice II.69.
Soient E et F deux espaces métriques compacts, f une application continue de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un système fini $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$ et un système fini $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ d'applications continues de F dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x,y) \in E \times F$, $|f(x,y) - \sum_{i=1}^n u_i(x)v_i(y)| \leq \varepsilon$. (Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass à l'algèbre engendrée par les applications continues $(x,y) \to u(x)$ et $(x,y) \to v(y)$ où u est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ et v une fonction continue de F dans $\mathbb{R}$).

Exercice II.70.
Soit X un espace compact et Y un fermé de X.

1. Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ une application continue et ε un réel > 0.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $h_\varepsilon \in \mathscr{C}(X,R)$ telle que :
   $$\forall y \in Y,\ |h_\varepsilon(y) - f(y)| < \varepsilon$$
   (b) Montrer qu'il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathscr{C}(X,R)$ telle que :
   $$\begin{cases} \forall y \in Y,\ |f_\varepsilon(y) - f(y)| < \varepsilon \\ \forall x \in X,\ m = \inf\limits_{h\in Y} f(y) \leq f_\varepsilon(x) \leq \sup\limits_{y\in Y} f(y) = M \end{cases}$$
   (c) Montrer qu'il existe une suite $(g_n) \subseteq C(X,R)$ telle que
   $$\begin{cases} \forall y \in Y,\ |f(y) - \sum\limits_{1\leq i\leq n} g_i(y)| < \dfrac{1}{2^n} \\ \forall x \in X,\ |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}},\ n \leq 2 \end{cases}$$
2. Montrer que l'application restriction de $\mathscr{C}(X,R)$ dans $\mathscr{C}(Y,R)$ est surjective.

Exercice II.71.
Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme et soit B la partie de E constituée des fonctions f de classe C^1 telles que : $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq 1$.

Démontrer que B est relativement compacte dans E.

Exercice II.72.
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}.$$

Montrer que $(f_n)_n$ est sans valeurs d'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme. La famille des fonctions $\{f_n\}$ est elle équicontinue ?

CHAPITRE III

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, c'est-à-dire la plupart du temps, le corps des scalaire sera noté $\mathbb{K}$, qui représente donc soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Lorsqu'un résultat est spécifique à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, on précise alors le corps utilisé pour le résultat. Naturellement, on peut définir les notions introduites dans ce chapitre avec d'autres corps comme par exemple dans $\mathbb{Q}$. L'important est de disposer d'une valeur absolue sur le corps. C'est une situation que nous ne considérerons néanmoins pas.

SECTION III.1

Espaces normés et espaces de Banach

DÉFINITION III.1.1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle ***norme*** *sur E une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

2. Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

3. Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un ***espace normé****.*

Remarque III.1.1. *Une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés 2. et 3. de la définition ci-dessus, mais pas 1., s'appelle une* ***semi-norme*** *sur E. On pourra noter que, pour une semi-norme*

$$\{x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Dans toute la suite, la norme d'un espace normé sera toujours notée $\|.\|$, sauf mention expresse du contraire, lorsque des confusions seront possibles.

PROPOSITION III.1.1.

Soit E un espace normé. L'application

$$(x, y) \mapsto \|x - y\|$$

est une distance sur $E \times E$, et E est toujours supposé muni de la structure d'espace métrique définie par cette distance.

Remarque III.1.2. *Si on note $d(x, y)$ la distance de la Proposition ci-dessus, on a $d(x, 0) = \|x\|$.*

DÉFINITION III.1.2.

*On appelle **espace de Banach** un espace normé complet (au sens de l'espace métrique sous-jacent).*

PROPOSITION III.1.2.

Soit E un espace normé.
1. L'application $(x, y) \mapsto x + y$ est uniformément continue de $E \times E$ dans E ;
2. L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;
3. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est uniformément continue de E dans E.

Démonstration. Ceci est très simple. Par exemple, pour montrer le 2. en (λ_0, x_0), on écrit

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0)$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire. □

DÉFINITION III.1.3.

*Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que deux **normes** $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont **équivalentes** si les distances qui leur sont associées le sont. Autrement dit, s'il existe deux constantes c et C strictement positives telles que, $\forall x \in E, c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$.*

PROPOSITION III.1.3.

Soient E un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors son adhérence $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. F muni de la restriction de la norme de E s'appelle le sous-espace normé F de E. Si E est un Banach alors $\bar{F}$ en est un aussi, et si F est un Banach alors il est fermé dans E.

Démonstration. Le fait que $\bar{F}$ soit un espace vectoriel résulte aisément de la Proposition précédente, et les autres affirmations sont évidentes. □

DÉFINITION III.1.4.

*On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est **totale** si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A est dense dans E.*

PROPOSITION III.1.4.

Soient E_i, $1 \leq i \leq n$ des espaces vectoriels normés de normes respectives notées $\|.\|_i$, et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace vectoriel produit des E_i (au sens algébrique). Alors l'application

$$(x_i) \mapsto \max_i \|x_i\|_i$$

*est une norme sur E dont l'espace métrique associé est l'espace métrique produit des espaces métrique de E_i. On l'appelle l'**espace normé produit** de E_i.*

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION III.1.5.

Soient E un espace vectoriel normé et F_1et F_2 deux sous-espaces de E tels que E soit somme directe de F_1 et F_2 (ce que l'on note généralement $E = F_1 \oplus F_2$). Soient p_1 et p_2 les projections de E sur F_1 et F_2 respectivement (de sorte que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = p_1(x) + p_2(x)$). L'application

$$(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$$

de $F_1 \times F_2$ dans E une bijection linéaire continue et c'est un homéomorphisme si et seulement si l'une des application p_i est continue (et donc l'autre aussi).

Démonstration. Il est clair que $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ est continue. D'autre part si p_1 est continue, p_2 l'est aussi et comme $x \mapsto (p_1(x), p_2(x))$ est l'application inverse de la précédente, on a la conclusion recherchée. □

DÉFINITION III.1.5.

*Si la condition de la Proposition précédente est satisfaite, on dit que E est **somme directe topologique** de F_1 et F_2. Si F est un sous-espace vectoriel de E pour lequel il existe un sous-espace G de E tel que E soit somme directe topologique de F et G, on dit que G est un **supplémentaire topologique** de F (lorsqu'un tel G existe on dit aussi que F est **complémenté** dans E).*

PROPOSITION III.1.6.

Un espace normé est connexe par arc et localement connexe par arc. De plus, un ouvert d'un espace normé est connexe si et seulement s'il est connexe par arc.

Démonstration. En effet, toute boule d'un espace normé est connexe par arc car deux points peuvent être joints par un segment de droite qui est contenu dans la boule d'après l'inégalité triangulaire, et deux points de E peuvent être joints par un segment. La seconde assertion résulte de la première, car si O est ouvert connexe et si $x \in O$, l'ensemble des points de O qui peuvent être joints à x par un arc contenu dans O est non vide (puisqu'il contient une boule ouverte), ouvert et fermé dans O donc égal à O. □

THÉORÈME III.1.1 (*Complétion d'un espace normé*).

Soit E un espace normé. Alors il existe un espace de Banach $\hat{E}$ et une isométrie linéaire $\hat{T}$ de E sur un sous-espace vectoriel dense de $\hat{E}$. De plus un tel complété de E est unique à un isomorphisme isométrique près.

Démonstration. L'unicité résulte de l'unicité du Théorème II.7.3, page 29, montrons l'existence. Soit $\hat{E}$ un complété de l'espace métrique E et $\hat{T}$ l'isométrie de E sur un sous-espace dense de $\hat{E}$. Il suffit de voir que l'on peut définir, sur $\hat{E}$, un structure d'espace de Banach définissant la distance et telle que $\hat{T}$ soit linéaire. Les applications

$$(\hat{T}(x), \hat{T}(y)) \mapsto \hat{T}(x + y)$$

de $\hat{T}(E) \times \hat{T}(E)$ dans $\hat{E}$ et

$$(\lambda, \hat{T}(x)) \mapsto \hat{T}(\lambda x)$$

de $\mathbb{K} \times \hat{T}(E)$ dans $\hat{E}$ étant uniformément continues ($\hat{T}$ étant un isométrie) d'après la Proposition II.7.12, page 28, elles se prolongent en des applications uniformément continues de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$ et $\mathbb{K} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$, et on vérifie aisément que ces applications et $\|\hat{x}\| = \hat{d}(\hat{0}, \hat{x})$ définissent, sur $\hat{E}$ une structure d'espace de Banach qui définit la distance $\hat{d}$ et pour laquelle $\hat{T}$ est linéaire, ce qui termine la preuve. □

Rappelons qu'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur un espace vectoriel est compatible avec la structure d'espace vectoriel E si elle est de la forme $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x - y \in F$ où F est un sous-espace vectoriel de E. Dans ce cas l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel et se note E/F.

PROPOSITION III.1.7.

Soient E un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. L'application

$$\tilde{x} \mapsto \|\tilde{x}\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|$$

*est bien définie et est une semi-norme sur E/F. Cette semi-norme est une norme si et seulement si F est fermé. De plus, dans ce cas, cette norme définit la topologie quotient de celle de E par la relation d'équivalence associée à F. On parle ainsi de l'**espace normé quotient** E/F.*

Démonstration. Il est clair que $\tilde{x} \mapsto \|\tilde{x}\|$ est une semi-norme et que $\|\tilde{x}\| = 0$ équivaut à $x \in \bar{F}$. Pour voir la dernière assertion, il suffit de voir que si $\tilde{B} = B(\tilde{x}, r)$ est une boule ouverte dans E/F, et si π désigne la surjection canonique de E sur E/F, alors $\pi^{-1}(\tilde{B})$ est un ouvert de E. Or ceci est évident puisque

$$\pi^{-1}(\tilde{B}) = \bigcup_{y \in F} B(x + y, r).$$

□

SECTION III.2

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ muni de $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$ ou de $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, ou de $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \max_{1\le i\le n} x_i$, est un espace vectoriel normé complet.
   Plus généralement les espaces $l^p(\mathbb{K})$ (c.f. Exemple 1, page 12) sont des espaces de Banach (c.f. Exemple 2, page 26).
2. Soit A un ensemble et E un espace normé. Soit $\mathscr{B}(A;E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de A dans E. Alors $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A}\|f(x)\|$ est une norme sur $\mathscr{B}(A;E)$ qui définit la distance de la convergence uniforme sur A. On note généralement $\mathscr{B}_\infty(A;E)$ cet espace normé. Si A est un espace topologique, le sous-espace de $\mathscr{B}_\infty(A;E)$ formé par les fonctions continues est noté $\mathscr{C}\mathscr{B}_\infty(A;E)$, si A est, par exemple, de plus compact, alors toute fonction continue est bornée et on note simplement $\mathscr{C}_\infty(A;E)$.
3. Soient B une partie d'un ensemble A et E un espace normé. Soit $\mathscr{B}(A;E)$ l'ensemble des fonctions de A dans E qui sont bornées sur B. Alors $\|f\|_B = \sup_{x\in B}\|f(x)\|$ est une semi-norme sur $\mathscr{B}(A;E)$ et n'est pas une norme en général.
4. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés et $\mathscr{L}'(E_1;E_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E_1 dans E_2 qui sont bornées sur la boule $B = \{x \in E_1, \text{ t.q. } \|x\| < 1\}$. Alors $\|f\|_B = \sup_{x\in B}\|f(x)\|$ est une norme sur $\mathscr{L}'(E_1;E_2)$ car, si $\|f\|_B = 0$, pour tout $x \in E_1$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|\lambda x\| < 1$ et par suite $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$, ce qui montre que f est nulle.
5. Soient $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}(I;\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$. Alors, pour $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathscr{C}(I;\mathbb{C})$.

SECTION III.3

Séries et familles sommables dans un espace normé

SOUS-SECTION III.3.1

Séries dans un espace normé

DÉFINITION III.3.1.

*On appelle **série** dans espace normé E une suite (s_n) de la forme $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ où (x_n) est une suite dans E. On la note généralement $\sum x_n$. On dit que la série $\sum x_n$ est **convergente** si la suite (s_n) est convergente ; dans ce cas, la limite s de cette suite est appelée la **somme** de la série $\sum x_n$ et on note $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$; de plus $s - s_{n-1} = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$ s'appelle le **reste d'ordre** n de la série $\sum x_n$.*

PROPOSITION III.3.1.

Soit E un espace normé. Si la série $\sum x_n$ est convergente, alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que, pour

$n \geq n_0$, et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \sum_{i=n}^{i=n+p} x_i \right\| \leq \varepsilon.$$

*Réciproquement, si cette condition est satisfaite, et si E est complet, la série $\sum x_n$ est convergente (**Critère de Cauchy pour une série**).*

C'est une traduction de la définition d'espace métrique complet. La proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION III.3.2.

Soient E un espace normé et $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries dans E.

1. Si $x_n = y_n$ sauf au plus pour un nombre fini d'indices, alors les deux séries sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes.

2. Si les deux séries sont convergentes, alors, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, les séries $\sum x_n + y_n$ et $\sum \lambda x_n$ sont convergentes.

3. Si $\sum x_n$ est convergente de somme s et si (n_k) est une suite d'entiers strictement croissante telle que $n_0 = 0$, et si on pose $y_k = \displaystyle\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} x_n$ alors la série $\sum y_k$ est convergente de somme s.

DÉFINITION III.3.2.

*On dit qu'une série $\sum x_n$ dans un espace normé E est **absolument convergente** (ou **normalement convergente** selon une terminologie plus naturelle mais non usuelle) si la série de nombres réels positifs $\sum \|x_n\|$ est convergente.*

Le critère de complétude suivant est très souvent utile :

THÉORÈME III.3.1.

Soit E un espace normé. Alors E est complet (i.e. un espace de Banach) si et seulement si toute série de E absolument convergente est convergente.

Démonstration. En effet, il est clair, par l'inégalité triangulaire, que toute série absolument convergente vérifie le critère de Cauchy et, par suite converge si l'espace est complet. Réciproquement, si cette propriété est satisfaite, et si (x_n) est une suite de Cauchy dans E, par récurrence, on voit aisément qu'il existe une suite strictement d'entiers (n_k) telle que $\forall k$,

$$\left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| < 2^{-k},$$

et, en posant $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, on a

$$\sum_{k}^{k+p} \|y_j\| \leq 2^{-k+1},$$

ce qui montre que $\sum y_k$ est absolument convergente et donc converge par hypothèse. Comme

$$\sum_{k=0}^{p} y_k = x_{n_{p+1}} - x_{n_0},$$

on conclut que la suite possède une sous-suite convergente ce qui implique qu'elle est elle-même convergente puisqu'elle est de Cauchy (Proposition II.7.1, page 23). ☐

PROPOSITION III.3.3.

Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente dans un espace de Banach E. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même. Alors la série $\sum x_{\sigma(n)}$ et absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

Démonstration. La série étant absolument convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$. Comme σ est une bijection, il existe m_0 tel que, pour $m \geq m_0$, on a $\sigma(m) \geq n_0$ et, par suite, $\displaystyle\sum_{n=m_0}^{\infty} \left\| x_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon$, ce qui montre que $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente donc convergente. Soit alors m_1 tel que $m_1 \geq m_0$ et $\{1,\dots n_0\} \subset \{\sigma(1),\dots \sigma(m_1)\}$; alors, par ce qui précède, pour $m \geq m_1$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| < \varepsilon$$

ce qui est la dernière assertion. □

SOUS-SECTION III.3.2

Familles sommables et absolument sommables

DÉFINITION III.3.3.

*Soient E un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que la **famille** $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** dans E s'il existe $s \in E$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J, $\left\| \sum_{i\in K} x_i - s \right\| < \varepsilon$. s s'appelle la **somme de la famille** $(x_i)_{i\in I}$.*

PROPOSITION III.3.4.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans un espace normé E de somme s. Soit σ une bijection de I. Alors la famille $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable de somme s.

Démonstration. Ceci est immédiat, car, si J est une partie finie de I vérifiant les conditions de la définition ci-dessus, puisque σ est une bijection, il existe une partie finie H de I telle que $\{\sigma(i),\ i \in H\} \supset J$, et la conclusion s'en déduit aussitôt. □

PROPOSITION III.3.5.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace de normé E. Alors si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I telle que $J \cap K = \emptyset$, on a $\left\| \sum_{i\in K} x_i \right\| < \varepsilon$.

*De plus, si E est un espace de Banach, la réciproque est vraie (**critère de Cauchy pour les familles sommables**).*

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. Démontrons qu'elle est suffisante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe, par hypothèse une partie finie J_n de I telle que, quelque soit la partie finie K de I telle que $J_n \cap K = \emptyset$, on a $\left\| \sum_{i\in K} x_i \right\| < 1/n$. Posons $\hat{J}_n = \bigcup_{1\leq j\leq n} J_j$, et notons $\mathscr{S}(\hat{J}_n)$ l'ensemble des sommes de la forme $\sum_{i\in K} x_i$ où K est une partie finie de I contenant $\hat{J}_n$. La différence de deux éléments de $\mathscr{S}(\hat{J}_n)$ est de la forme $\sum_{i\in K_1} x_i - \sum_{i\in K_2} x_i$ où K_i, $i = 1, 2$, est une partie finie de I ne rencontrant pas $\hat{J}_n$, et, par suite le diamètre $\delta(\mathscr{S}(\hat{J}_n))$ est inférieur à $2/n$. Les ensembles $\overline{\mathscr{S}(\hat{J}_n)}$ forment donc une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre tend vers zéro ; alors, d'après la propriété de Cantor (Proposition II.7.5, page 24) leur intersection est exactement un point s de E dont la construction signifie que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme s. □

PROPOSITION III.3.6.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans un espace normé E. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(0, \varepsilon)$ contient tous les x_i sauf au plus un nombre fini. En particulier, l'ensemble des $i \in I$ tel que $x_i \neq 0$ est dénombrable.

Démonstration. La première partie de la proposition résulte de la Proposition précédente appliquée à des ensembles d'indices réduits à un élément. La seconde en résulte puisque les x_i tels que $\|x_i\| > 1/n$ sont en nombre fini. □

DÉFINITION III.3.4.

*On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace normé E est **absolument sommable** si la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable.*

PROPOSITION III.3.7.

Dans un espace de Banach, toute famille absolument sommable est sommable.

Démonstration. En effet, si une famille est absolument sommable, elle vérifie le critère de Cauchy. □

Remarque III.3.1. *Nous verrons que la réciproque de cette proposition est vraie en dimension finie (Proposition III.5.6, page 68). Mais elle est* ***toujours fausse en dimension infinie****.*

PROPOSITION III.3.8.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans un espace de Banach E. Toute sous-famille $(x_i)_{i\in J}$, $J \subset I$, de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E. De plus si $(I_l)_{l\in L}$ est une partition de I et si $s_l = \sum_{i\in I_l} x_i$, la famille $(s_l)_{l\in L}$ est sommable de somme la somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Démonstration. La première assertion résulte du critère de Cauchy, montrons la seconde. Soit s la somme de $(x_i)_{i\in I}$, soit $\varepsilon > 0$ et soit J_0 une partie finie de I telle que, pour toute partie finie J de I contenant J_0, $\left\| s - \sum_{i\in J} x_i \right\| < \varepsilon$. Soit L_0 la partie de L constituée des l tels que $I_l \cap J_0 \neq \emptyset$. L_0 est clairement finie. Soit K une partie finie de L contenant L_0. $\forall \varepsilon' > 0, \forall l \in K$, il existe une partie finie H_l de I_l que l'on peut supposer contenir $I_l \cap J_0$ telle que $\left\| s_l - \sum_{i\in H_l} x_i \right\| < \varepsilon'$. Soit $H = \bigcup_{l\in K} H_l$; clairement H est finie et contient J_0 ce qui implique $\left\| s - \sum_{i\in H} x_i \right\| < \varepsilon$. Comme les I_l forment une partition, on a $\sum_{i\in H} x_i = \sum_{l\in K}\left(\sum_{i\in H_l} x_i\right)$, d'où

$$\begin{aligned} \left\| s - \sum_{l\in K} s_l \right\| &\leq \left\| s - \sum_{i\in H} x_i \right\| + \left\| \sum_{l\in K}\left(\sum_{i\in H_l} x_i\right) - \sum_{l\in K} s_l \right\| \\ &\leq \varepsilon + n\varepsilon', \end{aligned}$$

où n est le nombre d'éléments de K. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon' > 0$, la preuve est terminée. □

La réciproque de cette Proposition est évidement fausse (prendre par exemple la suite $x_n = (-1)^n$ et, comme partition de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_l = \{2l, 2l+1\}$, $l \in \mathbb{N}$) en général. Néanmoins, il y a bien sûr des cas où cette réciproque est vraie. La Proposition suivante en donne deux exemples, et la démonstration en est laissée au lecteur :

PROPOSITION III.3.9.

Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace normé E et $(I_l)_{l\in L}$ une partition de I.

1. Si L est fini et si, $\forall l \in L$, la famille $(x_i)_{i\in I_l}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{l\in L}\left(\sum_{i\in I_l} x_i\right)$.

2. Si pour tout $l \in L$ la famille $(x_i)_{i\in I_l}$ est sommable et absolument sommable et si les familles $\left(\sum_{i\in I_l} \|x_i\|\right)_{l\in L}$ et $\left(\sum_{i\in I_l} x_i\right)_{l\in L}$ sont sommables, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et absolument sommable et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{l\in L}\left(\sum_{i\in I_l} x_i\right)$.

PROPOSITION III.3.10.

Soient E_j, $1 \leq j \leq n$, des espaces normés, et $E = \prod_{j=1}^{n} E_j$ leur produit (comme espace normé). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans E, $x_i = (x_i^1, \dots x_i^n)$. Pour que la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit sommable (resp. absolument sommable), il faut et il suffit que les familles $(x_i^j)_{i\in I}$, $1 \leq j \leq n$, le soient. De plus, si s_j est la somme de la famille $(x_i^j)_{i\in I}$, alors $(s_j)_{1\leq j\leq n}$ est la somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition de la norme dans l'espace produit telle qu'elle a été définie dans la Proposition III.1.4, page 52. □

La proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION III.3.11.

Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles sommables dans un espace normé, de sommes respectives x et y et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les familles $(x_i + y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda x_i)_{i\in I}$ sont sommables de sommes respectives $x + y$ et λx.

SOUS-SECTION III.3.3

Séries commutativement convergentes

DÉFINITION III.3.5.

On dit qu'une série $\sum x_n$ dans un espace normé E est **commutativement convergente** *dans E si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente.*

THÉORÈME III.3.2.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. La série $\sum x_n$ est commutativement convergente ;
2. La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
De plus si l'une de ces deux conditions est satisfaite, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on voit que 2. implique 1. d'après la Proposition III.3.4, page 56 ; de plus, cette même Proposition montre la dernière assertion. Démontrons que 1. entraîne 2. Si la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy (Proposition III.3.5, page 56), elle est clairement sommable ; supposons donc qu'elle ne vérifie pas ce critère. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, il existe une partie finie H de $\mathbb{N}$ ne rencontrant pas J telle que $\left\|\sum_{i\in H} x_i\right\| \geq \alpha$. On construit alors aisément par récurrence une suite (H_n) de parties finies de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes telles que, pour tout n, $\left\|\sum_{i\in H_n} x_i\right\| \geq \alpha$. De plus, puisque la série $\sum x_n$ est supposée convergente, quitte à retirer un nombre fini de ses termes (ce qui ne change aucunement sa nature) on peut supposer que, pour tout n, on a $\|x_n\| < \alpha/2$ (on construit les H_n à partir de parties J_n telles que $H_n \subset J_{n+1}$ et J_0 contient tous les termes de la suite de normes $\geq \alpha/2$) ; alors, quitte a rajouter à H_n le n-ieme terme de la suite (x_n) si nécessaire, on peut s'arranger pour que les H_n forment une partition de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout n, $\left\|\sum_{i\in H_n} x_i\right\| \geq \alpha/2$. Posons alors $H_n = \{n_1^n, \ldots, n_{N_n}^n\}$, les n_j^n étant rangés en ordre croissant, et posons

$$I_n = \left\{1 + \sum_{i=0}^{n-1} N_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} N_i\right\}.$$

Clairement les I_n forment une partition de $\mathbb{N}$ en intervalles d'entiers non vides ($N_n \geq 1$ pour tout n), et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un unique entier k tel que $n \in I_k$, c'est à dire $n = \sum_{i=0}^{k-1} N_i + j$ avec $1 \leq j \leq N_k$, et on pose alors $\sigma(n) = n_j^k$. Ceci définit bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même. Alors

$$\left\|\sum_{n=0}^{\sum_{i=0}^{n} N_i} x_{\sigma(i)} - \sum_{n=0}^{\sum_{i=0}^{n-1} N_i} x_{\sigma(i)}\right\| = \left\|\sum_{i\in H_n} x_i\right\| \geq \alpha/2,$$

ce qui montre que la série $\sum x_{\sigma(n)}$ n'est pas convergente contrairement à l'hypothèse. □

Remarque III.3.2. *La Proposition ci-dessus et la Proposition III.3.6, page 56, montrent que, dans un espace normé, il y a identité entre les familles sommables et les séries commutativement convergentes.*

SOUS-SECTION III.3.4

Les espaces $l_I^p(E)$ et $c_0(E)$

DÉFINITION III.3.6.

Soit E un espace normé. Soit $p \in [1, +\infty[$; on note $l_I^p(E)$ l'espace normé des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telles que les familles $(\|x_i\|^p)_{i\in I}$ soient sommables muni de la norme

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_p = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

On note $l_I^\infty(E)$ l'espace des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telles que $\sup_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$, muni de la norme

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|.$$

Enfin, on note $c_0(E)$ le sous-espace normé de $l_\mathbb{N}^\infty(E)$ formé des suites qui tendent vers zéro.

Le fait que $\|(x_i)_{i\in I}\|_p$ soit une norme ($1 \le p < +\infty$) résulte de l'inégalité de Minkowski ((II.3.2), page 12).

PROPOSITION III.3.12.

Si E est un espace de Banach, les espaces $l_I^p(E)$, $1 \le p \le +\infty$, et $c_0(E)$ le sont aussi.

Démonstration. En effet, si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x^n = (x_i^n)_{i\in I}$, est une suite de Cauchy dans $l_I^p(E)$, on voit aussitôt que, pour tout $i \in I$, $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E et, donc, converge vers $x_i \in E$. Comme il existe n_0 tel que $\sum_{i\in I} \|x_i - x_i^{n_0}\|^p \le 1$, l'inégalité de Minkowski appliquée à $x_i - x_i^{n_0} + x_i^{n_0}$ sur une partie finie de I, montre que $(x_i)_{i\in I}$ appartient à $l_I^p(E)$ et que $\left(\sum_{i\in I} \|x_i - x_i^n\|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon$ pour n assez grand ce qui termine la preuve pour les espaces $l_I^p(E)$. Pour $c_0(E)$, il suffit de voir que ce dernier est fermé dans $l_\mathbb{N}^\infty(E)$ ce qui est très simple. □

SECTION III.4

Espaces d'applications linéaires et multilinéaires continues

SOUS-SECTION III.4.1

Applications multilinéaires et linéaires continues

La propriété quasi-évidente suivante est à la base de tous les résultats concernant les applications linéaires et multilinéaires continues :

THÉORÈME III.4.1.

Soient E_i, $1 \le i \le n$, et F des espaces vectoriels normés, et soit $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue ;*
2. *f est continue en zéro ;*
3. *Il existe $a > 0$ tel que, pour $x_i \in E_i$, $1 \le i \le n$, $\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \le a \|x_1\| \ldots \|x_n\|$;*
4. *$\|f\| = \sup_{\|x_1\|\le 1, \ldots, \|x_n\|\le 1} \|f(x_1, \ldots, x_n)\| < +\infty$.*

De plus, la borne inférieure des nombres a vérifiant le 3. est égal au $\|f\|$ du 4.

*L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur l'espace, noté $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F. $\|f\|$ est usuellement appelée la **norme** de f. Lorsque $n = 1$ et $E = F$ on note simplement $\mathscr{L}(E)$.*

Démonstration. La preuve est très simple. Si f est continue, elle est en particulier continue en zéro, ce qui implique qu'il existe $r > 0$ tel que pour $\|x_i\| \leq r$, on a $\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leq 1$, ce qui entraîne le 3. (avec $a = 1/r$) ainsi que le 4. Inversement, il est clair que $4.$ et 3. sont équivalents et impliquent 2. La linéarité montre par ailleurs que 2. implique 1. L'assertion supplémentaire concernant la valeur de $\|f\|$ est aussi immédiate. Enfin le fait que $\|f\|$ soit une norme est aussi évident. □

Remarque III.4.1. *1. La définition de la norme d'une application multilinéaire donnée ci-dessus, dépend des normes sur les espaces E_i et F. Mais il est clair que, si on remplace ces normes par des normes équivalentes, on obtient une norme équivalente sur $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

2. Si $E_i \neq \{0\}$, pour tout i, on a aussi $\|f\| = \sup_{\|x_1\|=1, \ldots, \|x_n\|=1} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|$.

On peut remarquer que l'étude des espaces d'applications multilinéaires continues se ramène, en général, à celle des espaces d'applications linéaires continues en vertu de la Proposition suivante :

PROPOSITION III.4.1.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F; G)$, et tout $x \in E$, soit u_x l'application linéaire de F dans G définie par $u_x : y \mapsto u(x, y)$, et soit $\tilde{u} : x \mapsto u_x$. Alors :

1. $\tilde{u} \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ (i.e. $\tilde{u}$ est linéaire continue) ;

2. $u \mapsto \tilde{u}$ est une isométrie linéaire de $\mathscr{L}(E, F; G)$ dans $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$.

Démonstration. En effet, on a : $\|\tilde{u}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u_x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|u(x, y)\| = \|u\|$. □

Par récurrence, on voit que les espaces normés $\mathscr{L}(E_1, \ldots E_n; F)$ et $\mathscr{L}(E_1; \mathscr{L}(E_2; \ldots; \mathscr{L}(E_n; F) \ldots))$ sont isométriquement isomorphes.

PROPOSITION III.4.2.

*Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, F_j, $1 \leq j \leq m$, et G des espaces vectoriels normés et F l'espace normé produit des F_j (Proposition III.1.4, page 52) . Soient $u \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ et $v \in \mathscr{L}(F_1, \ldots F_m; G)$. Alors, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $\|v \circ u(x)\| \leq \|v\| \, \|u\|^m \left(\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\right)^m$. En particulier, $\mathscr{L}(E)$ est une **algèbre normée**.*

Démonstration. En effet, si on pose $u = (u_1, \ldots u_m)$, et $x = (x_1, \ldots x_n)$, on a $\|u(x)\| = \max_j \|u_j(x)\|$, et, par suite,

$$\|v \circ u(x)\| = \|v(u(x_1, \ldots x_n))\| \leq \|v\| \prod_j \|u_j(x)\| \leq \|v\| \, \|u(x)\|^m \leq \|v\| \, \|u\|^m \left(\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\right)^m.$$

□

PROPOSITION III.4.3.

Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, et F des espaces vectoriels normés. Si F est complet alors l'espace $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'est aussi. En particulier, si E est complet, $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre de Banach.

Démonstration. En effet, soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Pour tout $x \in E_1 \times \ldots \times E_n$ tel que $\max_i \|x_i\| \leq 1$, on a $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\|$, ce qui montre que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans F donc converge vers $f(x)$. Le fait que $x \mapsto f(x)$ est linéaire résulta aussitôt de la linéarité des f_n par passage à la limite ; enfin, pour $\varepsilon > 0$, si $\max_i \|x_i\| \leq 1$, de la même manière, on a $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, d'où $\|f(x)\| \leq \|f_n\| + \varepsilon$, ce qui prouve que f est continue (la suite (f_n) étant bornée puisque de Cauchy) et aussi que (f_n) converge, en norme, vers f. □

PROPOSITION III.4.4.

Soient E et F deux espaces normés et f une application linéaire continue de E dans F.

1. Si $(x_i)_{i \in I}$est une famille sommable dans E, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est une famille sommable dans F et

$$\sum_{i \in I} f(x_i) = f\left(\sum_{i \in I} x_i\right).$$

2. Si $(x_i)_{i \in I}$est une famille absolument sommable dans E, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est une famille absolument sommable dans F.

La démonstration de cette Proposition est une conséquence quasi-immédiate des définitions et est laissée au lecteur.

SOUS-SECTION III.4.2

Hyperplans fermés et formes linéaires continues

Rappelons que, dans un espace vectoriel E on appelle **hyperplan** un sous-espace vectoriel H tel que pour tout $a \notin H$, E est somme direct algébrique de H et $\mathbb{K}a$. Si H est un hyperplan, tout $x \in E$ s'écrit, de manière unique $x = f(x)a + y$ avec $f(x) \in \mathbb{K}$ et $y \in H$. Il en résulte que f est une forme linéaire sur E dont le noyau est H ; on dit que $f(x) = 0$ est l'équation de H. Inversement, le noyau de toute forme linéaire est un hyperplan. La Proposition qui suit montre que l'on peut lire la continuité de f sur H :

PROPOSITION III.4.5.

Soit H un hyperplan d'équation $f(x) = 0$ dans un espace normé E. Alors, H est fermé si et seulement si f est continue. De plus, dans ce cas, pour tout $a \notin H$, E est somme directe topologique de H et de $\mathbb{K}a$.

Démonstration. Si f est continue, H est clairement fermé. Réciproquement, supposons H fermé d'équation $f(x) = 0$, et soit $b \notin H$ tel que $f(b) = 1$. Comme H est fermé, par continuité de l'addition, il en est de même de $b + H$, et, comme $0 \notin b + H$, il existe $r > 0$ tel que $\bar{B}(0, r) \cap \{b + H\} = \emptyset$, ce qui implique $f(x) \neq 1$ pour $x \in \bar{B}(0, r)$. Soient $x \in \bar{B}(0, r)$ et $\alpha = f(x)$; si $|\alpha| \geq 1$, alors $x/\alpha \in \bar{B}(0, r)$ et $f(x/\alpha) = 1$, ce qui est impossible, et ainsi, $|f(x)| < 1$, ce qui implique que f est bornée donc continue (Théorème III.4.1). Soit maintenant $a \notin H$; on a donc une autre écriture unique des éléments de E $x = g(x)a + y$, $y \in H$, et $g(x) = 0$ est une équation de H, g étant une forme linéaire continue. En particulier, $x \mapsto g(x)a$ est continue de E dans $\mathbb{K}a$, ce qui montre la dernière assertion (c.f. Définition III.1.5, page 53). ☐

Comme l'adhérence d'un sous-espace est un sous-espace (Proposition III.1.3, page 52), on a le Corollaire suivant :

COROLLAIRE.

Dans un espace normé, un hyperplan est ou bien fermé ou bien dense.

Rappelons enfin que l'on appelle **hyperplan affine** un translaté d'un hyperplan. Si H est un hyperplan affine, alors H s »écrit $H = H_1 + a$ où $H_1 est$ un hyperplan ; si $f(x) = 0$ est une équation de H_1 et si alors $f(x) = f(a)$ est une équation de H et H est fermé si et seulement f est continue.

SOUS-SECTION III.4.3

Les Théorèmes de Banach et de Banach-Steinhaus

PROPOSITION III.4.6.

Soient E et F deux espaces normés et $u \in \mathscr{L}(E; F)$. Alors, si $u(E)$ est non maigre (Définition II.1.7, page 9) dans F, pour tout voisinage de zéro V dans E, $\overline{u(V)}$ est un voisinage de zéro dans F.

Démonstration. Soit $B = B(0, r)$, $r > 0$, telle que $B + B \subset V$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et que $|\alpha| > 1$. Clairement E est réunion des ensembles $\alpha^n B$, $n \in \mathbb{N}^*$, et, comme $u(E)$ est supposé non maigre, il existe n_0 tel que $\overline{\alpha^{n_0} u(B)}$ est d'intérieur non vide et, par suite, $\overline{u(B)}$ est aussi d'intérieur non vide, ce qui entraîne que 0 est un point intérieur de $\overline{u(B)} + \overline{u(B)}$. Comme $\overline{u(B)} + \overline{u(B)} \subset \overline{u(B) + u(B)} \subset \overline{u(V)}$, le résultat est démontré. ☐

Pour énoncer le Théorème de Banach, nous avons besoin d'une nouvelle terminologie :

DÉFINITION III.4.1.

*Soient E et F deux espaces topologiques et u une application de E dans F. On dit que u est **ouverte** si, pour tout ouvert U de E, $u(U)$ est ouvert dans F.*

THÉORÈME III.4.2 (*Théorème de Banach*).

Soient E un espace de Banach et F un espace normé et $u \in \mathscr{L}(E; F)$.
1. Ou bien $u(E)$ est maigre (Définition II.1.7, page 9) dans F ou bien $u(E) = F$ et u est une application

ouverte de E dans F ;

*2. Si F est complet et si u est surjective alors u est ouverte. En particulier, si $E = F$, si u est un isomorphisme algébrique, u^{-1} est continue (**Théorème d'isomorphie de Banach**).*

Démonstration. Le 2. est une conséquence du 1. et du Théorème de Baire (Théorème II.7.1, page 25) qui dit que $u(E) = F$ ne peut être maigre dans F. Démontrons donc le 1. Si $u(E)$ n'est pas maigre, la Proposition précédente dit que, pour tout $r > 0$, $\overline{u(B(0,r))}$ est un voisinage de zéro dans F, c'est-à-dire qu'il existe $\rho_r > 0$ tel que $\bar{B}(0,\rho_r) \subset \overline{u(B(0,r))}$, ce qui, par linéarité, donne, pour tout $x \in E$, $\bar{B}(u(x),\rho_r) \subset \overline{u(B(x,r))}$. Nous utilisons maintenant le Lemme suivant :

LEMME. *Soient E un espace métrique complet, F un espace métrique et u une application continue de E dans F. On suppose que u possède la propriété suivante :*

Pour tout $r > 0$, il existe $\rho_r > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\bar{B}(u(x),\rho_r) \subset \overline{u(\bar{B}(x,r))}$.

Alors, pour tout $r > 0$ et tout $a > r$, $\bar{B}(u(x),\rho_r) \subset u(B(x,a))$.

Démonstration du Lemme. Soit (r_n) une suite de réels > 0 tels que $r_1 = r$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a$. Il existe donc, pour tout $n \geq 1$, $\rho_n > 0$ tel que $\rho_1 = \rho_r$ et, $\forall x \in E$, $\bar{B}(u(x),\rho_n) \subset \overline{u(\bar{B}(x,r_n))}$, et on peut, bien sûr, supposer $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Soit $y \in \bar{B}(u(x),\rho_r)$. On construit alors, par récurrence, une suite (x_n) dans E telle que $x_0 = x$, $x_n \in \bar{B}(x_{n-1},r_n)$ et $u(x_n) \in \bar{B}(y,\rho_{n+1})$: en effet, si $x_1,\ldots,x_n$ sont construits, on a $y \in \bar{B}(u(x_n),\rho_{n+1}) \subset \overline{u(\bar{B}(x_n,r_{n+1}))}$, donc $\bar{B}(y,\rho_{n+2}) \cap u(\bar{B}(x_n,r_{n+1})) \neq \emptyset$, et il existe $x_{n+1} \in \bar{B}(x_n r_{n+1})$ tel que $u(x_n) \in \bar{B}(y,\rho_{n+2})$, ce qui montre que la récurrence se poursuit. Comme $d(x_n,x_{n+p}) \leq \sum_{i=n}^{n+p} r_i$, la suite (x_n) est de Cauchy et donc converge vers $z \in E$, ce dernier étant supposé complet. Puisque $d(x,z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n = a$, on a $z \in \bar{B}(x,a)$, et comme u est continue, $u(z) = y$, ce qui montre que $\bar{B}(u(x),\rho_r) \subset u(\bar{B}(x,a))$ et on conclut en remplaçant a par $a+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. □

Fin de la démonstration du Théorème de Banach. Grâce au Lemme, nous avons $\bar{B}(u(x),\rho_r) \subset u(B(x,a))$ pour $a > r$ ce qui implique aussitôt que u est ouverte. De plus, ceci appliqué à $x = 0$ et la linéarité de u montrent que u est surjective. □

THÉORÈME III.4.3 (*Théorème du graphe fermé*).

Soient E et F deux espaces de Banach. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit que son graphe dans l'espace normé $E \times F$ soit fermé.

Démonstration. La condition est évidement nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Comme $E \times F$ est complet, le graphe G de u est un espace de Banach. Comme l'application $(x,u(x)) \mapsto x$ est un isomorphisme linéaire continu de G sur E, le Théorème d'isomorphie de Banach (Théorème III.4.2) implique que son inverse $x \mapsto (x,u(x))$ l'est aussi, d'où le résultat. □

THÉORÈME III.4.4 (*Théorème de Banach-Steinhaus*).

Soient E un espace de Banach, F un espace normé et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{L}(E;F)$. Si, pour tout x dans E, on a $\sup_{i\in I}\|u_i(x)\| < +\infty$, alors $\sup_{i\in I}\|u_i\| + \infty$.

Démonstration. D'après la Proposition II.7.7, page 25, il existe une boule $B(x_0,r)$, $r > 0$, sur laquelle les u_i sont uniformément bornées. Par linéarité, elles sont donc aussi uniformément bornées sur $B(0,r)$ et aussi sur $B(0,1)$ ce qui prouve le résultat (Théorème III.4.1, page 59). □

SOUS-SECTION III.4.4

Le Théorème de Hahn-Banach

DÉFINITION III.4.2.

*Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction p de E dans $\mathbb{R}$ est **sous-linéaire** si, pour tous $x,y \in E$ et $\lambda > 0$, on a $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.*

THÉORÈME III.4.5 (*Théorème de Hahn-Banach réel*).

Soient E un espace vectoriel réel et p une fonction sous-linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Soient V un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur V telle que, pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors, il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq p(x)$.

Démonstration. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des couples (W, g_W) où W est un sous-espace vectoriel de E contenant V et g_W une forme linéaire sur W prolongeant f et vérifiant $g_W \leq p$. On ordonne $\mathscr{A}$ par $(W_1, g_{W_1}) \preceq (W_2, g_{W_2})$ si $W_1 \subset W_2$ et g_{W_2} prolonge g_{W_1}. Vérifions que $\mathscr{A}$ est inductif : si $\mathscr{B} = \{(W_i, g_{W_i}),\ i \in I\}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathscr{A}$, en notant W l'espace vectoriel engendré par les W_i, on définit g forme linéaire sur W en posant, pour $x \in W_i$, $g(x) = g_i(x)$, et en prolongeant ensuite par linéarité (ce qui est possible car $\mathscr{B}$ est totalement ordonnée) ; il est clair que (W, g) ainsi définie appartient à $\mathscr{A}$ et majore tous les éléments de $\mathscr{B}$. Le Lemme de Zorn (Corollaire du Théorème A.3.2, page 108) implique alors que $\mathscr{A}$ possède un élément maximal (W_0, h). Pour conclure, il suffit de prouver que $W_0 = E$. Supposons que cela soit faux et soit $x_0 \in E \setminus W_0$ et posons $W = W_0 + \mathbb{R}x_0$. Comme tout $x \in W$ s'écrit de manière unique $x = x_{W_0} + \lambda x_0$ avec $x_{W_0} \in W_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si on pose $h'(x) = h(x_{W_0}) + \lambda c$, $c \in \mathbb{R}$, on définit, sur W, une forme linéaire h' qui prolonge h. Pour conclure à une contradiction, il faut donc voir que l'on peut choisir c de sorte que $h' \leq p$. Puisque p est sous-additive, on a, pour y_1 et y_2 dans W_0, $h(y_1) - h(y_2) \leq p(y_1 - y_2) \leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0)$, ce qui implique

$$\sup_{y \in W_0} \left(-h(y) - p(-y - x_0)\right) \leq \inf_{y \in W_0} \left(-h(y) + p(y + x_0)\right), \tag{III.4.1}$$

et on choisit c compris entre le sup et l'inf de l'inégalité (III.4.1). Soit alors $x = x_{W_0} + \lambda x_0 \in W$; si $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver, supposons donc tout d'abord $\lambda > 0$. Par le choix de c on a, par sous-linéarité de p et linéarité de h,

$$h'(x) = h(x_{W_0}) + \lambda c \leq h(x_{W_0}) + \lambda \left(-h\left(\frac{x_{W_0}}{\lambda}\right) + p\left(\frac{x_{W_0}}{\lambda} + x_0\right)\right) = p(x_{W_0} + \lambda x_0) = p(x).$$

Si $\lambda < 0$, de la même manière on a

$$h'(x) = h(x_{W_0}) + |\lambda|(-c) \leq h(x_{W_0}) + |\lambda| \left(h\left(\frac{-x_{W_0}}{|\lambda|}\right) + p\left(-\frac{-x_{W_0}}{|\lambda|} - x_0\right)\right) = p(x_{W_0} + \lambda x_0),$$

ce qui termine la démonstration. □

Dans le cas des espaces normés complexes, il faut faire un hypothèse plus forte sur la fonction p :

THÉORÈME III.4.6 (*Théorème de Hahn-Banach*).

Soient p une semi-norme sur un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, V un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur V vérifiant $|f(y)| \leq p(y)$, $y \in V$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f telle que $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$, $x \in E$.

Démonstration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'y a rien à montrer (on notera d'ailleurs que l'hypothèse faite sur f équivaut à $f \leq p$), supposons donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si on écrit $f = \Re f + i\Im f$, $\Re f$ et $\Im f$ sont des formes linéaires réelles et la $\mathbb{C}$-linéarité de f implique $\Im f(x) = -\Re f(ix)$ donc $f(x) = \Re f(x) - i\Re f(ix)$. Le Théorème de Hahn-Banach réel entraîne donc que l'on peut prolonger $\Re f$ en une forme $\mathbb{R}$-linéaire g sur E telle que $|g(x)| \leq p(x)$, $x \in E$. Si on pose alors $\tilde{f}(x) = g(x) - ig(ix)$, $\tilde{f}$ est une forme linéaire complexe sur E qui prolonge f. De plus, si ϑ est tel que $e^{i\vartheta}\tilde{f}(x) > 0$, on a $\left|\tilde{f}(x)\right| = \Re\tilde{f}(e^{i\vartheta}x) = \left|g(e^{i\vartheta}x)\right| \leq p(e^{i\theta}x) = p(x)$, ce qui termine la preuve. □

La forme la plus usuelle d'utilisation du Théorème de Hahn-Banach est le cas d'un espace normé avec une forme linéaire continue :

COROLLAIRE.

Soient E un espace normé, E_1 un sous-espace de E et f une forme linéaire continue sur E_1. Alors f se prolonge en une forme linéaire continue $\tilde{f}$ sur E telle que $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$.

Les deux Théorèmes de Hahn-Banach peuvent s'écrire sous une forme géométrique. Pour cela il nous faut tout d'abord définir la jauge d'un ensemble convexe. Rappelons au préalable la définition d'une **partie convexe** A dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$: A est convexe si pour tous points x et y de A, le segment joignant x à y dans E est contenu dans A. On remarquera que cela signifie que si α et β sont des réels > 0 on a $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

PROPOSITION III.4.7.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble convexe de E contenant 0.

*1. On appelle **jauge** de A la fonction sous-linéaire p_A définie sur E et à valeurs dans $[0, +\infty]$ par*

$$p_A(x) = \inf\{\rho > 0,\ t.q.\ x \in \rho A\}.$$

Si, pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que $x \in rA$ (ce qui est par exemple le cas si E est un espace normé et A contient un voisinage de zéro), p_A est finie (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

2. Soit $V(p_A, \alpha) = \{x \in E,\ t.q.\ p_A(x) \leq \alpha\}$ (resp. $W(p_A, \alpha) = \{x \in E,\ t.q.\ p_A(x) < \alpha\}$). Alors $W(p_A, 1) \subset A \subset V(p_A 1)$.

3. Si E est un espace normé et si A est ouvert alors p_A est continue et $A = W(p_A, 1)$.

Démonstration. Il est clair que $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$, pour $\lambda > 0$. Par ailleurs, si $p_A(x)$ et $p_A(y)$ sont tous deux finis (sinon il n'y a rien à montrer), on a $x + y \in (p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon)A$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où on déduit la sous-linéarité de p_A. Pour voir le 2., on note tout d'abord que $A \subset V(p_A, 1)$ puis que si $p_A(x) < 1$, on a $x/\rho \in A$ pour un $\rho < 1$, ce qui implique, par convexité de A, que x, qui est sur le segment qui joint 0 à x/ρ, est aussi dans A. Enfin sous les hypothèses du 3., $\forall x \in A$, il existe $\rho < 1$ tel que $x/\rho \in A$ (A est ouvert) ce qui montre l'égalité, et, la continuité de p_A est évidente car si $x \in \rho A$, puisque A est ouvert, un voisinage de x est contenu dans ρA. □

THÉORÈME III.4.7 (*Théorème de Hahn-Banach (géométrique)*).

> *Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, A un sous-ensemble ouvert convexe non vide de E et M une variété linéaire affine (i.e. un translaté d'un sous-espace vectoriel) non vide ne rencontrant pas A. Alors il existe un hyperplan affine (c.f. Sous-section III.4.2, page 61) fermé H contenant M et ne rencontrant pas A.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $0 \in A$ et on note p_A la jauge de A. Soit V l'espace vectoriel engendré par M ; comme $0 \notin M$, M est un hyperplan affine de V et il existe une et une seule forme linéaire f sur V telle que l'équation de M soit $f(x) = 1$. Par suite, pour tout $y \in V$ tel que $f(y) = 1$ on a $p_A(y) \geq 1$ donc $f(y) \leq p_A(y)$. Si $y \in V$ est tel que $f(y) = a > 0$, alors $f\left(\frac{y}{a}\right) \leq p_A\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a}p_A(y)$, ce qui donne $f(y) \leq p_A(y)$. Si $f(y) < 0$, l'inégalité précédente est évidente puisque p_A est positive, et on a donc $f \leq p_A$. Le Théorème de Hahn-Banach réel (Théorème III.4.5) implique donc qu'il existe une forme linéaire h sur E prolongeant f et telle que $h \leq p_A$. Si on considère alors l'hyperplan affine H d'équation $h(x) = 1$, on a bien $M \subset H$, $H \cap A = \emptyset$, et H est fermé car, A étant ouvert non vide, il n'est pas dense (Corollaire de la Proposition III.4.5, page 61).

Supposons maintenant que le corps des scalaires est $\mathbb{C}$. Comme tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, la première partie de la preuve montre qu'il existe un hyperplan affine réel H_0 contenant M et ne rencontrant pas A. Soit $f(x) = 0$ l'équation de cet hyperplan (i.e. f est une forme linéaire réelle) et considérons la forme linéaire complexe g définie sur E par $g(x) = f(x) - if(ix)$, et notons H l'hyperplan (complexe) affine d'équation $g(x) = 1 + i$. Il est clair que H est fermé ; par ailleurs $x \in H$ équivaut à $f(x) = 1$ et $f(ix) = -1$, c'est-à-dire $x \in H_0 \cap (iH_0)$. Comme $M = iM$, la démonstration est terminée. □

Ce Théorème a des conséquences classiques fort utiles sur la séparation des ensembles convexes.

COROLLAIRE 1.

> *Soient E un espace normé réel, A un sous-ensemble ouvert convexe non vide et B un ensemble convexe non vide ne rencontrant pas A. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E et un réel α tels que $f \geq \alpha$ sur A et $f \leq \alpha$ sur B. On dit que l'hyperplan affine fermé d'équation $f = \alpha$ sépare A et B. De plus si B est ouvert, l'hyperplan $f = \alpha$ sépare strictement A et B c'est-à-dire que $f > \alpha$ sur A et $f < \alpha$ sur B.*

Démonstration. En effet, l'ensemble $C = A - B$ est ouvert, convexe, non vide et on a $0 \notin C$. Le Théorème de Hahn-Banach géométrique ci-dessus dit donc qu'il existe une forme linéaire continue non nulle telle que $f \geq 0$ sur C ce qui implique $f(x) \geq f(y)$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Il suffit donc de prendre $\alpha = \inf\limits_{x \in A} f(x)$. La dernière partie est facile : si A (ou B) est ouvert, il ne peut rencontrer l'hyperplan $f = \alpha$. □

COROLLAIRE 2.

> *Soient E un espace normé réel, A un sous-ensemble convexe fermé non vide et K un sous-ensemble convexe compact non vide ne rencontrant pas A. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E et un réel α tels que $f > \alpha$ sur A et $f < \alpha$ sur K. Autrement dit, l'hyperplan affine fermé $f = \alpha$ sépare strictement A et K.*

Démonstration. En effet, d'après la Proposition II.8.16, 5., page 35, il existe une boule $B = B(0, r)$, $r > 0$, telle que A $+ B$ et $K + B$ ne se rencontrent pas. Comme ces ensembles sont convexes et ouverts la conclusion résulte du Théorème. □

SOUS-SECTION III.4.5

Dual d'un espace normé

DÉFINITION III.4.3.

> Soit E un espace normé. On appelle **dual** de E, et on note E', l'espace des formes linéaires continues sur E. E' muni de la norme des applications linéaires (Théorème III.4.1, page 59) est appelé **l'espace norme** E'. Le dual de l'espace normé E' est appelé le **bidual** de E et est noté E''. E'' muni de la norme comme dual de E' est appelé l'espace normé bidual de E.

Le corollaire du Théorème de Hahn-Banach permet en particulier de prouver l'existence du dual :

PROPOSITION III.4.8.

1. Soient E un espace normé non réduit à zéro et $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Il existe une forme linéaire continue sur E telle que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$.

2. Soient E un espace normé et E_1 un sous-espace de E. Alors E_1 est dense dans E si et seulement si la seule forme linéaire continue sur E nulle sur E_1 est 0.

Démonstration. En effet, si h est la forme linéaire définie sur $\mathbb{K}x_0$ par $h(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, on a $\|h\| = 1$ et, il suffit de prolonger, par le Théorème de Hahn-Banach (appliqué en prenant pour semi-norme la norme de E), cette forme à tout l'espace avec conservation de la norme. Pour voir le 2., on remarque que si $\bar{E}_1 \neq E$, il existe un x_0 de E qui n'est pas adhérent à E_1 ; alors la forme linéaire φ sur $\bar{E}_1 \oplus \mathbb{K}x_0$ définie par $\varphi(x + \lambda x_0) = \lambda$, est continue puisque son noyau est $\bar{E}_1$ qui est fermé (Proposition III.4.5, page 61), et, en la prolongeant à E par le Théorème de Hahn-Banach, on obtient une forme linéaire continue sur E non nulle qui est identiquement nulle sur E_1. □

COROLLAIRE.

Pour qu'un élément x_0 d'un espace vectoriel normé E soit nul, il faut et il suffit que toutes les formes linéaires continues sur E soient nulles en x_0.

PROPOSITION III.4.9.

*Soit E un espace normé. Pour tout $x \in E$, posons $u_x(f) = f(x)$, pour toute $f \in E'$. Alors $u_x \in E''$, et, l'application $x \mapsto u_x$ est une isométrie linéaire de E dans E''. On dit que E est **réfléxif** si cette isométrie est surjective.*

Démonstration. Comme $\|u_x\| = \sup_{f \in E',\, \|f\| \leq 1} |f(x)|$, la conclusion résulte de la Proposition précédente.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat fort utile en analyse fonctionnelle : □

THÉORÈME III.4.8 (*Théorème de Banach-Alaoglu*).

Soient E un espace normé, E' l'espace normé dual et B' la boule unité fermée de E'. Alors B' munie de la topologie de la convergence simple (Exemple II.6.1, page 22) est un espace topologique compact. De plus, si E est séparable, cet espace compact est métrisable.

Démonstration. Soit B_E la boule unité de E. B' est un sous-ensemble des l'ensemble F des fonction de B_E dans $D = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \text{t.}q.\ |\lambda| \leq 1\}$, qui est compact pour la topologie de la convergence simple d'après le Théorème de Tychonoff (Théorème II.8.1, page 32). Pour voir que B' est compact, il suffit donc de voir que c'est un sous-ensemble fermé de F ; mais ceci est évident car les fonctions $f \mapsto f(x)$ sont continues sur F (c.f. Remarque II.6.1, page 22). Enfin la métrisabilité de B' dans le cas où E est séparable résulte de la Proposition II.8.27, page 41. □

SOUS-SECTION III.4.6

Duaux des espaces $l^p_I(E)$ et $c_0(E)$

THÉORÈME III.4.9.

Soit E un espace normé. Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $q \in]1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, l'application $\Phi\ :\ (f_i)_{i \in I} \mapsto f$ de $l^q_I(E')$ dans le dual de $l^p_I(E)$ définie par, $\forall x = (x_i)_{i \in I} \in l^p_I(E)$, $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$, est une isométrie linéaire surjective. lorsque $I = \mathbb{N}$, la même application est une isométrie linéaire surjective de $l^1_{\mathbb{N}}(E')$ sur le dual de $c_0(E)$.

Démonstration. La preuve utilise le Lemme suivant :

LEMME. *p et q étant comme ci-dessus, soient $y_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Alors*

$$\sup_{\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Démonstration du Lemme. Ceci résulte d'une part de l'inégalité de Hölder ((II.3.1), page 12) et, d'autre part, si $y_i = r_i e^{i\vartheta_i}$, en prenant

$$x_i = \frac{1}{\|y\|_q^{q/p}} |y_i|^{q/p} e^{i\vartheta_i},$$

lorsque p est fini, et est évident pour $p = +\infty$. □

Démontrons maintenant le Théorème.

Considérons tout d'abord le cas des espaces $l_I^p(E)$. Tout d'abord voyons que si $(f_i)_{i\in I}$ appartient à $l_I^q(E')$, $1 < q \leq +\infty$, et si $x = (x_i)_{i\in I} \in l_I^p(E)$ alors la famille $(f_i(x_i))_{i\in I}$ est sommable : en effet, si K est une partie finie de I, l'inégalité de Hölder donne

$$\sum_{i\in K} |f_i(x_i)| \leq \left(\sum_{i\in K} \|f_i\|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i\in K} \|x_i\|^p\right)^{1/p},$$

d'où le résultat. De plus ceci montre que f est une forme linéaire continue telle que $\|f\| \leq \|(f_i)_{i\in I}\|_q$.

Pour conclure, il suffit de montrer que si f est une forme linéaire continue sur $l_I^p(E)$ il existe $(f_i)_{i\in I} \in l_I^q(E')$ telle que $\Phi((f_i)_{i\in I}) = f$ avec $\|(f_i)_{i\in I}\|_q \leq \|f\|$. Pour tout $i \in I$, soit E_i le sous-espace de $l_I^p(E)$ formé des familles $(x_j)_{j\in I}$ telles que $y_j = 0$ si $j \neq i$. Clairement E_i s'identifie à E (comme espace normé) et $f_{|E_i}$ est une forme linéaire continue f_i sur E. Soit K une partie finie de I. Pour tout $i \in K$, soit $y_i \in E$, $\|y_i\| = 1$, tel que $f_i(y_i)$ soit un réel positif supérieur à $\|f_i\| - \frac{\varepsilon}{\#K}$ où $\#K$ désigne le nombre d'éléments de K. Soient $a_i \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq i \leq \#K$, tels que $\sum_{i\in K} a_i^p \leq 1$, et posons $x_a = (x_i^a)_{i\in I}$ avec $x_i^a = a_i y_i$ si $i \in K$ et $x_i^a = 0$ sinon. Alors $f(x_a) = \sum_{i\in K} a_i f_i(y_i) \geq -\varepsilon + \sum_{i\in K} a_i \|f_i\|$, c'est-à-dire $\sum_{i\in K} a_i \|f_i\| \leq \|f\| + \varepsilon$. En prenant le sup sur l'ensemble $\{\|(a_i)_{i\in K}\|_p \leq 1\}$, d'après le Lemme, il vient $\|(f_i)_{i\in K}\|_q \leq \|f\| + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie de I, la preuve de la première partie du Théorème est terminée.

Considérons maintenant le cas de $c_0(E)$. Tout d'abord, on voit aussitôt que si $(f_i)_{i\in I} \in l_I^1(E')$ alors $\Phi((f_i)_{i\in I})$ est une forme linéaire continue sur $c_0(E)$ de norme $\|(f_i)_{i\in I}\|_1$ (en fait c'est une forme linéaire continue de même norme sur $l_I^\infty(E)$). C'est la réciproque qu'il faut démontrer. Soit f une forme linéaire continue sur $c_0(E)$. Comme dans la démonstration pour $l_I^p(E)$, nous pouvons définir les formes linéaires f_i sur E et il faut voir que $f = \Phi((f_i)_{i\in I})$. Si $x = (x_i)_{i\in I}$ est un élément de $c_0(E)$ tel que $x_i = 0$ sauf au plus pour un ensemble fini d'indices, on a clairement $f(x) = \sum_i f_i(x_i) = \Phi((f_i)_{i\in I})(x)$. La conclusion résulte alors du fait que l'ensemble de ces éléments est dense dans $c_0(E)$. □

Remarque III.4.2. *La démonstration ci-dessus montre que $l_I^1(E')$ est canoniquement contenu dans le dual de $l_I^\infty(E)$, mais **il n'est pas, en général, égal à** $l_I^\infty(E)'$. La preuve faite pour $c_0(E)$ n'est pas valable pour $l_I^\infty(E)$ car l'ensemble des éléments de $l_I^\infty(E)$ à support fini n'est pas dense dans $l_I^\infty(E)$ (par support de $(x_i)_{i\in I}$, on entend l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$) contrairement à $c_0(E)$.*

SECTION III.5

Espaces normés de dimension finie

SOUS-SECTION III.5.1

Structure des espaces normés de dimension finie

PROPOSITION III.5.1.

Sur $\mathbb{K}^n$ muni de la norme euclidienne, toute semi-norme est continue.

Démonstration. Notons $\|x\|$ la norme euclidienne d'un élément x de $\mathbb{K}^n$. Il suffit de montrer qu'une semi-norme p sur $\mathbb{K}^n$ est continue en zéro (la continuité en un point quelconque résultant alors de l'inégalité triangulaire). Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et, pour $x \in \mathbb{K}^n$, notons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i =$. On a $p(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\, p(e_i) \leq \|x\| \left(\sum_{i=1}^n p(e_i)^2\right)^{1/2}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui montre le résultat cherché. □

THÉORÈME III.5.1.

1. Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

2. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Alors l'application

$$u\ :\ (\xi_1,\ldots,\xi_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$$

est un isomorphisme bicontinu de $\mathbb{K}^n$ sur E. En particulier, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et localement compact.

Démonstration. Démontrons tout d'abord le 1. Considérons en premier le cas où l'espace vectoriel est $\mathbb{K}^n$, et soient p et q deux normes sur sur celui-ci. Soit S la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ pour la norme euclidienne. Comme p et q ne s'annulent pas sur S qui est compact (Proposition II.8.14, page 35) et sont continues d'après la Proposition précédente, d'après la Proposition II.8.3, page 31, il existe deux constantes $0<A\leq B<+\infty$, telles que, pour $x\in S$, on a $A\leq\dfrac{p(x)}{q(x)}\leq B$. En appliquant ceci à $\dfrac{x}{\|x\|}$, $x\in E$, $x\neq 0$, on conclut que $Aq(x)\leq p(x)\leq Bq(x)$, pour tout $x\in E$, ce qui termine ce cas. Enfin, le cas d'un espace vectoriel E quelconque est immédiat puisque si celui-ci est isomorphe à un $\mathbb{K}^n$ par $u\ :\ \mathbb{K}^n\to E$ (construite avec une base), alors et $p\circ u$ et $q\circ u$, sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Vérifions maintenant le 2. Puisque u est un isomorphisme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i\mapsto\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$$

est une norme sur E, et le 1. implique donc qu'il existe deux constantes $0<A\leq B<+\infty$ telles que

$$A\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}\leq\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i\right\|_E\leq B\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2},$$

c'est-à-dire $A\,\|(\xi_1,\ldots,\xi_n)\|_{\mathbb{K}^n}\leq\|u(\xi_1,\ldots,\xi_n)\|_E\leq B\,\|(\xi_1,\ldots,\xi_n)\|_{\mathbb{K}^n}$ ce qui signifie exactement que u est une application linéaire bijective bicontinue. □

PROPOSITION III.5.2.

Soient E un espace normé de dimension finie et F un espace normé. Toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration. En effet, si u est une telle application et si $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, puisque l'application $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}\xi_i u(a_i)$ est trivialement continue, le résultat est une conséquence de la Proposition précédente. □

Remarque III.5.1. *On notera que ce dernier résultat est bien sûr faux si E n'est pas de dimension finie.*

PROPOSITION III.5.3.

Soient E un espace normé, V un sous-espace vectoriel fermé de E et W un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors $V+W$ est fermé. En particulier, tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé (ce qui résulte aussi bien sûr de Théorème III.5.1).

Démonstration. Par récurrence sur la dimension de W, on voit facilement qu'il suffit de faire la preuve lorsque W est de dimension égale à 1 c'est-à-dire lorsque $W=\mathbb{K}a$, et de plus on peut supposer $a\notin V$. Alors, si f est la forme linéaire sur $V+W$ dont le noyau est V et qui vaut 1 en a, elle est continue (sur $V+W$) d'après la Proposition III.4.5, page 61. Soit alors x un point de E adhérent à $V+W$ et soit (x_n) une suite dans $V+W$ qui converge vers x. Si on pose $x_n=f(x_n)a+y_n$, comme f est continue sur $V+W$ donc uniformément continue (Théorème III.4.1, page 59), $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui converge donc vers λ. Il en résulte que (y_n) est aussi convergente vers y, et ce dans V puisque ce dernier est fermé, ce qui donne finalement $x=\lambda a+y\in V+W$, ce qui montre que $V+W$ est fermé. □

PROPOSITION III.5.4.

Soient E un espace normé et V un sous-espace vectoriel fermé de E de codimension finie. Alors tout supplémentaire algébrique de V est un supplémentaire topologique.

Démonstration. Soit W un supplémentaire algébrique de V dans E. Raisonnons par récurrence sur la dimension de W. Si W est de dimension 1, le résultat est donné par la Proposition III.4.5, page 61. Supposons le résultat montré pour les V de codimension $\leq n-1$, et soit W un supplémentaire de V de dimension n. Posons $W=W_1+W_2$ où W_1 est de dimension 1 et W_2 de dimension $n-1$. La Proposition précédente montre que $V+W_1$ est fermé dans E et l'hypothèse de récurrence dit que W_2 est un supplémentaire topologique de $V+W_1$ c'est-à-dire que E est homéomorphe à $(V+W_1)\times W_2$. Le cas $n=1$ montrant que $V+W_1$ est isomorphe à $V\times W_1$, on en déduit que E est homéomorphe à $V\times W_1\times W_2$, et, comme $W_1\times W_2$ est homéomorphe à $W_1+W_2=W$, E est bien homéomorphe à $V\times W$. □

DÉFINITION III.5.1.

*Dans un espace normé E, on appelle **suite totale** (resp. **famille totale**) toute suite (resp. famille) telle que l'espace vectoriel engendré par ses éléments soit dense dans E.*

PROPOSITION III.5.5.

Soit E un espace normé.
1. S'il existe une suite totale dans E, alors E est séparable.
2. Si E est séparable, il existe une suite totale formée de vecteurs linéairement indépendants.

Démonstration. En effet, en considérant les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (i.e. dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de la forme $\alpha + i\beta$, avec α et β dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on voit immédiatement le 1. Dans les conditions du 2., et, en supposant en plus que E est de dimension infinie (sinon il n'y a rien à montrer), si (a_n) est une suite dense, on construit une suite extraite (a_{n_k}) en prenant pour k_1 le premier entier n tel que $a_n \neq 0$, puis, les k_i, $1 \leq i \leq n$, étant construit, on choisit k_{n+1} de sorte que $a_{k_{n+1}}$ soit le plus petit entier $m > k_n$ tel que a_m ne soit pas dans l'espace engendré par les a_{k_i}, $1 \leq i \leq n$, (ce qui est possible car, dans le cas contraire, E posséderait un sous-espace dense de dimension finie et comme un tel sous-espace est fermé (Proposition III.5.3, page précédente) E serait de dimension finie). Il est alors clair que la suite ainsi construite répond à le question. ☐

THÉORÈME III.5.2 (*Théorème de Frédéric Riesz*).

SoitE un espace normé. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
1. E est de dimension finie ;
2. E est localement compact ;
3. La boule unité fermée (centrée en zéro) de E est compacte.
4. La boule unité (centrée en zéro) de E est précompacte.
5. Il existe des points $x_i \in E$, $1 \leq i \leq n$, et un réel r, $0 < r < 1$, tels que les boules $\bar{B}(x_i, r)$ forment un recouvrement de la boule unité $B(0, 1)$ de E.

Démonstration. L'implication 1.⇒2. a été vue au Théorème III.5.1, page 66, et l'implication 2.⇒3. résulte du fait qu'une homothétie (non nulle) est un homéomorphisme. Il est clair que 3.⇒ 4 et que 4.⇒.5. Montrons que 5.⇒1. Soit B la boule unité fermée centrée en zéro de E. Par hypothèse, il existe un nombre fini de points x_i, $1 \leq i \leq n$, de E tels que les boules $\bar{B}(x_i r) = x_i + rB$ recouvrent B (car B est l'adhérence de $B(0, 1)$). Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_i. On a donc $B \subset F + rB \subset F + rF + r^2B = F + r^2B$, donc, par récurrence, $B \subset F + r^nB$. Soit alors $x \in B$, et posons $x = y_n + z_n$ avec $y_n \in F$ et $z_n \in r^nB$; en particulier $y_n \in 2B \cap F$, qui est une boule compacte d'après le Théorème III.5.1, et il existe donc une suite extraite (y_{n_k}) qui converge vers un point y de F celui-ci étant fermé (Proposition III.5.3, page précédente). Par passage à la limite, on obtient donc $x = y$ (puisque $z_{n_k} \to 0$) ce qui donne $x \in F$ et achève la preuve. ☐

SOUS-SECTION III.5.2

Séries et familles sommables dans les espaces normés de dimension finie

PROPOSITION III.5.6.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est absolument sommable.*
2. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.*
3. *L'ensemble des sommes finies de x_i est borné.*
4. *Si $I = \mathbb{N}$, la série $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est commutativement convergente.*

Démonstration. D'après le Théorème III.5.1, page 66 et la Proposition III.3.10, page 57, on voit qu'il suffit de faire la démonstration lorsque $E = \mathbb{K}$ puis lorsque $E = \mathbb{R}$. Les implication 1. ⇒ 2. et 2. ⇒ 3. sont évidentes, montrons donc que 3. ⇒ 1. Par hypothèse, il existe deux réels positifs α et β tels que, pour toute partie finie K de I on a $-\alpha \leq \sum_{i \in K} x_i \leq \beta$. Si, pour tout x_i on pose $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ = x_i$ si $x_i \geq 0$, $x_i^+ = 0$ sinon, on a $\sum_{i \in K} x_i^+ \leq \beta$ et $\sum_{i \in K} x_i^- \leq \alpha$, ce qui implique que les familles $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables, ce qui donne 1. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, l'équivalence des trois premières propriétés avec la quatrième résulte du Théorème III.3.2, page 58. ☐

COROLLAIRE.

Si E est de dimension finie, $l^1_I(E)$ (Définition III.3.6, page 59) est l'espace des familles sommables dans E indexées sur I.

PROPOSITION III.5.7.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum x_n$ soit convergente mais pas absolument convergente. Alors, pour tout réel α il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum x_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.

Démonstration. Esquissons simplement la preuve. En écrivant $x_n = x_n^+ - x_n^-$, comme dans la démonstration précédente, l'hypothèse entraîne que les suites (x_n^+) et (x_n^-) tendent vers zéro et que les séries $\sum x_n^+$ et $\sum x_n^-$ sont divergentes. On définit alors la bijection σ de la manière suivante : on prend tout d'abord les premiers x_n, tels que $x_n \geq 0$, $x_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq i_1$, de sorte que $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_1} x_{\sigma(i)} \geq \alpha$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_1-1} x_{\sigma(i)} < \alpha$, ce qui est possible d'après ce qui précède. Puis on prends les premiers x_n, tels que $x_n < 0$, $x_{\sigma(i)}$, $i_1 \leq i \leq i_2$, de sorte que $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_2} x_{\sigma(i)} \leq \alpha$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_2-1} x_{\sigma(i)} > \alpha$, ce qui est encore une fois possible. Et ainsi de suite. Le fait que les suites (x_n^+) et (x_n^-) tendent vers zéro permet alors de conclure. $\square$

Exercices

Exercice III.1.

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel normé. Montrer que :

1. Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et si $A \subseteq E$ est fermé (resp. ouvert, compact, connexe) λA est fermé (resp. ouvert, compact, connexe).
2. Si A est une partie quelconque de E et B est un ouvert de E, $A + B$ est ouvert.
3. Si A et B sont deux compacts (resp. connexes) de E, $A + B$ est compact (resp. connexe).
4. Si A est un compact de E, B un fermé de E, $A + B$ est fermé. (Cette propriété reste-t-elle vraie si A et B sont fermés ?) .

Exercice III.2.

Montrer que dans un espace normé, l'adhérence de toute boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\bar{B}(a, r)$ et que toute boule ouverte est homéomorphe à E.

Exercice III.3.

Cet exercice est à traiter sans utiliser la norme d'opérateur continu. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|X\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et pour $A \in E$, $\|A\|_E = \displaystyle\sup_{\|X\|=1} \|A(X)\|$.

1. Montrer que $\|.\|_E$ est une norme sur E et que l'on a aussi
$$\|A\|_E = \sup_{\|X\|\leq 1} \|A(X)\| = \sup_{X\neq 0} \left(\frac{1}{\|X\|} \|A(X)\|\right)$$
et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|A(X)\| \leq \|A\|_E \|X\|$ et enfin, $\|AB\|_E \leq \|A\|_E \|B\|_E$.
2. Pour $A = (a_{ij}) \in E$, on pose $\varphi(A) = \max(|a_{ij}| \ ; \ 1 \leq i, j \leq n)$. Montrer que φ et $\|.\|_E$ sont des normes équivalentes et que $(E, \|.\|_E)$ est complet.
3. Pour $A \in E$, montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n!} A^n$ est convergente (convention : A^0 est la matrice unité).

Exercice III.4.

Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes, on pose, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$\|P\|_\infty = \sup_k |a_k| \ ; \ \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \ ; \ \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes non équivalentes et que $(\mathbb{C}[X], \ \|.\|_\infty)$ n'est pas complet.

Exercice III.5.

1. Montrer que tout sous espace vectoriel strict d'un espace normé est d'intérieur vide. Que dire d'un sous espace borné ?
2. Montrer que si E est un espace de Banach de dimension infinie, sa dimension ne peut être dénombrable.

Exercice III.6.

1. Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, f de classe C^1 et g continue. On suppose que $f + f' = g$. Exprimer f en fonction de g (à l'aide d'une intégrale).
2. Soit E l' espace des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$ nulles en 0. Si $u \in E$, on pose $||u|| = |u(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)|$ et $N(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u(x) + u'(x)|$. Démontrer que les deux applications précédentes sont des normes équivalentes (utiliser 1. pour l'équivalence).

Exercice III.7.

Soit $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}^+$une application continue. Pour toute fonction continue f sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose $\Phi(f) = \int_0^1 |f(x)|\omega(x)dx$.

1. Démontrer que Φ est une semi-norme sur l'espace $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. Démontrer que Φ est une norme si et seulement si l'ensemble des zéros de ω est d'intérieur vide.

Exercice III.8.

Les espaces l^p ont été définis en cours.

1. Soit p et q tels que $1 \le p < q \le +\infty$, montrer d'abord que si $x = (x_n) \in l^p$, alors $x \in l^\infty$ et qu'on a $||x||_\infty \le ||x||_p$ puis que $x \in l^q$ et qu'on a $||x||_q \le ||x||_p$.
2. b) $\omega = (\omega_n)_n$ désigne une suite de nombres réels *strictement* positifs. On pose $l^p(\omega) = \{x = (x_n)\text{t.q.} \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \omega_n < \infty\}$.

   Démontrer que $l^p(\omega)$ est un espase vectoriel normé par l'application $x \longmapsto (\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \omega_n)^{\frac{1}{p}}$.
3. c) On suppose que la série $\sum \omega_n$ converge et que p est $< q$. Démontrer que $l^q(\omega)$ est *stictement* contenu dans $l^p(\omega)$.

Exercice III.9.

1. Démontrer qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs ou nuls est sommable si et seulement si l'ensemble des sommes finies $\{\sum_{i\in J} a_i\ ;\ J \text{ finie} \subseteq I\}$ est majoré.
2. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : i) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est absolument sommable ; ii) Cette famille est sommable ; iii) L'ensemble des sommes finies est borné.
3. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes ; On suppose que I est une réunion *disjointe* :$I = \bigcup_{l\in L} J_l$, que pour chaque $l \in L$, la famille $(|x_i|)_{i\in J_l}$est sommable et que la famille $\left(\sum_{i\in J_l} |x_i|\right)_{l\in L}$ est aussi sommable. Démontrer que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et que
$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{l\in L}\sum_{i\in J_l} x_i.$$
4. Application. Soit $(a_{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes (« série double »). On suppose que les séries $\sum_q |a_{pq}|$ sont convergentes pour tout p et que la série $\sum_p \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{pq}|$ est aussi convergente. Démontrer que les séries $\sum_p |a_{pq}|$ et $\sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{pq}|$ sont convergentes et que
$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{pq} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{pq}$$

Exercice III.10.

On considère une application f de $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\}$ dans $\mathbb{C}$ somme d'une série entière sur D
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$
Soit z_0 un point de D. Montrer que l'application $u \longmapsto f(z_0 + u)$ est développable en série entière de la variable u et que le rayon de convergence est au moins $R - |z_0|$.

Exercice III.11.
Ecrire le développement en série entière de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \exp(\exp z))$.

Exercice III.12.
Soit E un espace de Banach et I un ensemble quelconque. Démontrer que l'espace $l^p(I, E)$ est complet ($p \geq 1$).

Exercice III.13.
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coeefficients réels. On définit $||P|| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

1. Démontrer que l'application $||.||$ est une norme sur E. Dans les questions suivantes, E est muni de cette norme.
2. Soit c un réel ≥ 0 et L l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L(P) = P(c)$. Démontrer que L est linéaire et continue si et seulement si $c \in [0, 1]$. Calculer la norme de L lorsque L est continue.
3. L'application $P \mapsto P'$ est elle continue sur E ?

Exercice III.14.
Soit T l'application de $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(c)$ où c est un réel de l'intervalle $[0, 1]$. E est muni de la norme L^1 c'est à dire : $||f|| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice III.15.
Soit T l'application de l^∞ dans $\mathbb{R}$ définie par : $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_k}{k!}$. Montrer que T est linéaire continue et calculer la norme de T (l^∞ est muni de sa norme usuelle).

Exercice III.16.
Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||.||_\infty$. L'application u est elle continue ? Déterminer la norme de u en fonction des coefficients de la matrice A.

Exercice III.17.
Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On désigne par φ un élément fixé de E et par T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$T(f) = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)dx$$

1. Démontrer que T est linéaire continue.
2. Calculer la norme de T lorsque φ est ≥ 0.
3. Calculer la norme de T lorsque φ est la fonction $x \longmapsto \varphi(x) = \cos x$.

Exercice III.18.
Soit $E = c_0$ muni de sa norme usuelle et soit $\lambda = (\lambda_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes telle que $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $T_\lambda(a) = (\lambda_n a_n)_n$; $a = (a_n) \in c_0$.

1. Démontrer que T est une application linéaire continue de c_0 dans lui-même.
2. Déterminer la norme de T_λ.
3. Montrer que T_λ est injective.
4. Etablir une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que T_λ soit surjective.
5. Prouver que l'image de T_λ est toujours dense dans c_0.

Exercice III.19.
Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. On suppose que pour toute forme linéaire continue y' appartenant au dual topologique F' de F, l'application $y' \circ T$ est continue. Démontrer que l'application T est continue.

Exercice III.20.
Soit E un espace normé, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un système libre de E et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ une famille quelconque de scalaires. Démontrer qu'il existe une forme linéaire continue sur E, telle que pour tout i, $1 \leq i \leq n$ on ait $f(x_i) = \alpha_i$.

Exercice III.21.
Soit E un espace normé et φ un élément de E' (le dual topologique de E). On suppose que φ est non nulle et on désigne par H le noyau de φ. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a : $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{||\varphi||}$. Quel résultat bien connu retrouve-t-on, dans le cas où E est l'espace $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne ?

Exercice III.22.
Démontrer que le dual toplogique de c_0 (resp. l^p avec $1 \leq p < +\infty$) s'identifie isométriquement à l^1 (resp. l^q où q est un réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Indication* : On constatera qu' un élément $x \in c_0$ (resp. l^p) est égal à la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^n$ dans c_0 (resp. l^p) où e^n est l'élément tel que $e^n_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$; puis à une forme linéaire T, on associera la suite $(T(e^n))_n$ et on démontrera que cette application est une isométrie surjective. Quel est dans le raisonnement l'argument qui ne convient pas dans le cas de l^∞ ?

Exercice III.23.
Soit une suite (α_n) de nombres complexes telle que la série $\sum \alpha_n \xi_n$ converge pour toute suite (ξ_n) appartenant à c_0. Démontrer que la série $\sum |\alpha_n|$ est convergente. *Indication* : Considérer les formes linéaires $L_n : c_0 \longmapsto \mathbb{C}$ définies par $L_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi_k$; déterminer leurs normes et conclure en utilisant l'éxercice précédent et le théorème de Banach-Steinhaus.

Exercice III.24.
Soit K un entier fixé et E_K l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq K$. Démontrer qu'il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que : $\forall P = \sum_{k=0}^{K} a_k x^k \in E_K,\ \alpha \sum_{k=0}^{K} |a_k|^2 \leq \int_0^1 |P(x)|^2 dx \leq \beta \sum_{k=0}^{K} |a_k|^2$.

Exercice III.25.
Soit k un entier et S une partie bornée de $\mathbb{C}$ de cardinal $> k$. On suppose que $(P_n)_n$ est une suite de fonctions polynômes à coefficients complexes de degré $\leq k$ qui converge uniformément sur S vers une fonction f. Démontrer que f est la restriction à S d'une fonction polynôme de degré $\leq k$.

Exercice III.26.
E et F sont deux espaces normés et T un opérateur linéaire de E dans F. On dit que T est compact si l'image de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F.

1. Démontrer qu'un opérateur compact est continu. L'identité de E peut elle être compacte ?
2. Démontrer que si T est continu et si la dimension de $T(E)$ est finie, T est compact.
3. On suppose E complet. Démontrer que si une suite (T_n) d'opérateurs compacts converge vers un élément T dans l'espace $\mathscr{L}(E)$, alors T est compact (on pourra penser à la précompacité).
4. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\ \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit K une fonction continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et pour $f \in E$, $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt.$$
   (a) Montrer que T est une application linéaire continue de E dans E.
   (b) Montrer que si K est un polynôme, T est compact.
   (c) En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que T est compact.

Exercice III.27.
Soient E, F, G trois espaces normés, E ou F étant complet. On considère une application bilinéaire f de $E \times F$ dans G. Démontrer que f est continue si et seulement si pour tout élément $(x_0, y_0) \in E \times F$ les applications $f_{x_0} :\ y \mapsto f(x_0, y)$ et $f_{y_0} :\ x \mapsto f(x, y_0)$ sont continues (On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhauss).

CHAPITRE IV

ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre, comme dans le précédent, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels soit le corps des nombres complexes. $\xi \mapsto \bar{\xi}$ désigne l'automorphisme identique de $\mathbb{K}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la conjugaison complexe lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

SECTION IV.1

Formes hermitiennes

SOUS-SECTION IV.1.1

Généralités

DÉFINITION IV.1.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application f de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$ est une ***forme sesquilinéaire*** *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) Pour tout $y \in F$, l'application de E dans $\mathbb{K}$ $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;

(ii) Pour tout $x \in E$, l'application de F dans $\mathbb{K}$ $y \mapsto f(x, y)$ est semi-linéaire (i.e., $f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$ et, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$).

*De plus, si pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ (**symétrie hermitienne**), on dit que f est une **forme hermitienne**.*

Remarque IV.1.1. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme hermitienne s'appelle aussi une **forme bilinéaire symétrique**.*

PROPOSITION IV.1.1.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f une forme sesquilinéaire sur E.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est hermitienne si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x, x)$ est réel.

2. Pour tous x et y de E, on a :

(a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, et* f *est hermitienne,* $4f(x,y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y)$ *;*
(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*,* $4f(x,y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy)$*.*

Démonstration. La nécessité du 1. résulte immédiatement de la symétrie hermitienne et la suffisance résulte du (b) du 2. Le (a) du 2. est immédiat et le (b) se vérifie par un calcul direct. □

DÉFINITION IV.1.2.

1. On appelle ***noyau d'une forme hermitienne*** f *sur* E *l'espace vectoriel formé des* $x \in E$ *tels que* $\forall y \in E$*,* $f(x,y) = 0$*. On dit qu'une* ***forme hermitienne*** *sur un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{K}$ *est* ***non dégénérée*** *si son noyau est réduit à* $\{0\}$*.*
2. On appelle ***vecteur isotrope*** *d'une forme hermitienne sur* E *un élément* x *de* E *tel que* $f(x,x) = 0$*.*
3. Deux éléments d'un espace E *sont dit* ***orthogonaux*** *pour une forme hermitienne* f *si* $f(x,y) = 0$*.*

SOUS-SECTION IV.1.2

Formes hermitiennes positives

DÉFINITION IV.1.3.

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*. On dit qu'une forme hermitienne* f *sur* E *est* ***positive*** *si,* $\forall x \in E$*,* $f(x,x) \geq 0$*.*

PROPOSITION IV.1.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*).

Si f *est une forme hermitienne positive sur* E*, on a, pour tous* $x, y \in E$*,* $|f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y)$*.*

Démonstration. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$, ce qui s'écrit

$$\lambda^2 f(y,y) + 2\Re\bar{\lambda} f(x,y) + f(x,x) \geq 0,$$

et le discriminant de l'équation du second degré en λ est négatif ou nul, c'est-à-dire $(\Re f(x,y))^2 \leq f(x,x)f(y,y)$, et on conclut en remplaçant x par $e^{i\vartheta}x$ avec ϑ de sorte que $e^{i\vartheta}f(x,y) = |f(x,y)|$. □

PROPOSITION IV.1.3.

Soit f *une forme hermitienne positive sur* E*.*
1. Un élément x *de* E *est dans le noyau de* f *si et seulement si il est isotrope. En particulier,* f *est non dégénérée si et seulement si* $x \neq 0$ *implique* $f(x,x) > 0$*.*
2. Pour tous $x, y \in E$*, on a* $(f(x+y, x+y)^{1/2} \leq f(x,x)^{1/2} + f(y,y)^{1/2}$ ***(inégalité de Minkowski)***

Démonstration. Le 1. résulte aussitôt de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour voir le 2., on reprend la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\lambda = 1$ ce qui donne $f(x+y, x+y) = f(y,y) + 2\Re f(x,y) + f(x,x)$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

COROLLAIRE.

Si f *est une forme hermitienne positive sur* E *alors* $x \mapsto \sqrt{f(x,x)}$ *est une semi-norme sur* E *et une norme si* f *est non dégénérée.*

Remarque IV.1.2. *Soit* f *une forme hermitienne non dégénérée sur* E*.*
1. Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a égalité si et seulement si x *et* y *sont linéairement dépendants.*
2. Dans l'inégalité de Minkowski, on a égalité si et seulement si on a $x = \lambda y$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}_+$*.*

Démonstration. Si $x = \lambda y$, on a $f(x,x)f(y,y) = |\lambda|^2 f(x,x)^2 = |f(x,y)|^2$, ce qui donne la condition suffisante pour Cauchy-Schwarz, et, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on voit facilement que l'on a égalité dans l'inégalité de Minkowski si $\lambda \geq 0$. Réciproquement, supposons que l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La démonstration de cette dernière montre alors qu'il existe λ tel que $f(x+\lambda y, x+\lambda y) = 0$ ce qui signifie que $x + \lambda y = 0$, puisque f est non dégénérée. Enfin, si on a égalité dans l'inégalité de Minkowski, la preuve de celle-ci montre que l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $x = \lambda y$, et aussi que $\Im f(x,y) = 0$, et, comme $f(x,y) = \bar{\lambda} f(x,x)$, il faut $\lambda \in \mathbb{R}$, et enfin $\lambda \geq 0$ comme précédemment. □

SOUS-SECTION IV.1.3

Exemples de formes hermitiennes

1. Soit $l^2_I(\mathbb{C})$ l'espace des familles de carrés sommables $(x_i)_{i\in I}$, indexées par I, de nombres complexes (i.e. $(x_i^2)_i$ sommable ou $(|x_i|^2)_i$ sommable ce qui revient au même) . En remarquant que $|x_i\bar{y}_i| \leq \frac{1}{2}\left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right)$, il résulte que la famille $(x_i\bar{y}_i)_{i\in I}$ est sommable. Si on pose alors $f((x_i),(y_i)) = \sum_{i\in I} x_i\bar{y}_i$, f est une forme hermitienne positive non dégénérée sur $l^2_I(\mathbb{C})$.
2. Sur l'espace $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{C})$, l'application $f(x,y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ est une forme hermitienne positive non dégénérée.

SECTION IV.2

Espaces préhilbertiens et Hilbertiens

En termes du chapitre précédent, l'inégalité de Minkowski dit que si f est une forme hermitienne sur E, l'application $x \mapsto \sqrt{f(x,x)}$ est une **semi-norme** sur E c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes des normes sauf éventuellement le fait que $\|x\| = 0$ implique $x = 0$. Clairement une semi-norme définit un écart sur l'espace avec lequel on peut définir des boules (comme avec une distance) et donc une topologie sur E. Ces remarques amènent à poser la définition suivante :

DÉFINITION IV.2.1.

*On appelle espace **préhilbertien** un espace vectoriel E muni d'une forme hermitienne positive. Celle-ci est généralement notée $\langle x,y\rangle$ (ou $(x|y)$) et est appelée le **produit scalaire**. $x \mapsto \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ est une semi-norme sur E, et, E est toujours considéré muni de cette semi-norme et de la topologie qui lui est associée. Si le produit scalaire est non dégénéré, c'est-à-dire si l'espace topologique E est séparé, $\|x\|$ est une norme et E est donc considéré comme muni de la structure d'espace normé induite.On appelle **espace de Hilbert** un espace préhilbertien séparé complet.*

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E, lorsque l'on parle de l'espace préhilbertien F il s'agit, sauf mention expresse du contraire, de l'espace obtenu en munissant F de la restriction du produit scalaire de E.

La Proposition qui suit est une conséquence immédiate des définitions :

PROPOSITION IV.2.1.

Soient E un espace préhilbertien, x et y deux points de E.

*1. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x,y\rangle$. En particulier, si x et y sont orthogonaux, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (**Théorème de Pythagore**).*

*2. On a $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ ou encore $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$ (**Théorème de la médiane**).*

DÉFINITION IV.2.2.

*Soient E et F deux espace préhilbertiens. On dit qu'une application f de E dans F est un **homomorphisme** (resp. **isomorphisme**) **d'espaces préhilbertiens**, ou simplement un **homomorphisme** (resp. **isomorphisme**), si f est linéaire (resp. linéaire bijective) et si elle conserve les produits scalaires c'est-à-dire $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$. En particulier, un homomorphisme est une isométrie.*

THÉORÈME IV.2.1 (*Complétion des espaces préhilbertiens séparés*).

Soit E un espace préhilbertien séparé. Alors il existe un unique (à un isomorphisme près) espace de Hilbert $\hat{E}$ pour lequel il existe un isomorphisme (d'espaces préhilbertiens) $\hat{T}$ de E sur un sous-espace dense de $\hat{E}$.

Démonstration. Compte tenu du Théorème III.1.1, page 53, il nous suffit de voir que si $\hat{E}$ est un espace normé complété de E, on peut munir $\hat{E}$ d'un produit scalaire qui définit la structure d'espace normé. Ceci est très simple : comme pour la complétion des espaces normés, on remarque que l'application $(\hat{T}(x), \hat{T}(y)) \mapsto \langle x, y\rangle$ est une isométrie de $\hat{T}(E) \times \hat{T}(E)$ dans $\mathbb{K}$ qui se prolonge donc à $\hat{E} \times \hat{E}$ en un produit scalaire qui définit la norme de $\hat{E}$. □

SECTION IV.3

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire euclidien est un espace de Hilbert.
2. Si E est un espace préhilbertien, l'espace normé $l_I^2(E)$ (c.f. Sous-section III.3.4, page 59) est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$. De plus, si E est complet, $l_I^2(E)$ est un espace de Hilbert (Proposition III.3.12, page 59).
   Nous verrons plus loin que $l_I^2(\mathbb{K})$ est l'exemple fondamental d'espace de Hilbert, dans le sens où tout espace de Hilbert est isomorphe à un espace de ce type.
3. Sur l'espace $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ définit une structure d'espace préhilbertien non complet. La famille $(e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ est formée d'éléments de $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}([0,1])$ deux à deux orthogonaux et de normes égales à 1 et est totale en vertu du Théorème de Stone-Weierstrass complexe (Corollaire 4, page 39) : pour le voir, on remarque tout d'abord que le Théorème de Stone-Weierstrass implique que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une algèbre uniformément dense dans l'espace de Banach des fonctions continues f de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(0) = f(1)$ (de la manière suivante : si $\mathscr{C}_p([0,1])$ est cet espace, on l'identifie avec l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur le tore $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$ (qui est compact) par l'application $f \mapsto g$, $g\left(e^{2i\pi t}\right) = f(t)$, et, le Théorème de Stone-Weierstrass complexe implique que la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$), puis on approche toute fonction continue (pour la norme associée au produit scalaire) par une fonction continue qui prend les même valeurs en 0 et en 1 ce qui se fait aisément.
   Nous verrons dans le dernier paragraphe de ce chapitre d'autres exemples classiques de familles « orthonormales » dans cet espace.
4. Soit $\mathscr{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices $n_1 \times n_2$ à coefficients complexes. L'application $(A, B) \mapsto \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\substack{n=n_1\\m=n_2}} a_{n,m}\overline{b_{n,m}}$, avec $A = (a_{n,m})$, $B = (b_{n,m})$, définit, sur $\mathscr{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$ une structure d'espace de Hilbert (qui est isomorphe à $\mathbb{C}^{n_1 n_2}$).

SECTION IV.4

Projection sur un sous-ensemble convexe

SOUS-SECTION IV.4.1

Projection sur un convexe séparé et complet

THÉORÈME IV.4.1 (*Théorème des Projections sur un convexe*).

*Soient E un espace préhilbertien, H une partie convexe non vide de E telle que le sous-espace métrique H soit séparé et complet. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un et un seul point $P_H(x)$ dans H tel que $\|x - P_H(x)\| = \inf_{z\in H} \|x - z\|$. De plus, $P_H(x)$ est l'unique point y de H tel que, pour tout $z \in H$, on ait $\Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$. $P_H(x)$ s'appelle la **projection** de x sur H.*

Démonstration. Posons $d = \inf_{z\in H} \|x - z\|$. Le théorème de la médiane (Proposition IV.2.1, page 75) donne, pour y et t dans H,

$$\|x-y\|^2 + \|x-t\|^2 = \frac{1}{2}\|2x-(y+t)\|^2 + \frac{1}{2}\|t-y\|^2 ,$$

soit $\|y-t\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-t\|^2 - 4\left\|x - \frac{y+t}{2}\right\|^2$. Comme $\frac{y+t}{2} \in H$, par convexité de H, on a $\left\|x - \frac{y+t}{2}\right\| \geq d^2$, et il vient

$$\|y-t\|^2 \leq 2\|x-y\|^2 + 2\|x-t\|^2 - 4d^2. \tag{IV.4.1}$$

L'unicité se déduit aussitôt de cette inégalité, car, si y et t sont dans H et tels que $d = \|x-y\| = \|x-t\|$, elle donne $\|y-t\| = 0$, et comme H est séparé, $y = t$.

Démontrons maintenant l'existence. Soit (x_n) une suite dans H telle que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d$. En posant $\varepsilon_n = \|x-x_n\|^2 - d^2$, (IV.4.1) appliquée à $y = x_p$ et $t = x_q$, donne

$$\|x_p - x_q\|^2 \leq 2\left(d^2 + \varepsilon_p\right) + 2\left(d^2+\varepsilon_q\right) - 4d^2 = 2\left(\varepsilon_p + \varepsilon_q\right),$$

ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy et donc converge dans H puisque ce dernier est supposé complet, ce qui prouve l'existence.

Montrons maintenant la seconde partie du Théorème. Soit $z \in H$. Puisque H est convexe, $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, $(1-t)P_H(x) + tz \in H$, ce qui implique $\|x - P_H(x)\| \leq \|x - (1-t)P_H(x) - tz\|$. En élevant ceci au carré, il vient

$$t^2\|P_H(x) - z\|^2 + 2t\Re\langle x - P_H(x), P_H(x) - z\rangle \geq 0,$$

et, en simplifiant par t et en faisant tendre t vers zéro, il viens $\Re\langle x - P_H(x), z - P_H(x)\rangle \leq 0$. Réciproquement, supposons que $y \in H$ soit tel que $\forall z \in H$ on ait $\Re\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$. Alors en écrivant $\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2$ et en développant, il vient $\|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$, ceci pour tout $z \in H$, ce qui montre bien que $y = P_H(x)$ et termine la démonstration du Théorème. □

PROPOSITION IV.4.1.

Soient E un espace préhilbertien, H une partie convexe non vide de E telle que le sous-espace métrique H soit séparé et complet. Si x et y sont deux points de E on a $\|P_H(x) - P_H(y)\| \leq \|x-y\|$. Autrement dit la fonction $x \mapsto P_H(x)$ est contractante (donc en particulier continue).

Démonstration. En effet, en écrivant $x - y = P_H(x) - P_H(y) + (x - y - (P_H(x) - P_H(y)))$, il vient

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|P_H(x) - P_H(y)\|^2 + \|x-y-(P_H(x)-P_H(y))\|^2 + \\ &\quad +2\Re\langle x - P_H(x), P_H(x) - P_H(y)\rangle + 2\Re\langle P_H(y) - y, P_H(x) - P_H(y)\rangle,\end{aligned}$$

et, d'après la dernière assertion du Théorème des projections, on a

$$\|x-y\|^2 \geq \|P_H(x) - P_H(y)\|^2 + \|x-y-(P_H(x)-P_H(y))\|^2 ,$$

ce qui donne le résultat. □

Les deux propositions qui suivent étudient le comportement de $P_H(x)$ par rapport au convexe H.

PROPOSITION IV.4.2.

Soient E un espace préhilbertien, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties convexes non vides de E telles que, pour tout n, le sous-espace métrique H_n soit séparé et complet, et posons $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Soit x un point de E. Alors :

1. *La suite $n \mapsto \|x - P_{H_n}(x)\|$ est croissante.*
2. *H est non vide si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 - P_{H_n}(x_0)\| < +\infty$.*
3. *Si H est non vide, pour tout $x \in E$, la suite $(P_{H_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $P_H(x)$.*

Démonstration. Le 1. est évident, montrons tout d'abord le 2. La condition est clairement nécessaire car $\|x - P_{H_n}(x)\| \leq \|x-y\|$, pour tout $y \in H$. Vérifions qu'elle est suffisante. Le 1. et l'hypothèse montrent que la suite $(\|x_0 - P_{H_n}(x_0)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; soit d sa limite. Soit $\bar{B}$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon d. Alors, par construction, la suite $(\bar{B} \cap H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de convexes fermés, contenus dans H_0 qui est complet, dont le diamètre tends vers zéro : en effet, si x et y sont deux points de $\bar{B}\cap H_n$, par convexité, $\frac{1}{2}(x+y) \in \bar{B}\cap H_n$, donc $\left\|x_0 - \frac{1}{2}(x+y)\right\| = d - \varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, et l'égalité de la médiane (Proposition IV.2.1, page 75) donne

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|x-x_0\|^2 + \|y-x_0\|^2\right) - \left\|x_0 - \frac{x+y}{2}\right\|^2 \\ &\leq d^2 - (d-\varepsilon_n)^2 = \varepsilon_n(2d - \varepsilon_n).\end{aligned}$$

La Propriété de Cantor (Proposition II.7.5, page 24) implique alors que l'intersection des $\bar{B}\cap H_n$ est non vide et contient un et un seul point y_0 qui est nécessairement dans tous les H_n donc dans H qui est donc non vide. Le 3. se déduit du raisonnement ci-dessus car $P_{H_n}(x_0) \in \bar{B}\cap H_n$, pour tout n. □

PROPOSITION IV.4.3.

Soient E un espace préhilbertien, A une partie convexe non vide telle que le sous-espace métrique A soit séparé et complet. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-ensembles convexes non vides de E contenus dans A et tels que, pour tout n le sous-espace métrique H_n soit complet. Posons $H = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n}$. Alors H est un sous-ensemble convexe non vide de E tel que le sous-espace métrique H soit séparé et complet et, pour tout x de E, la suite $(P_{H_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P_H(x)$.

Démonstration. Clairement H est convexe non vide séparé et complet, il faut simplement vérifier la dernière assertion de l'énoncé. Puisque la suite $\|x - P_{H_n}(x)\|$ est décroissante elle converge clairement vers $\|x - P_H(x)\|$. Comme

$$\|x - P_{H_n}(x)\|^2 - \|x - P_H(x)\|^2 = \|P_H(x) - P_{H_n}(x)\|^2 + 2\Re\langle x - P_H(x), P_H(x) - P_{H_n}(x)\rangle,$$

on obtient que $\|P_H(x) - P_{H_n}(x)\|^2 + 2\Re\langle x - P_H(x), P_H(x) - P_{H_n}(x)\rangle$ est positif ou nul et tend vers zéro quand $n \to \infty$, et, comme $\Re\langle x - P_H(x), P_H(x) - P_{H_n}(x)\rangle \geq 0$, pour tout n (Théorème IV.4.1, page 76), on obtient que $P_{H_n}(x)$ converge vers $P_H(x)$ puisque A est séparé. □

SOUS-SECTION IV.4.2

Projection sur un cône convexe séparé et complet

Rappelons tout d'abord la définition d'un cône dans un espace vectoriel :

PROPOSITION IV.4.4.

*Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie C de E est un **cône de sommet** $x_0 \in E$ si C est stable par les homothéties de centre x_0 et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (i.e. $\lambda > 0$). On dit que C est **pointé** si $x_0 \in C$. De plus :*

Pour que $C \subset E$ soit un cône de sommet 0, il faut et il suffit que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on ait $\lambda C \subset C$, et pour que C soit un cône convexe de sommet 0 il faut et il suffit que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on ait $\lambda C \subset C$ et que $C + C \subset C$. En particulier, un cône C de sommet 0 est convexe si et seulement si $C + C \subset C$.

La vérification de cette proposition est immédiate.

PROPOSITION IV.4.5 (*Théorème des Projections sur un cône convexe*).

Soient E un espace préhilbertien et C un cône convexe pointé de sommet 0 tel que le sous-espace métrique C soit séparé et complet. Alors, pour tout $x \in E$, $P_C(x)$ est caractérisé par les trois propriétés suivantes :

(i) $P_C(x) \in C$;

(ii) $\forall z \in C$, $\Re\langle x - P_C(x), z\rangle \leq 0$;

(iii) $\Re\langle x - P_C(x), P_C(x)\rangle = 0$.

Démonstration. En effet, vérifions tout d'abord que ces relation sont satisfaites. C étant un cône convexe, $\forall z \in C$, $P_C(x) + z \in C$, et la relation (ii) résulte du Théorème des projections (Théorème IV.4.1, page 76). Par ailleurs, comme $0 \in C$, le même Théorème donne $\Re\langle x - P_C(x), P_C(x)\rangle \geq 0$, ce qui, confronté à (ii) donne (iii). Supposons maintenant que $y \in C$ vérifie les relations (ii) et (iii) (avec $P_C(x)$ remplacé par y). Alors $\Re\langle x - y, -y\rangle = 0$ donc $\Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$, $\forall z \in C$, ce qui donne le résultat $y = P_C(x)$ d'après le Théorème des projections sur un convexe. □

SOUS-SECTION IV.4.3

Projection sur un sous-espace vectoriel séparé et complet

THÉORÈME IV.4.2 (*Théorème des Projections sur un sous-espace*).

Soient E un espace préhilbertien et V un sous-espace vectoriel de E tel que le sous-espace métrique V soit séparé et complet. Alors, pour tout $x \in E$, $P_V(x)$ est l'unique point y de V tel que $x - y$ soit orthogonal à V.

Démonstration. L'inégalité (ii) du Théorème des projections sur un cône convexe appliquée à z et $-z$, $z \in V$, donne $\Re\langle x - P_V(x), z\rangle = 0$. Ceci appliqué à iz et $-iz$ donne $\Im\langle x - P_V(x), z\rangle = 0$, ce qui montre que $x - P_V(x)$ est orthogonal à V. Réciproquement, si $y \in V$ est tel que $x - y$ est orthogonal à V, le Théorème des projections sur un cône convexe donne $y = P_V(x)$. □

PROPOSITION IV.4.6.

> *Soient E un espace préhilbertien et V un sous-espace vectoriel de E tel que le sous-espace métrique V soit séparé et complet. Alors, $x \mapsto P_V(x)$ est une application linéaire continue de E dans V telle que $\|P_V(x)\| \leq \|x\|$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition IV.4.1, page 77. □

PROPOSITION IV.4.7 (*Théorème des trois perpendiculaires*).

> *Soient E un espace préhilbertien, V un sous-espace vectoriel séparé et complet de E et W un sous-espace vectoriel fermé de V. Alors, pour tout $x \in E$, $P_W(x) = P_W(P_V(x))$.*

Démonstration. En effet, pour tout $z \in W$, on a $\langle P_W(P_V(x)) - P_V(x), z\rangle = \langle P_W(P_V(x)) - x, z\rangle + \langle x - P_V(x), z\rangle = 0$, ce qui donne $\langle P_W(P_V(x)) - x, z\rangle = 0$, d'où le résultat. □

SOUS-SECTION IV.4.4

Dual d'un espace de Hilbert

PROPOSITION IV.4.8.

> *Soient E un espace préhilbertien et $a \in E$. L'application $x \mapsto \langle x, a\rangle$ est une forme linéaire continue sur E. De plus, si E est séparé, la norme de cette forme linéaire est $\|a\|$.*

Démonstration. Ceci est immédiat : l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Proposition IV.1.2, page 74) montre que la norme de la forme linéaire est majorée par $\|a\|$, et, en prenant $x = \dfrac{a}{\|a\|}$, on obtient l'égalité. □

THÉORÈME IV.4.3 (*Dual d'un espace de Hilbert*).

> *Soit E un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue f sur E, il existe un unique élément x_f de E tel que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = \langle x, x_f\rangle$. De plus l'application $f \mapsto x_f$ est une isométrie semi-linéaire surjective du dual E^* de E (muni de sa norme c.f. Définition III.4.3, page 64) sur E.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence de x_f. Si $f = 0$, c'est évident, supposons donc $f \neq 0$. Soit $V = \ker f$; nous savons que V est un hyperplan fermé de E (Proposition III.4.5, page 61) donc complet, et, d'après le Théorème IV.4.2, page ci-contre, pour $x_0 \in E \setminus V$, $u_0 = x_0 - P_V(x_0)$ est un vecteur non nul orthogonal à V. D'après la Proposition précédente, $g : x \mapsto \langle x, u_0\rangle$ est une forme linéaire continue sur E dont le noyau est V ce qui implique que f et g sont proportionnelles : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$ c'est-à-dire $f(x) = \langle x, \bar{\lambda} u_0\rangle$, pour tout $x \in E$; en particulier, pour $x = u_0$, ceci donne $f(u_0) = \lambda \|u_0\|^2$ d'où $x_f = \dfrac{\overline{f(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0$.

Montrons maintenant la seconde partie de l'énoncé. La Proposition précédente montre que $f \mapsto x_f$ est une isométrie surjective de E' sur E. Il reste dont à voir qu'elle est semi_linéaire ce qui résulte aussitôt de l'unicité de x_f.. □

PROPOSITION IV.4.9.

> *Pour qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace de Hilbert soit totale (Définition III.5.1, page 68), il faut et il suffit que $y \in E$ et $\langle x_i, y\rangle = 0$, $\forall i \in I$ impliquent $y = 0$.*

Démonstration. C'est bien sûr une conséquence immédiate du Théorème précédent et du Théorème de Hahn-Banach (Théorème III.4.6, page 63), mais on peut donner un preuve très simple n'utilisant pas l'axiome du choix. La condition est évidement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Soit F le sous-espace fermé de E engendré par les x_i, $i \in I$. Si $F \neq E$, soit $x_0 \in E \setminus F$; alors $x_0 - P_F(x_0)$ est orthogonal à F (Théorème IV.4.2) et non nul ce qui contredit l'hypothèse. □

Un exemple classique d'utilisation du Théorème sur le dual d'un espace de Hilbert est l'existence de l'adjoint d'un opérateur sur un espace de Hilbert :

PROPOSITION IV.4.10.

> *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ (i.e. une application linéaire continue de H dans lui même, ce que l'on appelle habituellement un **opérateur** sur H). Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathscr{L}(H)$ tel que, pour tous x et y dans H on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. T^* s'appelle l'**adjoint** de T. De plus $\|T^*\| = \|T\|$.*

Démonstration. En effet, $y \in H$ étant fixé, l'application $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ étant une forme linéaire continue sur H, d'après le Théorème IV.4.3, page précédente, il existe un unique élément $T^*(y)$ de H tel que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, pour tout $x \in H$. De l'unicité, on déduit aussitôt que $y \mapsto T^*(y)$ est linéaire. De plus, $\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), y\rangle|$, ce qui implique $\sup_{\|y\|\leq 1} \|T^*(y)\| = \|T\|$, ce qui signifie que T^* est continu et que sa norme est égale à celle de T. □

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

PROPOSITION IV.4.11.

Soient H un espace de Hilbert et T et U deux opérteurs sur H. Alors :
1. $(T^*)^* = T$.
2. Pour tous scalaires α et β, on a $(\alpha T + \beta U)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} U^*$.
3. $(U \circ T)^* = T^* \circ U^*$.

SOUS-SECTION IV.4.5

Sous-espaces orthogonaux supplémentaires

DÉFINITION IV.4.1.

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F dans E le sous-espace vectoriel fermé $F^\perp = \{x \in E$ tels que $\forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}$.

Il est clair que $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel fermé de E.

PROPOSITION IV.4.12.

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.
1. $F^\perp = \bar{F}^\perp$ et, si E est un espace de Hilbert (ou, plus généralement, si E est séparé et $\bar{F}$ complet), on a $\bar{F} = (F^\perp)^\perp$.
2. Supposons F est séparé et complet. Alors $F^\perp = \ker P_F$ et E est somme directe topologique de F et de $F^\perp$. De plus, si E est séparé, $(\ker P_F)^\perp = F$, c'est-à-dire, $F = (F^\perp)^\perp$.
3. Si E est un espace de Hilbert, et si F est fermé, tout élément de E s'écrit de manière unique $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$, et on a $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^\perp}(x)\|^2$.

Démonstration. Il est clair que $F^\perp = \bar{F}^\perp$. Démontrons tout d'abord le 2. Si $x \in F^\perp$, pour tout $z \in F$, on a $\langle x, z\rangle = \langle P_F(x), z\rangle = 0$ ce qui montre que $P_F(x) = 0$ puisque F est séparé ; réciproquement, si $P_F(x) = 0$, la même relation montre que $x \in F^\perp$. Pour $x \in E$, on a $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, et comme $x - P_F(x) \in \ker P_F$, on a $E = F + \ker P_F$. De plus cette somme est directe car si $x \in F \cap F^\perp$, on a $x = 0$ car F est séparé. Enfin, comme P_F est continue (Proposition IV.4.6), cette somme directe est topologique. Enfin, il est évident que $F \subset (\ker P_F)^\perp$, et, si $x \in (\ker P_F)^\perp$, on a $0 = \langle x, x - P_F(x)\rangle = \langle P_F(x), x - P_F(x)\rangle$, ce qui montre que $x = P_F(x)$ puisque E est séparé. La seconde assertion du 1. se déduit alors aussitôt du 2. puisque $\bar{F}$ est alors complet. Le 3. est maintenant évident car, ce qui précède montre que $Id - P_F = P_{F^\perp}$. □

Remarque IV.4.1. *Même si E est séparé, si $\bar{F}$ n'est pas complet, la seconde assertion du 1. peut être mise en défaut : il se peut que $\bar{F}$ soit strictement contenu dans $(F^\perp)^\perp$. Par exemple, dans $l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, en notant $e_i = (\delta_{ij})_j$ (symbole de Kronecker), soit E l'espace vectoriel engendré par les e_i tels que $i \geq 2$ et par le vecteur $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i$ et soit F le sous-espace propre de E engendré par les e_i, $i \geq 2$. On voit alors aisément que F est fermé dans E et que $F^\perp = \{0\}$, ce qui montre que $(F^\perp)^\perp = E$.*

SECTION IV.5

Sommes hilbertiennes et bases hilbertiennes

SOUS-SECTION IV.5.1

Somme hilbertienne externe d'espaces de Hilbert

PROPOSITION IV.5.1.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Hilbert. Le sous-espace G de $\prod_{i\in I} E_i$ formé des $x = (x_i)_{i\in I}$ tels que $x_i = 0$ sauf au plus pour un nombre fini d'indices $i \in I$ (i.e. à support fini) muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$ est un espace préhilbertien séparé. On appelle ***somme hilbertienne externe*** *des E_i, $i \in I$, et on note $\bigoplus_{i\in I} E_i$, l'espace de Hilbert complété de G.*

Démonstration. La seule chose à voir, est que G est bien un espace préhilbertien séparé, ce qui est évident. □

THÉORÈME IV.5.1.

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Hilbert et E le sous-espace vectoriel de $\prod_{i\in I} E_i$ formé des points $x = (x_i)_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < +\infty$ (i.e. la famille $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ est sommable). Alors :

1. Pour tous $x = (x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ de E, la famille $(\langle x_i, y_i\rangle)_{i\in I}$ est sommable.

2. Si on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i y_i\rangle$, $x = (x_i)_{i\in I} \in E$, $(y_i)_{i\in I} \in E$, alors $\langle x, y\rangle$ est une forme hermitienne positive non dégénérée sur E qui définit une structure d'espace de Hilbert isomorphe à le somme hilbertienne externe des E_i, $i \in I$. On identifie ainsi toujours la somme hilbertienne externe des E_i à l'espace de Hilbert E.

Démonstration. Le fait que E est un espace vectoriel résulte de l'inégalité

$$\|x_i + y_i\|^2 \leq 2(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2).$$

Par Cauchy-Schwarz, on a d'autre part $|\langle x_i, y_i\rangle| \leq \|x_i\| \, \|y_i\|$, donc $|\langle x_i, y_i\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)$, ce qui donne le 1. Démontrons maintenant le 2. Le fait que $\langle x, y\rangle$ est une forme hermitienne positive est immédiat compte tenu du 1. (Proposition III.3.11, page 57) et la non dégénérescence viens du fait que les E_i sont des espaces de Hilbert. La seule chose à démontrer est la dernière assertion. Il est clair que l'espace G de la Proposition précédents est contenu dans E et que le produit scalaire de E restreint à G est celui de G. Nous devons donc simplement voir que G est dense dans E et que E est complet. La densité de G dans E est évidente par le critère de Cauchy pour les familles sommables, il nous reste seulement à voir que E est complet. Or, si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, il est clair que, pour tout i, $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_i et donc converge vers $x_i \in E_i$ et comme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que, pour $n \geq n_\varepsilon$ et toute partie finie K de I on a

$$\sum_{i\in K} \left\|x_i^{n+p} - x_i^n\right\|^2 \leq \varepsilon,$$

on en déduit, en faisant tendre p vers l'infini, $\sum_{i\in K} \|x_i - x_i^n\|^2 \leq \varepsilon$, pour toute partie finie Kde I, soit $\sum_{i\in I} \|x_i - x_i^n\|^2 \leq \varepsilon$, pour $n \geq n_\varepsilon$, ce qui montre que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$ et termine la preuve. □

PROPOSITION IV.5.2.

Soit E la somme hilbertienne externe d'une famille d'espaces de Hilbert $(E_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$, soit f_i l'application de E_i dans E définie par $f_i(x) = (y_i)_{i\in I}$, , avec, $y_j = 0$, si $j \neq i$, et $y_i = x$. Alors $f_i$est un isomorphisme (d'espaces de Hilbert) de E_i sur un sous-espace fermé de E, et on identifie toujours E_i à ce *sous-espace au moyen de f_i. De plus, cette identification étant faite, les E_i sont des sous-espace deux à deux orthogonaux de E et le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I} E_i$ est dense dans E.*

Démonstration. Le fait que f_i est un isomorphisme est évident, l'orthogonalité deux à deux des E_i aussi, et la dernière assertion résulte de la démonstration du Théorème précédent. □

SOUS-SECTION IV.5.2

Somme hilbertienne de sous-espaces orthogonaux

DÉFINITION IV.5.1.

Soient E un espace de Hilbert et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E. On dit que E est ***somme hilbertienne*** *des E_i si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) Chaque E_i est fermé et les E_i sont deux à deux orthogonaux ;
(ii) Le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I} E_i$ est dense dans E.

PROPOSITION IV.5.3.

Soit E un espace de Hilbert somme hilbertienne des éléments d'une famille de sous-espaces E_i, $i\in I$, de E. Alors il existe un unique isomorphisme (d'espaces de Hilbert) f de E sur la somme hilbertienne externe $\tilde{E}$ des E_i tel que (chaque E_i étant identifié à un sous-espace de $\tilde{E}$ comme dans la Proposition précédente), pour chaque $i\in I$, $f_{|E_i} = Id_{E_i}$. Ainsi E s'identifie canoniquement à l'espace des familles $(x_i)_{i\in I}$, $x_i\in E_i$, telles que la famille $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ soit sommable dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i,y_i\rangle$, et donc de la norme $\|(x_i)_{i\in I}\| = \left(\sum_{i\in I}\|x_i\|^2\right)^{1/2}$. Autrement dit, E est l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable dans E telle que d'une part $x_i\in E_i$, $\forall i\in I$, et, d'autre part, que la famille $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ soit sommable dans $\mathbb{R}$ (ce qui implique la sommabilité de la famille $(x_i)_{i\in I}$ dans E) ; le produit scalaire est $\left\langle \sum_{i\in I} x_i, \sum_{i\in I} y_i\right\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i,y_i\rangle$ et la norme $\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\| = \left(\sum_{i\in I}\|x_i\|^2\right)^{1/2}$.

Démonstration. En effet, si G désigne l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I} E_i$, et si x et y sont deux éléments de G, on a $x = \sum_{i\in K} x_i$ et $y = \sum_{i\in K} y_i$, K partie finie de I, ces écritures étant uniques, et $\langle x,y\rangle = \sum_{i\in K}\langle x_i,y_i\rangle$, ce qui montre que l'application $\sum_{i\in K_1} x_i \mapsto (y_i)_{i\in I}$, avec $y_j = x_j$, si $j\in K$, et $y_i = 0$ sinon, est un isomorphisme de G sur un sous-espace dense de $\tilde{E}$ qui se prolonge donc à E tout entier. Pour conclure, l'unicité de f étant évidente, il suffit de remarquer que, si Φ est cet isomorphisme, $\Phi(E)$ est nécessairement complet donc égal à $\tilde{E}$ puisque ce dernier est le complété de $\Phi(G)$. □

On remarquera que la sommabilité de $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ implique la sommabilité de $(x_i)_{i\in I}$ dans E puisque, par le Théorème de Pythagore, si K est une partie finie de I, on a $\left\|\sum_{i\in K} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in K}\|x_i\|^2$, les espaces E_i étant deux à deux orthogonaux. Par ailleurs, si P_{E_i} désigne le projecteur orthogonal de E sur E_i, alors, clairement, pour toute somme finie de la forme $x = \sum_{j\in K} x_j$, $i\in K$, on a $P_{E_i}(x) = x_i$, et, par continuité, on a $P_{E_i}\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = x_i$ pour tout élément de E. Ainsi :

COROLLAIRE.

Soit E un espace de Hilbert somme hilbertienne d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces. Pour tout $i\in I$ soit P_i la projection orthogonale de E sur le sous-espace E_i. Pour tout x de E la famille $(P_i(x))_{i\in I}$ est sommable dans E de somme x et la famille $(\|P_i(x)\|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme $\|x\|^2$. De plus, pour tous x et y dans E on a $\langle x,y\rangle = \sum_{i\in I}\langle P_i(x),P_i(y)\rangle$.

Dans le cas des espaces préhilbertiens, on a un résultat un peu plus faible :

PROPOSITION IV.5.4.

Soient E un espace préhilbertien séparé et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets deux à deux orthogonaux. Pour tout $i \in I$ soit P_i le projecteur orthogonal de E sur E_i, et, pour tout $i \in I$ et tout $x \in E$, notons $x_i = P_i(x)$. Soit enfin V le sous-espace vectoriel fermé engendré par la réunion des E_i.

1. Pour tout $x \in E$ on a $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 \leq \|x\|^2$;

2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $x \in V$;

(b) $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 = \|x\|^2$;

(c) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E et on a $x = \sum_{i\in I} x_i$.

3. Si V est complet, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E et on a $\sum_{i\in I} x_i = P_V(x)$ et $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 = \|P_V(x)\|^2$, où P_V désigne le projecteur orthogonal sur V.

Démonstration. Soit $\hat{E}$ l'espace hilbertien complété de E. Les E_i étant complets, ce sont des sous-espaces fermés de $\hat{E}$. Soit $\bar{V}$ l'adhérence de V dans $\hat{E}$ et W l'orthogonal de $\bar{V}$ dans $\hat{E}$ de sorte que $\hat{E}$ est somme hilbertienne de $\bar{V}$ et de W donc des E_i et de W. Le Corollaire précédent montre alors que, dans $\hat{E}$, on a $\|x\|^2 = \|P_W(x)\|^2 + \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$ et $x = P_W(x) + \sum_{i\in I} x_i$, ce qui montre le 1. Les conditions (b) et (c) du 2. sont équivalentes à $P_W(x) = 0$ ce qui équivaut à $x \in \bar{V} \cap E = V$ puisque V est fermé dans E. Enfin, si V est complet, on a $x_i = P_i(P_V(x))$ pour tout i et il suffit d'appliquer 2. à $P_V(x)$. □

SOUS-SECTION IV.5.3

Familles orthonormales et bases hilbertiennes

DÉFINITION IV.5.2.

*On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace préhilbertien est **orthogonale** si, pour $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est **orthonormale** si elle est orthogonale et si de plus,pour tout $i \in I$, $\|e_i\| = 1$.*

PROPOSITION IV.5.5.

Soient E un espace préhilbertien séparé, $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans E et V le sous-espace vectoriel fermé engendré par les e_i.

1. *Pour tout $x \in E$, on a $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (**Inégalité de Bessel**). En particulier, l'ensemble des $i \in I$ tels que $\langle x, e_i\rangle \neq 0$, est dénombrable.*
2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) $x \in V$;
   (b) $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$;
   (c) La famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans E et $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.
3. *Pour tous x et y dans V on a $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$.*
4. *Si de plus V est complet, on a :*
   (a) Pour tout x dans E, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans E et on a

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i = P_V(x) \text{ et } \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|P_V(x)\| .$$

(b) Réciproquement, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < +\infty$, il existe un et un seul point x dans V tel que $\langle x, e_i\rangle = \lambda_i$ pour tout $i \in I$.

(c) Si x et y sont deux points quelconques de E on a $\langle P_V(x), P_V(y)\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$.

Démonstration. Remarquons que si on pose $D_i = \mathbb{K}e_i$, $i \in I$, les sous-espaces D_i sont séparés, complets et deux à deux orthogonaux et, pour $x \in E$, on a $P_{D_i}(x) = \langle x, e_i\rangle e_i$, et on est dans les conditions de la Proposition IV.5.4, page précédente, ce qui donne aussitôt 1., 2. et 4. (a). En se plaçant dans l'espace de Hilbert $\hat{E}$ complété de E, et en considérant l'adhérence de V dans $\hat{E}$, on voit aussi que 3 et 4. (b) résultent la Proposition IV.5.3, page 82 et de son Corollaire. Enfin 4. (c) résulte de 3. □

PROPOSITION IV.5.6.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien séparé E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale (Définition III.5.1, page 68).

(b) Pour tout x dans E, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans E et $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.

*(c) Pour tout x dans E, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (**Identité de Parseval**).*

*(d) Pour tous x et y dans E, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$ (**Identité de Parseval**).*

De plus, lorsque E est un espace de Hilbert, ces propriétés sont aussi équivalentes à la suivante :

(e) Les conditions $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$, impliquent $x = 0$.

*Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une **base hilbertienne** de l'espace préhilbertien E. De plus, l'application $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ est un isomorphisme de E dans $l^2_I(\mathbb{K})$.*

Démonstration. L'équivalence entre (a), (b) et (c) résulte aussitôt de la Proposition précédente. Il en est de même de (a) $\Rightarrow$ (d) si on se place dans l'espace de Hilbert complété de E, et (d) implique clairement (c). Enfin, l'équivalence entre (a) et (e) lorsque E est complet résulte de la Proposition IV.4.9, page 79. □

SOUS-SECTION IV.5.4

Orthonormalisation, existence des bases hilbertiennes

THÉORÈME IV.5.2 (*Théorème de la base incomplète*).

Soit E un espace de Hilbert. Toute famille orthonormale d'éléments de E est contenue dans une base hilbertienne de E. En particulier, tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne. De plus, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E alors E isomorphe à $l^2_I(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments unitaires de E deux à deux orthogonaux. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des parties de E dont les éléments sont deux à deux orthogonaux et unitaires. Ordonnons $\mathscr{D}$ par inclusion. Il est clair que $\mathscr{D}$ est inductif (i.e. toute partie totalement ordonnée de $\mathscr{D}$ admet un majorant). Si $L = \{x_i,\ i \in I\}$, alors L appartient à $\mathscr{D}$ et le lemme de Zorn implique qu'il existe un élément maximal B de $\mathscr{D}$ contenant L. Pour voir que les éléments de B forment une base hilbertienne de E il suffit de voir que B est totale. Or si tel n'est pas le cas, d'après la Proposition IV.4.9, page 79, il existe $y \neq 0$ dans E orthogonal à B. Comme on peut supposer y de norme 1, $B \cup \{y\}$ appartient à $\mathscr{D}$ ce qui contredit la maximalité de B. La dernière assertion du Théorème se voit en considérant l'application $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$, en vertu du 4. de la Proposition IV.5.5, page précédente. □

PROPOSITION IV.5.7 (*Procédé d'orthonormalisation de Schmidt*).

SoientE un espace préhilbertien séparé et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'éléments de E. Il existe une et une seule famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possédant les propriétés suivantes :

1. Pour tout entier $p > 0$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est identique au sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, \ldots, a_p\}$.

2. Pour tout indice n, $\langle a_n, e_n\rangle > 0$.

Démonstration. En effet, construisons les e_n par récurrence sur n. Supposons e_i construits pour $1 \leq i \leq n$. Le sous-espace V_n engendré par les a_i $1 \leq i \leq n$, étant complet (car de dimension finie (Proposition III.5.3, page 67)) posons $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{V_n}(a_{n+1})$.

Comme $\mathbb{K}b_{n+1}$ est le supplémentaire orthogonal de V_n dans V_{n+1}, si e_{n+1} satisfait 1., on doit avoir $e_{n+1} = \lambda b_{n+1}$. Alors, il faut $|\lambda| \|b_{n+1}\| = 1$ et $\bar{\lambda} \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle > 0$, ce qui détermine entièrement λ. D'où l'existence et l'unicité. □

COROLLAIRE.

Dans tout espace préhilbertien séparé séparable il existe une base hilbertienne dénombrable. Le cardinal d'une base hilbertienne s'appelle la ***dimension hilbertienne*** *de l'espace de Hilbert.*

Remarque IV.5.1. *On notera qu'il existe des espaces préhilbertiens séparés qui ne possèdent pas de bases hilbertiennes.*

THÉORÈME IV.5.3.

Dans un espace de Hilbert deux bases hilbertiennes sont équipotentes. De plus si $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_i)_{i \in J}$ sont deux bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert H il existe un automorphisme (i.e. conservant le produit scalaire) de H qui transforme l'une en l'autre.

Démonstration. Soient B et C deux bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert E. Si l'une des deux bases est finie, le résultat est trivial puisqu'alors E est de dimension finie. Supposons donc ces deux bases infinies.Pour tout $x \in B$, soit $A_x = \{y \in C \text{ tels que } \langle x, y \rangle \neq 0\}$. D'après le 1. de la Proposition IV.5.5, page 83, A_x est dénombrable. Comme B est une base hilbertienne, pour tout $y \in C$, il existe $x \in B$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$, ce qui montre que C est réunion des ensembles dénombrables A_x, $x \in B$. Il existe donc une injection de C dans $\mathbb{N} \times B$, et donc, d'après le Corollaire 1 du Théorème B.3.2, page 113, une injection de C dans B. On conclut alors en échangeant les rôles de B et C et en utilisant le Théorème de Cantor-Bernstein (Théorème B.1.1, page 111). La dernière assertion du Théorème se voit très simplement : si φ est le bijection entre les deux bases, par linéarité, on construit une bijection linéaire conservant le produit scalaire entre l'espace vectoriel engendré par la première base et celui engendré par la seconde. Comme cette bijection est uniformément continue (conservation du produit scalaire), elle se prolonge à H (Proposition II.7.12, page 28) et on conclut en échangeant les rôles de deux bases. □

En se plaçant dans le complété d'un espace préhilbertien séparé, les résultats précédents conduisent immédiatement à la remarque suivante :

Remarque IV.5.2. *Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne d'un espace préhilbertien séparé E alors E $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie de E sur un sous-espace dense de $l^2_I(\mathbb{K})$.*

SOUS-SECTION IV.5.5

Exemples de bases hilbertiennes

1. L'exemple de base est bien sûr l'espace $l^2_I(\mathbb{K})$, comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents : la famille $(e_i)_{i \in I}$ définie par $e_i = (\alpha^i_j)_{j \in I}$ avec $\alpha^i_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} symbole de Kronecker) est une base hilbertienne.
2. L'Exemple 3, page 76, montre que la famille $(e^{2i\pi nt})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne. Cet exemple est naturellement à relier à la théorie des séries de Fourier.
3. Reprenons l'espace préhilbertien de l'exemple précédent ($\mathscr{C}_{\mathbb{C}}([0,1])$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$). Si on orthonormalise le système $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est libre) on obtient un système orthonormé $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où les P_n sont les **polynômes de Legendre**
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{n + \frac{1}{2}}\frac{d^n}{dt^n}\left(1 - t^2\right)^n.$$
Les polynômes étant uniformément denses dans $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}([0,1])$, d'après le Théorème de Stone-Weierstrass, la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.
4. Soit $\mathscr{C}_\omega(\mathbb{R})$ l'espace préhilbertien des fonctions continues f sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \omega(t)dt$, avec $\omega(t) = e^{-t^2}$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\omega(t)dt$. Alors, la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formée des **polynômes de Hermite**
$$H_n(t) = 2^{\frac{-n}{2}} \pi^{\frac{-1}{4}} n!(-1)^n t^2 \frac{d^n}{dt^n}[e^{-u^2}](t),\ n \geq 1,\ H_0(t) = \pi^{\frac{-1}{4}},$$
est une base hilbertienne.
5. Soit $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}([a,b])$ l'espace préhilbertien des fonctions continues à valeurs complexes sur le segment $[a,b]$ muni du produit scalaire
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

La famille $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée des fonctions

$$S_n(t) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t-a}{b-a}\right),$$

est une base hilbertienne.

Exercices

Exercice IV.1.
Soit $E = C([0,1],\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère sur $E\times E$ l'application $(f,g)\mapsto \langle f,\ g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Démontrer que cette application est une forme hermitienne non dégénérée positive. L'espace E muni de ce produit scalaire est il un espace de Hilbert ?

Exercice IV.2.
Soient E et F deux espaces préhilbertiens réels, F espace séparé, et f une application de E dans F telle que $f(0) = 0$ et $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$ pour tout couple (x, y) d'éléments de E. Démontrer que f conserve le produit scalaire (c'est-à-dire : $\forall(x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle\rangle$) et que f est linéaire.

Exercice IV.3.
Soit $(E, ||.||)$ un espace normé réel.

1. Démontrer que la norme de E provient d'un produit scalaire si et seulement si : $\forall(x,y)\in E\times E,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (théorème de la médiane).
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel $p\geq 1$, la norme usuelle de l'espace l^p est elle définie par un produit scalaire ?

Exercice IV.4.
1. Dans l'espace $l^2 = l^2(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$, on désigne par $C = \{x = (x_n) \in l^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\geq 0\}$. Démontrer que C est un cône convexe fermé et déterminer la projection sur C.
2. Soit $E = C([0,1],\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $||.||_2$ et F le sous espace des fonctions constantes. Démontrer que F est un sous espace complet de E et déterminer la projection sur F.

Exercice IV.5.
Soit E un espace de Hilbert.

1. Soit F un sous espace fermé de E non réduit à $\{0\}$ et p la projection orthogonale de E sur F. Démontrer que
   (a) $p = p\circ p$;
   (b) $\forall(x,y)\in E\times E,\ \langle p(x), y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$;
   (c) $||p|| = 1$.
2. On suppose que p est une application de E dans E vérifiant les propriétés (a) et (b) précédentes ou bien que p est une application linéaire continue de E dans E vérifiant la propriété a) et $||p||\leq 1$. Démontrer qu'il existe un sous espace fermé F de E tel que p soit la projection orthogonale de E sur F.

Exercice IV.6.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une forme hermitienne non dégénérée positive $\langle\cdot\rangle$; Dans tout l'exercice, A et B désignent des parties de E.

1. Démontrer les assertions suivantes :
   (a) $A\subseteq B\ \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$;
   (b) $(A\cup B)^\perp = A^\perp\cap B^\perp$;
   (c) $A\subseteq A^{\perp\perp}$;
   (d) $A\cap A^\perp = \{0\}$.
2. Si E est un espace de Hilbert, alors $A^{\perp\perp}$ est égal à l'adhérence du sous espace vectoriel engendré par A.

Exercice IV.7.
Soit E un espace de Hilbert ; F un sous espace fermé de E et x_0 un point de E .

1. Démontrer que $\min\{\|x - x_0\|\ ,\ x \in F\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle|,\ y \in F^{\perp}$ et $\|y\| = 1\}$.
2. Calculer $\displaystyle\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^2 - a - bx|^2 dx$.

Exercice IV.8.
L'espace $\mathscr{C}([0, 2\pi],\ \mathbb{C})$ est muni du produit scalaire usuel et P est l'application linéaire continue de $\mathscr{C}([0, 2\pi],\ \mathbb{C})$ dans lui-même définie de la façon suivante : Si $x \in \mathscr{C}([0, 2\pi],\ \mathbb{C})$ et $y = P(x)$, alors $y(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 + e^{i(t-s)} + e^{2i(t-s)})x(s)ds$. Démontrer que P est le projecteur orthogonal sur un sous espace vectoriel à déterminer.

Exercice IV.9.
Soient $E = c_0$ muni de la norme $\|.\|_{\infty}$; u la forme linéaire définie sur E par $u(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{2^n}$ et F son noyau. Montrer que F est fermé et que si $a \notin F$, il n'existe pas d'éléments $b \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - b\|_{\infty}$. Quelle remarque peut on faire ?

Exercice IV.10.
Donner une démonstration simple du théorème de Hahn-Banach dans un espace de Hilbert.

Exercice IV.11.

1. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes et T l'application linéaire de $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $T(x) = (\alpha_n x_n)_n\ ;\ x \in l^2$. Déterminer l'adjoint de T.
2. Soit S l'application linéaire de $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $S(x) = (y_n)_n,\ y_0 = 0,\ y_n = x_{n-1}$ si $n > 0$; $x \in l^2$. Déterminer l'adjoint de S.
3. On désigne par E l'espace de Hilbert complété de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel et par K une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. On définit une application linéaire T de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{C})$ dans lui-même de la façon suivante : si $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{C})$, on pose $T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$. Démontrer que T est une application linéaire continue et en déduire que T admet un prolongement linéaire continu à E, noté S. Déterminer $S^*(g)$ lorsque g est un élément quelconque de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{C})$.

Exercice IV.12.
Soit u une application linéaire continue de l^2 dans lui-même.

1. On désigne par e_n l'élément de l^2 dont toutes les composantes sont nulles sauf celle de rang n qui vaut 1.
   (a) La famille $\{e_n\}$ est elle une base hibertienne ? Pour tout n, on peut écrire $u(e_n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$ où les α_{mn} sont des nombres complexes et la série converge dans l^2.
   (b) Démontrer que pour tout n la série $\displaystyle\sum_m |\alpha_{mn}|^2$ converge et que sa somme $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ est $\leq \|u\|^2$.
   (c) Soit, pour tout entier m, l'application $\varphi_m : l^2 \to \mathbb{C}$, $\varphi_m(x) = \langle u(x), e_m\rangle$. Démontrer qu'il existe $y \in l^2$ tel que pour tout $x \in l^2$, on ait $\varphi_m(x) = \langle x, y\rangle$. Déterminer la norme de φ_m à l'aide de y. En déduire que pour tout m la série $\displaystyle\sum_n |\alpha_{mn}|^2$ converge et que sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ est $\leq \|u\|^2$.
2. On suppose maintenant que $\{e_n\}$ est une base hilbertienne quelconque. Les résultats précédents sont ils encore vrais ?

Exercice IV.13.
Soit E un espace de Hilbert et T une application linéaire continue de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un sous espace fermé F de E invariant par T (i.e. $T(F) \subseteq F$), non trivial.
2. Il existe deux vecteurs $x,\ y$ de E non nuls tels que y soit orthogonal à l'ensemble $\{T^n(x)\ ; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice IV.14.
Soit E un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $a_n = e_{2n}$ et $b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1}e_{2n+1}$. On désigne par A (resp.B) le sous espace vectoriel fermé de E engendré par les a_n (resp. b_n). Montrer que :

1. $A \cap B = \{0\}$.
2. La série $\sum(b_n - a_n)$ converge dans E et sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n)$ n'appartient pas à $A + B$.
3. $\overline{A + B} = E$.

Exercice IV.15.
Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite libre, totale, d'éléments de H. On suppose que :

(i) $\forall x \in H, \displaystyle\sum_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq C\|x\|^2$

(ii) $\forall (\xi_n) \in l^2, \ \exists x \in H$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \langle x, e_n\rangle = \xi_n$.

1. Démontrer qu'il existe une base hilbertienne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de H telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les vecteurs $e_i, \ 1 \leq i \leq n$ et les $a_i, \ 1 \leq i \leq n$ engendrent le même sous espace vectoriel.
2. Démontrer que l'application T défini par $T(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle \, a_n$ est linéaire continu de H dans H et que son opérateur adjoint Q vérifie $Q(a_n) = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Démontrer que T est un isomorphisme de H sur lui-même. En déduire que Q est aussi un isomorphisme de H sur lui-même.

Exemples de Sujets et de Corrigés d'Examens

Examen partiel de l'année universitaire 2000-2001

Sujet

Exercice I

Question de cours préliminaire. Soient A et B deux parties compactes non vides disjointes d'un espace métrique. Démontrer que $d(A, B) > 0$.

Soit E un espace métrique de distance notée d. On appelle ε-chaîne dans E d'origine $x \in E$ et d'extrémité $y \in E$ un ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de points de E tels que $x_1 = x$, $x_n = y$ et, pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$.

1. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $A_\varepsilon = \{y \in E$ pour lesquels il existe une ε-chaîne d'origine x et d'extrémité $y\}$.

   (a) Montrer que A_ε est ouvert ;

   (b) Montrer que A_ε est fermé

2. Déduire de la question précédente que si E est connexe, pour tous $x \in E$, $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-chaîne d'origine x et d'extrémité y.
3. On suppose E compact. Démontrer que si pour tous $x \in E$, $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-chaîne d'origine x et d'extrémité y, alors E est connexe (indication : raisonner par l'absurde pour écrire $E = F_1 \cup F_2$ avec F_i, $i = 1, 2$, fermés non vides disjoints, et utiliser $d(F_1, F_2)$).

Exercice II

Question de cours préliminaire. Soient A une partie d'un espace topologique E. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\left\{\begin{array}{c}A\\ \text{est}\\ \text{d'intérieur vide}\end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{c}E \setminus A \text{ est}\\ \text{dense}\\ \text{dans } E\end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{c}E \setminus A \text{ rencontre}\\ \text{tout ouvert}\\ \text{non vide de } E\end{array}\right.$$

1. Énoncer le théorème de Baire.

2. Dans cette question on se propose de démontrer que les conclusions du théorème de Baire restent vraies lorsque l'on se place dans un espace topologique localement compact (i.e. sans utiliser de distance, et si on remplace la notion de complétude par celle de compacité locale). Soit E un espace topologique localement compact (i.e. tel que tout point de E admet une base de voisinages compacts) et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E d'intérieurs vides. Soit O un ouvert non vide de E ; on se propose de montrer que $\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i\right) \cap O \neq \emptyset$.

   (a) Montrer qu'il existe un compact K_0 d'intérieur non vide contenu dans $(E \setminus F_0) \cap O$.

   (b) En remplaçant F_0 par F_1, et O par $\overset{\circ}{K}_0$, montrer qu'il existe un compact K_1 d'intérieur non vide contenu dans $(E \setminus (F_0 \cup F_1)) \cap \overset{\circ}{K}_0$.

   (c) En raisonnant par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un compact K_n d'intérieur non vide contenu dans $\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{n} F_i\right) \cap \overset{\circ}{K}_{n-1}$.

   (d) Montrer que $\bigcap_{i=0}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ et conclure.

Problème

Soit E un espace métrique de distance notée d. Pour toute partie A de E, on pose $\bar{V}_r(A) = \{x \in E \text{ t.q. } d(x, A) \leq r\}$.

1. Montrer que $\bar{V}_r(A)$ est un voisinage fermé de A.

On suppose, maintenant que le diamètre de E est fini de sorte que $\forall A, B \subset E$, $B \neq \emptyset$, il existe $r > 0$ tel que $A \subset \bar{V}_r(B)$.
Soit $\mathscr{P}^*(E)$ l'ensemble des parties non vides de E. Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{P}^*(E)$, on pose

$$\rho(A, B) = \inf\{r > 0 \text{ t.q. } A \subset \bar{V}_r(B)\}.$$

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}^*(E)$.

   (a) Montrer que $\rho(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B)$;

   (b) Montrer que $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, B) = \rho(A, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

   (c) Montrer que $\rho(A, B) = 0$ équivaut à $A \subset \bar{B}$.

   (d) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}^*(E)$. Montrer que

$$\rho\left(A, \bigcup_{i\in I} B_i\right) \leq \sup_{i\in I} \rho(A, B_i) \text{ et } \rho\left(\bigcup_{i\in I} B_i, A\right) = \sup_{i\in I} \rho(B_i, A).$$

   (e) Montrer que, pour tout $C \in \mathscr{P}^*(E)$, $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

3. Soit $\mathscr{F}^*(E)$ l'ensemble des parties fermées non vides de E. Pour tous $A, B \in \mathscr{F}^*(E)$, on pose

$$d_H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

   Déduire des questions précédentes que d_H est une distance sur $\mathscr{F}^*(E)$ telle que, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathscr{F}^*(E)$, on a $d_H\left(A, \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} d_H(A, B_n)$.

On note $\mathscr{F}_H^*(E)$ l'espace métrique obtenu en munissant $\mathscr{F}^*(E)$ de la distance d_H.

4. On suppose dans cette question que E est complet. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{F}_H^*(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $Y_n = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_{n+p}}$ l'adhérence, dans E, de la réunion des X_{n+p}, $p \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E et que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{F}_H^*(E)$.

   (b) Soit $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Montrer que $Y \in \mathscr{F}^*(E)$ (i.e. que Y est fermé et non vide) et que $\lim_{n\to\infty} d_H(X_n, Y) = 0$. Conclure que $\mathscr{F}_H^*(E)$ est complet.

Corrigé

Exercice I

Question de cours préliminaire. La fonction $x \mapsto d(x, B)$ étant continue sur le compact A, d'après un théorème du cours, elle y atteint son infimum : il existe $x \in A$ tel que $d(x, B) = d(A, B)$ ce qui montre bien (puisque $A \cap B = \emptyset$ et B fermé impliquent $d(x, B) > 0$) que $d(A, B) > 0$.

1. (a) Soit $y \in A_\varepsilon$. Si $z \in \bar{B}(y, \varepsilon)$, alors, par définition, il existe une ε-chaîne d'origine x et d'extrémité z ce qui signifie que $z \in A_\varepsilon$ donc que A_ε est ouvert.
   (b) Soit $z \in \bar{A}_\varepsilon$. Alors $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$, ce qui montre que $z \in A_\varepsilon$.
2. Si E est connexe, A_ε étant à la fois ouvert fermé dans E et non vide ($x \in A_\varepsilon$), on a $A_\varepsilon = E$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$.
3. Si E n'est pas connexe, par définition on peut écrire $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 deux ouverts non vides disjoints. Comme O_i est le complémentaire de O_j, $i \neq j$, les O_i sont aussi fermés et donc compacts. La question de cours préliminaire donne alors $\alpha = d(O_1, O_2) > 0$ et, par suite, il ne peut pas exister d'ε-chaîne joignant un point de O_1 à un point de O_2 avec $\varepsilon < \alpha$.

Exercice II

Question de cours préliminaire. Par définition, $E \setminus A$ est dense signifie que cet ensemble rencontre tout voisinage d'un point quelconque de E, donc tout ouvert non vide de E, ce qui montre que (ii) et (iii) sont équivalents. Enfin (iii) signifie que A ne peut contenir aucun ouvert non vide, ce qui est (i).

1. Voir le cours.
2. (a) Puisque $E \setminus F_0$ est dense, cet ouvert rencontre O et $(E \setminus F_0) \cap O$ est donc un ouvert non vide. Si x est un point de cet ouvert, il existe un voisinage V de ce point contenu dans $(E \setminus F_0) \cap O$. Comme E est localement compact, on peut choisir V compact : on prend $K_0 = V$.
   (b) Si on remplace F_0 par F_1 et O par $\overset{\circ}{K}_0$, on peut refaire le même raisonnement, et il existe donc un compact K_1 d'intérieur non vide contenu dans $(E \setminus F_1) \cap \overset{\circ}{K}_0$ qui est lui-même contenu dans $(E \setminus (F_1 \cup F_0)) \cap \overset{\circ}{K}_0$ par construction de K_0.
   (c) Si on suppose les K_i construits pour $1 \leq i \leq n-1$, en refaisant le raisonnement ci-dessus avec F_n et $\overset{\circ}{K}_{n-1}$, on trouve K_n un compact d'intérieur non vide contenu dans $\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \cap \overset{\circ}{K}_{n-1}$.
   (d) $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissant de compacts non vides, un théorème du cours dit que leur intersection est non vide. Comme celle-ci est contenue dans $\left(E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \cap O$ (par construction), on obtient que $E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ rencontre O, et comme O est un ouvert quelconque de E, cela signifie que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est d'intérieur vide (*Question de cours préliminaire*).

Problème

1. $\bar{V}_r(A)$ est fermé (image réciproque de $]-\infty, r]$ par la fonction continue $x \mapsto d(x, A)$) et $\{x \in E \text{ tels que } d(x, A) < r\}$ est un ouvert contenant A.
2. (a) Si $r > \rho(A, B)$, on a $A \subset \bar{V}_r(B)$, donc $d(x, B) \leq r$ pour tout $x \in A$, ce qui montre que $\sup_{x\in A} d(x, B) \leq r$. Ceci étant vrai pour tout $r > \rho(A, B)$, on a $\sup_{x\in A} d(x, B) \leq \rho(A, B)$. Inversement, si $\alpha = \sup_{x\in A} d(x, B)$, on a $A \subset \bar{V}_\alpha(B)$ donc $\rho(A, B) \leq \sup_{x\in A} d(x, B)$.
   (b) Par continuité de $x \mapsto d(x, B)$ et définition de l'adhérence, on a $\sup_{x\in A} d(x, B) = \sup_{x\in\bar{A}} d(x, B)$, et, $\forall x \in A$, $d(x, B) = d(x, \bar{B})$, ce qui montre les deux premières égalités, et la dernière s'en déduit.
   (c) $\rho(A, B) = 0$ équivaut à $d(x, B) = 0$ pour tout $x \in A$, ce qui signifie $x \in \bar{B}$, pour tout $x \in A$.
   (d) Pour $x \in A$, $d(x, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq d(x, B_j)$, $\forall j \in I$, ce qui donne la première inégalité. Par ailleurs,
   $$\rho\left(\bigcup_{i\in I} B_i, A\right) = \sup_{x\in\bigcup_{i\in I} B_i} d(x, A) = \sup_{i\in I} \sup_{x\in B_i} d(x, A)$$
   donne la seconde.

(e) Pour $x \in A$, on a $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y) \leq \inf_{y \in C} (d(x, z) + d(z, y)) = d(x, z) + d(z, C)$, pour tout $z \in B$. Donc, $d(x, C) \leq \inf_{z \in B} d(x, z) + \sup_{z \in B} d(z, C) = d(x, B) + \rho(B, C)$. On conclut alors en prenant le supremum sur les $x \in A$.

3. $d_H(A, B) = 0$ équivaut à $B = A$ d'après le 1. (c). L'inégalité triangulaire se déduit aussitôt de l'inégalité du 1. (e) et de celle obtenue en échangeant A et C. La dernière propriété demandée résulte de 1. (d).

4. (a) Il est clair que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, et le fait que cette suite est de Cauchy résulte aussitôt du fait que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est et de l'inégalité du 2.

   (b) Puisque $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe une sous-suite $(Y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d_H(Y_{n_{k+1}}, Y_{n_k}) < 2^{-k}$. Voyons alors, par récurrence, que, pour tout k fixé et tout $y \in Y_{n_k}$, existe une suite de Cauchy $(y_p^{(y)})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $y_p^{(y)} \in Y_{n_{k+p}}$ et $y_0^{(y)} = y$: supposons les $y_l^{(y)}$ construits pour $1 \leq l \leq p-1$; comme $d_H(Y_{n_{k+p}}, Y_{n_{k+p-1}}) < 2^{-(p-1)}$, on a $\rho(Y_{n_{k+p-1}}, Y_{n_{k+p}}) < 2^{-(p-1)}$, et comme $y_{p-1}^{(y)} \in Y_{n_{k+p-1}}$, il existe $y_p^{(y)} \in Y_{n_{k+p}}$ tel que $d(y_p^{(y)}, y_{p-1}^{(y)}) < 2^{-(p-1)}$. La suite ainsi construite est bien de Cauchy et comme E est complet, elle converge et sa limite est dans tous les Y_n ce qui montre que Y (qui est bien sûr fermé) est non vide.

   Pour montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Y, puisqu'elle est de Cauchy, il suffit de montrer qu'une sous-suite converge vers Y. Considérons alors la suite $(Y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessus ainsi que les suites $(y_p^{(y)})_{p \in \mathbb{N}}$, $y \in Y_{n_k}$ et $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Par la question 2., on a $d_H(X_{n_k}, Y) \leq \sup\limits_{p \in \mathbb{N}} d_H(X_{n_k}, X_{n_k+p}) + d_H(Y_{n_k}, Y)$, et, comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $k(\varepsilon)$ tel que $k \geq k(\varepsilon)$ implique $d_H(X_{n_k}, Y) \leq \varepsilon + d_H(Y_{n_k}, Y)$. Fixons maintenant $k \geq k(\varepsilon)$. Comme nous l'avons vu, la suite $(y_p^{(y)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément x de Y, et, on a $d(y, x) \leq \sum\limits_{p=0}^{p_{\varepsilon'}} d(y_p^{(y)}, y_{p+1}^{(y)}) + d(y_{p_{\varepsilon'}+1}^{(y)}, x) \leq 2^{-(k-2)} + \varepsilon'$ pour $p_{\varepsilon'}$ assez grand ($\varepsilon' > 0$ quelconque). Ceci montre que $d(y, Y) \leq 2^{-(k-2)}$, $\forall y \in Y_{n_k}$, donc $d_H(Y_{n_k}, Y) \leq 2^{-(k-2)}$ puisque $Y \subset Y_{n_k}$. Finalement, il vient $d_H(X_{n_k}, Y) \leq \varepsilon + 2^{-(k-2)}$ pour $k \geq k_\varepsilon$, ce qui montre le résultat.

Examen de la session de Janvier 2001

Sujet

1. (*Question de cours préliminaire*)
   (a) Énoncer le théorème de Riesz caractérisant les espaces normés de dimension finie.
   (b) Énoncer le théorème de Stone-Weierstrass complexe.

Soient E un espace normé complexe et $B = \bar{B}(0, 1)$. Soit $T : E \to E$ une application linéaire. On dit que T est un **opérateur compact** si $T(B)$ est relativement compact dans E.

I

Dans cette partie, on suppose que T est un opérateur compact. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \ker(T - \lambda \mathrm{id}_E)$. Soit $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $E_\lambda \neq \{0\}\}$.

1. Montrer que T est continu.
2. Montrer que $\sup\limits_{\lambda \in \Sigma} |\lambda| \leq \|T\|$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $T_{|F} = k(\mathrm{id}_F)$, $k \neq 0$. Montrer que F est de dimension finie.
4. Montrer que $\dim E_\lambda < +\infty$, pour $\lambda \in \Sigma$.

II

Dans cette partie $E = \mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soient K une fonction continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ et, pour $f \in E$, $T(f)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt.$$

1. Montrer que $T\ :\ f \mapsto T(f)$ est une application linéaire continue de E dans E et que $\|T\| \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} |K(x,y)|$.
2. Montrer que si $\dim T(E) < +\infty$ alors T est un opérateur compact. En déduire que si K est un polynôme (c'est-à-dire $K(x,y) = \sum_{0\leq i,j\leq n} a_{ij}x^iy^j$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ dépendant de K) T est un opérateur compact.
3. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass en déduire que T est limite, dans l'espace normé $\mathscr{L}(E;E)$, d'une suite d'opérateurs compacts.
4. En déduire que T est un opérateur compact (on montrera que $T(B)$ est précompact).

III

A partir de maintenant on suppose que E est un espace de Hilbert et que T est un opérateur compact symétrique c'est-à-dire que, $\forall x, y \in E$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$. On reprend les notations du **I**.

1. Montrer que $\Sigma \subset \mathbb{R}$ et que, si λ et μ sont deux éléments dictincts de Σ, alors $E_\lambda \perp E_\mu$.
2. Pour $\delta > 0$, on pose $\Sigma_\delta = \{\lambda \in \Sigma \text{ tels que } |\lambda| \geq \delta\}$.
   (a) On suppose qu'il existe une suite infinie $(\mu_n)_{n\geq1}$ d'éléments de Σ_δ deux à deux distincts. Pour tout $n \geq 1$, soit $x_n \in E_{\mu_n} \setminus \{0\}$, $\|x_n\| = 1$. En considérant la suite $\frac{1}{\mu_n}x_n$, $n \geq 1$, montrer qu'il existe une sous-suite de Cauchy de la suite (x_n) et conclure à une contradiction (utiliser 1.).
   (b) En déduire que soit Σ est fini soit les éléments de Σ forment une suite $(\lambda_n)_{n\geq1}$ de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
3. (a) Montrer que :
      i. $(x,y) \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est une forme hermitienne sur $E\times E$.
      ii. $\forall x \in E$, $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.
      iii. $\forall x, y \in E$, $4\Re\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$.
   (b) Soient $x \in E$ et $\lambda > 0$. Déduire de (a) iii que
$$\begin{aligned}4\|T(x)\|^2 &= \left\langle T\left(\lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x)\right), \lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x)\right\rangle \\ &\quad - \left\langle T\left(\lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x)\right), \lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x)\right\rangle.\end{aligned}$$
   (c) Soit $N_T = \sup_{\|z\|\leq1} |\langle T(z), z\rangle|$. Déduire de ce qui précède que
$$4\|T(x)\|^2 \leq N_T\left(\left\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x)\right\|^2 + \left\|\lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x)\right\|^2\right).$$
   (d) Conclure que $2\|T(x)\|^2 \leq N_T\left(\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|T(x)\|^2\right)$, et, en choisissant λ convenablement, que $\|T\| = N_T$.
   (e) Soit $(x_n)_{n\geq1}$ une suite dans E telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle = \mu$ avec $\mu = \pm\|T\|$.
      i. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\|T(x_n) - \mu x_n\| = 0$.
      ii. En déduire que $\sup_{\lambda\in\Sigma}|\lambda| = \max_{\lambda\in\Sigma}|\lambda| = \|T\|$.

Corrigé

1. Voir le cours.

I

1. Puisque T est compact, $T(B)$ est borné ce qui implique que T est continu.
2. Si $\lambda \in \Sigma$, et $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$, on a $|\lambda|\,\|x\| = \|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|$, donc $|\lambda| \leq \|T\|$.
3. Comme $T_{|F} = k(\mathrm{id}_F)$, $T(B\cap F)$, qui est relativement compact, est la boule fermée de centre 0 et de rayon k de F. Le Théorème de Riesz implique donc que F est de dimension finie.
4. Comme $T_{|E_\lambda} = \lambda(\mathrm{id}_{E_\lambda})$ ceci résulte de la question précédente.

II

1. En effet,par un résultat connu sur les intégrales à paramètres, $T(f) \in f$ et $|T(f)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,t)|\,|f(t)|\,dt \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} |K(x,y)|\,\|f\|$.

2. Comme T est continu, $T(B)$ est borné dans $T(E)$ qui est de dimension finie donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$. La caractérisation des compacts de $\mathbb{C}^n$ donne donc que $T(B)$ est relativement compact. Si K est un polynôme, on a

$$T(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_0^1 t^j f(t)dt \right) x^i,$$

ce qui montre que $T(f)$ est un polynôme de degré au plus n donc que $T(E)$ est de dimension finie et, par suite, T est compact.

3. Le Théorème de Stone-Weierstrass appliqué à l'algèbre des polynômes à deux variables sur $[0,1] \times [0,1]$ montre que K est limite uniforme d'une suite K_n de polynômes. Si on note T_n l'opérateur associé à K_n de la même manière que T est associé à K, on a

$$T(f)(x) - T_n(f)(x) = \int_0^1 (K(x,t) - K_n(x,t))f(t)dt,$$

et la première question montre que $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$.

4. Puisque T_n est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, $T_n(B)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$. Si $\|T_n - T\| < \varepsilon$, $T(B)$ est donc recouvert par les boules $B(f_i, 2\varepsilon)$. Ceci montre que $T(B)$ est précompact, et, comme E est complet, $T(B)$ est relativement compact.

III

1. Soient $\lambda \in \Sigma$ et $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Alors $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle$ donne $\lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda} \|x\|^2$, ce qui montre que $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$, $\lambda \neq \mu$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$, ce qui donne $\lambda \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle$ (puisque μ est réelle) qui implique $\langle x, y\rangle = 0$.

2. (a) Comme $T\left(\frac{1}{\mu_n}x_n\right) = x_n$ et $\left\|\frac{1}{\mu_n}x_n\right\| \leq \frac{1}{\delta}$, et comme T est compact, on peut extraire de la suite x_n une sous-suite convergente ce qui est absurde puisque, d'après le 1., $\|x_p - x_q\|^2 = 2$ si $p \neq q$.

   (b) C'est évident puisque le (a) dit que Σ_δ est fini.

3. (a) Le (i) est évident, le (ii) résulte du fait que T est symétrique et le (iii) s'obtient immédiatement par un calcul direct.

   (b) La formule demandée s'obtient en remplaçant x par λx et y par $\frac{1}{\lambda}T(x)$ dans la formule du (a) (iii).

   (c) Il suffit de remarquer que $|\langle T(w), w\rangle| \leq N_T \|w\|^2$ et d'appliquer ceci aux deux membres de droite de l'inégalité du (b).

   (d) L'inégalité demandée résulte aussitôt du (c) et du Théorème de la médiane. En prenant $\lambda = \left(\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\right)^{1/2}$, pour $x \neq 0$, il vient $2\|T(x)\|^2 \leq 2N_T \|T(x)\|\,\|x\|$ c'est-à-dire $\|T(x)\| \leq N_T \|x\|$ ce qui signifie $\|T\| \leq N_T$. Comme l'inégalité inverse est immédiate, on a bien $\|T\| = N_T$.

   (e) i. En effet,

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - \mu x_n\|^2 &= \|T(x_n)\|^2 + \mu^2 \|x_n\|^2 - 2\Re\mu \langle T(x_n), x_n\rangle \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\Re\mu \langle T(x_n), x_n\rangle, \end{aligned}$$

   et comme, pour $n \geq n_\varepsilon$, on a $2\Re\mu \langle T(x_n), x_n\rangle \geq 2\|T\|^2 - \varepsilon$, pour ces même valeurs de n, on a $\|T(x_n) - \mu x_n\|^2 \leq \varepsilon$.

   ii. On suppose ici $T \neq 0$, le cas $T = 0$ n'ayant aucun intérêt. Comme T est compact (et que x_n est une suite bornée), on peut extraire de la suite $T(x_n)$ une sous-suite convergente. La question précédente montre alors que l'on peut extraire de la suite x_n une sous-suite convergente : si x_{n_k} converge vers $x \neq 0$ on a alors $T(x) = \mu x$ donc $\mu \in \Sigma$ ce qui conclut.

Examen de la session de Septembre 2001

Sujet

Exercice I

Soit $I = [0, 1]$. On note E l'espace métrique des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ muni de la distance d_u de la convergence uniforme sur I. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le sous-espace de E constitué des fonctions $f \in E$ telles qu'il existe $t_f \in I$ tel que $\forall s \in I$, $|f(s) - f(t_f)| \leq n\,|s - t_f|$.

1. *(Question de cours préliminaire)* Énoncer le théorème de Baire.
2. Démontrer que X_n est fermé.
3. Soient $f \in E$, $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{p} \leq \dfrac{\varepsilon}{m}$. Pour tout entier i, $0 \leq i \leq p$, soit $a_i = \dfrac{i}{p}$.
   (a) Montrer que l'on peut choisir p de sorte que, pour tout i, $0 \leq i \leq p-1$, si a et b sont deux points de $[a_i, a_{i+1}]$, on ait $|f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$.
   (b) Pour $0 \leq i \leq p-1$, soit b_i le milieu de $[a_i, a_{i+1}]$. Soit $f_{m,\varepsilon}$ la fonction de E définie de la manière suivante : pour $0 \leq i \leq p$, $f_{m,\varepsilon}(a_i) = f(a_i)$, pour $0 \leq i \leq p-1$, $f_{m,\varepsilon}(b_i) = f(a_i) + 2\varepsilon$, et, sur les intervalles $[a_i, b_i]$ et $[b_i, a_{i+1}]$, $f_{m,\varepsilon}$ est affine. Montrer que :
      i. $\forall a \in I$, il existe $b \in I$, $b \neq a$, tel que $|f_{m,\varepsilon}(a) - f_{m,\varepsilon}(b)| \geq m\,|a - b|$.
      ii. $d_u(f, f_{m,\varepsilon}) \leq 3\varepsilon$.
   (c) Conclure que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_n est d'intérieur vide.
4. Soit $F \subset E$ l'ensemble des fonctions qui ne sont dérivables en aucun point de I. Déduire de ce qui précède que F est dense dans E.

Exercice II

1. (*Question de cours préliminaire*) Énoncer le théorème de Stone-Weierstrass complexe.
2. Soient F un espace normé et F_1 un sous-espace de F. En utilisant le fait qu'une forme linéaire continue sur un sous-espace de E se prolonge en une forme linéaire continue sur F (théorème de Hahn-Banach) montrer que F_1 est dense si et seulement si la seule forme linéaire continue sur F nulle sur F_1 est 0 (si $\overline{F_1} \neq F$ et $x_0 \in F \setminus \overline{F_1}$, considérer la forme linéaire $\varphi\ :\ x + \lambda x_0 \mapsto \lambda$ sur $\overline{F_1} \oplus \mathbb{K}x_0$ et remarquer que $\ker \varphi = \overline{F_1}$ est fermé).

Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et Λ une partie de $\mathbb{C}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Soit $E = \mathscr{C}_u(K; \mathbb{C})$ l'espace normé des fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que la fonction f_z définie par
$$f_z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{z^k}{k!},$$
appartient à E. On note $A = \{f_z,\ z \in \Lambda\} \subset E$. Soit V le sous-espace vectoriel de E engendré par A.
4. Soit $L \in E'$ telle que $L(\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in V$.
   (a) On note φ_k l'élément de E qui est la restriction à K de la fonction $t \mapsto t^k$, $k \geq 0$. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$, la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} L(\varphi_k)\frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini (on majorera $|L(\varphi_k)|$ convenablement) et que sa somme est $L(f_z)$.
   (b) En déduire que l'ensemble $\left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} L(\varphi_k)\frac{z^k}{k!} = 0 \right\}$ a un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. On admettra que ceci implique $L(\varphi_k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (propriété classique des séries entières).
   (c) En déduire que $L = 0$.
5. Conclure que V est dense dans E.

Exercice III

Soit H un espace de Hilbert complexe de produit scalaire noté $\langle\, ,\, \rangle$. Soit $\mathscr{L}(H)$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de H dans lui même. On dit que $A \in \mathscr{L}(H)$ est positif, et on écrit $A \geq 0$, si $\forall x \in H$, $\langle A(x), x\rangle \geq 0$. Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{L}(H)$, on écrit $A \geq B$ (ou $B \leq A$) si $A - B \geq 0$.

1. Soit $A \in \mathscr{L}(H)$, $A \geq 0$.
   (a) Montrer que $\forall x, y \in H$, $\langle A(x), y\rangle = \overline{\langle A(y), x\rangle}$ (on pourra développer $\langle A(x+y), x+y\rangle$ et $\langle A(x+iy), x+iy\rangle$), et en déduire que $(x,y) \mapsto \langle A(x), y\rangle$ est une forme hermitienne positive.
   (b) En déduire que, $\forall x, y \in H$, $|\langle A(x), y\rangle| \leq \langle A(x), x\rangle^{1/2} \langle A(y), y\rangle^{1/2}$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{L}(H)$ tels que $A \leq B$ et $B \leq A$.
   (a) Montrer que, $\forall x \in H$, $\langle (B-A)(x), x\rangle = 0$.
   (b) Conclure que $A = B$.
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{L}(H)$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq A_n \leq A_{n+1} \leq \mathrm{id}_E$.
   (a) Montrer que, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leq 1$.
   (b) Soient m et n deux entiers tels que $m \geq n$. On pose $B = A_m - A_n$.
      i. Montrer que $0 \leq B \leq \mathrm{id}_E$ et déduire de la question 1. (b) que, $\forall x \in H$, $\|B(x)\| \leq \langle B(x), x\rangle^{1/2}$ (on pourra majorer $\langle B(x), B(x)\rangle$).
      ii. En déduire que, $\forall x \in H$, $\|A_m(x) - A_n(x)\|^2 \leq \langle A_m(x), x\rangle - \langle A_n(x), x\rangle$.
      iii. Conclure que, $\forall x \in H$, la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H.
   (c) Pour tout $x \in H$, soit $A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$. Montrer que $A \in \mathscr{L}(H)$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \leq A \leq \mathrm{id}_E$.

Corrigé

Exercice I

1. Voir le cours.
2. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X_n qui converge uniformément vers une fonction f de E. Pour tout p soit t_p tel que, $\forall s \in I$, $|f(s) - f(t_p)| \leq n\,|s - t_p|$. Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $(t_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $t_f \in I$ (compacité de I). Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de sorte que, pour $k \geq k_\varepsilon$ on ait $\|f - f_{p_k}\| < \varepsilon$ et $|t_{p_k} - t_f| \leq \varepsilon$. Alors, pour $k \geq k_\varepsilon$ et $s \in I$, on a
$$\begin{aligned} |f(s) - f(t_f)| &\leq |f(s) - f_{p_k}(s)| + |f_{p_k}(s) - f_{p_k}(t_{p_k})| \\ &\quad + |f_{p_k}(t_{p_k}) - f_{p_k}(t_f)| + |f_{p_k}(t_f) - f(t_f)| \\ &\leq 2\varepsilon + n\,|s - t_{p_k}| + n\,|t_f - t_{p_k}| \\ &\leq 2(n+1)\varepsilon + n\,|s - t_f|\,. \end{aligned}$$
   Comme ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $f \in X_n$.
3. (a) Ceci résulte immédiatement de la continuité uniforme de f qui résulte du fait que I est compact.
   (b) i. Si $a \in [a_i, a_{i+1}]$, il suffit de prendre b dans le même intervalle $[a_i, b_i]$ ou $[b_i, a_{i+1}]$ que a.
      ii. Immédiat par construction.
   (c) Il suffit de prendre $m > n$ dans ce qui précède.
4. Soit B une boule fermée de rayon strictement positif dans E. B est un espace métrique complet. D'après ce qui précède, pour tout n, $X_n \cap B$ est fermé et d'intérieur vide. D'après le théorème de Baire il existe donc $f \in B$ qui n'appartient à aucun des X_n. Cette fonction f ne peut être dérivable en aucun point de I. Autrement dit $f \in F$. Ceci montre que F est dense dans E.

Exercice II

1. Voir le cours.
2. Supposons $\overline{F_1} \neq E$. Comme $\ker\varphi$ est fermé, φ est continue sur $\overline{F_1} \oplus \mathbb{K}x_0$. D'après le théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge donc en une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ continue sur E. Clairement $\tilde{\varphi}$ est nulle sur F_1 sans être identiquement nulle. La réciproque est évidente.

3. Ceci est immédiat par convergence normale de la série (si $|t| \leq M$ sur K, on a $\left|\frac{t^k z^k}{k!}\right| \leq \frac{(M|z|)^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série convergente).
4. (a) En effet, si $|t| \leq M$ sur K, on a $|L(\varphi_k)| \leq \|L\|\, M^k$, donc $\left|L(\varphi_k)\frac{z^k}{k!}\right| \leq \|L\| \frac{(M|z|)^k}{k!}$, ce qui donne aussitôt la conclusion puisque $f_z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{z^k}{k!}$.
   (b) En effet, ceci résulte de la question précédente, puisque, par choix de L, $L(f_z) = 0$ pour tout $z \in \Lambda$.
   (c) Puisque $L(\varphi_k) = 0$ pour tout entier k, si P est la restriction d'un polynôme à K, on a $L(P) = 0$. Par le théorème de Stone-Weierstrass ceci implique $L = 0$.
5. Ceci résulte de la première partie de l'exercice.

Exercice III

1. (a) En développant $\langle A(x+y), x+y\rangle$, on trouve que $\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), x\rangle$ est réel, et en développant $\langle A(x+iy), x+iy\rangle$), on trouve que $\langle A(x), y\rangle - \langle A(y), x\rangle$ est imaginaire pur, ce qui donne le premier résultat. Le second est élémentaire.
   (b) C'est l'ingalité de Cauchy-Schwarz.
2. (a) Évident.
   (b) Résulte de 1. (b).
3. (a) En effet, puisque $A_n \leq \mathrm{id}_E$, on a $\langle A_n(x), x\rangle \leq \|x\|^2$. Comme A_n est positif, par 1. (b) on a $|\langle A_n(x), y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, et la conclusion s'obtient en prenant le sup sur y puis le sup sur x.
   (b) i. Le fait que $0 \leq B \leq \mathrm{id}_E$ résulta de l'hypothèse sur la suite (A_n). La question 1. (b) donne$\|B(x)\|^2 = |\langle B(x), B(x)\rangle| \leq \langle B(x), x\rangle^{1/2} \langle B(B(x)), B(x)\rangle^{1/2}$. Comme $B \leq \mathrm{id}_E$, on a $\langle B(B(x)), B(x)\rangle \leq \langle B(x), B(x)\rangle = \|B(x)\|^2$, ce qui donne le résultat.
   ii. Immédiat.
   iii. Comme la suite $(\langle A_n(x), x\rangle)_n$ est croissante et majorée par $\|x\|^2$, elle est convergente donc de Cauchy. La conclusion résulte donc de la question précédente.
   (c) Clairement $\langle A_n(x), x\rangle \leq \langle A(x), x\rangle \leq \|x\|^2$. De plus la convergence ponctuelle implique aussitôt que A est linéaire. Ainsi A est un endomorphisme (algébrique) de H tel que, $\forall x \in H$, $0 \leq \langle A(x), x\rangle \leq \|x\|^2$. Comme à la question 1. on en déduit que $(x, y) \mapsto \langle A(x), y\rangle$ est une forme hermitienne sur H, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée à l'inégalité precedente donne $\|A(x)\| \leq \|x\|$, ce qui montre que $A \in \mathscr{L}(H)$. La dernière inégalité est évidente.

Examen partiel de l'année universitaire 2001-2002

Sujet

Exercice I

Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique E dont la distance est notée d.

1. Montrer que la fonction $x \to d(x, A) - d(x, B)$ est continue.
2. On suppose $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice II

Soit E un espace métrique séparable (i.e. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans E) . Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

1. Soient p et q deux nombres rationnels tels que $p < q$. Soit $A_{p,q}$ l'ensemble des points a de E tels que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe et vérifie
$$f(a) \leq p < q \leq \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x).$$
Montrer que tout point de $A_{p,q}$ est isolé (i.e. pour tout $a \in A_{p,q}$ il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A_{p,q} = \{a\}$).

2. Montrer que, pour tout $a \in A_{p,q}$, il existe un entier n et un réel $r_a > 0$ tels que $B(x_n, r_a) \cap A = \{a\}$ ($B(x_n, r_a)$ désignant la boule ouverte de centre x_n et de rayon r_a).
3. En déduire que $A_{p,q}$ est au plus dénombrable (i.e. qu'il existe une injection de $A_{p,q}$ dans $\mathbb{N}$).
4. En déduire que l'ensemble des points a de E tels que la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et est différente de $f(a)$ est au plus dénombrable (on pourra utiliser que $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable et que toute réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable).

Exercice III

Question de cours. Montrer qu'un espace métrique E est connexe si et seulement si toute fonction continue f de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

Soient

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq y \leq 1\},$$
$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in \mathbb{Q} \text{ et } -1 \leq y < 0\},$$

et $E = E_1 \cup E_2$.

1. Pour tout point (x, y) de E et tout $\varepsilon > 0$, soit
$$V_\varepsilon(x, y) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times [0, 1] \text{ si } y \geq 0 \text{ et } V_\varepsilon(x, y) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times [-1, 0[\text{ si } y < 0.$$
Montrer que $V_\varepsilon(x, y) \cap E$ n'est pas connexe. En déduire que E n'est pas localement connexe.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue constante sur chaque $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f induit une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(E) = g(\mathbb{R})$.
3. Montrer que E est connexe.

Exercice IV

Soient E et F deux espaces métriques connexes.

1. Soient $a \in E$ et $b \in F$. Montrer que $\{(x, y) \in E \times F$ tels que $x = a$ ou $y = b\}$ est connexe.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. On suppose que $A \neq E$ et $B \neq F$. Montrer que $(E \times F) \setminus (A \times B)$ est connexe.

Exercice V

E étant un espace métrique, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, $\bar{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r et $\overline{B(x, r)}$ l'adhérence, dans E, de $B(x, r)$.

1. Donner un exemple d'espace métrique pour lequel il existe un point x et un réel $r > 0$ tels que les ensembles $\overline{B(x, r)}$ et $\bar{B}(x, r)$ sont différents.
2. Donner un exemple d'espace métrique dans lequel toute boule est connexe, puis, un exemple d'espace métrique possédant des boules non connexes.

Soit E un espace métrique vérifiant la propriété suivante :

Pour tous $x \in E$ et $r > 0$ les boules $B(x, r + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, forment un système fondamental de voisinages de $\overline{B(x, r)}$.

3. Montrer que $\forall x \in E, \forall r > 0$, $\overline{B(x, r)} = \bar{B}(x, r)$.

On se propose de montrer, en raisonnant par l'absurde, que toute boule (ouverte ou fermée) de E est connexe.

Soit $B = B(x, r)$, $r > 0$, une boule ouverte de E non connexe.

4. Montrer qu'il existe deux ouverts non vides O_1 et O_2 de E tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et $B = O_1 \cup O_2$.
5. Soit $x \in O_1$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$, $\rho < r$, tel que $B(x, \rho)$ est contenu dans O_1, et, $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \rho + \varepsilon)$ n'est pas contenu dans O_1.
6. Montrer que $\overline{B(x, \rho)} \subset O_1$ (remarquer que $\overline{B(x, \rho)} \subset B(x, r)$).
7. Conclure.

Corrigé

Exercice I

1. Comme on sait que $x \to d(x, A)$ et $x \to d(x, B)$ sont continues (cours), le résultat est évident.
2. Si $g(x) = d(x, A) - d(x, B)$, il suffit clairement de prendre $U = g^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $V = g^{-1}(]0, +\infty[)$.

Exercice II

1. Soient $a \in A_{p,q}$ et r un rationnel tel que $p < r < q$. Par hypothèse, il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V$ on a $f(x) > r$ (puisque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) \geq q$). Ceci implique que V ne contient aucun point de $A_{p,q}$, par définition même de $A_{p,q}$.
2. La question précédente donne qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \cap A = \{a\}$. Soit n tel que $d(a, x_n) < \rho/4$ (densité de la suite (x_n)). Alors n et $r_a = \rho/2$ répondent clairement à la question : $a \in B(x_n, r_a) \subset B(a, \rho)$, la seconde inclusion résultant de l'inégalité triangulaire : si $y \in B(x_n, r_a)$, on a $d(a, y) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y) < \rho/4 + \rho/2 = 3\rho/4 < \rho$.
3. Soit $n(a)$ le plus petit entier m tel que $B(x_m, r_a) \cap A = \{a\}$. Si a et a' sont deux éléments distincts de A on ne peut avoir $n(a) = n(a')$, car, dans le cas contraire, si, par exemple $r_{a'} \geq r_a$, on aurait $B(x_{n(a')}, r_{a'}) \cap A = \{a, a'\}$. Ceci montre que $a \to n(a)$ est une injection de $A_{p,q}$ dans $\mathbb{N}$.
4. Il résulte de la question précédente que l'ensemble des points a de E tels que la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et est strictement inférieure à $f(a)$, qui est la réunion des $A_{p,q}$ pour $p < q$, $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), est dénombrable (car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et donc $\mathbb{Q}^2$ aussi : même preuve que pour $\mathbb{Q}$ dénombrable). Il en est bien sûr de même de celui des points a de E tels que la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et est strictement supérieure à $f(a)$, ce qui conclut.

Exercice III

Question de cours : voir le cours.

1. En effet, si x est un irrationnel dans $I =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, les ouverts $]-\infty, x[\times\mathbb{R}$ et $]x, +\infty[\times\mathbb{R}$ séparent $V_\varepsilon(x, y) \cap E$ lorsque $y < 0$: ils ont une intersection non vide avec E et leur intersection est vide. Dans le cas $y \geq 0$, il suffit de prendre $x \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $g(x) = f(x)$. Si $x \in \mathbb{Q}$, on pose $g(x) = f(x, y)$, $y < 0$. La continuité de g est alors évidente en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, puisque f l'est par hypothèse, et, en un point $x \in \mathbb{Q}$, comme $f_{|\mathbb{Q}}$ est continue (par continuité de f), il suffit de voir que si (x_n) est une suite d'irrationels qui converge vers x, $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$; or, pour tout n il existe $y_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| < 1/n$ (par continuité de f en $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), donc $f(y_n) \to f(x)$ ($y_n \to x$ et $f_{|\mathbb{Q}}$ continue) ce qui conclut. Enfin, on a bien sûr $f(E) = g(\mathbb{R})$.
3. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à une fonction continue de E dans $\{0, 1\}$, car une telle fonction est évidement constante sur chaque segment $\{x\} \times [0, 1]$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $\{x\} \times [-1, 0[$, pour $x \in \mathbb{Q}$ (car ils sont connexes) : alors la connexité de $\mathbb{R}$ implique que g est constante et donc f aussi.

Exercice IV

1. Comme $(\{a\} \times F) \cap (E \times \{b\}) \neq \emptyset$, et que $\{a\} \times F$ et $E \times \{b\}$ sont connexes, car respectivement homéomorphes à F et E, la conclusion résulte du cours : une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.
2. Soit $b_0 \notin B$. Alors $\bigcap\limits_{x \notin A} ((\{x\} \times F) \cup (E \times \{b_0\})) \neq \emptyset$ ce qui implique que $G_{b_0} = \bigcup\limits_{x \notin A} ((\{x\} \times F) \cup (E \times \{b_0\}))$ est connexe pour la même raison qu'au 1. De même, si $a_0 \notin A$, $G_{a_0} = \bigcup\limits_{y \notin B} ((\{a_0\} \times F) \cup (E \times \{y\}))$ est connexe. La conclusion résulte donc du fait que $(E \times F) \setminus (A \times B) = G_{b_0} \cup G_{a_0}$ et que $G_{b_0} \cap G_{a_0} \neq \emptyset$ car cet ensemble contient (a_0, b_0).

ExerciceV

1. Il suffit de prendre, dans un espace métrique discret ayant au moins deux points, une boule ouverte de rayon 1 : elle est réduite à un point, donc fermée puisqu'égale à la boule fermée de même centre et de rayon $1/2$, et la boule fermée de rayon 1 est tout l'espace.
2. Dans le même exemple on prend une boule ouverte ou fermée de rayon 2 : c'est tout l'espace qui n'est pas connexe, les points étant des ouverts (c.f. question précédente).
3. Si $y \notin \overline{B(x, r)}$, il existe une boule fermée de centre y qui ne rencontre pas $B(x, r)$. Son complémentaire est donc un voisinage de $B(x, r)$ qui contient donc (par hypothèse) une boule $B(x, r + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $y \notin \bar{B}(x, r)$ puisque $\bar{B}(x, r) \subset B(x, r + \varepsilon)$.
4. C'est la définition même de la non connexité puisque $B(x, r)$ est un ouvert.
5. Comme O_1 est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \subset O_1$. On considère donc le sup de ces η. Il est strictement inférieur à r car $O_2 \neq \emptyset$.
6. Comme $\bar{B}(x, \rho)$ est un fermé contenu dans $B(x, r)$, $\overline{B(x, \rho)}$ est fermé dans $B(x, r)$. Comme O_1 est fermé dans $B(x, r)$ (comme complémentaire de l'ouvert O_2) et contient $B(x, \rho)$, il contient aussi $\overline{B(x, \rho)}$.
7. L'hypothèse implique alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \rho + \varepsilon) \subset O_1$ ce qui contredit la définition de ρ. Ceci montre que toute boule ouverte est connexe, et, comme l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée (question 3.), il en résulte que toute boule fermée est aussi connexe (d'après un résultat du cours).

Examen de la session de Janvier 2002

Sujet

Exercice I

Soient X un ensemble et E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(X;\mathbb{C})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications de X dans $\mathbb{C}$. On suppose que E est muni d'un produit scalaire, noté $\langle .,. \rangle$, pour lequel il est un espace de Hilbert.

On dit que E possède un ***noyau reproduisant*** K, s'il existe une fonction $K : X \times X \to \mathbb{C}$ possédant les deux propriétés suivantes :

(I) Pour tout $y \in X$, la fonction $K(.,y) : x \mapsto K(x,y)$ appartient à E ;

(II) Pour toute $f \in E$ et tout $y \in X$, on a $f(y) = \langle f, K(.,y) \rangle$.

1. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (i) E possède un noyau reproduisant ;

   (ii) Pour tout $y \in X$, la fonction $\tau_y : f \mapsto f(y)$ est une forme linéaire continue sur E.

Dans la suite de cet exercice, on suppose que l'espace de Hilbert E possède un noyau reproduisant.

2. Montrer que, $\forall (x,y) \in X \times X$, $K(x,y) = \langle K(.,y), K(.,x) \rangle$, $K(x,x) = \|K(.,x)\|^2$, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ et $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$.
3. Montrer que, pour toute $f \in E$ et tout $y \in X$, on a $|f(y)| \leq \|f\|\, K(y,y)^{1/2}$.
4. En déduire que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de E qui converge dans E vers g, alors, pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ dans $\mathbb{C}$, et que cette convergence est uniforme sur toute partie de X où $K(x,x)$ est borné.
5. On suppose maintenant, de plus, que E possède une base Hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que, $\forall (x,y) \in X \times X$, $K(x,y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\overline{f_n(y)}$, la série étant convergente dans $\mathbb{C}$.

   (b) Pour $g \in E$, posons $c_n(g) = \langle g, f_n \rangle$. Montrer que, pour tout $x \in X$, on a $g(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n(g) f_n(x)$, la série étant convergente dans $\mathbb{C}$ et que, de plus, cette convergence est uniforme dans toute partie de X où $K(x,x)$ est bornée.

   (c) Donner une condition sur la base $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalente à l'existence du noyau reproduisant K.

Exercice II

1. Soient E et F deux espaces métriques compacts. Montrer que, pour tout $\varepsilon \geq 0$, et toute fonction $f \in \mathscr{C}(E \times F;\mathbb{R})$, il existe des fonctions $u_i \in \mathscr{C}(E;\mathbb{R})$ et $v_i \in \mathscr{C}(F;\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, telles que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\left| f(x,y) - \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y) \right| \leq \varepsilon$ (considérer la sous-algèbre de $\mathscr{C}(E \times F;\mathbb{R})$ engendrée par les fonction $(x,y) \mapsto u(x)$ et $(x,y) \mapsto v(y)$ où $u \in \mathscr{C}(E;\mathbb{R})$ et $v \in \mathscr{C}(F;\mathbb{R})$).

Dans la suite de cet exercice on se propose de construire un exemple où F n'est pas compact et où la propriété ci-dessus n'est pas satisfaite.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, soit B_n la boule fermée de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne) de centre $c_n = (1/n, n)$ et de rayon $1/4n^2$.

   (a) Montrer que, pour $n \neq m$, on a $B_n \cap B_m = \emptyset$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $\varphi_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n(c_n) = 1$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n(z) = 0$ si $z \notin B_n$.

   (c) Soit $I = [0,1]$. Déduire de ce qui précède que la formule $g = \sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$, définit une fonction de $\mathscr{C}(I \times \mathbb{R};\mathbb{R})$.

   (d) Montrer que, si pour tout entier $n \geq 1$ on pose $g_n(x) = g(x,n)$, $x \in I$, on a :

      i. $\sup\limits_{x\in I} |g_n(x)| = 1$;

      ii. $\sup\limits_{x\in I} |g_n(x) - g_m(x)| = 1$, si $n \neq m$.

3. Soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$. On suppose $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|.\|$. Montrer qu'il n'existe pas de suite de fonctions $h_n \in G$, $n \geq 1$, telle que, pour tout n, $\|g_n - h_n\| \leq 1/4$ (raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Riesz).
4. Conclure

Exercice III

Soit E un espace métrique complet de distance notée d. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. On suppose $A \neq \emptyset$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous x, y dans A, on pose

$$f_n(x,y) = \left|\frac{1}{d(x, E \setminus U_n)} - \frac{1}{d(y, E \setminus U_n)}\right|,$$

puis

$$d'(x,y) = d(x,y) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x,y)}{1+f_n(x,y)}.$$

1. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, la fonction $y \mapsto f_n(x,y)$ est continue sur A.
2. Montrer que d' est une distance sur A (on pourra utiliser que la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
3. Montrer que, sur A, d et d' sont topologiquement équivalentes.
4. Montrer que A est complet pour d'.
5. *Exemple*. Montrer que cette construction permet de définir une distance sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, topologiquement équivalente à la distance usuelle, pour laquelle $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est complet.

Corrigé

Exercice I

1. Le fait que (i) implique (ii) résulte de la propriété (II). Supposons (ii) vérifiée. Par le théorème sur le dual d'un espace de Hilbert, il existe donc un élément $K(.,y)$ de E tel que $f(y) = \langle f, K(.,y)\rangle$, pour toute $f \in E$, ce qui est (i).
2. La première relation résulte de l'hypothèse (II) et les autres s'en déduisent immédiatement.
3. Immédiat par (II) et 2.
4. Immédiat par 4.
5. (a) En effet, on a $K(.,y) = \sum_n \langle K(.,y), f_n\rangle f_n = \sum_n \overline{\langle f_n, K(.,y)\rangle} f_n = \sum_n \overline{f_n(y)} f_n$, la série convergeant dans E. Il suffit donc d'appliquer le 4.
   (b) Comme $g = \sum_n c_n(g) g_n$, il suffit d'appliquer le 4.
   (c) Si K existe, le (a) montre que $\sum_n |f_n(x)|^2 < +\infty$, pour tout $x \in E$. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, on peut définir $K(x,y)$ par la formule du (a), et les conditions (I) et (II) sont satisfaite car (f_n) est une base hilbertienne.

Exercice II

1. En effet, la sous-algèbre de $\mathscr{C}(E \times F;\mathbb{R})$ indiquée dans l'énoncé contient les fonctions constantes et sépare les points de $E \times F$, et il suffit d'appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.
2. (a) Immédiat, la distance des centres étant supérieure à 1 et la somme des rayons inférieure à $1/2$.
   (b) Il suffit de prendre $\varphi_n(z) = \begin{cases} 1 - 4n^2 d(c_n z), & \text{si } z \in B_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, où d est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Clairement, il suffit de prendre la restriction à $I \times \mathbb{R}$ de la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$, $g = \sum_{n\geq 1} \varphi_n$: comme les boules B_n sont deux à deux disjointes, on voit aisément que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, la somme $\sum_{n\geq 1} \varphi_n(\zeta)$, pour ζ dans un petit voisinage de ξ, est déduite à un seul terme. La continuité de g en résulte aussitôt.
   (d) Si $n \neq m$, $B_m \cap \{(x,n),\ x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$, et, par suite $g_n(x) = \varphi_n(x,n)$, ce qui donne le i. De plus, g_n est nulle en dehors de l'intervalle $I_n = [1/n - 1/4n^2, 1/n + 1/4n^2]$. Comme $I_n \cap I_m = \emptyset$, pour $n \neq m$, on obtient le ii.

3. Supposons que les fonctions h_n existent. Alors les propriétés du (c) impliquent $\|h_n\| \leq 5/4$ et, pour $n \neq m$, $\|h_n - h_m\| \geq 1/2$. On ne peut donc extraire aucune sous-suite convergente de la suite (h_n) ce qui contredit le théorème de Riesz appliqué à G.
4. La conclusion du 1. est donc fausse pour $E = I$ et $F = \mathbb{R}$.

Exercice III

1. En effet, si $x \in E \setminus U_n$, pour $d(x, y)$ assez petit, on a aussi $y \in E \setminus U_n$, et la conclusion résulte du cours.
2. La seule chose à vérifier est l'inégalité triangulaire, et, la croissance de $\dfrac{t}{1+t}$ donne

$$\frac{f_n(x,y)}{1+f_n(x,y)} \leq \frac{f_n(x,z)+f_n(y,z)}{1+f_n(x,z)+f_n(y,z)} \leq \frac{f_n(x,z)}{1+f_n(x,z)} + \frac{f_n(y,z)}{1+f_n(y,z)}.$$

3. Soient $x \in A$ et $r > 0$. Notons $B_d(x, r)$ (resp. $B_{d'}(x, r)$) la boule ouverte de A de centre x et de rayon r pour la distance d (resp. d'). Clairement, $B_{d'}(x, r) \subset B_d(x, r)$. Pour conclure, montrons qu'il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x, r') \subset B_{d'}(x, r)$. Soit m un entier tel que, pour tout $y \in A$, $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x,y)}{1+f_n(x,y)} \leq \frac{1}{2^{m-1}} \leq r/3$. La question 1. montre que, pour chaque n, il existe $r_n > 0$ tel que $d(x, y) < r_n$ implique $f_n(x, y) < r/6$. Alors si $r' < \min\{r, r_n,\ 0 \leq n \leq m\}$, $d(x, y) < r'$ implique $d'(x, y) < r' + 2r/3$, et il suffit de prendre $r' = r/3$.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A de Cauchy pour d'. Alors cette suite est aussi de Cauchy pour d et converge donc vers $x \in E$, pour d. Pour conclure, en vertu du 3., il suffit de montrer que $x \in A$. Or, si ce n'était pas le cas, on aurait $x \notin U_n$ pour un certain n ; mais alors on aurait, pour tout p, $\displaystyle\lim_{q\to\infty} f_n(x_p, x_q) = +\infty$, ce qui implique $\displaystyle\lim_{q\to\infty} d'(x_p, x_q) \geq 1/2^n$ et contredit le fait que (x_n) est de Cauchy pour d'.
5. Si $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, il suffit de prendre $U_n = \mathbb{R} \setminus \{r_n\}$.

ANNEXE

Axiome du Choix
Lemme de Zorn

Cardinalité des Ensembles

ANNEXE A

AXIOME DU CHOIX LEMME DE ZORN

Dans cette annexe, on se propose de démontrer le Lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix. On suppose connue la théorie élémentaire des ensembles. La preuve présentée est la preuve classique à partir du Théorème de Zermelo. On introduit donc, avec un minimum de détails, la théorie des ensembles ordonnés qui est nécéssaire pour le Théorème de Zermelo. On pourra trouver un exposé détaillé de la théorie des ensembles ordonnés dans [Bou67].

SECTION A.1

L'axiome du choix

Un énoncé simple de l'Axiome du choix est le suivant :

AXIOME (*Axiome du choix*).

Soient X et Y deux ensembles. Étant donné une application F de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(Y)$ des parties de Y telle que, pour tout $x \in X$, on ait $F(x) \neq \emptyset$, il existe une application f de X dans Y telle que, $\forall \in X$, on ait $f(x) \in F(x)$.

Une conséquence immédiate de cet Axiome est la Proposition apparament anodine suivante :

PROPOSITION A.1.1.

Soient E un ensemble non vide et S une partie de $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$. Alors il existe une application f de S dans E telle que, $\forall A \in S$ on ait $f(A) \notin A$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'Axiome du choix à la fonction $F : S \to \mathscr{P}(E)$ définie par $F(A) = E \setminus A$. ☐

Le but de cette annexe est de démontrer le Lemme de Zorn à partir de l'Axiome du choix (en fait l'Axiome du choix est équivalent au Lemme de Zorn). Comme ce dernier porte sur les ensembles ordonnés, il nous faut commencer par introduire ceux-ci et démontrer un certains nombre de résultats non triviaux à leur sujet.

SECTION A.2

Ensembles ordonnés : définitions de base

DÉFINITION A.2.1.

Soit E un ensemble. On appelle ordre sur E une partie G de $E \times E$ possédant les propriétés suivantes :
(i) La diagonale de $E \times E$ est contenue dans G ;
(ii) $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in G$ impliquent $(x, z) \in G$;
(iii) $(x, y) \in G$ et $(y, x) \in G$ impliquent $x = y$.
*La relation $(x, y) \in G$ est usuellement notée $x \leq y$, et on note $x < y$ la relation $x \leq y$ et $x \neq y$. On dit que l'ordre G sur E est **total** si quelque soient x et y dans E on a, soit $(x, y) \in G$, soit $(y, x) \in G$.*
*Si A est une partie d'un ensemble E ordonné par G, alors $G \cap (A \times A)$ est un ordre sur A appelé l'**ordre induit** sur A par celui de E.*

Dans toute la suite, un ordre sera toujours noté $\leq$ ou $<$. Par convention, on note $x \geq y$ si $y \leq x$ et $x > y$ si $y < x$.

DÉFINITION A.2.2.

*Soient E et F deux ensembles ordonnées et f une application de E dans F. On dit que f est **croissante** (resp. **strictement croissante**, **décroissante**, **strictement décroissante**) si $x \leq y$ (resp. $x < y$) implique $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$, $f(y) \leq f(x)$, $f(y) < f(x)$). De plus, f est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante). On dit que f est un **isomorphisme** si elle est bijective croissante ainsi que son inverse.*

Il est clair que toute application monotone injective est strictement monotone. Inversement :

PROPOSITION A.2.1.

Soient E un ensemble totalement ordonné et F un ensemble ordonné. Toute application strictement monotone f de E dans F est injective. en particulier, si f est strictement croissante c'est un isomorphisme de E sur $f(E)$.

Démonstration. En effet, $x \neq y$ implique $x < y$ ou $y < x$ donc $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ donc $f(x) \neq f(y)$. Alors, si f est par exemple croissante, si $f(x) \leq f(y)$ on a nécessairement $x \leq y$, ce qui montre que f^{-1} est croissante. □

DÉFINITION A.2.3.

*Soit E un ensemble ordonné. Un élément a de E est appelé **élément maximal** (resp. **minimal**) de E si la relation $x \leq a$ (resp. $x \geq a$) implique $x = a$. $a \in E$ est dit le **plus petit** (resp. **grand**) élément de E si, $\forall x \in E$ on a $a \leq x$ (resp. $x \leq a$). On dit qu'un ensemble ordonné E est **bien ordonné** si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.*

On remarquera que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné puisque toute partie à deux éléments a un plus petit élément.
La Proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION A.2.2.

Soit E un ensemble ordonné. Soit E' la réunion (disjointe) de E et d'un ensemble réduit à un point $\{a\}$. Alors, sur E' il existe un et un seul ordre induisant l'ordre de E et pour lequel a soit le plus grand élément.

DÉFINITION A.2.4.

Soit E un ensemble ordonné.
*1. On appelle **segment** de E une partie S de E telle que $x \in S$ et $y \leq x$ implique $y \leq S$.*
*2. Si a et b sont deux points de E on appelle **intervalle fermé** (resp. **ouvert**, **semi-ouvert à droite**, **semi-ouvert à gauche**) d'origine a et d'extrémité b l'ensemble $[a, b] = \{x \in E$ tels que $a \leq x \leq b\}$ (resp. $]a, b[= \{x \in E$ tels que $a < x < b\}$, $[a, b[= \{x \leq E$ tels que $a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in E$ tels que $a < x \leq b\}$).*
*3. Si $a \in E$, on appelle **intervalle fermé illimité à gauche** (resp.**ouvert illimité à gauche**, **fermé illimité à droite**, **ouvert illimité à droite**) l'ensemble $] \leftarrow, a] = \{x \in E$ tels que $x \leq a\}$ (resp. $] \leftarrow, a[= \{x \in$ tels que $x < a\}$, $[a, \rightarrow [= \{x \in E$ tels que $a \leq x\}$, $]a, \rightarrow [= \{x \in E$ tels que $a < x\}$).*

PROPOSITION A.2.3.

Soit E un ensemble bien ordonné. Tout segment de E distinct de E est un intervalle de la forme $]\leftarrow, a[$, $a \in E$, et a s'appelle l'extrémité du segment.

Démonstration. En effet, comme $E \setminus S$ est non vide, il a un plus petit élément a. Alors la relation $x \geq a$ implique $x \notin S$ (sinon on aurait $a \in S$) et, par suite, $E \setminus S = [a, \rightarrow[$, d'où on déduit le résultat. ☐

SECTION A.3

Théorème de Zermelo et Lemme de Zorn

PROPOSITION A.3.1.

Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ensembles ordonnés possédant les propriétés suivantes :
1.quelque soient α et β dans A, il existe $\gamma \in A$ tel que $X_\alpha \subset X_\gamma$ et $X_\beta \subset X_\gamma$;
2. Si $X_\alpha \subset X_\beta$, l'ordre induit sur X_α par celui de X_β est identique à celui de X_α.
Alors, sur $E = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, il existe un ordre et un seul qui induise sur chaque X_α l'ordre donné.

Démonstration. Montrons tout d'abord l'unicité. Si G_α est l'ordre donne sur X_α, $\alpha \in A$, et si G est un ordre sur E qui répond à la question, on a $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \subset G$. Par ailleurs, l'hypothèse 1. implique que si $(x, y) \in E \times E$, il existe $\alpha \in A$ tel que $(x, y) \in A_\alpha \times A_\alpha$, et, donc, si $(x, y) \in G$, on doit avoir $(x, y) \in A_\alpha$, ce qui montre que l'on doit avoir $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha = G$.

Montrons maintenant l'existence en vérifiant que $G = \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ est un ordre sur E qui répond à la question. Comme, par hypothèse, $X_\alpha \subset X_\beta$ implique $G_\beta \cap (X_\alpha \times X_\alpha) = G_\alpha$, on a $G \cap (X_\alpha \times X_\alpha) = G_\alpha$, clairement la diagonale de $E \times E$ est contenue dans G et enfin, la transitivité provient aussitôt de 1. ☐

PROPOSITION A.3.2.

Soit $(X_i)_{i \in I}$une famille d'ensembles bien ordonnés telle que, pour tout couple d'indices $(i, j) \in I \times I$, l'un des ensembles X_i et X_j soit un segment de l'autre (i.e. par exemple $X_i \subset X_j$, l'ordre de X_i est induit par celui de X_j et $x \in X_i$, $y \in X_j$, $y \leq x$ implique $y \in X_i$). Alors sur $E = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ il existe un et un seul ordre qui induise sur chacun des X_i l'ordre donné. Muni de cet ordre E est bien ordonné. De plus :
a) Tout segment de X_i est un segment de E.
b) Pour tout $x \in X_i$, le segment d'extrémité x dans X_i est égal au segment d'extrémité x dans E.
c) Tout segment dans E est E tout entier ou un segment de l'un des X_i.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la première assertion est un cas particulier de la Proposition précédente. Montrons maintenant que chaque X_i est un segment de E : si $x \in X_i$ et $y \in E$ est tel que $y \leq x$, il existe j tel que $y \in X_j$ et alors, soit X_j est un segment de X_i ce qui implique $y \in X_i$, soit X_i est un segment de X_j et on a aussi $y \in X_i$. De plus, comme chaque segment de X_i, non égal à X_i, est un intervalle (Proposition A.2.3), ce raisonnement montre aussi que le segment d'extrémité x dans X_i est l'intervalle $]\leftarrow, x[$ dans E. Montrons maintenant que E est bien ordonné. Soit H une partie non vide de E et soit $i \in I$ tel que $H \cap X_i \neq \emptyset$. Comme X_i est bien ordonné, $H \cap X_i$ a un plus petit élément a dans X_i. Soit $x \in H$; il existe $j \in I$ tel que $x \in X_j$; si X_j est un segment de X_j, on a $x \in X_i$ et, par suite $a \leq x$; si X_i est un segment de X_j, et si $x < a$, alors $x \in X_i$ ce qui est une contradiction. Ainsi (puisque X_j est totalement ordonné) on a $a \leq x$, ce qui montre que a est le plus petit élément de$H$ dans E. Reste à voir le c). Or, si S est un segment de E non égal à E, il est de la forme $]\leftarrow, x[$ (Proposition A.2.3), et la conclusion résulte de ce qui précède. ☐

PROPOSITION A.3.3.

Soient E un ensemble Σ une partie de $\mathscr{P}(E)$ et p une application de Σ dans E telle que $p(X) \notin X$ pour tout $X \in \Sigma$. Alors il existe une partie M de E et un bon ordre sur M tels que :
1. Pour tout $x \in M$, $]\leftarrow, x[\in \Sigma$ et $p(]\leftarrow, x[) = x$.
2. $M \notin \Sigma$.

Démonstration. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties G de $E\times E$ telles que, d'une part, G est un bon ordre sur , et, d'autre part, $\forall x \in \mathrm{pr}_1(U)$, $]\leftarrow, x[\in \Sigma$ et $p(]\leftarrow, x[) = x$. Montrons tout d'abord que si G et G' sont deux éléments de $\mathscr{M}$ telles que $U = \mathrm{pr}_1(G) \subset U' = \mathrm{pr}_1(G')$, on a $G = G' \cap (\mathrm{pr}_1(G) \times \mathrm{pr}_1(G))$ et $\mathrm{pr}_1(G)$ est un segment de $\mathrm{pr}_1(G')$. Soit V l'ensemble des $x \in U \cap U'$ tels que tes segments d'extrémité x dans U et dans U' soient les même ainsi que les ordres induits sur ce segment par ceux de U et U'. Il est clair que V est un segment dans U et dans U' et que les ordres induits sur v sont les même. Il nous suffit donc de montrer que $V = U$ ou $V = U'$. Or, si on suppose $V \neq U$ et $V \neq U'$, alors $U \setminus V$ et $U' \setminus V$ sont tous deux non vides et ont donc chacun un plus petit élément x et x'. Ainsi $V =]\leftarrow, x[$ à la fois dans U et dans U'. Ceci implique $V \in \Sigma$ et $p(V) = x = x'$, et donc $x \in V$ ce qui est absurde. Posons alors $M = \bigcup_{G\in\mathscr{M}} \mathrm{pr}_1(G)$. Appliquons maintenant la Proposition précédente à la famille des $\mathrm{pr}_1(G)$, $G \in \mathscr{M}$: soit G_M le bon ordre donné par cette Proposition sur M ; Pour tout $x \in M$, $]\leftarrow, X[$ est un segment de l'un des $\mathrm{pr}_1(G)$, $G \in \mathscr{M}$, ce qui signifie que $G_M \in \mathscr{M}$. Reste donc à montrer que $M \notin \Sigma$. Supposons $M \in \Sigma$, alors, si $a = p(M)$, $a \notin M$, et on peut adjoindre a à M comme plus grand élément (Proposition A.2.2) et obtenir un ensemble bien ordonné $M' = M \cup \{a\}$. Alors $M =]\leftarrow, a[$ dans M' donc $]\leftarrow, a[\in \Sigma$ et $p(]\leftarrow, a[) = a$, ce qui montre que l'ordre $G_{M'}$ sur M' appartient à $\mathscr{M}$. Mais ceci est absurde par définition de M. □

On notera que l'ensemble M produit par la Proposition précédente peut fort bien être vide. C'est par exemple le cas si $\emptyset \notin \Sigma$ car, si $M \neq \emptyset$, il a un plus petit élément a et $\emptyset =]\leftarrow, a[\in \Sigma$. Par contre si Σ est assez gros, on peut obtenir $M = E$:

THÉORÈME A.3.1 (*Théorème de Zermelo*).

Sur tout ensemble E il existe un bon ordre.

Démonstration. En effet, si $\Sigma = \mathscr{P}(E) \setminus E$, d'après la Proposition A.1.1, page 105, il existe une application p de Σ dans E telle que, $\forall X \in \Sigma, p(X) \notin X$. Alors, la Proposition précédente implique qu'il existent $M \subset E$ et un bon ordre sur M tels que $M \notin \Sigma$. On doit donc avoir $M = E$. □

Remarque A.3.1. *On peut démontrer que le Théorème de Zermelo et l'Axiome du choix (et donc aussi la Proposition A.1.1) sont en fait équivalents.*

THÉORÈME A.3.2.

Soit E un ensemble ordonné (non vide !) dont toute partie bien ordonnée est majorée. Alors E possède un élément maximal. En particulier, tout ensemble ordonné ***inductif*** *E (i.e. tel que toute partie totalement ordonnée admet un majorant dans E) possède un élément maximal.*

Démonstration. La seconde partie de l'énoncé est un cas particulier de la première puisque toute partie bien ordonnée est totalement ordonnée. Démontrons donc la première. Soit Σ l'ensemble des parties de E admettant un majorant strict (i.e. n'appartenant pas à la partie) dans E (remarquer que $\emptyset \in \Sigma$). Pour tout $S \in \Sigma$, soit $\mathscr{M}(S)$ l'ensemble des majorants stricts de S dans E, et considérons l'application F de Σ dans $\mathscr{P}(E) \setminus \emptyset$ définie par $F(S) = \mathscr{M}(S)$. D'après l'Axiome du choix (page 105), il existe une application p de Σ dans E telle que $p(S) \in F(S) = \mathscr{M}(S), \forall S \in \Sigma$. Appliquons alors la Proposition A.3.3, page précédente : ceci nous donne une partie M de E et un bon ordre G sur M possédant les propriétés décrites dans cette Proposition. Montrons que cet ordre G est identique à l'ordre induit sur M par l'ordre de E. Soient x et y deux éléments de M ; la relation $(x, y) \in G$, $x \neq y$ équivaut à $x \in]\leftarrow, y[$, et comme, d'après le 1. de la Proposition A.3.3, on a $p(]\leftarrow, y[) = y$, par définition de p, on a $x < y$ (pour l'ordre de E). Ceci montre que l'injection de M dans E est strictement croissante (M ordonné par G). Comme M est totalement ordonné, cette injection est un isomorphisme (Proposition A.2.1, page 106), ce qui montre que les relations $(x, y) \in G$ et $x \leq y$ sont équivalentes dans M, ce qui est l'assertion voulue. Par hypothèse il existe donc un majorant m de M dans E, qui n'est pas un majorant strict d'après le 2. de la Proposition A.3.3. Montrons alors que m est un élément maximal de E : en effet, si $x \in E$ tel que $m \leq x$. et si $x \neq m$, x est un majorant strict de M ce qui est impossible. □

COROLLAIRE (*Lemme de Zorn*).

Soient E un ensemble ordonné inductif et a un élément de E. Il existe un élément maximal m de E tel que $a \leq m$.

Démonstration. en effet, soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des majorants de $\{a\}$ (qui est non vide par hypothèse). Il est clair que $\mathscr{F}$ est inductif pour l'ordre induit par E, et le Théorème précédent montre que $\mathscr{F}$ possède un élément maximal m. Alors m est aussi un élément maximal de E car si $x \in E$ est tel que $m \leq x$, on a $a \leq x$ (puisque $m \in \mathscr{F}$ implique $m \geq a$) et donc $x \in \mathscr{F}$ soit $x = m$. □

Remarque A.3.2. *On peut démontrer que le Lemme de Zorn et le Théorème de Zermelo (donc aussi l'axiome du choix et la Proposition A.1.1, page 105) sont équivalents.*

SECTION A.4

Applications de l'axiome du choix aux espaces vectoriels

THÉORÈME A.4.1 (*Théorème de la base incomplète*).

Toutespace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ possède une base. Plus précisément, si L est une partie libre de E, il existe une base de E contenant L.

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties libres de E contenant L, et ordonnons $\mathscr{F}$ par inclusion. Montrons que $\mathscr{F}$ est inductif : si $\mathscr{A}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathscr{F}$, vérifions que la réunion des éléments de $\mathscr{A}$ est une élément P de $\mathscr{F}$. Soit $\sum \lambda_i x_i$ une combinaison linéaire finie nulle d'éléments de P ; comme $\mathscr{A}$ est totalement ordonné, les x_i appartiennent tous à un seul élément de $\mathscr{A}$ ce qui donne $\lambda_i = 0$ pour tout i. Il résulte alors du Lemme de Zorn ci-dessus que $\mathscr{F}$ possède un élément maximal B. Montrons, pour conclure que B est une base de E. Comme B est une partie libre, il faut voir qu'elle est génératrice ; or, s'il n'en n'était pas ainsi,, il existerait $x_0 \in E$ tel que toute combinaison linéaire de la forme $\lambda x_0 + \sum \lambda_i x_i = 0$, $x_i \in B$, implique $\lambda = \lambda_i = 0$, $\forall i$. Alors $B \cup \{x_0\}$ appartiendrait à $\mathscr{F}$ ce qui est absurde. □

COROLLAIRE.

Tout sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E admet un supplémentaire algébrique.

Démonstration. Par le Théorème précédent V possède une base B_V, et, par ce même Théorème B_V est contenue dans une base B de E. Alors $B \setminus B_V$ est une base d'un supplémentaire de V dans E. □

THÉORÈME A.4.2 (*Existence des applications linéaires*).

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. pour qu'il existe une application linéaire f de E dans F telle que $f(x_i) = y_i$, $i \in I$, $y_i \in F$, il faut et il suffit que les relations $\sum_{i\in I} \beta_i x_i = 0$, $\beta_i \in \mathbb{K}$, $i \in I$, les β_i étant tous nuls sauf au plus un nombre fini, impliquent $\sum_{i\in I} \beta_i y_i = 0$.

Démonstration. En effet, soit V le sous-espace engendré par les x_i, $i \in I$. Par le Corollaire ci-dessus, V admet un supplémentaire dans E, et, par le Théorème précédent, on peut trouver une base $(x_i)_{i\in J}$ de ce supplémentaire. Alors la famille $(x_i)_{i\in I\cup J}$, engendre E, et, si l'hypothèse faite sur les y_i est satisfaite, on définit une application linéaire de E dans f en posant $f(x_i) = y_i$ si $i \in I$ et $f(x_i) = 0$ si $i \in J$. □

COROLLAIRE.

Sur tout espace vectoriel non réduit à zéro il existe des formes linéaires non nulles.

Démonstration. En effet, si $x_0 \in E$ est non nul, et si $a \in \mathbb{K}$ est aussi non nul, il existe une application linéaire f de E dans $\mathbb{K}$ telle que $f(x_0) = a$. □

Exemple A.4.1. *Il existe des applications $\mathbb{Q}$-linéaires non nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.*

On notera que de telles applications ne sont certainement pas continues (la continuité impliquerait $f(\lambda x) = \lambda x$, pour tous λ et x dans $\mathbb{R}$ ce qui implique $f(x) = f(1)x$ et, donc f prendrait des valeurs irrationnelles) : le Théorème de Hahn-Banach (Théorème III.4.6, page 63) est en général faux pour un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. En effet, dans le cas contraire, en considérant $\mathbb{Q}$ comme un sous-espace du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la forme linéaire $f : x \to x$ de $\mathbb{Q}$ dans lui-même vérifie $|f(x)| \leq |x|$, et, si on peut appliquer le Théorème de Hahn-Banach, on construit une forme $\tilde{f}$ $\mathbb{Q}$-linéaire sur $\mathbb{R}$ telle que $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq |x|$ ce qui implique qu'elle est continue.

ANNEXE B

CARDINALITÉ DES ENSEMBLES

Dans cet appendice, on donne les notions de base concernant la cardinalité des ensembles infinis. Le principal résultat dit que le produit cartésien d'un ensemble infini par lui même à même cardinal que l'ensemble lui même. Ce résultat est utilisé dans la théorie des espaces de Hilbert pour montrer que deux bases ont même cardinal et, ainsi, définir la dimension d'un espace de Hilbert.

SECTION B.1

Cardinalité

DÉFINITION B.1.1.

Soient A et B deux ensembles.

*1. On dit que A et B ont **même cardinal**, ou qu'ils sont **équipotents**, s'il existe une bijection de l'un sur l'autre et on écrit card$(A) =$ card(B) ou $\#A = \#B$.*

2. On dit que le cardinal de A est inférieur à celui de B s'il existe une injection de A dans B, et on écrit $\#A \leq \#B$.

Cette définition est justifiée par le Théorème de Cantor-Bernstein :

THÉORÈME B.1.1 (*Théorème de Cantor-Bernstein*).

Soient A et B deux ensembles. si $\#A \leq \#B$ et $\#B \leq \#A$ alors A et B sont équipotents. En conséquence, si $\#A \leq \#B$ et si A n'est pas équipotent à B, on écrit $\#A < \#B$.

Démonstration. Soient f une injection de A dans B et g une de B dans A. On dira que $x \in A$ à $y \in A \cup B$ pour ancêtre si on peut passer de y à x par applications successives de g et f, et de même pour les éléments de B. Soit A_p (resp. A_i) les éléments de A qui ont un nombre fini pair, zéro inclus, (resp. impair) d'ancêtres et A_∞ ceux qui ont un nombre infini d'ancêtres. Il est clair que ces ensembles forment une partition de A. De même, définissons les ensembles B_p, B_i et B_∞. Comme f et g sont injectives, on a $f(A_p) = B_i$,

$f(A_\infty) = B_\infty$ et $g(B_p) = A_i$. De plus, $f_{|A_p \cup A_\infty}$ est une bijection de $A_p \cup A_\infty$ sur $B_i \cup B_\infty$ et $g_{|B_p}$ est une bijection de B_p sur A_i. On définit alors une bijection F de A sur B en posant

$$F_{|A_p \cup A_\infty} = f_{|A_p \cup A_\infty} \text{ et } F_{|A_i} = (g_{|B_p})^{-1}.$$

□

PROPOSITION B.1.1.

Soit E un ensemble non vide. Alors $\#\mathscr{P}(E) > \#E$.

Démonstration. Comme il existe clairement une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$, d'après le Théorème précédent, il suffit de voir qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$. Supposons, par l'absurde, que f soit une telle bijection, et définissons une partie A de E en posant

$$A = \{x \in E, \text{ tels que } x \notin f(x)\}.$$

Puisque f est une bijection (et E non vide), il existe $a \in E$ tel que $A = f(a)$. Mais ceci est absurde car on ne peut avoir ni $a \in A$ ni $a \in E \setminus A$. □

SECTION B.2

Ensembles dénombrables

DÉFINITION B.2.1.

On dit qu'un ensemble est **dénombrable** (*ou* **au plus dénombrable**) *s'il est fini ou équipotent à* $\mathbb{N}$.

PROPOSITION B.2.1.

Soit E un ensemble dénombrable.
1. Toute partie de E est dénombrable. Autrement dit E est dénombrable si et seulement si $\#E \leq \#\mathbb{N}$.
2. Pour tout entier p, E^p est dénombrable.
3. Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable (i.e. I dénombrable) d'ensembles dénombrables, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.

Démonstration. Pour montrer le 1., il suffit de voir qu'une partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$ ce qui se montre facilement par récurrence. Pour voir le 2., par récurrence, il suffit de montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ce qui se fait aisément en rangeant les couples d'entiers positifs (n, m) avec l'ordre lexicographique : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, etc.... Enfin 3. résulte de 2. □

Cette Proposition montre que si E est non dénombrable et si A est une partie dénombrable de E alors $E \setminus A$ n'est pas dénombrable. Nous allons voir, au paragraphe suivant qu'en fait $E \setminus A$ est équipotent à E.

SECTION B.3

Cardinalité des ensembles infinis

THÉORÈME B.3.1.

Étant donné deux ensembles E et F, l'un est équipotent à une partie de l'autre (i.e. soit $\#E \leq \#F$ soit $\#F \leq \#E$). En particulier, tout ensemble infini contient une partie équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{M} = \{(A, B, \varphi),\ A \subset E,\ B \subset F,\ \varphi$ bijection de A sur $B\}$. Ordonnons $\mathscr{M}$ par la relation

$$(A, B, \varphi) \leq (A', B', \varphi') \Leftrightarrow A \subset A',\ B \subset B',\ \varphi' \text{ prolonge } \varphi.$$

Clairement $\mathscr{M}$ est inductif, et, d'après le lemme de Zorn, il possède un élément maximal (A_0, B_0, φ_0). Pour conclure, il suffit de voir que soit $A_0 = E$, soit $B_0 = F$. Or, si cela est faux, $E \setminus A_0$ et $F \setminus B_0$ sont tous deux non vides, et on contredit la maximalité de

(A_0, B_0, φ_0) en prenant $x_0 \in E \setminus A_0$ et $y_0 \in F \setminus B_0$ et en prolongeant φ_0 à $A_0 \cup \{x_0\}$ par $\varphi(x_0) = y_0$. Enfin, si E est infini et équipotent à une partie de $\mathbb{N}$, on conclut en utilisant le 1. de la Proposition B.2.1. □

THÉORÈME B.3.2.

> *Si E est un ensemble infini, $E \times E$ est équipotent à E.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il existe une partie D de équipotente à $\mathbb{N}$, et une bijection φ_0 de D sur $D \times D$ (Proposition B.2.1, page ci-contre). Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des couples (A, φ) tels que A soit une partie de E contenant D et φ une bijection de A sur $A \times A$ qui prolonge φ_0 ($\mathscr{M}$ est non vide car $D \in \mathscr{M}$), et ordonnons $\mathscr{M}$ par inclusion et prolongement (comme dans la preuve du Théorème précédent) de sorte que $\mathscr{M}$ est inductif et possède donc un élément maximal (F, f) d'après le Lemme de Zorn. Pour conclure, montrons que F est équipotent à E. Supposons que cela soit faux, et montrons qu'alors F est équipotent à une partie de $E \setminus F$. En effet, si cela était faux, d'après le Théorème précédent, il existerait une injection de $E \setminus F$ dans F, donc une injection de E dans $\{0, 1\} \times F$ et donc une injection de E dans F (F est par construction équipotent à $F \times F$), ce qui, d'après le Théorème de Cantor-Bernstein (Théorème B.1.1, page 111), implique que E et F seraient équipotents ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, F est équipotent à une partie Y de $E \setminus F$. posons $Z = F \cup Y$ et montrons que Z est équipotent à $Z \times Z$ par une bijection g qui prolonge f. On a

$$Z \times Z = (F \times F) \cup (F \times Y) \cup (Y \times F) \cup (Y \times Y),$$

et comme F, Y, sont équipotents,

$$(F \times Y) \cup (Y \times F) \cup (Y \times Y)$$

est équipotent à $\{0, 1, 2\} \times Y$.

Comme il existe une injection de $\{0, 1, 2\} \times Y$ dans Y (Y est équipotent à $Y \times Y$) le Théorème de Cantor-Bernstein (Théorème B.1.1, page 111), implique que

$$(F \times Y) \cup (Y \times F) \cup (Y \times Y)$$

est équipotent à Y par une bijection f_1. On définit alors une bijection g de Z sur $Z \times Z$ en posant $g_{|F} = f$ et $g_{|Y} = f_1$, ce qui contredit la maximalité de (F, f). □

COROLLAIRE 1.

> *Si E est un ensemble infini, il existe une bijection de $\mathbb{N} \times E$ sur E.*

Démonstration. Comme, d'après le Théorème B.3.1, il existe une injection de $\mathbb{N} \times E$ dans $E \times E$, il existe une injection de $\mathbb{N} \times E$ dans E et la conclusion viens du Théorème de Cantor-Bernstein (Théorème B.1.1, page 111). □

COROLLAIRE 2.

> *Soit E un ensemble infini. Si D est un sous-ensemble dénombrable de E tel que $E \setminus D$ soit infini, alors E et $E \setminus D$ sont équipotents.*

Démonstration. En effet, $D \cup (E \setminus D)$ et $E \setminus D$ sont équipotents d'après le Corollaire 1. □

Nous avons vu (Corollaire 1 du Théorème I.1.3, page 2) que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. En fait, on peut montrer grâce aux résultats que nous venons de voir que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$:

PROPOSITION B.3.1.

> *$\mathbb{R}$ est non dénombrable et équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'intervalle $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ce qui suffit. Écrivons tout réel de cet intervalle sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ avec $\alpha_n = 0$ ou 1 (développement diadique). Cette écriture est clairement unique sauf pour les nombres de la forme $\dfrac{p}{2^q}$ qui ont deux tels développements, l'un qui n'a que des zéros à partir d'un certain rang (développement propre) et l'autre qui n'a que des 1 à partir d'un certain rang (développement impropre). On définit alors aisément une bijection de l'ensemble des développements diadiques sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ en associant à $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ l'ensemble des n tels que $\alpha_n = 1$. Comme l'ensemble des développements diadiques impropres est dénombrable (car $\mathbb{Q}$ est dénombrable), l'ensemble des développements diadiques propres est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ par le Corollaire précédent. La non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ résulte alors de Proposition B.1.1, page précédente. □

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE

Bibliographie

[Bou65] N. Bourbaki – *Topologie générale*, eléments de mathématique éd., vol. Fascicule II, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1142, Hermann, 1965.

[Bou67] N. Bourbaki – *Théorie des ensembles*, eléments de mathématique éd., vol. Fascicule XX, Actualités scientifiques et industrielles, no. 1243, Hermann, 1967.

[Die68] J. Dieudonné – *Éléments d'analyse*, Tome I, Cahiers Scientifiques, fascicule XXVIII, Gauthiers-Villars, Paris, 1968.

[DS67] N. Dunford et J. T. Schwartz – *Linear operators*, Part I, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, 1967.

[Rud70] W. Rudin – *Real and complex analysis*, Series in Higer Mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 1970, existe en version française.