Université de BORDEAUX I
U.F.R. de Mathématiques et Informatiques
Maîtrise de Mathématiques pures

# ANALYSE REELLE

Philippe CHARPENTIER

Typeset by the TEX-preprocessor MultiTex

# TABLE DES MATIERES

## CHAPITRE V.

## EQUATION DE LAPLACE, FONCTIONS HARMONIQUES. 77



---

**Bibliographie**


**J. Bergh et J. Löfström:** Interpolation spaces: an introduction.
*Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften-223, Springer Verlag* 1976.

**N. Brézis:** Analyse fonctionnelle. Théorie et application.
*Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson* 1983.

**J. Dieudonné:** Eléments d'analyse: 1. Fondements de l'analyse moderne.
*Gauthier-Villars Paris.*

**W. Rudin:** Analyse réelle et complexe.
*Masson* 1987▷

**E. M. Stein:** Singular integrals and differentiability properties of functions.
*Princeton University press, Princeton, New Jersey* 1970.

# CHAPITRE 1

# COMPLEMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

## I. Le théoreme de Baire.

**Définition 1.1.1.**

*Soit $E$ un espace topologique. On dit que $E$ est un* **espace de Baire** *s'il est séparé et vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes:*
*(i) Si $(\Omega_n)_{n\in}$ est une suite d'ouverts de $E$ denses dans $E$ alors $\bigcap_n \Omega_n$ est dense dans $E$.*
*(ii) Si $(F_n)_{n\in}$ est une suite de fermés de $E$ d'intérieurs vides, alors $\bigcup^n F_n$ est d'intérieur vide.*

L'équivalence de (i) et (ii) se voit par passage au complémentaire.

**Proposition 1.1.1.**

*Soit $E$ un espace de Baire.*
*1 °) Tout ouvert de $E$ est de Baire.*
*2 °) L'image de $E$ par un homéomorphisme est de Baire.*

*Démonstration:* Directe à partie de la définition.

**Théoreme 1.1.1 (dit de la borne uniforme).**

*Soit $E$ un espace de Baire. Soit $f_i : E \longrightarrow \mathrm{R}$, $i \in I$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement. Alors l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite:*
*(a) $\exists \Omega$ ouvert non vide de $E$ tel que $\sup\limits_{x\in\Omega \sup i\in I} f_i(x) < \infty$.*
*(b) $\exists G$ $G_\delta$ (i.e. $G = \bigcap_n \Omega_n$, $\Omega_n$ ouverts) dense dans $E$ tel que $\forall x \in G, \sup\limits_{i\in I} f_i(x) = +\infty$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$. La semi-continuité des $f_i$ implique les ensembles $\Omega_n = \{\varphi(x) > n\}$ sont ouverts. La propriété de Baire entraîne donc que soit $\exists n/\Omega_n$ est non dense, ce qui implique (a), soit $\bigcap_n \Omega_n = G$ est dense dans $E$, ce qui est (b).

**Remarque.** Le théorème implique aussitôt que si $\left\{x \in E / \sup_i f_i(x) = +\infty\right\}$ est contenu dans un fermé d'intérieur vide, alors l'ensemble des points *au voisinage desquels* $\sup_i f_i(x)$ est majoré est dense dans $E$.

**Proposition 1.1.2.**
*Un espace topologique localement compact est de Baire.*

*Démonstration.* Soit $\Omega_n$ une suite d'ouverts denses de $E$. Soit $x \in E$, et soit $\mathcal{V}(x)$ un voisinage ouvert relativement compact de $x$. Par récurrence on construit facilement une suite de compacts non vides $K_n$ de $E$ tels que $K_n \subset \mathcal{V}(x) \cap \Omega_1 \cap ... \cap \Omega_n$ et $K_n$ contenu dans l'intérieur de $K_{n-1}$ $(n > 1)$. Par conséquent, $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$, ce qui entraîne $\mathcal{V}(x) \cap \Omega_n \neq \emptyset$.

**Théoreme 1.1.2.(Théoreme de Baire)**
*Un espace métrique complet est un espace de Baire.*

*Démonstration.* Soit $\Omega_n$ une suite d'ouverts denses de $E$ espace métrique complet. Pour montrer que $\bigcap_n \Omega_n$ est non vide, on construit par récurrence une suite $(x_n)$ d'éléments de $E$ et une suite $(r_n)$ de réels positifs, $0 < r_n \leq 1/n$, telles que:

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset \Omega_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

($B(a, t)$ désignant la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $t$): on prends $x_1 \in \Omega_1$; supposons les $x_p$, $r_p$ construits pour $p \leq n$. $\Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est un ouvert non vide et contient donc l'adhérence d'une boule ouverte non vide $B(x_{n+1}, r_{n+1})$. Alors pour $p \geq 1$, $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$, ce qui implique que $(x_n)$ est une suite de Cauchy donc converge vers un point $x$ de $E$. Par construction $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ $\forall n$ donc $x \in \bigcap_n \Omega_n$. Enfin pour voir que $\bigcap_n \Omega_n$ est dense, il suffit de voir qu'elle rencontre tout ouvert non vide $V$ de $E$ et pour cela il suffit d'appliquer ce qui précède à l'espace de Baire $V$ et aux ouverts $\Omega'_n = \Omega_n \cap V$.

**Exercices.**
1°) $E$ métrique complet, $F$ métrique. $f_n : E \longrightarrow F$ continues telles que $\forall x \in E$, $\lim_n \to_\infty f_n(x) = f(x)$. Alors l'ensemble des points de continuité de $f$ est dense dans $E$.
2°) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{R})$. On suppose que $\forall x \in \mathrm{R}$, $\exists n = n(x) \in \mathrm{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors $f$ est un polynôme.

## 2. Application aux espaces normés.

**Théoreme 1.2.1 (théorème de Banach-Steinhaus).**
*Soient $E$un espace de Banach, $F$ un espace normé et $f_{\mathrm{i}}$, $i \in I$, une famille d'application lineaires continues de $E$ dans $F$. Alors l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite:*
*(a)* $\sup\limits_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \|f_{\mathrm{i}}\| < \infty$.
*(b)* $\exists G$, *$G_\delta$ dense dans $E$ tel que* $\sup\limits_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \|f_{\mathrm{i}}(x)\| = +\infty$ *pour tout $x \in G$.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier du théorème 1.1.1.

**Exercices.**

1 ° ) Soit $a_{\mathrm{n}} \in \mathrm{R}$. Si $\forall x = (x_{\mathrm{n}}) \in l^2$ on a $\sup\limits_{\mathrm{n}} \left| \sum\limits_{1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}} \right| < +\infty$, alors $(a_{\mathrm{n}}) \in l^2$.

2 ° ) $\exists f \in \mathcal{C}(]-\pi, +\pi[)$, $f(-\pi) = f(\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en zéro.

**Théorème 1.2.2 (théorème de l'application ouverte).**
*Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Si $f$ est surjective alors $f$ est ouverte (i.e. si $B$ est la boule unité ouverte de $E$, $f(B)$ contient un voisinage de 0 dans $F$).*

*Démonstration.* Soit $B_{\mathrm{E}}$ (resp. $B_{\mathrm{F}}$) la boule unité ouverte de $E$ (resp. $F$). Par hypothèse, $\bigcup\limits_{\mathrm{n}\in \mathrm{N}} \overline{f(nB_{\mathrm{E}})} = F$. Par le théorème de Baire il existe donc $n \in \mathrm{N}$ tel que $\overline{f(nB_{\mathrm{E}})}$ contient un ouvert non vide $\Omega$. Par linéarité, il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{f(2nB_{\mathrm{E}})} \supset rB_{\mathrm{F}}$et donc un $\delta > 0$ tel que $\overline{f(B_{\mathrm{E}})} \supset \delta B_{\mathrm{F}}$. Soit $e > 0$ fixé. Soit $y \in \delta B_{\mathrm{F}}$. Il existe donc $x_1 \in B_{\mathrm{E}}$ tel que $\|f(x_1) - y\| \leq \frac{\delta\epsilon}{2}$. Soit $y_1 = y - f(x_1) \in \frac{\epsilon}{2}\delta B_{\mathrm{F}}$; il existe $x_2 \in \frac{\epsilon}{2} B_{\mathrm{E}}$ tel que $\|y_1 - f(x_2)\| = \|y - f(x_1 + x_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2^2}\delta$. Par récurrence on voit qu'il existe une suite $x_{\mathrm{n}} \in \frac{\epsilon}{2^{\mathrm{n}}} B_{\mathrm{E}}$ telle que $\|y - f(\Sigma_1^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}})\| \leq \frac{\epsilon}{2^{\mathrm{n}}}\delta$. Alors la série $\Sigma_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}}$ converge normalement, $x = \sum\limits_{1}^{\infty} x_{\mathrm{i}} \in (1+\epsilon) B_{\mathrm{E}}$ et $y = f(x)$. Ainsi $\delta B_{\mathrm{F}} \subset f((1+\epsilon)B_{\mathrm{E}})$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui montre que $\delta B_{\mathrm{F}} \subset f(\overline{B_{\mathrm{E}}})$, et le théorème s'en déduit aussitôt.

**Théorème 1.2.3 (théorème d'isomorphie de Banach).**
*Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Si $f$ est bijective alors $f^{-1}$ est continue.*

*Démonstration.* Conséquence immédiate du théorème 1.2.2.

**Théorème 1.2.4 (théorème du graphe fermé).**

*Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour que $f$ soit continue, il faut et il suffit que son graphe soit fermé dans $E \times F$.*

*Démonstration.* Soit $G \subset E \times F$ le graphe de $f$. $G$ est un espace de Banach et $(x, f(x)) \longrightarrow x$ est continue de $G$ dans $E$. D'après le théorème 1.2.3, elle est bicontinue, ce qui signifie que $f$ est continue.

**Exemple.** Soient $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes pour lesquelles un espace vectoriel $E$ est complet. Si $\exists M$ tel que $\| \|_1 \leq M\| \|_2$, alors les deux normes sont équivalentes.

## 3. Le théorème de Hahn-Banach.

**Théorème 1.3.1 (théorème de Hahn-Banach).**

*1 ◦) <u>Cas</u> <u>réel</u>: soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathrm{R}$, $p : E \longrightarrow \mathrm{R}$ une application sous-linéaire (i.e. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ si $\lambda \geq 0$), $V$ un sous espace vectoriel de $E$ et $f$ une forme linéaire sur $V$ telle que $f(y) \leq p(y)$ pour tout $y \in V$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $E$ prolongeant $f$ telle que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

*2 ◦) <u>Cas</u> <u>réel</u> <u>ou</u> <u>complexe</u>: soit $E$ un espace vestoriel sur $\mathrm{R}$ ou $\mathrm{C}$. Les hypothèses étant les mêmes qu'au 1 ◦) avec en plus que $p$ est une semi-norme, on a la même conclusion avec $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

*Démonstration.* 1 ◦) <u>cas</u> <u>réel</u>. L'ensemble des couples $(W, \varphi)$ où $W$ est un sous espace vectoriel de $E$ contenant $V$ et $\varphi$ une forme linéaire sur $W$ prolongeant $f$ et telle que $\varphi \leq p$ est clairement inductif; par suite (d'après le lemme de Zorn) il possède un élément maximal $(W_0, \varphi_0)$. Si $W_0 = E$ c'est terminé. Supposons donc $W_0 \neq E$ et soient $x_0 \in E \backslash W_0$, $W_1 = W_0 \oplus \mathrm{R}x_0$. Définissons $\varphi_1 : W_1 \longrightarrow \mathrm{R}$ par $\varphi_1(x_{\mathrm{W}_0} + \lambda x_0) = \varphi_0(x_{\mathrm{W}_0}) + \lambda c$ où $c \in \mathrm{R}$ est à choisir. Remarquons maintenant que pour $y_1$, $y_2$ dans $W_0$, on a $\varphi_0(y_1 - y_2) \leq p(y_1 - y_2) \leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0)$, d'où:

$$-\varphi_0(y_2) - p(-y_2 - x_0) \leq -\varphi_0(y_1) + p(y_1 + x_0)$$

On choisit alors $c = c_0$ avec

$$\underset{y_2 \in W_0}{sup} (-\varphi_0(y_2) - p(-y_2 - x_0)) \leq c_0 \leq \underset{y_1 \in W_0}{inf} (-\varphi_0(y_1) + p(y_1 + x_0)).$$

Pour trouver une contradiction avec le fait que $(W_0,\varphi_0)$ est maximal, montrons que $\varphi_1 \leq p$: soit $x = x_{\mathrm{W}_0} + \lambda x_0 \in W_1$,

(a) si $\lambda = 0$, $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) \leq p(x)$;

(b) si $\lambda > 0$, on a

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_0(x_{W_0}) + \lambda\Big(-\varphi_0\Big(\frac{x_{W_0}}{\lambda}\Big) + p\Big(\frac{x_{W_0}}{\lambda} + x_0\Big)\Big) = p(x_{W_0} + \lambda x_0) = p(x).$$

(c) si $\lambda < 0$, on a

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_0(x_{W_0}) + \lambda\Big(-\varphi_0\Big(\frac{x_{W_0}}{\lambda}\Big) - p\Big(-\frac{x_{W_0}}{\lambda} - x_0\Big)\Big) = p(x_{W_0} + \lambda x_0) = p(x).$$

2 ° ) cas réel ou complexe:

(a) Dans le cas réel, puisque $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, on a $-\tilde{f}(x) \leq p(-x) = p(x)$.

(b) Dans le cas complexe, on remarque que $if(x) = f(ix)$ entraîne que $\mathcal{I}mf(x) = -\mathcal{R}ef(ix)$, et par suite, $f(x) = \mathcal{R}ef(x) - i\mathcal{R}ef(ix)$. On applique alors le résultat du cas réel pour prolonger $\mathcal{R}ef$ en $\tilde{g}$, et on pose $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$. Clairement $\tilde{f}$ est complexe linéaire, et, en choisissant $\theta$ de sorte que $e^{\mathrm{i}\theta}\tilde{f}(x)$ soit réel, il vient

$$\left|\tilde{f}(x)\right| = \left|\tilde{f}\left(e^{i\theta}x\right)\right| = \left|\tilde{g}\left(e^{i\theta}x\right)\right| \leq p\left(e^{i\theta}x\right) = p(x).$$

**Théorème 1.3.2 (théorème de Hahn-Banach géométrique).**

*Soit $E$ un espace normé sur* R *ou* C. *Soient $A$ un ouvert convexe non vide de $E$ et $M$ une sous variété linéaire affine non vide de $E$ telle que $M \cap A \neq \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine fermé $H$ de $E$ tel que $M \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.*

*Démonstration.* 1 ° ) cas réel. Par translation, on peut supposer que $0 \in A$. Soit $p$ la jauge de $A$ (i.e. $p(x) = \inf\left\{\lambda > 0/x \in \lambda A\right\}$). Il est clair que $p \geq 0$, et que, pour $\alpha \geq 0$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. Vérifions que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$: on peut supposer que $p(x+y) = 1$; si on avait $p(x) + p(y) < 1$, $\exists \lambda_1, \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ tels que $x + y \in \lambda_1 A + \lambda_2 A \subset A$; par suite on aurait $p(x+y) < 1$. De plus, on a clairement $A = \left\{x/p(x) < 1\right\}$. Soit $V$ le sous espace vectoriel engendré par $M$. Puisque $0 \notin M$, $M$ est un hyperplan de $V$, il existe donc une forme linéaire $f$ sur $V$ telle que $M = \left\{f = 1\right\}$. Si $y \in V$, $f(y) = a > 0$, on a $y/a \in M$ et par suite, $f\left(\frac{y}{a}\right) = 1 \leq p\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a}p(a)$ et donc , $f(y) \leq p(y)$ pour tout $y \in V$ puisque $p \geq 0$. Par le théorème 1.3.1, il existe donc une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $E$ prolongeant $f$ telle que $\tilde{f} \leq p$. En particulier $\tilde{f}$ est continue, car bornée sur le voisinage $A$ de zéro, et $\left\{\tilde{f} = 1\right\}$ répond à la question.

2 ° ) cas complexe. Cette fois-ci, on peut supposer que $M$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Le premier cas implique que $M \subset H_0$ où $H_0$ est un hyperplan fermé réel tel que $H_0 \cap A = \emptyset$. Alors $H = H_0 \cap iH_0$ est un hyperplan complexe fermé qui contient $M$ puisque $iM = M$.

**Proposition 1.3.1.**

*Soit $E$ un espace normé.*

*1 ° ) Soient $V$ un sous espace vectoriel de $E$ et $f \in V'$ ($V'$ étant le dual de $E$). Alors il existe $\tilde{f} \in E'$ prolongeant $f$ telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

*2 ° ) Soit $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Il existe $f \in E'$ telle que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$ (existence du dual).*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach.

**Corollaire**

*Soit $E$ un espace normé.*
*1°) Soit $x_0 \in E$. $x_0 = 0$ si et seulement si $\forall f \in E'$, $f(x_0) = 0$.*
*2°$vx \in E$, $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1, f \in E'} |f(x)|$. Ou encore, l'application canonique de $E$ dans $E''$ est une isométrie (pour la norme sur $E''$).*

**Proposition 1.3.2.**

*Soient $E$ un espace normé, $V$ un sous espace vectoriel de $E$ tel que $\overline{V} \neq E$, $x_0 \in E \backslash \overline{V}$ et $d = d(x_0, V)$. Alors il existe $f' \in E'$ telle que:*
*(a) $f_{|V} = 0$;*
*(b) $\|f\| = 1/d$;*
*(c) $f(x_0) = 1$.*

*Démonstration.* Soit $W = V \oplus Kx_0$, et posons $g(x_v + \lambda x_0) = \lambda$. Alors $g_{|V} = 0$ et $g(x_0) = 1$. Si $x = x_V + \lambda x_0 \in W$, $\|x\| = |\lambda| \left\| \frac{x_0}{\lambda} + x_0 \right\| \geq |\lambda| d$ d'où $|g(x)| \leq \frac{1}{d} \|x\|$ soit $\|g\| \leq 1/d$. Par ailleurs, si $x_n \in V$ est telle que $d_n = \|x_n - x_0\|$ tend vers $d$, on a $g\left(\frac{x_n - x_0}{d_n}\right) = -\frac{1}{d_n}$ ce qui entraîne $\|g\| \geq 1/d_n$. Ainsi $\|g\| = 1/d_n$. Pour conclure, il suffit d'appliquer la proposition 1.3.1, 1°).

**Proposition 1.3.3. (théorème des moments)**

*Soient $E$ un espace vectotiel sur* C, *$x_n \in E$, $\alpha_n \in$* C *et $c > 0$. Les propriétées suivantes sont équivalentes:*
*(i) $\exists f \in E'$ telle que $\forall n$, $f(x_n) = \alpha_n$ et $\|f\| \leq c$.*
*(ii) $\forall \beta_n \in$* C, *$\forall N \in$* N *on a* $\left| \sum_0^N \beta_n \alpha_n \right| \leq c \left\| \sum_0^N \beta_n x_n \right\|$.

*Démonstration.* Pour voir que (ii) implique (i), on considère $V$ le sous-espace vectoriel engendré par les $x_n$. Soit $f_0$ la forme linéaire définie sur $V$ par $f_0(x_n) = \alpha_n$, $\forall n$. (ii) donne aussitôt que $\|f_0\| \leq c$, et on conclut avec le théorème de Hahn-Banach.

## 4. Dual d'un espace normé, topologies faibles.

**Rappels.** Soit $E$ un espace normé. Le dual $E'$ de $E$ est l'espace des formes linéaires continues sur $E$. La topologie forte sur $E'$ est la topologie de la norme ($\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$). On note $E''$ le dual de $E'$ et on l'appelle le bidual de $E$. Le 2°) du corollaire de la proposition 1.3.1 dit que $E$ s'injecte isométriquement dans $E''$ lorsque ce dernier est muni de la topologie forte. En général, $E$ est strictement contenu dans $E''$. On dit que $E$ est réfexif si $E = E''$.

**Proposition 1.4.1.**

*Soit $E$ un espace normé. Pour la topologie forte $E'$ est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Evidente.

Il est clair que pour la toplogie forte les formes $f \longrightarrow f(x)$ (resp. $x \longrightarrow f(x)$) sont continues sur $E'$ (resp.$E$). On pose alors la définition suivante:

**Définition 1.4.1.**

*Soient $E$ un espace normé et $E'$ son dual.*
*1 $^\circ$) On appelle* **toplogie faible** *sur $E'$ et on la note $\sigma(E';E)$, la topologie sur $E'$ la moins fine rendant continues les applications linéaires $f \longrightarrow f(x)$, $x \in E$.*
*2 $^\circ$) On appelle* **topologie faible** *sur $E$ et on la note $\sigma(E;E')$ la topologie sur $E$ la moins fine rendant continue les éléments de $E'$.*

Ces toplogies existent et sont moins fines que celles des normes. Il n'est pas difficile de décrire ces topologies en donnant des bases de voisinages des points. Par exemple, si $f_0 \in E'$, une base de voisinnages de $f_0$ pour $\sigma(E';E)$ est donnée par les ensembles

$$\{\, f \in E'/|f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon,\ x_i \in E,\ 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathrm{N}\}\,.$$

Comme on le voit, ce sont les translatées des voisinages de zéro par $f_0$: la topologie $\sigma(E';E)$ rend continues l'addition et la multiplication par un scalaire. On dit que $E'$ muni de $\sigma(E';E)$ est un espace vectoriel toplogique localement convexe qui est séparé (théorème de Hahn–Banach); sa toplogie est définie par une famille de semi–normes, qui sont définies par $p_x(f) = |f(x)|$, $x \in E$.

La même description est valable pour $\sigma(E;E')$. Remarquons de plus que $\sigma(E'';E')$ induit sur $E$ $\sigma(E;E')$.

En général les toplogies faibles ne sont pas métrisables (i.e. ne peuvent pas être définies par une distance). Toutefois:

**Proposition 1.4.2.**

*Soit $E$ un espace normé. Si $E$ est séparable (c'est à-dire–contient un sous–ensemble dénombrable dense) alors sur toute partie $B \subset E'$ bornée pour la norme, la topologie faible $\sigma(E';E)$ est métrisable.*

*Démonstration.* Soit $A = \{a_n, n \in \mathrm{N}\}$ un sous–ensemble dénombrable dense. Montrons que pour $f_0 \in B$ les ensembles

$$\mathcal{V}_{\epsilon,K} = \{\, f \in B/|f(a_n) - f_0(a_n)| < \epsilon, n \in K,\ K \subset \mathrm{N},\ K\ fini\}\,,$$

forment une base de voisinages de $f_0$ dans $B$. Soit

$$W = \{\, f \in B/|f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon,\ x_i \in E,\ 1 \leq i \leq k\}$$

un voisinage de $f_0$ pour $\sigma(E';E)$ dans $B$. Soit $M = \sup\limits_{f \in B} \|f\|$. Pour chaque $i$ soit $a_{n_i} \in A$ tel que $\|a_{n_i} - x_i\| \leq \frac{\epsilon}{3M}$. Alors $\forall f \in B$ et $\forall i$ on a $|f(a_{n_i}) - f(x_i)| \leq \epsilon/3$, ce qui entraîne $|f(x_i) - f_0(x_i)| \leq 2\epsilon/3 + |f(a_{n_i}) - f_0(a_{n_i})|$. Par suite si on prend $K = \{n_i, 1 \leq i \leq k\}$, il vient $\mathcal{V}_{\epsilon,K} \subset W$. Si on définit une distance $d$ sur $B$ en posant

$$d(f, f_0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{|f(a_n) - f_0(a_n)|}{2^n(1 + |f(a_n) - f_0(a_n)|)},$$

on voit facilement que les $\mathcal{V}_{\epsilon,K}$ forment une base de voisinages de $f_0$ pour la distance $d$ et par conséquent $d$ définit la topologie $\sigma(E'; E)$ sur $B$.

**Proposition 1.4.3.**

*Soit $E$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
*(i) $dimE = +\infty$.*
*(ii) $\sigma(E', E)$ est strictement moins fine que la topologie forte.*

*Démonstration.* 1°) (i)⇒(ii). Soit $(a_i)$ une suite finie d'éléments de $E$. En considérant un sous-espace de $E$ de dimension finie contenant strictement les $a_i$, on construit facilement sur ce sous-espace une forme linéaire de norme 1 qui s'annule sur les $a_i$. D'après la proposition 1.3.1, il existe donc $f \in E'$ telle que $f(a_i) = 0$ pour tout $i$ et $\|f\|$=1. Ceci prouve que 0 est adhérent à la sphère unité pour $\sigma(E'; E)$.

2°) (ii)⇒(i). Cela résulte du lemme suivant:

**Lemme 1.4.1.**

*Tout espace vectoriel topologique séparé $E$ de dimension finie sur $K$ ($K = \mathrm{R}$ ou $\mathrm{C}$) est isomorphe à $K^n$ ($n$ =dimension de $E$).*

*Démonstration.* On le démontre par récurrence sur $n$.

(a) $n = 1$. Soit $a \in E$. Il suffit de montrer que $\xi \longrightarrow \xi a$ est d'inverse continue. Soit $\alpha > 0$. $E$ étant séparé, il existe un voisinage $V$ de 0 dans $E$ ne contenant pas $\alpha a$. La multiplication par un scalaire étant continue dans $K \times E$, il existe $\beta > 0$ et $V'$ voisinage de zéro dans $E$ tels que $|\lambda| < \beta$ et $x \in V'$ entrainent $\lambda x \in V$. Alors si $W = \beta V'$, pour $|\lambda| < 1$ et $x \in W$, on a $\lambda x \in V$. Supposons donc $\xi a \in W$ et montrons que $|\xi| < \alpha$, ce qui achèvera le cas $n = 1$: en effet, dans le cas contraire, il existerait un $\xi$ de module $> \alpha$ tel que $\xi a \in W$, et alors $\alpha a = (\alpha/\xi)\xi a \in V$, contrairement à l'hypothèse.

(b) $n > 1$. On raisonne donc par récurrence sur la dimension $n$ de $E$: supposons le résultat démontré pour $dimE \leq n-1$. Soit $(e_i)_{i \leq n}$ une base de $E$, et soit $H$ le sous-espace vectoriel engendré par les $e_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Par l'hypothèse de récurrence, $H$ est un sous espace fermé de $E$. On utilise maintenant le lemme suivant:

**Lemme 1.4.2.**

*Dans un espace vectorel topologique séparé $E$ soit $H$ un hyperplan d'équation $f = 0$ Alors $H$ est fermé si et seulement si $f$ est continue.*

*Démonstration.* Montons que si $H$ est fermé alors $F$ est continue. Soit $\epsilon > 0$, et soit $x \in E$ tel que $f(x) = \epsilon$. Comme $x + H$ est fermé, et $0 \notin x + H$, il existe un voisinage de 0 dans $E$ tel que $V \cap (x + H) = \emptyset$ et de plus, en raisonnant comme dans le (a) du lemme précédent, on peut supposer que pour $|\lambda| < 1$ $\lambda V \cap (x + H) = \emptyset$. Soit alors $y \in V$, et montrons que $|f(y)| < \epsilon$: dans le cas contraire, on aurait $|f(y)| = \alpha > \epsilon$ d'où $f\left(\frac{\epsilon}{\alpha} y\right) = \epsilon$, donc $\frac{\epsilon}{\alpha}V \cap (x+H) \neq \emptyset$.

Achevons maintenent la preuve du (b) du lemme 1.4.1: le lemme 1.4.2 montre que $\sum_1^{\mathrm{n}} \xi_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}} \longrightarrow \xi_{\mathrm{n}}$ est continue, et par l'hypothèse de récurrence, on conclut que $\sum_1^n \xi_i e_i \longrightarrow (x_i, ..., \xi_n)$ est continue de $E$ dans $K^{\mathrm{n}}$.

**Remarque.** Un fermé pour la topologie forte n'est pas, en général, fermé pour la topologie faible. Toutefois, pour les convexes, les fermetures fortes et faibles sont les mêmes.

**Théorème 1.4.1 (théorème de Banach–Alaoglu).**
*Soit $E$ un espace normé. Toute partie fortement bornée de $E'$ est relativement compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

*Démonstration.* Faisons la démonstration dans le cas $K = \mathrm{C}$. Soient $B$ une partie bornée de $E'$, $M = \sup_{\mathrm{f} \in \mathrm{B}} \|f\|$ et $B_{\mathrm{M}} = \Big\{ f \in E'/\|f\| \leq M \Big\}$. Si, pour $x \in E$, $Dx = \Big\{ z \in \mathrm{C}/|z| \leq \|x\| \Big\}$ et $X = \prod_{\mathrm{x} \in \mathrm{E}} D_{\mathrm{x}}$, alors, par le théorème de Tychonov, $X$ muni de la topologie produit est compact. Comme, par définition de la topologie produit, une base de voisinage de $(z^0_{\mathrm{x}}) \in X$ est formée par les ensembles

$$\left\{ (z_{\mathrm{x}}) \in X/ \left| z_{x_{\mathrm{i}}} - z^0_{x_{\mathrm{i}}} \right| < \epsilon,\ x_{\mathrm{i}} \in E,\ 1 \leq i \leq k \right\},\ \epsilon > 0,\ k \in \mathrm{N},$$

l'application $i : B_{\mathrm{M}} \longrightarrow X$ définie par $f \longrightarrow \Big( f(x) \Big)_{\mathrm{x} \in \mathrm{E}}$ est un homéomorphisme sur son image, et on peut identifier (topologiquement) $B_{\mathrm{M}}$ à une partie $\tilde{B}$ de $X$. Pour conclure, il suffit de voir que $\tilde{B}$ est fermée dans $X$, ce qui est immédiat puisque les applications $(z_{\mathrm{x}}) \longrightarrow z_{\mathrm{x}}$ sont continues.

**Corollaire.**
*$E$ étant un espace normé séparable, toute boule fermée de $E'$ est un espace compact métrisable pour la topologie faible.*

*Démonstration.* Cela résulte du théorème 1.4.1 et de la proposition 1.4.2.

**Exemple.** Soit $(a_{\mathrm{n}})$ une suite de nombres complexes telle que les fonctions

$$S_{\mathrm{n}}(\theta) = \sum_{-n}^{+n} a_{\mathrm{i}} e^{i\theta}$$

forment un ensemble borné dans $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R})$, $p > 1$. Alors il existe $f \in L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R})$ telle que, pour tout $n$, $a_{\mathrm{n}}$ soit le $n^{\mathrm{i11me}}$ coéfficient de Fourier de $f$.

*Démonstration.* Puisque $p > 1$, $L^{\mathrm{p}}$ est le dual de $L^{\mathrm{q}}$, $1/p + 1/q = 1$. Comme $S_{\mathrm{n}}$ est une suite bornée dans $(L^{\mathrm{q}})'$, et $L^{\mathrm{q}}$ est séparable, on peut extraire de la suite $S_{\mathrm{n}}$ une sous-suite

$S_{\mathrm{n_j}}$ faiblement convergente vers $f \in L^{\mathrm{p}}$. Puisque

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\mathrm{nj}}(\theta)e^{-in\theta}d\theta,\ n_{\mathrm{j}} > |n|,$$

par passage à la limite, on obtient $a_{\mathrm{n}} = c_{\mathrm{n}}(f)$.

**Remarques suplémentaires** (sans démonstrations).

1 °) Toute forme linéaire continue sur $E''$ pour $\sigma(E''; E')$ appartient à $E'$.

2 °) La boule unité de $E$ est dense dans la boule unité de $E''$ pour $\sigma(E''; E')$. En particulier, $E$ est faiblement dense dans $E''$.

3 °) Un espace normé est réflexif si et seulement si sa boule unité est compacte pour $\sigma(E; E')$.

## 5. Espaces de Hilbert.

**Rappels élémentaires.**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $K$ (= R ou C).

-**Forme hermitienne** sur $E \times E$: $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ telle que $x \longrightarrow f(x, y)$ est linéaire, $y \longrightarrow f(x, y)$ est semi-linéaire et $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

-Si $K = \mathrm{R}$: $4f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y)$;

-Si $K = \mathrm{C}$: $4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy)$.

-$f(x, x) \in \mathrm{R}$.

-**Forme hermitienne positive**: $f(x, x) \geq 0$. Ces formes vérifient l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inegalité triangulaire. En particulier $\Big(f(x, x)\Big)^{1/2}$ est une semi-norme sur $E$ qui est une norme si $f$ est non dégénérée.

-**Espace préhilbertien**: $E$ muni de $< x, y >$ forme hermitienne positive. $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ est une semi-norme et on a les formules suivantes:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}e < x, y >,$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

(**théorème de la médiane**). Si $< x, y >$ est non dégénéré, $E$ est séparé: c'est un espace normé.

-**Espace de Hilbert**: espace préhilbertien séparé complet. Le complété d'un espace préhilbertien séparé est un espace de Hilbert.

**Exemples.** $K^{\mathrm{n}}$, $l^2_{\mathrm{I}} = \Big\{(x_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} / \sum_i |x_i| < +\infty\Big\}$, $\mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int f(t)\overline{g(t)}dt$.

**Théorème 1.5.1 (théorème des projections).**
*Soient $E$ un espace préhilbertien, $H \subset E$ un convexe non vide séparé et complet. Alors $\forall x \in E$, il existe un unique $P_{\mathrm{H}}(x) \in H$ tel que $\|x - P_{\mathrm{H}}(x)\|$ soit égal à la distance de $x$ à $H$. De plus, $P_{\mathrm{H}}(x)$ est l'unique $y \in H$ tel que $\forall z \in H$ on a $\mathcal{R}e < x-y, z-y > \leq 0$. $P_{\mathrm{H}}(x)$ s'appelle* **la projection de $x$ sur $H$.**

*Démonstration.* Soit $d = d(x, H)$. Si, $z, y \in H$, le théorème de la médiane donne

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \frac{1}{2}\|2x-y-z\|^2 + \frac{1}{2}\|z-y\|^2,$$

d'où

$$(*) \qquad \|z-y\|^2 \leq 2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2 - 4d^2.$$

L'unicité résulte aussitôt de $(*)$; l'existence se voit facilement: soit $x_{\mathrm{n}} \in H$ tel que $\|x - x_{\mathrm{n}}\|$ tend vers $d$ quand $n$ tend vers l'infini. Alors $(*)$ appliquée à $x_{\mathrm{p}}$ et $x_{\mathrm{q}}$ montre que la suite $(x_{\mathrm{n}})$ est de Cauchy et donc converge vers un point de $H$.

Démontrons maintenant la dernière partie. Soit $z \in H$. Pour $0 \leq t \leq 1$, $(1-t)P_{\mathrm{H}}(x) + tz \in H$ et par suite $\|x - P_{\mathrm{H}}(x)\| \leq \|x - P_{\mathrm{H}}(x) + t(P_{\mathrm{H}}(x) - z)\|$, ce qui donne $t\|P_{\mathrm{H}}(x) - z\|^2 + 2\mathcal{R}e < x - P_{\mathrm{H}}(x) + P_{\mathrm{H}}(x) - z > \geq 0$. D'où le résultat en faisant $t = 0$. Réciproquement, supposons que $y$ soit un élément de $H$ satisfaisant la propriété de l'énoncé. Alors $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\mathcal{R}e < x-y, y-z >$, ce qui montre que $\|x-z\| \geq \|x-y\|$.

**Proposition 1.5.1.**
*Dans les conditions du théorème 1.5.1, pour $x, y \in E$, on a $\|P_{\mathrm{H}}(x) - P_{\mathrm{H}}(y)\| \leq \|x-y\|$: $P_{\mathrm{H}}$ est contractante.*

*Démonstration.* En écrivant $x - y = P_{\mathrm{H}}(x) - P_{\mathrm{H}}(y) + x - y - P_{\mathrm{H}}(x) + P_{\mathrm{H}}(y)$, et en développant $\|x-y\|^2$, il vient, d'après le théorème 1.5.1

$$\|x-y\|^2 \geq \|P_{\mathrm{H}}(x) - P_{\mathrm{H}}(y)\|^2 + \|x - y - P_{\mathrm{H}}(x) + P_{\mathrm{H}}(y)\|^2,$$

ce qui donne le résultat.

**Proposition 1.5.2.**
*Soit $(H_{\mathrm{n}})$ une suite décroissante de parties convexes non vides séparées et complètes d'un espace préhilbertien $E$. Soit $H = \bigcap_{\mathrm{n}} H_{\mathrm{n}}$ de sorte que $H$ est convexe séparé et complet s'il est non vide. Alors:*
*(i) $n \longrightarrow \|x - P_{\mathrm{H_n}}(x)\|$, $x \in E$, est croissante;*
*(ii) $H \neq \emptyset$ si et seulement si $\exists x_0 \in E$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_0 - P_{\mathrm{H_n}}(x_0)\| < \infty$;*
*(iii) si $H \neq \emptyset$, $\forall x \in E$, $P_{\mathrm{H_n}}(x) \to P_{\mathrm{H}}(x)$ quand $n \to \infty$.*

*Démonstration.* Le (i) étant évident, montrons le (ii). Une des implications étant évidente, supposons que $d = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_0 - P_{H_n}(x_0)\| < \infty$ et montrons que $H \neq \emptyset$. Soit $B_0$ la boule fermée de centre $x_0$ et de rayon $d$; $(B_0 \cap H_n)_{n\in}$ est une suite décroissante d'ensembles fermés non vides contenus dans $H_0$; comme $H_0$ est complet, l'intersection des $B_0 \cap H_n$ est non vide, ce qui montre le résultat cherché. Montrons enfin le (iii). En reprenant les notations précédentes, si $\{y\} = \bigcap\limits_n B(x,d) \cap H_n$, on a $\|x - y\| = d(x,H)$ donc $y = P_H(x)$, et comme $\|x - P_{H_n}(x)\| \leq d$, on a $P_{H_n}(x) \in B(x,d) \cap H_n$, ce qui achève la preuve.

**Proposition 1.5.3.**
*Soient $H_n$, $n \in \mathrm{N}$, et $A$ des parties convexes non vides et complètes d'un espace préhilbertien $E$ telles que $H_n \subset H_{n+1} \subset A$, $n \in \mathrm{N}$. Posons $H = \overline{\cup_{n\in\mathrm{N}} H_n}$. Alors $H$ est un convexe non vide séparé complet, et, $\forall x \in E$, $P_{H_n}(x) \to P_H(x)$ quand $n \to \infty$.*

*Démonstration.* Il est clair que $\|x - P_{H_n}(x)\|$ converge en décroissant vers $d(x,H) = \|x - P_H(x)\|$. En écrivant alors $x - P_{H_n}(x) = x - P_H(x) + P_H(x) - P_{H_n}(x)$, il vient, d'après le théorème des projections,

$$\|x - P_{H_n}(x)\|^2 \geq \|x - P_H(x)\|^2 + \|P_H(x) - P_{H_n}(x)\|^2,$$

ce qui donne le résultat.

**Proposition 1.5.4.**
*Soit $V$ un sous-espace vectoriel séparé et complet d'un espace préhilbertien $E$. Alors $\forall x \in E$, $P_V(x)$ est l'unique $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$.*

*Démonstration.* Vérifions tout d'abord que $x - P_V(x) \in V^\perp$: en appliquant la relation $\mathcal{R}e < x - P_V(x), z - P_V(x) > \leq 0$ $z \in V$, à $z = y + P_V(x)$, $y \in V$, il vient $\mathcal{R}e < x - P_V(x), y > \leq 0$, et en remplaçant $y$ par $-y$ puis par $iy$ et par $-iy$, on obtient le résultat. Réciproquement, si $< x - y, z >= 0$ $\forall z \in V$, on a aussi $< x - y, z - y >= 0$ ce qui donne $y = P_V(x)$ par le théorème des projections.

**Proposition 1.5.5.**
*Dans les conditions ci-dessus, on a:*
*(i) $P_V$ est linéaire et $\|P_V\| \leq 1$ ($\|P_V\| = 1$ si $V \neq \{0\}$ et si $E$ est séparé).*
*(ii) $Ker(P_V) = V^\perp$ et $E = V \oplus Ker P_V$, la somme directe étant topologique.*
*(iii) Si $E$ est séparé, $V = (Ker P_V)^\perp$.*

*Démonstration.* Le (i) est immédiat d'après la proposition précédente car $\|x\|^2 = \|x - P_V(x)\|^2 + \|P_V(x)\|^2$. Voyons maintenant le (ii). Soit $x \in V^\perp$; par la proposition précédente, on a $< P_V(x), z >= 0, \forall z \in V$, ce qui donne $P_V(x) = 0$, et donc $Ker P_V \subset V^\perp$, et la réciproque est évidente, et la dernière assertion aussi. Vérifions maintenant le (iii). Par le (ii), on a $(Ker P_V)^\perp = V^{\perp\perp} \supset V$. Soit $x \in (Ker P_V)^\perp$; alors $< x, x - P_V(x) >= 0$, et comme $< P_V(x), x - P_V(x) >= 0$, il vient $x = P_V(x)$ donc $x \in V$.

**Proposition 1.5.6.**
*Soit $V$ un sous-espace vectoriel séparé et complet d'un espace préhilbertien $E$. Soit $W$ un sous espace fermé de $V$. Alors $\forall x \in E$, $P_{\mathrm{W}}(x) = P_{\mathrm{W}}(P_{\mathrm{V}}(x))$.*

*Démonstration.* Evidente.

**Théorème 1.5.2 (dual d'un Hilbert).**
*Soit $E$ un espace de Hilbert. $\forall f \in E'$ il existe un unique $a_{\mathrm{f}} \in E$ tel que, $\forall x \in E$, $f(x) =< x, a_{\mathrm{f}} >$. De plus, $f \longrightarrow a_{\mathrm{f}}$ est une isométrie semi- linéaire de $E'$ sur $E$.*

*Démonstration.* On peut supposer $f \neq 0$. Soient $H = Kerf$, $x_0 \in E \backslash H$, et $u = x_0 - P_{\mathrm{H}}(x_0)$. Alors $H$ est un hyperplan fermé de $E$ et le noyau de la forme linéaire non nulle $x \longrightarrow < x, u >$ est un hyperplan fermé contenant $H$ et donc égal à $H$. Par suite les deux formes linéaires sont proportionnelles, et il existe donc $\lambda \in K$ tel que $f(x) =< x, \overline{\lambda} u >$, $x \in E$. Il s'ensuit que $\lambda = \frac{f(u)}{\|u\|}$ et donc $a_{\mathrm{f}} = \overline{\frac{f(u)}{\|u\|}} u$. On en déduit immédiatement que $\|f\| = \|a_{\mathrm{f}}\|$; voyons de plus que $f \longrightarrow a_{\mathrm{f}}$ est semi-linéaire. Par exemple, $< x, a_{\mathrm{f+g}} - a_{\mathrm{f}} - a_{\mathrm{g}} >= (f+g)(x) - f(x) - g(x) = 0$, d'où $a_{\mathrm{f+g}} = a_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{g}}$, et de même on vérifie que $a_{\lambda \mathrm{f}} = \overline{\lambda} a_{\mathrm{f}}$.

**Définition 1.5.5.**
*Soient $E$ un espace de Hilbert et $E_{\mathrm{i}}$, $i \in I$ des sous espaces fermés de $E$. On dit que $E$ est* **somme hilbertienne** *des $E_{\mathrm{i}}$, $i \in I$, si:*
*(a) Pour $i \neq j$, $E_{\mathrm{i}}$ et $E_{\mathrm{j}}$ sont orthogonaux.*
*(b) Le sous-espace fermé engendré par les $E_{\mathrm{i}}$ est dense dans $E$.*

**Théorème 1.5.3.**
*Soit $E_{\mathrm{i}}$, $i \in I$ une famille de sous espaces fermés d'un espace de Hilbert $E$. On suppose que $E$ est somme directe hilbertienne des $E_{\mathrm{i}}$. Pour $x \in E$, soit $x_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{E_i}}(x)$, $i \in I$. Alors $\left(\|x_{\mathrm{i}}\|^2\right)_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ est sommable dans R, $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est sommable dans $E$ et on a $\|x\|^2 = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \|x_{\mathrm{i}}\|^2$, $x = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} x_{\mathrm{i}}$. De plus, avec les mêmes notations, si $x, y \in E$, on a $< x, y >= \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} < x_{\mathrm{i}}, y_{\mathrm{i}} >$. Réciproquement, si $x_{\mathrm{i}} \in E_{\mathrm{i}}$, $i \in I$, sont tels que la famille $\left(\|x_{\mathrm{i}}\|^2\right)_{i \in I}$ est sommable, alors $(x_{\mathrm{i}})_{i \in I}$ est sommable et $x = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} x_{\mathrm{i}}$ est le seul élément de $E$ tel que $P_{\mathrm{E_i}}(x) = x_{\mathrm{i}}$, $\forall i \in I$.*

*Démonstration.* Soient $K$ une partie finie de $I$ et $z$ un élément de la somme directe des $E_{\mathrm{i}}$ pour $i \in K$. On a

$$\|x - z\|^2 = \left\| x - \sum_K x_{\mathrm{i}} \right\|^2 + \left\| \sum_K x_{\mathrm{i}} - z \right\|^2 + 2\mathcal{R}e < x - \sum_K x_{\mathrm{i}}, \sum_K x_{\mathrm{i}} - z > .$$

Or, si $w = \sum_K w_i \in \oplus_K E_i$,

$$< x - \sum_K x_i, w >= \sum_j < x - \sum_i x_i, z_j > = \sum_j < \sum_{i \neq j} x_i, z_j > = 0,$$

et par suite, $\|x - z\| \geq \|x - \sum_K x_i\|$, ce qui montre que $\sum_K x_i = P_{\oplus_K E_i}(x)$ d'où il s'ensuit, d'après la proposition 1.5.5, que $\sum_K \|x_i\|^2 = \left\| \sum_K x_i \right\|^2 \leq \|x\|^2$, c'est à dire que la famille $\left(\|x_i\|^2\right)$ est sommable et que $\|x\|^2 = \left\| x - \sum_i x_i \right\|^2 + \sum_i \|x_i\|^2$. Comme le sous-espace engendré par les $E_i$ est dense dans $E$, $\left\| x - \sum_i x_i \right\|$ tend vers zéro quand $n$ tends vers l'infini, ce qui montre les deux premières relations de l'énoncé. La troisième en résulte par continuité du produit scalaire, et la dernière est évidente.

**Corollaire.**

*Soit $E_i$, $i \in I$ une famille de sous-espaces complets d'un espace préhilbertien séparé $E$ telle que pour $i \neq j$, $E_i \perp E_j$. Soit $V$ le sous-espace engendré par les $E_i$. Pour $x \in E$ posons $x_i = P_{E_i}(x)$. Alors:*

*(i)* $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 \leq \|x\|^2$.

*(ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

*(a)* $x \in V$;

*(b)* $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 = \|x\|^2$;

*(c)* $(x_i)$ *est sommable dans* $E$ *et* $x = \sum_{i \in I} x_i$.

*(iii) Si $V$ est complet, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable dans $E$ et* $\sum_{i \in I} x_i = P_V(x)$, $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 = \|P_V(x)\|^2$.

*Démonstration.* Immédiat en utilisant la proposition 1.5.5 pour écrire $E = V \oplus V^{\perp}$.

**Définition 1.5.2.**

*Dans un préhilbertien $E$ on dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de $E$ est* **orthogonale** *si $i \neq j$ implique $< e_i, e_j >= 0$. On dit qu'elle est* **orthonormale** *si elle vérifie de plus $\|e_i\| = 1$ $\forall i \in I$.*

**proposition 1.5.7.**

*Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien $E$. Posons $E_i = K e_i$. Alors, $\forall x \in E$, $P_{E_i}(x) =< x, e_i > e_i$.*

*Démonstration.* Evidente.

**Théorème 1.5.4.**
*Soit $(e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien séparé $E$, et soit $V$ le sous espace fermé engendré par les $e_{\mathrm{i}}$.*
*(i)* $\forall x \in E, \sum_{\mathrm{i}} |< x, e_{\mathrm{i}} >|^2 \leq \|x\|^2$.
*(ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
*(a)* $x \in V$;
*(b)* $\|x\|^2 = \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} |< x, e_{\mathrm{i}} >|^2 \leq \|x\|^2$;
*(c)* $\Big( < x, e_{\mathrm{i}} > e_{\mathrm{i}}\Big)_{i\in I}$ *est sommable de somme* $x$.
*(iii) Si* $V$ *est complet:*
*(a)* $\forall x \in E, \Big( < x, e_{\mathrm{i}} > e_{\mathrm{i}}\Big)_{i\in I}$ *est sommable de somme* $P_{\mathrm{V}}(x)$;
*(b)* $\forall x, y \in V, < x, y >= \sum_{\mathrm{i}} < x, e_{\mathrm{i}} > \overline{< y, e_{\mathrm{i}} >}$;
*(c)* $\forall x, y \in E, < P_{\mathrm{v}}(x), P_{\mathrm{V}}(y) >= \sum_{\mathrm{i}} < x, e_{\mathrm{i}} > \overline{< y, e_{\mathrm{i}} >}$;
*(d)* $\forall (\lambda_{\mathrm{i}}) \in l^2(I)$ *il existe un unique* $x \in V$ *tel que,* $\forall i \in I$, $\lambda_{\mathrm{i}} =< x, e_{\mathrm{i}} >$.

*Démonstration.* Résulte aussitôt du théorème 1.5.3 et de son corollaire.

**Corollaire.**
*Soit $(e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ une famille d'éléments d'un espace préhilbertien séparé $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
*(a)* $(e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ *est totale;*
*(b)* $\forall x \in E, \Big( < x, e_{\mathrm{i}} > e_{\mathrm{i}}\Big)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ *est sommable de somme* $x$;
*(c)*$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} |< x, e_{\mathrm{i}} >|^2$;
*(d)* $\forall x, y \in E, < x, y >= \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} < x, e_{\mathrm{i}} > \overline{< y, e_{\mathrm{i}} >}$;
*De plus si $E$ est un espace de Hilbert, ces conditions sont de plus équivalentes à:*
$\Big\{ < x, e_{\mathrm{i}} >= 0,\ \forall i \in I \Big\} \Rightarrow x = 0.$
*Une telle famille s'appelle une* **base hilbertienne** *de $E$.*

**Remarque.** Si $(e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ est une base hilbertienne de $E$, $E$ est isomorphe à un sous-espace de $l^2_{\mathrm{I}}$.

**Théorème 1.5.5 (théorème de la base incomplète).**
*Soit $E$ un espace de Hilbert, et soit $L$ une partie de $E$ orthonormale (i.e. $\forall x, y \in L$, $x \neq y$, $< x, y >= 0$ et $\|x\| = 1$). Alors il existe une base hilbertienne $B$ de $E$ telle que $L \subset B$.*

*Démonstration.* D'après le lemme de Zorn, il existe une partie $B$ de $E$ orthonormale contenant $L$ maximale. Si $B$ n'est pas totale, $\exists y \in E$ tel que $< x, y >= 0$ $\forall x \in B$, $y \neq 0$, et $B \cup \{y\}$ contredit la maximalité de $B$.

**Remarques.**

1 ° ) Il existe des espaces préhilbertiens qui ne possèdent pas de bases hilbertiennes.
2 ° ) Tout espace de Hilbert est isomorphe à un $l^2_{\mathrm{I}}$.

**Proposition 1.5.8.**

*Dans un espace de Hilbert deux bases hilbertiennes sont équipotentes. Leur cardinal s'appelle la dimension hilbertienne de l'espace.*

*Démonstration.* On peut supposer que l'espace est de dimension infinie. Soit donc $B$ et $C$ deux bases infinies de l'espace. Pour tout $x \in B$ posons $A_{\mathrm{x}} = \Big\{y \in C / < x, y > \neq 0\Big\}$. D'après le (c) du corollaire du théorème 1.5.4, $A_{\mathrm{x}}$ est dénombrable. Comme, $\forall y \in C$, $\exists x \in B$ $\top$el que $< x, y > \neq 0$, on $C = \bigcup_{\mathrm{x} \in \mathrm{B}} A_{\mathrm{x}}$, et il existe une injection de $C$ dans $\mathrm{N} \times B$. Comme $\mathrm{N} \times \mathrm{B}$ est équipotent à $B$ (car $B$ est infini), on a une injection de $C$ dans $B$. De même, on a une injection de $B$ dans $C$.

**Proposition 1.5.9.**

*Soit $H$ un espace de Hilbert. Alors $H$ est séparable si et seulement si il possède une base hilbertienne dénombrable.*

*Démonstration.* La condition étant évidement suffisante, supposons que $H$ possède un sous-ensemble dénombrable $A$ dense. Alors, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidtt, il existe une suite orthonormale $(e_n)_{n \in \mathrm{N}}$ telle que les sous-espaces vectoriels engendrés par cette suite et $A$ sont les même. Il est alors clair que la suite $(e_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une base hilbertienne de $H$.

# CHAPITRE II

## ELEMENTS DE THEORIE DES OPERATEURS

### 1. Opérateurs sur un espace de Hilbert.

Soit $H$ un espace préhilbertien séparé. On notera $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des **opérateurs** sur $H$ c'est-à-dire des applications linéaires continues de $H$ dans lui-même: $\mathcal{L}(H)$ est une algèbre pour l'addition, la multiplication par un scalaire et la composition des opérateurs.

Trois topologies sont classiquement considérés sur $\mathcal{L}(H)$:

1°) **La topologie de la norme**: pour $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$. Pour cette norme, $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach.

2°) **La topologie forte** ou **topologie de la convergence ponctuelle**: elle est définie par les semi-normes $T \longrightarrow \|T(x)\|$, $x \in H$. Une suite $(T_n)$ converge vers $T$ fortement si $\forall x \in H$, $T_n(x) \to T(x)$. Une base de voisinages de zéro pour cette topologie est donnée par les ensembles

$$\{T \in \mathcal{L}(H) / |T(x_i)| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq k\},\ x_i \in H,\ k \in \mathrm{N}.$$

Pour cette topologie, $\mathcal{L}(H)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe.

3°) **La topologie faible** ou de la **convergence faible**: elle est définie par la famille de semi-normes $T \longrightarrow |< t(x), y >|$, $x, y \in H$. Une suite $(T_n)$ converge vers $T$ faiblement si $\forall x, y \in H$, $< T_n(x), y > \to < T(x), y >$. Une base de voisinages de zéro pour cette topologie est donnée par les ensembles

$$\{T \in \mathcal{L}(H) \ / \ |< T(x_i), y_i >| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq k\},\ x_i,\ y_i \in H,\ k \in \mathrm{N}.$$

**Proposition 2.1.1.**

*Soit $T_i$, $i \in I$, une famille d'opérateurs sur un espace de Hilbert $H$ telle que $\forall x, y \in H$, $\sup\limits_{i \in I} |< T(x), y >| < \infty$. Alors $\sup\limits_{i \in I} \|T\| < \infty$.*

*Démonstration.* Pour $x \in H$, soit $T_i^x$ l'application semi-linéaire $y \longrightarrow < T_i(x), y >$. D'après le théorème de Banach-steinhaus (théorème 1.2.2), on a $\sup\limits_{i \in I} \|T_i^x\| < \infty$ c'est-à-dire $\sup\limits_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, et la conclusion résulte à nouveau du théorème de Banach-Steinhaus.

**Proposition 2.1.2.**

*Soient $H$ un espace de Hilbert, $T_{\mathrm{n}}$, $U_{\mathrm{n}}$, $T$, $U$, des éléments de $\mathcal{L}(H)$.*
*1 °) $\|T_{\mathrm{n}} - T\| \to 0$ et $\|U_{\mathrm{n}} - U\| \to 0$ impliquent $\|T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}} - TU\| \to 0$.*
*2 °) Si $T_{\mathrm{n}} \to T$ et $U_{\mathrm{n}} \to U$ fortement, alors $T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}} \to TU$ fortement.*
*3 °) Si $T_{\mathrm{n}} \to T$ faiblement et $U_{\mathrm{n}} \to U$ fortement, alors $T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}} \to TU$ faiblement.*

*Démonstration.* Le 1 °) résulte de

$$\|T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}} - TU\| \leq \|T_{\mathrm{n}} - T\|\|U_n\| + \|T\|\|U_{\mathrm{n}} - U\|.$$

Le 2 °) s'obtient à partir de

$$\|T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}}(x) - TU(x)\| \leq \|T_{\mathrm{n}}\|\|U_{\mathrm{n}}(x) - U(x)\| + \|T_{\mathrm{n}}(U(x)) - T(U(x))\|,$$

en utilisant la proposition 2.1.1. Enfin pour le 3 °), on écrit

$$< T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}}(x), y > - < TU(x), y >=< T_{\mathrm{n}}(U_{\mathrm{n}}(x) - U(x)), y > + < (T_{\mathrm{n}} - T)(U(x)), y >,$$

d'où on déduit

$$|< T_{\mathrm{n}}U_{\mathrm{n}}(x), y > - < TU(x), y >| \leq \|T_{\mathrm{n}}\|\|y\|\|U_{\mathrm{n}}(x) - U(x)\| + |< (T_{\mathrm{n}} - T)(U(x)), y >|,$$

et on conclut encore en utilisant la proposition 2.1.1.

**Théorème 2.1.1.**

*$H$ étant un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ muni de l'une de ces trois topologies est un espace vectoriel topologique complet.*

*Démonstration.* Pour la topologie de la norme, nous l'avons déja dit. Vérifions seulement pour les autres que les suites de Cauchy convergent. Supposons tout d'abord que $T_{\mathrm{n}}$ soit une suite de Cauchy pour la toplogie forte, c'est-à-dire que, pour tout $x \in H$, $T_{\mathrm{n}}(x)$ est une suite de Cauchy. Alors $T_{\mathrm{n}}(x) \to T(x)$ quand $n \to \infty$, et, l'application $T$ ainsi obtenue est clairement linéaire et continue d'après la proposition 2.1.1. Enfin supposons maintenant que $T_{\mathrm{n}}$ est une suite de Cauchy pour la topologie faible; alors $\forall x, y \in H$, $< T_{\mathrm{n}}(x), y >\to B(x, y)$ où $B$ est une forme sesquilinéaire telle que, d'après la proposition 2.1.1, $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$. D'après la théorème 1.5.2, il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ telle que $B(x, y) =< T(x), y >$ et $\|T\| \leq C$, et, clairement, $T_{\mathrm{n}}$ converge faiblement vers $T$.

**Proposition 2.1.3.**

*Soit $T$ un opérateur sur un espace de Hilbert $H$. Alors il existe un et un seul $T^* \in \mathcal{L}(H)$ que l'on appelle l'**adjoint** de $T$, tel que $\forall x, y \in H$, $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$. De plus on a les propriétés suivantes: $T^{**} = T$, $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$, $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, $\|T^*\| = \|T\|$.*

*Démonstration.* L'existence de l'adjoint résulte du théorème 1.5.2, et les propriétés sont évidentes.

**Remarque.** Le fait que $H$ soit complet est indispensable dans la proposition précédente: l'existence de l'adjoint peut être mise en défaut dans un espace préhilbertien.

**Proposition 2.1.4.**
*L'application $T \longrightarrow T^*$ de $\mathcal{L}(H)$ dans lui-même est continue pour la topologie de la norme et pour la topologie faible.*

*Démonstration.* Evident.

**Remarque.** La propriété de la proposition ci-dessus est fausse pour la topologie forte. Par exemple si $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ est définie par $T_n((x_i)) = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$, il est clair que $T_n$ converge fortement vers zéro, mais, $T_n^*((x_i)) = (0, ..., 0, x_1, x_2, ...)$ d'où $\|T_n^*(x)\| = \|x\|, \forall n$.

**Proposition 2.1.5.**
*Soit $T$ un opérateur d'un espace préhilbertien séparé $H$. Alors*

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq \underset{\|x\|\leq 1}{Sup} |< T(x), x >| \leq \|T\|.$$

*De plus, si $\forall z \in H$, $< T(z), z >$ est réel, on a* $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} | < T(x), x > |$.

*Démonstration.* La seconde inégalité de la première assertion du théorème est évidente. Montrons tout d'abord la dernière assertion. $(x, y) \longrightarrow < T(x), y >$ étant une forme hermitienne, on a

$$4 < T(x), y > = < T(x+y), x+y > - < T(x-y), x-y >$$
$$+ i < T(x+iy), x+iy > -i < T(x-iy), x-iy > .$$

D'autre part, pour $x \in H$, $x \neq 0$, et $\lambda > 0$, $\|T(x)\|^2 = < T(\lambda x), \frac{1}{\lambda}T(x) >$, et par suite

$$4\|T(x)\|^2 = < T\left(\lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x)\right), \lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x) > - < T\left(\lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x)\right), \lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x) >$$
$$+ i < T\left(\lambda x + \frac{i}{\lambda}T(x)\right), \lambda x + \frac{i}{\lambda}T(x) > -i < T\left(\lambda x - \frac{i}{\lambda}T(x)\right), \lambda x - \frac{i}{\lambda}T(x) > .$$

Si on pose $N_T = \sup_{\|z\|\leq 1} | < T(z), z > |$, la partie imaginaire de l'égalité ci-dessus devant être nulle, il vient

$$4\|T(x)\|^2 \leq N_T\left(\left\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}T(x)\right\|^2 + \left\|\lambda x - \frac{1}{\lambda}T(x)\right\|^2\right).$$

En prenant $\lambda^2 = \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|}$, on obtient immédiatement le résultat.

Le cas général s'en déduit aisement: on se place dans le complété $\widehat{H}$ de $H$. $T$ se prolonge donc en un opérateur $\widehat{T}$ sur $\widehat{H}$, et comme la boule unité de $H$ est dense dans la boule unité de $\widehat{H}$, on a: $\|T\| = \|\widehat{T}\|$ et $N_T = N_{\widehat{T}}$. Alors les opérateurs $\widehat{T}^* + \widehat{T}$ et $i(\widehat{T} - \widehat{T}^*)$ vérifiant l'hypothèse du cas précédent, on a $\|\widehat{T}^* + \widehat{T}\| = N_{\widehat{T}^*+\widehat{T}}$ et $\|\widehat{T} - \widehat{T}^*\| = N_{i(\widehat{T}-\widehat{T}^*)}$. Or,

$$N_{\widehat{T}+\widehat{T}^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} 2|\mathcal{R}e < \widehat{T}(x), x > | \leq 2N_{\widehat{T}} = 2N_T,$$

$$N_{i(\widehat{T}-\widehat{T}^*)} = \sup_{\|x\|\leq 1} 2|\mathcal{I}m < \widehat{T}(x), x > | \leq 2N_{\widehat{T}} = 2N_T,$$

d'où

$$2\|T\| = 2\|\widehat{T}\| \leq \left\|\widehat{T} + \widehat{T}^*\right\| + \left\|\widehat{T} - \widehat{T}^*\right\| = N_{\widehat{T}+\widehat{T}^*} + N_{i(\widehat{T}-\widehat{T}^*)} \leq 4N_T.$$

## 2. Opérateurs symétriques sur un espace de Hilbert.

**Définition 2.2.1.**

*On dit qu'un opérateur sur un espace de Hilbert est* **symétrique** *s'il est égal à son adjoint. Dans ce cas on dit aussi qu'il est* **autoadjoint** *ou encore* **hermitien**.

**Proposition 2.2.1.**

*Soit $T$ un opérateur sur un espace de Hilbert $H$.*
*1 $^\circ$) Les conditions suivantes sont équivalentes:*
*(a) $T$ est symétrique;*
*(b) $\forall x \in H, < T(x), x > \in \mathrm{R}$;*
*(c) la forme $(x, y) \longrightarrow < T(x), y >$ est hermitienne.*
*2 $^\circ$) Si $T$ est symétrique, on a $\|T\| = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|\leq 1} | < T(x), x > |$.*

*Démonstration.* Le fait que $(a) \Rightarrow (b)$ est évident. Pour voir que $(b) \Rightarrow (a)$, on écrit

$$4 < T(x), y > = < T(x + y), x + y > - < T(x - y), x - y >$$
$$+ i < T(x + iy), x + iy > - < T(x - iy), x - iy >,$$

puis, en échangeant $x$ et $y$,

$$4 < T(y), x > = < T(x + y), x + y > - < T(x - y), x - y >$$
$$+ i < T(x - iy), x - iy > -i < T(x + iy), x + iy >,$$

ce qui donne $\overline{< T(y), x >} =< T(x), y >$, c'est-à-dire $T = T^*$. Enfin l'équivalence entre (b) et (c) est classique. Le 2 $^\circ$ ) est la proposition 2.1.5.

**Proposition 2.2.2.**

*Si $A$ et $B$ sont deux opérateurs symétriques qui commutent, alors $AB$ est symétrique.*

*Démonstration.* Immédiat.

**Définition 2.2.2.**
*On dit qu'un opérateur $T$ sur un espace de Hilbert $H$ est* **positif** *si* $\forall x \in H$, $< T(x), x > \geq 0$. *En particulier un opérateur positif est symétrique. Si $A$ et $B$ sont deux opérateurs symétriques, on dit que $A \geq B$ si $\forall x \in H$, $< A(x), x > \geq < B(x), x >$, ou, ce qui revient au même, si $A - B \geq 0$.*

**Proposition 2.2.3. (inégalité de Cauchy-schwarz)**
*Si $A$ est un opérateur positif sur un espace de Hilbert, $\forall x, y \in H$, on a*

$$|< A(x), y >| \leq < A(x), x >^{1/2} < A(y), y >^{1/2} .$$

*Démonstration.* Classique en développant $< A(x + \lambda y), x + \lambda y >$.

**Remarques.**
Soient $A$, $B$ et $C$ des opérateurs symétriques sur un espace de Hilbert $H$.
1°) Si $m = \inf\limits_{\|x\|=1} < A(x), x >$ et $M = \sup\limits_{\|x\|=1} < A(x), x >$, on a $mI \leq A \leq MI$, au sens de l'ordre des opérateurs, et $\|A\| = Max\{|m|, |M|\}$.
2°) $A \leq B$ et $B \leq A$ impliquent $A = B$.
3°) $A \leq B$ implique $A + C \leq B + C$ et, si $\lambda \geq 0$, $\lambda A \leq \lambda B$.

**Proposition 2.2.4.**
*Soit $T$ un opérateur sur un espace de Hilbert $H$ Alors les opérateurs $T^*T$ et $TT^*$ sont positifs et $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$.*

*Démonstration.* Ceci résulte aussitôt des proposition 2.1.3 et 2.1.5.

**Théorème 2.2.1.**
*Toute suite $(A_n)_{n \in N}$ monotone bornée (au sens de l'ordre) d'opérateurs symétriques sur un espace de Hilbert $H$ converge fortement vers un opérateur symétrique.*

*Démonstration.* Quitte à rajouter $\|A_1\|I$ à tous les $A_n$, on peut les supposer tous positifs, et on se ramène aussitôt au cas où $0 \leq A_n \leq A_{n+1} \leq I$, $\forall n \in N$. Si $m \leq n$, on a donc $O \leq A_n - A_m \leq I$, et, si on pose $B = A_n - A_m$, il vient, par l'inégalité de Cauchy-schwarz

$$\begin{aligned} \|B(x)\|^4 &= |< B(x), B(x) >|^2 \\ &\leq < B(x), x >< B(B(x)), B(x) > \\ &\leq < B(x), x > \|B(x)\|^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|^2 \leq < A_n(x), x > - < A_m(x), x > .$$

La suite $< A_{\rm n}(x), x >$ étant croissante et majorée par $\|x\|^2$, elle est convergente. Par conséquent, la suite $A_{\rm n}(x)$ est de Cauchy dans $H$, donc converge vers un point $A(x)$ de $H$. Il est alors immédiat de voir que ceci définit un opérateur symétrique $A$ sur $H$ qui est limite forte de la suite $A_{\rm n}$.

**Remarque.** Si $A$ est symétrique alors $A^2$ est positif.

**Théorème 2.2.2.**
*Soit $A$ un opérateur positif sur un espace de Hilbert $H$. Alors il existe un unique opérateur positif $A^{1/2}$ sur $H$ tel que $(A^{1/2})^2 = A$. De plus $A^{1/2}$ est limite pour la topologie forte d'une suite de polynômes en $A$ et donc commute avec tout opérateur qui commute avec $A$. $A^{1/2}$ s'appelle la* **racine carrée positive** *de $A$.*

*Démonstration.* On peut supposer $0 \leq A \leq I$, et on cherche $B = A^{1/2}$ sous la forme $B = I - X$, de sorte que $X$ doit vérifier $I - 2X + X^2 = I - (I - A)$ soit, en posant $C = I - A$, $X = 1/2(C + X^2)$. On cherche alors $X$ par approximations successives: $X_0 = 0$, $X_{\rm n+1} = 1/2(C + X_{\rm n}^2)$, $n \geq 1$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que la suite $(X_{\rm n})$ converge fortement.

**Lemme 2.2.1.**
*$X_{\rm n}$ et $X_{\rm n} - X_{\rm n-1}$ sont des polynômes à coefficients positifs en $C$.*

*Démonstration.* Cela se voit par récurrence sur $n$: c'est clair si $n = 1$; supposons le vrai jusqu'à l'ordre $n$. Alors

$$\begin{aligned} X_{\rm n+1} - X_{\rm n} &= \frac{1}{2}\left[(C + X_{\rm n}^2) - (C + X_{\rm n-1}^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(X_{\rm n}^2 - X_{\rm n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(X_{\rm n} - X_{\rm n-1})(X_{\rm n} + X_{\rm n-1}), \end{aligned}$$

($X_n$ et $X_{n-1}$ commutent car ce sont des polynômes en $C$) ce qui montre que $X_{\rm n+1} - X_{\rm n}$ est un polynôme à coefficients positifs en $C$, d'où le lemme.

**Lemme 2.2.2.**
*Si $T$ est un opérateur positif, alors, pour tout $p \in \mathrm{N}$, $T^{\rm p}$ est positif.*

*Démonstration.* $< T^{2\rm p}(x), x > = < T^{\rm p}(x), T^{\rm p}(x) > \geq 0$, et
$< T^{2\rm p+1}(x), x > = < T(T^{\rm p}(x)), T^{\rm p}(x) > \geq 0$.

**Lemme 2.2.3.**
*Pour tout $n \in \mathrm{N}$, $\|X_{\rm n}\| \leq 1$.*

*Démonstration.* Par récurrence sur $n$: si le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $n$, de $\|X_{\rm n+1}\| \leq 1/2(\|C\| + \|X_{\rm n}\|^2)$ on déduit le résultat puisque $0 \leq C \leq I$ implique $\|C\| \leq 1$.

Achevons maintenant la démonstration du théorème. Les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 montrent que la suite $X_{\mathrm{n}}$ est une suite croissante d'opérateurs positifs mojorée par $I$. D'après le théorème 2.2.1, elle converge fortement vers un opérateur symétrique $X$ qui est positif et majoré par $I$. Puisque $X = 1/2(C + X)$, l'opérateur $B = I - X$ répond à la question. Reste à voir l'unicité de la racine carrée. Supposons que $B'$ soit un autre opérateur positif tel que $B'^2 = A$. Alors $B'A = B'B'^2 = AB'$, ce qui entraine que $B'$ et $X_{\mathrm{n}}$ commutent et par suite que $B'$ et $B$ commutent. Pour $z \in H$, on a $\|B^{1/2}(z)\|^2 + \|B'^{1/2}(z)\|^2 = <(B + B')(z), z>$, donc en particulier pour $z = (B - B')(x)$, la commutativité entre $B$ et $B'$ donne $B^{1/2}((B - B')(x)) = B'^{1/2}((B - B')(x)) = 0$, d'où $(B - B')^2(x) = 0$, ce qui donne, en faisant le produit scalaire avec $x$, $(B - B')(x) = 0$, et achève la démonstration.

**Corollaire.**

*Soient $A$ et $B$ deux opérateurs positifs sur un espace de Hilbert.*

*1°) $\|A\|^{1/2} = \|A^{1/2}\|$.*

*2°) $AB$ est positif si les opérateurs commuttent.*

*Démonstration.* Le 1°) résulte de la proposition 2.1.5. Le 2°) est presque immédiat car $< AB(x), x >=< AB^{1/2}B^{1/2}(x), x >$, et, comme les opérateurs commutent, il en est de même de $A$ et $B^{1/2}$, ce qui donne $< AB(x), x >=< AB^{1/2}(x), B^{1/2}(x) >\geq 0$.

**Théorème 2.2.3 (théorème de Von-Neuman).**

*Soient $T$ un opérateur sur un espace de Hilbert et $Q = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} a_{\mathrm{n}} X^{\mathrm{n}}$ un polynôme à coefficients dans $C$. On suppose que $\|T\| \leq 1$. Alors*

$$\|Q(T)\| = \left\| \sum_{n=0}^{N} a_{\mathrm{n}} T^{\mathrm{n}} \right\| \leq \underset{\substack{|z|=1 \\ z\in\mathbb{C}}}{Sup} |Q(z)| = \|Q\|_{\{|z|=1\}} = \|Q\|_{\infty}.$$

*Démonstration.* Pour $r < 1$, les opérateurs $I - rT$ et $I - rT^*$ sont inversibles. Posons

$$P_{\mathrm{T}}(r) = (I - rT)^{-1} + (I - rT^*)^{-1} - I = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\mathrm{n}} T^{\mathrm{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\mathrm{n}} T^{*\mathrm{n}} + I,$$

la convergence ayant lieu en norme dans $\mathcal{L}(H)$.

**Lemme 2.2.4.**

*L'opérateur $P_{\mathrm{T}}(r)$ est positif.*

*Démonstration.* Soit $x \in H$; en posant $y = (I - rT)^{-1}(x)$, c'est-à-dire $x = (I - rT)(y)$, un calcul direct donne $< P_{\mathrm{T}}(r)(x), x >= \|y\|^2 - r^2\|T(y)\|^2 \geq 0$.

Posons maintenant

$$P_{\mathrm{T}}(r,\theta) = \big(I - re^{-i\theta}T\big)^{-1} + \big(I - re^{i\theta}T^*\big)^{-1} - I.$$

Le lemme 2.2.4 appliqué à $e^{-i\theta}T$ montre que $P_{\mathrm{T}}(r,\theta)$ est positif.

**Lemme 2.2.5.**
*Pour tous $x, y \in H$, on a*

$$< Q(rT)(x), y >= \int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(x), y > Q\big(e^{i\theta}\big)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

*Démonstration.* Par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour $Q(z) = z^{\mathrm{n}}$ soit

$$(*) \qquad r^{\mathrm{n}} < T^{\mathrm{n}}(x), y >= \int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(x), y > e^{\mathrm{in}\theta}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Tout d'abord la formule a un sens car la fonction $\theta \longrightarrow < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(x), y >$ est continue: en effet, pour le voir, il suffit de développer $P_{\mathrm{T}}(r,\theta)$ en série normalement convergente dans $\mathcal{L}(H)$ et par suite uniformément convergente par rapport à $\theta$. Calculons alors l'intégrale du second membre de $(*)$ grâce à ce développement en série:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(x), y > e^{\mathrm{in}\theta}\frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{p=1}^{\infty} r^{\mathrm{p}} < T^{\mathrm{p}}(x), y > \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{ip}\theta}e^{\mathrm{in}\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} r^{\mathrm{p}} < T^{*\mathrm{p}}(x), y > \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{ip}\theta}e^{\mathrm{in}\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &+ < x, y > \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{in}\theta}\frac{d\theta}{2\pi},\end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement que l'intégrale vaut $< x, y >$ si $n = 0$ et $r^{\mathrm{n}} < T^{\mathrm{n}}(x), y >$ si $n > 0$, et achève de démontrer $(*)$.

Terminons maintenant la preuve du théorème. D'après les deux lemmes précédents et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}&| < Q(rT)(x) \ , \ y > | \\ &\qquad \le \|Q\|_\infty \int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(x), x >^{1/2} < P_{\mathrm{T}}(r,w)(y), y >^{1/2} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\qquad \le \|Q\|_\infty \Big(\int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{t}}(r,\theta)(x), x > \frac{d\theta}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_O^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,\theta)(y), y > \frac{d\theta}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.2.5 on a

$$\int_0^{2\pi} < P_{\mathrm{T}}(r,w)(x), x > \frac{d\theta}{2\pi} = \|x\|^2,$$

et par conséquent, $< Q(rT)(x), y > | \leq \|Q\|_\infty \|x\| \|y\|$, ce qui entraine $\|Q(rT)\| \leq \|Q\|_\infty$, pour tout $r < 1$. Pour conclure, il suffit de remarquer que, lorsque $r$ tend 1, $Q(rT)$ converge fortement vers $Q(T)$.

**Remarque.** Le théorème ci-dessus s'étend à deux opérateurs $T_1$ et$T_1$ de $\mathcal{L}(H)$ de normes $\leq 1$ qui commutent: précisément, si $Q(X,Y)$ est un polynôme, on peut démontrer que

$$\|Q(T_1,T_2)\| \leq \underset{\substack{|z_1|\leq 1 \\ |z_2|\leq 1}}{Sup} |Q(z_1,z_2)|.$$

Mais on ne peut pas l'étendre à trois opérateurs de normes $\leq 1$ qui commutent (i.e. il n'existe pas de constante $C$ telle que $\|Q(T_1,T_2,T_3)\|$ soit majoré par $C\|Q(z_1,z_2,z_3)\|_\infty$.).

## 3. Opérateurs compacts sur un espace de Hilbert

**Définition 2.3.1.**

*Soit $T$ un opérateur sur un espace préhilbertien séparé $H$. On dit que $T$ est* **compact** *si l'image d'un borné de $H$ est relativement compact dans $H$ ou, ce qui revient au même, si l'image $T(B)$ par $T$ de la boule unité $B$ de $H$ est relativement compacte dans $H$.*

**Exemples.** 1°) tout opérateur de rang fini est compact (d'après le théorème de Riesz).

2°) $I$ étant un intervalle de R, soit $K(s,t) \in \mathcal{C}(I \times I)$. Soit $E$ l'espace préhilbertien $\mathcal{C}(I)$ muni du produit scalaire de $L^2$. Alors l'opérateur $f \longrightarrow \int_{\mathrm{I}} K(s,t)f(s)ds$ est compact de $E$ dans $E$.

**Proposition 2.3.1.**

*$T$ étant un opérateur sur un espace préhilbertien séparé $H$, les conditions suivantes sont équivalentes:*
*(a) $T$ est compact;*
*(b) $\forall (x_{\mathrm{n}})$ suite bornée dans $H$ , il existe une suite extraite $(x_{\mathrm{n_k}})$ telle la suite $(T(x_{\mathrm{n_k}}))_{\mathrm{k}\in\mathrm{N}}$ soit convergente dans $H$.*

*Démonstration.* Immédiat.

**Proposition 2.3.2.**

*Soit $T$ un opérateur compact sur un espace préhilbertien séparé $H$. Si $(x_{\mathrm{n}})$ est une suite dans $H$ qui converge faiblement vers $x \in H$, alors $(T(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$ converge en norme vers $T(x)$.*

*Démonstration.* Supposons que cela soit faux; il existe alors une suite extraite $(x_{\mathrm{n_k}})$ et un $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $k$, $\|T(x_{\mathrm{n_k}}) - T(x)\| \geq \epsilon$. Or, la suite $T(x_{\mathrm{n}})$ étant contenue dans un compact de $H$, on peut extraire de la suite $(x_{\mathrm{n_k}})$ une sous-suite $(x_{\mathrm{n_i}})$ telle que la suite $T(x_{\mathrm{n_i}})$ converge vers un point $y$ de $H$. Supposons $y \neq T(x)$. D'après la proposition 1.3.1,il existe $f \in H'$ tel que $f(T(x)) = 0$ et $f(y) = 1$. Or, $x \longrightarrow f(T(x))$ étant une forme linéaire continue sur $H$, l'hypothèse entraine que $f(T(x_{\mathrm{n}}))$ tend vers $f(T(x))$, ce qui fournit une contradiction.

**Proposition 2.3.3.**

*Soit $T$ un opérateur compact sur un espace de Hilbert $H$. Alors $T^*$ est compact.*

*Démonstration.* Soit $B$ la boule unité fermée de $H$. Il suffit de montrer que $T^*(B)$ est précompacte. Posons $X = \overline{T(B)}$, et soit $K$ l'ensemble des restrictions à $X$ des formes linéaires $x \longrightarrow < x, y >$ pour $y \in B$. Il est clair que $K$ est équicontinu et comme, pour $x \in X$, $\Big\{ < x, y >,\ y \in B \Big\}$ est contenu dans $\Big\{ z \in \mathrm{C} / |z| \leq \|T\| \Big\}$, d'après le théorème d'Ascoli, $K$ est relativement conpact dans $\mathcal{C}(X; \mathrm{C})$. Alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists y_1, ..., y_{\mathrm{m}} \in B$, tels que, pour $y \in B$ donné, $\exists i$, $1 \leq i \leq m$, tel que $\forall x \in B$, $| < T(x), y - y_{\mathrm{i}} > | \leq \epsilon$, c'est à dire $| < x, T^*(y) - T^*(y_{\mathrm{i}}) > | \leq \epsilon$, ce qui entraine $\|T^*(y) - T^*(y_{\mathrm{i}})\| \leq \epsilon$, d'où la proposition.

**Remarque.** Si $H$ n'est pas complet, même si $T^*$ existe, il peut ne pas être compact ($T^*(B)$ reste tout de même précompact).

**Proposition 2.3.4.**

*L'ensemble des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert $H$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(H)$ stable par pasage à l'adjoint.*

*Démonstration.* Le fait que l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère est immédiat. Le fait qu'il est fermé se voit facilement: on montre en effet sans difficultés que si $T$ est limite en norme d'oparateurs compacts, l'image par $T$ de la boule unité de $H$ est précompacte.

**Théorème 2.3.1.**

*Soit $T$ un opérateur symétrique compact sur un espace préhilbertien séparé de dimension infinie $H$.*
*1 °) l'ensemble des valeurs propres de $T$ est un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathrm{R}$ admettant 0 pour unique point d'accumulation.*
*2 °) $\|T\| = Max\Big\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } T\Big\}$.*
*3 °) $\forall\lambda$ valeur propre non nulle de $T$, $Ker(T-\lambda I)$ est de dimension finie $k_\lambda$ (multiplicité de $\lambda$).*
*4 °) Soit $(\lambda_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\geq 1}$ une suite de réels formée de valeurs propres de $T$ telle que:*
*(a) $\lim\limits_{\mathrm{n}} \rightarrow_\infty \lambda_{\mathrm{n}} = 0$;*
*(b) $|\lambda_{\mathrm{n+1}}| \leq |\lambda_{\mathrm{n}}|$, $n \geq 1$;*
*(c) si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, $\lambda$ apparaît $k_\lambda$ fois consécutivement dans la suite $\lambda_{\mathrm{n}}$.*
*Alors, il existe un système orthonormal $(\varphi_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\geq 1}$ dans $H$, infini si $\lambda_{\mathrm{n}} \neq 0\ \forall n$, ou ayant pour nombre d'éléments le nombre de $\lambda_{\mathrm{n}}$ non nuls, tel que, pour tout $n$ tel que $\lambda_{\mathrm{n}} \neq 0$, $\varphi_{\mathrm{n}}$ est vecteur propre associé à $\lambda_{\mathrm{n}}$, et $\forall x \in H$, $T(x) = \sum\limits_{\mathrm{n}\geq 1} \lambda_{\mathrm{n}} < x, \varphi_{\mathrm{n}} > \varphi_{\mathrm{n}}$, la série convergeant en norme dans $H$.*
*5 °) De plus, si $H$ est complet, $T$ est injectif si et seulement si $(\varphi_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\geq 1}$ est une base hilbertienne de $H$ (ce qui entraîne que $\lambda_{\mathrm{n}} \neq 0\ \forall n \in \mathrm{N}$ puisque $H$ est de dimension infinie).*

*Démonstration.* Tout d'abord les valeurs propres de $T$ sont réelles car $T$ est symétrique. D'après la proposition 2.1.5, il existe une suite $x_{\mathrm{n}}$ dans $H$, $\|x_{\mathrm{n}}\| = 1$, telle que $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} < T(x_{\mathrm{n}}), x_{\mathrm{n}} >= \lambda = \pm\|T\|$, cette limite étant aussi égale au *Sup*. En calculant $\|T(x_{\mathrm{n}}) - \lambda x_{\mathrm{n}}\|^2$, on voit que $T(x_{\mathrm{n}}) - \lambda x_{\mathrm{n}}$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. Si $(x_{\mathrm{n_k}})$ est une sous-suite telle que $(T(x_{\mathrm{n_k}}))$ converge, on conclut que $(x_{\mathrm{n_k}})$ converge elle même vers $\varphi \in H$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $T(\varphi) = \lambda\varphi$. On prend donc $\lambda_1 = \lambda$ et $\varphi_1 = \varphi$. Posons $H_1 = (\mathrm{C}\varphi_1)^\perp$, de sorte que $H = \mathrm{C}\varphi_1 \oplus H_1$ et $T(H_1) \subset H_1$. Il est clair que $T_{|\mathrm{H_1}}$ est un opérateur compact sur $H_1$. On peut construire de la même manière $\lambda_2$ et $\varphi_2$ associés à $T_{|\mathrm{H_1}}$ ($\lambda_2 = \|T_{|\mathrm{H_1}}\|$), et $\varphi_2$ est une valeur propre de $T$ associée à la valeur propre $\lambda_2$, et de plus $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Ainsi, par récurrence, on construit une suite de valeurs propres de $T$ associées à des vecteurs propres $\varphi_{\mathrm{n}}$ qui forment un système orthonormal. Il est clair que la suite $\lambda_{\mathrm{n}}$ ainsi construite est infinie puisque $H$ est de dimension infinie. Montrons maintenant que $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \lambda_{\mathrm{n}} = 0$. Dans le cas contraire, $\Big(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{n}}}\varphi_{\mathrm{n}}\Big)$ serait bornée et, puisque $T\Big(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{n}}}\varphi_{\mathrm{n}}\Big) = \varphi_{\mathrm{n}}$, il existerait une sous-suite de la suite $(\varphi_{\mathrm{n}})$ convergente, ce qui est impossible puisque, pour $n \neq m$, $\|\varphi_{\mathrm{n}} - \varphi_{\mathrm{m}}\|^2 = 2$.

Soit $x \in H$, et posons $x_{\mathrm{n}} = x - \sum\limits_{1}^{\mathrm{n}} < x, \varphi_{\mathrm{i}} > \varphi_{\mathrm{i}}$. $x_{\mathrm{n}}$ étant orthogonal aux $\varphi_{\mathrm{i}}$ pour $1 \leq i \leq n$, on a $\|T(x_{\mathrm{n}})\| \leq |\lambda_{\mathrm{n+1}}|\|x_{\mathrm{n}}\|$, et comme $\|x_{\mathrm{n}}\| \leq \|x\|$ (car $\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2$), $\|T(x_{\mathrm{n}})\|$ tends vers zéro, ce qui montre que

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\mathrm{i}} < x, \varphi_{\mathrm{i}} > \varphi_{\mathrm{i}},$$

la série convergeant dans $H$. En particulier, $x \perp \varphi_{\mathrm{n}}$ $\forall n \geq 1$ entraîne $T(x) = 0$.

Il nous reste deux choses à démontrer pour achever $1^\circ$), $2^\circ$), $3^\circ$), $4^\circ$):

(i): On a toutes les valeurs propres non nulles de $T$;

(ii): $dim(Ker(T - \lambda I)) = k_\lambda$, $\lambda$ étant répétée $k_\lambda$ fois dans la suite $(\lambda_{\mathrm{n}})$.

Montrons tout d'abord le (i). Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre qui n'est pas dans la suite $(\lambda_{\mathrm{n}})$, et qui est associée au vecteur propre $\varphi \neq 0$, alors $\lambda < \varphi, \varphi_{\mathrm{n}} >= \lambda_{\mathrm{n}} < \varphi, \varphi_{\mathrm{n}} >$, ce qui implique que $\varphi$ est orthogomal à tous les $\varphi_{\mathrm{n}}$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

Montrons maintenant le (ii). Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle, $\lambda = \lambda_{\mathrm{n}} = ... = \lambda_{\mathrm{n+k}}$, répétée $k$ fois dans la suite $(\lambda_n)$. $\varphi_{\mathrm{n}}, ...\varphi_{\mathrm{n+k}}$ sont dans le noyau de $(T - \lambda I)$, et par suite, $k_\lambda \geq k$. Supposons $k_\lambda > k$. Alors on peut trouver $\varphi$ dans $Ker(T - \lambda I)$, $\varphi \neq 0$ orthogonal à $\varphi_{\mathrm{n}}, ...\varphi_{\mathrm{n+k}}$; ceci qui entraîne que $\varphi$ est orthogonale à tous les $\varphi_{\mathrm{i}}$ (car $\lambda < \varphi, \varphi_i >= \lambda_i < \varphi, \varphi_i >$), ce qui est impossible.

Reste à démontrer le $5^\circ$). Supposons $T$ injectif, et écrivons $H = (\overline{\oplus_{\mathrm{n}} \mathrm{C}\varphi_{\mathrm{n}}}) \oplus H_1$. Pour $x \in H$, soit $y = \sum_{\mathrm{n}} < x, \varphi_{\mathrm{n}} > \varphi_{\mathrm{n}}$ ($y \in H$ existe car $H$ est complet: théorème 1.5.4). Alors $T(x) = T(y)$ ce qui entraine $x = y$ c'est à dire que $(\varphi_{\mathrm{n}})$ est totale. Réciproquement, si $(\varphi_{\mathrm{n}})$ est totale, on a $< T(x), \varphi_{\mathrm{n}} >= \lambda_{\mathrm{n}} < x, \varphi_{\mathrm{n}} >$ et par suite $T(x) = 0$ implique $x = 0$.

**Proposition 2.3.5.**

*Soit $H$ un espace de Hilbert, et soit $T$ un opérateur sur $H$. Alors $T$ est compact si et seulement s'il est limite en norme d'opérateurs de rang fini.*

*Démonstration.* Tout opérateur de rang fini étant compact, il en est de même d'une limite en norme de tels opérateurs (proposition 2.3.4). Montrons donc la réciproque.

Considérons tout d'abord le cas où $H$ admet une base hilbertienne dénombrable (i.e. si $H$ est séparable: proposition 1.5.9) $(e_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in}$. Soit $T$ un opérateur compact sur $H$ et posons$T_{\mathrm{n}} = P_{\mathrm{n}} \circ T \circ P_{\mathrm{n}}$ où $P_{\mathrm{n}}(x) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} < x, e_{\mathrm{i}} > e_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{n}}^*(x)$. Montrons que $\|T_{\mathrm{n}} - T\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Dans le cas contraire, il existerait une suite $(x_{\mathrm{n}})$ dans $H$ telle que $\|x_{\mathrm{n}}\| = 1$ et $\|(T_{\mathrm{n}} - T)(x_{\mathrm{n}})\| \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$. $T$ étant compact, on peut supposer que $T(x_{\mathrm{n}}) \to y$ et $T \circ (I - P_{\mathrm{n}})(x_{\mathrm{n}}) \to z$ quand $n \to \infty$. Remarquons maintenant que $P_{\mathrm{n}}$ converge fortement vers l'dentité; par suite, si $y$ est la limite de $T \circ P_n(x_n)$, on a

$$\|P_n \circ T \circ P_n(x_n) - T \circ P_n(x_n)\| \leq \|T \circ P_n(x_n) - y\| + \|P_n(y) - y\| \to 0,$$

et, pour $n$ assez grand, il vient $\|T \circ P_n(x_n) - T(x_n)\| \geq \epsilon_0/2$, et par ailleurs, $(I - P_{\mathrm{n}}) \circ T^*(z)$ tends vers zéro dans $H$. D'où, $\|z\|^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} < T(I - P_{\mathrm{n}})(x_{\mathrm{n}}), z >= 0$, ce qui fournit une contradiction.

Considérons maintenant le cas général. Posons $U = T^*T \geq 0$. D'après le théorème 2.3.1, il existe un système orthonormal $\varphi_1, ...\varphi_{\mathrm{n}}, ...$, tel que si $E$ est le sous-espace fermé engendré par les $\varphi_{\mathrm{i}}$, et $H = E \oplus E^\perp$, alors, $U$ est nul sur $E^\perp$, d'où, si $x \in E^\perp$, $\|T(x)\|^2 =< U(x), x >= 0$. Alors si $E_1$est le sous espace fermé engendré par les $T^{\mathrm{m}}(\varphi_{\mathrm{n}})$, $(n, m) \in \mathrm{N}^2$, on a $T(E_1^\perp) = 0$, $T(E_1) \subset E_1$, et, pour conclure, il suffit d'appliquer le cas précédent à la restriction de $T$ au sous-espace séparable $E_1$, car $T = T_{|E_1} \circ P$ où $P$ est la projection orthogonale sur $E_1$.

**Remarque.** *Résolution de l'équation $T(x) - \lambda x = y$, $y \in H$ donné, $T$ étant un opérateur symétrique compact sur un espace de Hilbert $H$ et $\lambda \in \mathrm{C}$.*

On applique le théorème 2.3.1: (a) Si $\lambda$ n'est pas une valeur propre de $T$, il existe une solution unique à l'équation: si $T(x) = \sum \lambda_{\mathrm{n}} < x, \varphi_{\mathrm{n}} > \varphi_{\mathrm{n}}$, on prends

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{n}} - \lambda} < y, \varphi_{\mathrm{n}} > \varphi_{\mathrm{n}} - \frac{1}{\lambda} y_0,$$

où $y_0$ est la projection de $y$ sur l'orthogonal de l'espace engendré par les $\varphi_{\mathrm{n}}$.

(b) Si $\lambda$ est une valeur propre de$T$, pour avoir une solution, il faut et il suffit que $< y, \varphi_{\mathrm{n}} >= 0$ pour tout $n$ tel que $\varphi_{\mathrm{n}}$ soit vecteur propre associé à $\lambda$.

## 4. Opérateurs compacts sur les espaces normés.

**Définition 2.4.1.**

*Soit $E$ un espace normé. On appelle* **opérateur compact** *sur $E$, une application linéaire continue de $E$ dans $E$ telle que l'image par $T$ de toute partie bornée de $E$ est relativement compacte dans $E$. Si $T$ est un opérateur continu (quelconque) sur $E$, on appelle* **spectre** *de $T$, et on note $Sp(T)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathrm{C}$ tels que $T - \lambda I$ est non inversible (dans $\mathcal{L}(E)$); on appelle* **valeur régulière** *pour $T$ tout $\lambda \in \mathrm{C}$ tel que $T - \lambda I$ est inversible; l'ensemble des valeurs régulières pour $T$ est noté $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$.*

**Remarques.** 1°) Toute valeur propre de $T$ appartient à $Sp(T)$; mais, en général $Sp(T)$ n'est pas égal à l'ensemble de valeurs propres.

2°) $T \in \mathcal{L}(E)$ est compact, équivaut à dire que l'image de la boule unité de $E$ est relativement compacte, ou encore que pour toute suite bornée, $(x_{\mathrm{n}})$ on peut extraire une sous-suite $(x_{\mathrm{n_k}})$ telle que la suite $(T(x_{\mathrm{n_k}}))$ soit convergente.

**Proposition 2.4.1.**

*Soient $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$.*

*(a) $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$ est ouvert dans $\mathrm{C}$ et $\lambda \longrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$.*

*(b) $Sp(T)$ est un compact non vide de $\mathrm{C}$ contenu dans $\Big\{ |\lambda| \leq \|T\| \Big\}$.*

*Démonstration.* (a): pour $\lambda \in \mathcal{R}_{\mathrm{T}}$, soit $v = (T - \lambda I)^{-1}$, de sorte que

$$T - \xi I = (T - \lambda I)(I - (\xi - \lambda)v).$$

Alors, pour $|\xi - \lambda| < \|v\|^{-1}$, $T - \xi I$ est inversible et son inverse est donné par la série

$$(T - \xi I)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} (\xi - \lambda)^{\mathrm{n}} v^{\mathrm{n}+1},$$

qui est normalement convergente. le (a) en résulte aussitôt.

(b): Tout d'abord, si $|\lambda| > \|T\|$, $T - \lambda I = \lambda(I - T/\lambda)$ est inversible (par une série) et par suite, $Sp(T) \subset \left\{|\lambda| \leq \|T\|\right\}$, et comme il est fermé ((a)), il est compact. Vérifions maintenant qu'il est non vide. Supposons le contraire, alors $\lambda \longrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans C, et, comme, pour $\lambda$ assez grand, on a $(T - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}\sum \lambda^{-n}T^{n}$, il vient $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{(|\lambda| - \|T\|)} \leq \frac{1}{\|T\|}$, si $|\lambda| \geq 2\|T\|$, ce qui montre que $\lambda \longrightarrow (T - I)^{-1}$ est bornée dans C. Si $\varphi \in E'$, il résulte alors du théorème de Liouville que $\lambda \longrightarrow \varphi((T - \lambda I)^{-1})$ est constante dans C, et, par le théorème de Hahn–Banach, $\lambda \longrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ est aussi constante, ce qui est absurde.

**Proposition 2.4.2.**

*Soient $T, U$ des opérateurs sur un espace normé $E$.*

*1 °) Si $(x_n)$ est une suite d'éléments de $E$ qui converge faiblement vers $x \in E$, et si $T$ est compact, alors $(T(x_n))$ converge en norme vers $T(x)$.*

*2 °) Si $T$ et $U$ sont compacts, $T + U$ l'est aussi.*

*3 °) Si $E$ est complet et si $(T_n)$ est une suite d'opérateurs compacts qui converge en norme vers $T$ alors $T$ est compact.*

*Démonstration.* Similaire à celle du cas des opérateurs sur un espace de Hilbert.

**Proposition 2.4.3.**

*Soit $T$ un opérateur compact sur un espace normé $E$ et posons $U = I - T$.*

*(a) $Ker(U)$ est de dimension finie et $U(E)$ est de codimension finie (on dit que $U$ est un* **opérateur à indice***) et fermé dans $E$.*

*(b) $Ker(U) = \{0\}$ entraîne que $U$ est un homéomorphisme de $E$ sur $U(E)$.*

*Démonstration.* Posons $N = Ker(U)$. Puisque $T$ est l'identité sur $N$ et que $T$ est compact, la boule unité de $N$ est relativement compacte dans $E$, et, d'après le théorème de Riesz, $N$ est de dimension finie. Montrons maintenant que $U(E)$ est fermé. Soit $y \in \overline{U(E)}$; il existe donc $x_n \in E$ tels que $U(x_n) \to y$ quand $n \to \infty$.

**Lemme 2.4.1.**

*Avec les notations ci–dessus, quitte à remplacer $x_n$ par une sous–suite, il existe $M < \infty$ tel que $d(x_n, N) \leq M$, $\forall n$.*

*Démonstration.* Dans le cas contraire, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, N) = +\infty$, et si $z_n = \frac{x_n}{d(x_n, N)}$, on a $d(z_n, N) = 1$. Alors, il existe $t_n \in N$ tel que, si on pose $s_n = z_n - t_n$, on a $\|s_n\| \leq 2$, et on a $d(s_n, N) = 1$, et $\lim_{n\to\infty} U(s_n) = 0$. $T$ étant compact, il existe une sous–suite $(s_{n_k})$ de $(s_n)$ telle que $T(s_{n_k})$ converge vers $a \in E$, et, comme $s_{n_k} - T(s_{n_k})$ tend vers zéro, $(s_{n_k})$ tend vers $a$ et on a $d(a, N) = 1$, ce qui est absurde puisque $U(a) = 0$.

Il existe donc $x'_n \in E$ tel que $x_n - x'_n \in N$ et $\|x'_n\| \leq M + 1$. Par compacité de $T$ il existe une sous–suite $(x'_{n_k})$ telle que $T(x'_{n_k})$ converge vers $b \in E$. Comme $U(x'_{n_k})$ tend vers $y$, $x'_{n_k}$ tend vers $y + b$, d'où $U(y + b) = y$, ce qui montre que $U(E)$ est fermé.

Montrons maintenant que $U(E)$ est de codimension finie. Dans le cas contraire, il existerait une suite infinie $(a_n)$ dans $E$ telle que, pour tout $n$, $a_n$ n'appartienne pas au sous-espace $V_n$ engendré par $U(E)$ et $a_1,...,a_{n-1}$. D'après ce qui précède, $V_n$ est fermé et $U(V_n) \subset U(E) \subset V_{n-1}$. La contradiction résulte donc de la compacité de $T$ et du lemme suivant:

**Lemme 2.4.2.**

*Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ (quelconque) et $U = I - T$. Soient $V_1$ et $V_2$ deux sous-espaces fermés de $H$ tels que $V_1$ soit strictement contenu dans $V_2$ et $U(V_2) \subset V_1$. Alors il existe $b \in V_2 \backslash V_1$ tel que $\|b\| \leq 1$, et $\forall x \in V_1$, $\|T(b) - T(x)\| \geq 1/2$.*

*Démonstration.* Soient $a \in V_2$ tel que $d(a, V_1) = \alpha > 0$, et $z \in V_1$ tels que $\|a - z\| \leq 2\alpha$ et posons $b = \dfrac{a-z}{\|a-z\|}$. Pour tout $z' \in V_1$, $z - \|a-z\|z' \in V_1$, et par suite $\|b - z'\| \geq \dfrac{\alpha}{\|a-z\|} \geq \dfrac{1}{2}$. Alors, si $x \in V_1$, $T(b) - T(x) = b - (x + U(b) - U(x))$, et comme $x + U(b) - U(x) \in V_1$, on a démontré le lemme.

Démontrons maintenant le (b) de la proposition. Supposons donc $Ker(U) = \{0\}$. Pour voir que $U$ est un homéomorphisme, il suffit de voir que $\forall F \subset E$ fermé, $U(F)$ est fermé. Soit $y \in \overline{U(F)}$, de sorte qu'il existe une suite $(x_n)$ dans $F$ telle $U(x_n)$ converge vers $y$.

**Lemme 2.4.3.**

*Quitte à prendre un sous-suite de la suite $(x_n)$, il existe $M$ tel que $\|x_n\| \leq M$.*

*Démonstration.* Identique à celle du lemme 2.4.1: dans le cas contraire, on peut supposer $\|x_n\| \to \infty$, et si $z_n = x_n/\|x_n\|$, on a $\|z_n\| = 1$ et $U(z_n) \to 0$. Mais $T(z_{n_k}) \to a \in E$, d'où $z_{n_k} \to a$, $U(a) = 0$, $\|a\| = 1$, ce qui est impossible puisque $N = \{0\}$.

Terminons la preuve de la proposition: puisque $\|x_n\| \leq M$, par passage à une sous-suite, $T(x_{n_k}) \to b$ et $U(x_{n_k}) \to y$ d'où $x_{n_k} \to y + b \in F$ et $U(y + b) = y \in U(F)$.

**Corollaire.**

*Les hypothèses étant les mêmes que dans la proposition, soient $N_1 = Ker(U)$, $N_k = U^{-1}(N_{k-1})$, $F_1 = U(E)$, $F_k = U(F_{k-1})$, $k \geq 2$. Alors:*

*(a) $(N_k)$ est une suite croissante de sous-espaces de $E$ dimensions finies, et $(F_k)$ une suite décroissante de sous-espaces fermés de codimensions finies.*

*(b) Il existe un plus petit entier $n$ tel que pour $k \geq n$, $N_{k+1} = N_k$. Alors, $F_{k+1} = F_k$ pour $k \geq n$, et $E$ est somme directe topologique de $N_n$ et $F_n$. De plus, $U_{|F_n}$ est un homéomorphisme de $F_n$ sur $F_n$.*

*(c) $U$ est injective si et seulement si $U$ est un homéomorphisme de $E$ sur $E$.*

*Démonstration.* Posons $U_k = U_{k-1} \circ U$, $U_1 = U$, d'où $U_k = I - T_k$, où $T_k$ est compact. Le (a) résulte donc de la proposition 2.4.3 appliquée aux $T_k$. Démontrons le (b). Supposons $N_k \neq N_{k+1}$ pour tout $k$; comme $U(N_{k+1}) \subset N_k$, le lemme 2.4.2 dit qu'il existe $x_n \in N_{k+1} \backslash N_k$, $\|x_n\| = 1$ tels que $\|T(x_k) - T(x_j)\| \geq 1/2$, pour $j < k$. Mais ceci est impossible puisque $T$ est compact. Par conséquent, il existe un $n$ minimal tel que $N_{k+1} = N_k$ pour

$k \geq n$. Comme $U(F_k) \subset F_{k+1}$, et que $F_k$ est fermé, le même raisonnement montre que la suite $(F_k)$ est elle aussi stationnaire: il existe un entier minimal $m$ tel que, pour $k \geq m$, $F_{k+1} = F_k$. Montrons alors que $m \leq n$. Tout d'abord, $F_n \cap N_n = \{0\}$ car si $y \in F_n \cap N_n$, $y = U_n(x)$ et $U_n(y) = 0$, d'où $U_{2n}(x) = 0$, soit $x \in N_{2n} = N_n$, et donc $y = 0$. Supposons $m > n$. Soit $x \in F_{m-1} \backslash F_m$; alors $U(x) \in F_m = U(F_m)$, et il existe $t \in F_m$ tel que $U(x - t) = 0$, d'où $x - t \in F_n \cap N_n$ ce qui donne $x = t \in F_m$ et contredit le choix de $x$. Soit maintenant $x \in E$; on a $U_n(x) \in F_n = F_{n+1}$ donc $U_n(x) = U_n(y)$, $y \in F_n$. d'où $x - y \in N_n$, et donc $E = F_n \oplus N_n$. De plus la somme directe est topologique car $F_n$ est fermé et $N_n$ de dimension fine. Par ailleurs, $U_{|F_n}$ est injective (son noyau est contenu dans $F_n \cap N_1 \subset F_n \cap N_n = \{0\}$), et comme $U(F_n) = F_n$, la proposition 2.4.3 montre que $U_{|F_n}$ est un homéomorphisme de $F_n$ sur $F_n$. Enfin, si $U$ est injective, $N_k = \{0\}$ $\forall k$, donc $n = 1$ et $F_1 = E$.

**Théorème 2.4.1.**

*Soit $T$ un opérateur compact sur un espace normé de dimension infinie.*

*1 ° ) $Sp(T)$ est au plus dénombrable, et $0 \in Sp(T)$. Tout point de $Sp(T)$ sauf peut-être zéro est isolé, et tout $\lambda \in Sp(T)$, $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $T$.*

*2 ° ) Soit $\lambda \in Sp(T)$, $\lambda \neq 0$. Alors $E$ s'écrit de manière unique $E = N(\lambda) \oplus F(\lambda)$, la somme directe étant toplogique, avec les propriétés suivantes:*

*(a) $F(\lambda)$ est fermé et $N(\lambda)$ est de dimension finie;*

*(b) $T(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$, et $(T - \lambda I)_{|F(\lambda)}$ est un homéomorphisme de $F(\lambda)$ sur $F(\lambda)$.*

*(c) $T(N(\lambda) \subset N(\lambda)$, et il existe un plus petit entier $k(\lambda)$ (**ordre** de $\lambda$) tel que $(T - \lambda I)_{|N(\lambda)}^{k(\lambda)} = 0$. De plus le sous-espace propre $E(\lambda)$ associé à $\lambda$ est contenu dans $N(\lambda)$ (donc de dimension finie).*

*3 ° ) Si $\lambda, \mu \in Sp(T) \backslash \{0\}$, $\lambda \neq \mu$, on a $N(\mu) \subset F(\lambda)$.*

4 ° ) Si $E$ est complet, $\zeta \longrightarrow (T - \zeta I)^{-1}$ qui est analytique dans $\mathrm{C} \backslash Sp(T)$, a un pôle d'ordre $k(\lambda)$ en chaque point $\lambda \neq 0$ de $Sp(T)$ ($\zeta \longrightarrow (T - \zeta I)^{-1}$ est méromorphe dans $\mathrm{C}^*$).

**Remarque.** Si $\lambda \in Sp(T) \backslash \{0\}$, la dimension de $N(\lambda)$ s'appelle la **multiplicité algébrique** de $\lambda$, et la dimension de $E(\lambda)$ s'appelle la **multiplicité géométrique** de $\lambda$. Elles sont égales si et seulement si $k(\lambda) = 1$ (i.e. si $\lambda$ est d'ordre 1).

*Démonstration.* Soit $\lambda \in \mathrm{C}^*$. $(1/\lambda)T$ étant compact, appliquons-lui le corollaire: si $\lambda$ n'est pas une valeur propre, $I - (1/\lambda)T$ est inversible, donc $T - \lambda I$ aussi, donc, $\lambda \notin Sp(T)$. Si $\lambda \in Sp(T) \backslash \{0\}$, il suffit d'appliquer le corollaire à $(1/\lambda)T$ pour obtenir le 2 ° ) (a), (b) (c) du théorème (on prend $N(\lambda) = N_n$, $F(\lambda) = F_n$), la seule chose restant à montrer étant l'unicité. Mais, si $E = N' \oplus F'$ avec (a), (b) et (c), en posant $U = T - \lambda I$, si $x \in N'$, $x = x_N + x_F$, on a $U^h(x) = 0$, et comme $U^k(x_N) = 0$, on a $U^{k+h}(x_F) = 0$; comme $U_{|F}^{h+k}$ est un homéomorphisme, $x_F = 0$, et $x \in N$. Ainsi $N' \subset N$; de la même manière, on voit que $N \subset N'$. Si maintenant $x \in F'$, $x = x_N + x_F$, $U^k(x_N) = 0$, d'où $U^k(x) = U^k(x_F) \in F$, donc $U^k(F') \subset F$, et on conclut aussi que $F' \subset F$. L'inclusion inverse se voit de la même manière.

Montrons maintenant que les points de $Sp(T) \backslash \{0\}$ sont isolés. Soient $\lambda \in Sp(T) \backslash \{0\}$, et

$\zeta \in \mathrm{C}^*$. Posons $U_1(\zeta) = (T - \zeta I)_{|\mathrm{N}(\lambda)}$ et $U_2(\zeta) = (T - \zeta I)_{|\mathrm{F}(\lambda)}$.

**Lemme 2.4.4.**
*Pour $i = 1, 2$, $U_{\mathrm{i}}(\zeta)$ est inversible pour $\zeta \neq \lambda$ et $|\zeta - \lambda|$ assez petit.*

*Démonstration.* Considérons tout d'abord $U_1(\zeta)$. Puisque $U_1(\lambda)^{\mathrm{k}} = 0$, on peut triangulariser la matrice de $U_1(\lambda)$ avec une diagonale de zéros, ce qui donne $det(U_1(\zeta)) = (\lambda - \zeta)^{\mathrm{d}} \neq 0$, si $\lambda \neq \zeta$, et $U_1(\zeta)$ est inversible dans ce cas. Considérons maintenant $U_2(\zeta)$. Si $U_2(\zeta)$ est non inversible, d'après le (c) du corollaire de la proposition 2.4.3, $\zeta$ est valeur propre de $T_{|\mathrm{F}(\lambda)}$, et il existe $x \in F(\lambda)$, $x \neq 0$, tel que $U_2(\zeta)(x) = 0$, soit $(\zeta - \lambda)x = U_2(\lambda)(x)$. Mais $U_2(\lambda)$ est un homéomorphisme sur $F(\lambda)$, et par conséquent, il existe $C$ indépendant de $\zeta$ tel que $|\lambda - \zeta| \|x\| \geq C\|x\|$, ce qui est impossible si $|\lambda - \zeta|$ est petit. Ceci montre que $U_2(\zeta)$ est inversible si $|\lambda - \zeta|$ est petit.

Reprenons la preuve du théorème. Du lemme ci-dessus il résulte que $T - \zeta I$ est inversible pour $\zeta \neq \lambda$ et $|\lambda - \zeta|$ assez petit. Ceci montre que les points de $Sp(T)$ sont isolés et par suite que $Sp(T)$ est un ensemble dénombrable compact borné. Maintenant $0 \in Sp(T)$ car dans le cas contraire, $T$ serait inversible ce qui est impossible par le théorème de Riesz. Nous avons entièrement démontré 1 ° ) et 2 ° ).

Démontrons le 3 ° ). Soit $x \in N(\mu)$. La démonstration du lemme 2.4.4, montre que $(T - \mu I)_{|\mathrm{N}(\lambda)}$ est un homéomorphisme. Comme $(T - \mu I)^{\mathrm{k}}(x) = 0$, on a (en posant $x = x_{\mathrm{N}(\lambda)} + x_{\mathrm{F}(\lambda)}$)

$$(T - \mu I)^{\mathrm{k}}(x_{\mathrm{N}(\lambda)}) = (\mathrm{T} - \mu \mathrm{I})^{\mathrm{k}}(x_{\mathrm{F}(\lambda)}).$$

Alors, puisque $(T - \mu I)^{\mathrm{k}}(x_{\mathrm{F}(\lambda)}) \in F(\lambda)$ (car $T(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$), on a $x_{\mathrm{N}(\lambda)} = 0$ soit $x \in F(\lambda)$.

Reste à démontrer le 4 ° ). Soit $\lambda \in Sp(T)$. D'après le lemme 2.4.4, $\zeta \longrightarrow (T - \zeta I)^{-1}_{|\mathrm{F}(\lambda)}$ est analytique au voisinnage de $\lambda$ (car, pour $x \in F(\lambda)$, $U_2(\zeta)(x) = U_2(\lambda)\Big[x + (\lambda - \zeta)U_2(\lambda)^{-1}(x)\Big]$ et $\|(\lambda - \zeta)U_2(\lambda)^{-1}\| \leq |\lambda - \zeta|C < 1$). Donc il existe $M > 0$ tel que pour $x \in F(\lambda)$ et $|\zeta - \lambda| \leq \delta$, $\delta > 0$ assez petit, on a $\|(T - \zeta I)^{-1}_{|\mathrm{F}(\lambda)}(x)\| \leq M\|x\|$. D'autre part, pour $\zeta \neq \lambda$,

$$(T - \zeta I)_{|\mathrm{N}(\lambda)} = (\lambda - \zeta)\Big[I_{|\mathrm{N}(\lambda)} - \frac{1}{\zeta - \lambda}(T - \lambda I)_{|\mathrm{N}(\lambda)}\Big],$$

d'où

$$(T - \zeta I)^{-1}_{|\mathrm{N}(\lambda)} = -\sum_{i=1}^{k(\lambda)} (\zeta - \lambda)^{-\mathrm{i}}(T - \lambda I)^{\mathrm{i}-1}_{|\mathrm{N}(\lambda)},$$

(puisque $(T - \lambda I)^{\mathrm{k}(\lambda)}_{|\mathrm{N}(\lambda)} = 0$) et par conséquent, pour $x \in N(\lambda)$,

$$|\zeta - \lambda|^{\mathrm{k}}\Big\|(T - \zeta I)^{-1}_{|\mathrm{N}(\lambda)}(x)\Big\| \leq M\|x\|,$$

si $|\zeta-\lambda| \leq 1$ et $\zeta \neq \lambda$, quitte à augmenter $M$ si nécessaire. Soit alors $x = x_{\mathrm{N}(\lambda)}+x_{\mathrm{F}(\lambda)} \in E$. Comme $Max\Big\{\|x_{N(\lambda)}\|,\ \|x_{F(\lambda)}\|\Big\} \leq a\|x\|$ par le 2°) du théorème, on a

$$|\zeta-\lambda|^{\mathrm{k}}\Big\|(T-\zeta I)^{-1}(x)\Big\| \leq a\big(\delta^{\mathrm{k}}M+M\big)\|x\|,$$

si $|\zeta-\lambda| \leq \delta$, $\zeta \neq \lambda$, c'est à dire

$$|\zeta-\lambda|^{k}\Big\|(T-\zeta I)^{-1}\Big\| \leq a\big(M\delta^{\mathrm{k}}+M\big),$$

ce qui signifie que $\lambda$ est un pôle d'ordre au plus $k$. Or il existe $x \in N(\lambda)$ tel que $(T-\lambda I)^{\mathrm{k}-1}_{|\mathrm{N}(\lambda)}(x) \neq 0$, d'où

$$\begin{aligned}(\zeta-\lambda)^{\mathrm{k}-1}(T-\zeta I)^{-1}(x) = -\sum_{i=1}^{k-1}&(\zeta-\lambda)^{\mathrm{k}-\mathrm{i}-1}(T-\lambda I)^{\mathrm{i}-1}_{|\mathrm{N}(\lambda)}(x)\\ &-(\zeta-\lambda)^{-1}(T-\lambda I)^{\mathrm{k}-1}(x)\end{aligned}$$

est non bornée quand $\zeta \to \lambda$ ce qui montre que $\lambda$ est un pôle d'ordre au moins $k$, et achève de démontrer le théorème.

# CHAPITRE III

## INTERPOLATION DES OPERATEURS LINEAIRES

### 1. La méthode complexe d'interpolation.

**Lemme 3.1.1. (théorème de Phragmen-Lindelöf)**
*Soit* $\Omega = \Big\{z \in \mathrm{C}/a < \Re e(z) < b\Big\}$. *Soit* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *une fonction holomorphe dans* $\Omega$ *et bornée. Pour* $a \leq x \leq b$ *on note* $M(x) = \sup\Big\{|f(z)|, \Re e(z) = x\Big\}$. *Alors, pour* $a < x < b$, *on a* $M(x)^{\mathrm{b-a}} \leq M(a)^{\mathrm{b-x}} M(b)^{\mathrm{x-a}}$.

*Démonstration.* Supposons tout d'abord $M(a) = M(b) = 1$. Soit $h_\epsilon(z) = \dfrac{1}{1 + \epsilon(z-a)}$, $z \in \overline{\Omega}$, $\epsilon > 0$. Comme $\Re e(1 + \epsilon(z-a)) \geq 1$ dans $\Omega$, on a $|h_\epsilon(z)| \leq 1$, et, pour $z \in \partial\Omega$, on a $|f(z)h_\epsilon(z)| \leq 1$. Par ailleurs, $|1 + \epsilon(z-a)| \geq \epsilon|\Im m(z)|$, d'où $|f(z)h_\epsilon(z)| \leq \dfrac{B}{\epsilon|\Im m(z)|}$ si $|f(z)| \leq B$. On considère alors le rectangle $R_\epsilon = \Omega \cap \Big\{|\Im m(z)| \leq \dfrac{B}{\epsilon}\Big\}$. Sur $\partial R_\epsilon$, $|f(z)h_\epsilon(z)| \leq 1$, et par suite (par le principe du maximum), la même inégalité est vraie dans $R_\epsilon$, et quand $\epsilon \to 0$, puisque $h_\epsilon(z) \to 1$, on conclut que $|f(z)| \leq 1$ dans $\Omega$.

Considérons maintenant le cas général. Soit

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

$g$ est holomorphe et sans zéros, et comme $\Re e\Big(\dfrac{b-z}{b-a} log M(a)\Big)$ et $\Re e\Big(\dfrac{z-a}{b-a}\Big)$ sont minorés sur $\overline{\Omega}$, $\dfrac{1}{g}$ est bornée sur $\overline{\Omega}$. Par suite, $f/g$ est bornée sur $\overline{\Omega}$. De plus si $\Re e(z) = a$, $|g(z)| = M(a)$ et si $\Re e(z) = b$, $|g(z)| = M(b)$. La première partie de la preuve montre donc que $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right| \leq 1$ dans $\Omega$, ce qui démontre le lemme.

**Remarque.** Si l'on ne suppose pas *à priori* que la fonction $f$ est bornée dans $\Omega$, la conclusion du lemme peut être mise en défaut. Par exemple, avec $\Omega = \Big\{0 < \Re e(z) < 1\Big\}$, la fonction

$$f(z) = e^{\left(e^{i\pi z - i\frac{\pi}{2}}\right)}$$

est telle que

$$f(x+iy) = e^{\left(e^{i\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)}e^{-\pi y}\right)},$$

et par suite

$$|f(iy)| = \left|e^{\left(-ie^{-\pi y}\right)}\right| = 1,$$

$$|f(1+iy)| = \left|e^{\left(ie^{-\pi y}\right)}\right| = 1,$$

et

$$\left|f\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right| = e^{\left(e^{-\pi y}\right)}$$

est non borné pour $y \in \mathbf{R}$.

Soient $E$ un espace normé sur C et $\Omega$ un ouvert de C. On dit que $F : \Omega \longrightarrow E$ est **holomorphe** si $\forall \varphi \in E'$, $z \longrightarrow \varphi(F(z))$ est holomorphe. Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes sur $E$. Soit $\Omega = \Big\{0 < \Re e(z) < 1\Big\}$; on note $\mathcal{B}_{1,2}(E)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $E$ et qui soit, pour les deux normes, holomorphes et bornées au voisinage de $\overline{\Omega}$. D'après le lemme 3.1.1 et la proposition 1.3.1,, $\mathcal{B}_{1,2}(E)$ est un espace normé pour la norme

$$\|F\| = \max\left\{\sup_{y\in\mathrm{R}}\|F(iy)\|_1, \sup_{y\in\mathrm{R}}\|F(1+iy)\|_2\right\}.$$

On dit que les deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont **consistantes** si $\forall \alpha \in ]0,1[$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{B}_\alpha(E) = \Big\{F \in \mathcal{B}_{1,2}(E) \ t.q. \ F(\alpha) = 0\Big\}$ est fermé dans $\mathcal{B}_{1,2}(E)$.

Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes consistantes sur $E$, et $\alpha \in ]0,1[$. Alors $F \longrightarrow F(\alpha)$ est un isomorphisme algébrique de $\mathcal{B}_{1,2}(E)/\mathcal{B}_\alpha(E)$ sur $E$, et on identifie ces espaces par cet isomorphisme. $\mathcal{B}_\alpha(E)$ étant fermé, $\mathcal{B}_{1,2}(E)/\mathcal{B}_\alpha(E)$ est un espace normé pour la **norme quotient**. On note $\| \ \|_\alpha$ cette nouvelle norme considérée comme norme sur $E$; on l'appelle la **norme interpolée d'ordre** $\alpha$. On a donc, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_\alpha = \inf_{\substack{F\in\mathcal{B}_{1,2}(E)\\ F(\alpha)=x}} \|F\|.$$

**Remarques.** 1°) Pour $0 < \alpha < 1$, et $x \in E$, on a $\|x\|_\alpha \leq \max\$\Big\{\|x\|_1, \|x\|_2\Big\}$ (pour le voir on prends $F \equiv x$).

2°) On pourrait, de la même manière, définir les normes interpolées d'ordre 0 et 1 ($\mathcal{B}_0(E)$ et $\mathcal{B}_1(E)$ sont évidement fermés). Naturellement ceci n'apporterait rien de nouveau: Pour $\alpha = 0$ (resp.$\alpha = 1$), la norme interpolée d'ordre $\alpha$ est égale à la norme $\| \ \|_1$ (resp. $\| \ \|_2$). Vérifions le par exemple pour la norme d'ordre 0: si $F \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$ est telle que $F(0) = x$, $x \in E$, $x \neq 0$, par définition, on a $\|F\| \geq \|x\|_1$; d'autre part, si $F(\zeta) = e^{a\zeta}x$, avec $e^a = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$, on a $F \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$, $F(0) = x$ et $\|F(iy)\|_1 = \|x\|_1$, $\|F(1+iy)\|_2 = e^a\|x\|_2 = \|x\|_1$ soit $\|F\| = \|x\|_1$.

**Proposition 3.1.1.**

*Soit $E$ un espace vectoriel. Si, pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe $\varphi \in E^*$ continue pour deux normes sur $E$ telle que $\varphi(x) \neq 0$, alors les deux normes sont consistantes.*

*Démonstration.* Soit $(F_{\mathrm{n}})$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_\alpha(E)$ qui converge vers $F \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$. $\varphi \in E^*$ étant continue pour les deux normes, $\varphi(F_{\mathrm{n}} - F)$ tend vers zéro uniformément sur $\partial\Omega$ et par suite sur $\Omega$ d'après le lemme 3.1.1. D'où $\varphi(F(\alpha)) = 0$ ce qui, en choisissant correctement $\varphi$ (hypothèse), montre la proposition.

**Théorème 3.1.1.**

*Soit $E$ (resp. $E_\#$) un espace vectoriel sur $\mathrm{C}$ muni de deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ (resp. $\| \ \|_1^\#$ et $\| \ \|_2^\#$) consistantes. Pour $0 < \alpha < 1$, soit $\| \ \|_\alpha$ (resp. $\| \ \|_\alpha^\#$) la norme interpolée d'ordre $\alpha$ sur $E$ (resp. $E_\#$). Soit $T$ une application linéaire de $E$ dans $E_\#$ qui est continue quand on munit $E$ (resp. $E_\#$) de la norme $\| \ \|_{\mathrm{i}}$ (resp. $\| \ \|_{\mathrm{i}}^\#$), pour $i = 1, 2$. Alors $T$ est continue pour les normes $\| \ \|_\alpha$ et $\| \ \|_\alpha^\#$, et on a $\|T\|_\alpha \leq \|T\|_1^{1-\alpha} \|T\|_2^\alpha$ (où l'on a noté $\|T\|_{\mathrm{i}} = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|_{\mathrm{i}}} \leq_1 \|T(x)\|_{\mathrm{i}}^\#$ et de même pour $\|T\|_\alpha$).*

*Démonstration.* Définissons $\widetilde{T} : \mathcal{B}_{1,2}(E) \longrightarrow \mathcal{B}_{1,2}(E_\#)$, en posant $\widetilde{T}(F)(z) = T(F(z))$: on a bien $\widetilde{T}(F) \in \mathcal{B}_{1,2}(E_\#)$, car si $\varphi \in E_\#^*$, est continue pour $\| \ \|_1^\#$, on a $\varphi(T(F)(z)) =< F(z), T^*(\varphi) >$, et $T^*(\varphi) \in E^*$ est continue pour la norme $\| \ \|_1$, donc $\widetilde{T}(F)$ est bien holomorphe et bornée pour la norme $\| \ \|_1^\#$, et on vérifie la même chose pour les normes $\| \ \|_2^\#$ et $\| \ \|_2$. Soit maintenant $x \in E$ tel que $\|x\|_\alpha \leq 1$. Il existe donc $F \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$ telle que $F(\alpha) = x$ et $\|F\| \leq 1 + \epsilon$. Par définition, on a $\widetilde{T}(F)(\alpha) = T(F(\alpha)) = T(x)$. On considère alors la fonction $\Phi(z) = e^{\mathrm{a}(\mathrm{z}-\alpha)} F(z)$, où $a$ est définit par $e^{\mathrm{a}} = \|T\|_1 \|T\|_2^{-1}$. Comme $\Phi(\alpha) = F(\alpha) = x$,

$$
\begin{aligned}
\|T(x)\|_\alpha^\# &\leq \left\| \widetilde{T}(\Phi) \right\| \\
&= \max\left\{ \sup_{y \in \mathrm{R}} \left\| T\left( e^{\mathrm{a}(\mathrm{iy}-\alpha)} F(iy) \right) \right\|_1^\#, \sup_{y \in \mathrm{R}} \left\| T\left( e^{\mathrm{a}(1-\alpha+\mathrm{iy})} F(1+iy) \right) \right\|_2^\# \right\} \\
&= \max\left\{ \sup_{y \in \mathrm{R}} e^{-\mathrm{a}\alpha} \|T(F(iy))\|_1^\#, \sup_{y \in \mathrm{R}} e^{\mathrm{a}(1-\alpha)} \|T(F(1+iy))\|_2^\# \right\}.
\end{aligned}
$$

La continuité de $T$ et les définitions de $F$ et de $a$ donnent donc

$$
\begin{aligned}
\|T(x)\|_\alpha^\# &\leq (1+\epsilon) \left\{ e^{-\mathrm{a}\alpha} \|T\|_1, e^{\mathrm{a}(1-\alpha)} \|T\|_2 \right\} \\
&= (1+\epsilon) \|T\|_1^{1-\alpha} \|T\|_2^\alpha.
\end{aligned}
$$

## 2. Le théorème de Riesz–Thorin.

Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré, $\mu$ étant une mesure positive. On note $\| \ \|_{\mathrm{p}}$ la norme sur $L^{\mathrm{p}}(\mu)$.

**Proposition 3.2.1.**
*Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geq 0$, et soient $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. $E$ étant soit $L^{\mathrm{p}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{p}_2}(\mu)$ soit l'espace vectoriel des fonction étagées, les deux normes $\| \ \|_{\mathrm{p}_1}$ et $\| \ \|_{\mathrm{p}_2}$ sont consistantes sur $E$.*

*Démonstration.* Si $f \in E$, $f \neq 0$, et $f = |f|e^{\mathrm{i}\varphi}$, en posant $g = e^{\mathrm{i}\varphi}\Big[\inf\Big\{1, |f|^{\mathrm{p}_1}\Big\}\Big]$, on a $g \in L^1 \cap L^\infty$, (et $g$ est étagée si $f$ l'est) et $f\overline{g} > 0$ là où $|f| > 0$. Donc $g$ définit une forme linéaire continue sur $E$ (pour les deux normes) et $\displaystyle\int f\overline{g}d\mu \neq 0$.

**Proposition 3.2.2.**
*Soient $(X, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geq 0$, et $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. Supposons que $E$ soit ou bien $L^{\mathrm{p}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{p}_2}(\mu)$ ou bien l'espace des fonctions étagées sur $X$, et soient $\| \ \|_{\mathrm{s}}$ la norme interpolée d'ordre $s \in ]0, 1[$ sur $E$ entre $\| \ \|_{\mathrm{p}_1}$ et $\| \ \|_{\mathrm{p}_2}$ et $p_s \in ]p_1, p_2[$ définit par $\dfrac{1}{p_s} = \dfrac{1-s}{p_1} + \dfrac{s}{p_2}$. Alors:*
*(a) Si $E = L^{\mathrm{p}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{p}_2}(\mu)$, $\forall f \in E$, $\|f\|_{\mathrm{p_s}} \leq \|f\|_{\mathrm{s}}$.*
*(b) Si $E$ est l'espace des fonctions étagées, $\forall f \in E$, $\|f\|_{\mathrm{p_s}} = \|f\|_{\mathrm{s}}$.*

*Démonstration.* Soit $f \in E$ telle que $\|f\|_{\mathrm{p_s}} = 1$.
(a): Montrons que $\|f\|_{\mathrm{s}} \geq 1$. Soit $q_{\mathrm{i}}$ le conjugué de $p_{\mathrm{i}}$, $i = 1, 2$ (i.e. $\dfrac{1}{p_{\mathrm{i}}} + \dfrac{1}{q_{\mathrm{i}}} = 1$), et soit $q_{\mathrm{s}}$ le conjugué de $p_{\mathrm{s}}$ de sorte que $q_{\mathrm{s}} = \dfrac{q_1 q_2}{q_1 s + q_2(1-s)}$ (i.e. $\dfrac{1}{q_s} = \dfrac{1-s}{q_1} + \dfrac{s}{q_2}$). Soit $E_\# = L^{\mathrm{q}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{q}_2}(\mu)$. Comme l'espace des fonctions étagées est dense dans $L^{\mathrm{q_s}}(\mu)$ ($q_{\mathrm{s}} < \infty$), il existe une fonction étagée $g$ telle que $\|g\|_{\mathrm{q_s}} \leq 1$ et $\displaystyle\int fgd\mu > 1 - \epsilon$.

**Lemme 3.2.1.**
*Avec les notations de la proposition, $E$ étant l'espace des fonctions étagées, soit $h \in E$ telle que $\|h\|_{\mathrm{p_s}} \leq 1$. Alors il existe $H \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$ telle que $H(s) = h$ et $\|H\| \leq 1$.*

*Démonstration.* Posons $h = e^{\mathrm{i}\varphi}|h|$ et $H(z) = e^{\mathrm{i}\varphi}|h|^{\mathrm{a(z-s)+1}}$, où $a = \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 s + p_2(1-s)}$. Alors $H(s) = h$ et $|H(iy)| = |h|^{\mathrm{p_s/p_1}}$, $|H(1+iy)| = |h|^{\mathrm{p_s/p_2}}$, d'où $\|H(iy)\|_{\mathrm{p}_1} \leq 1$ et $\|H(1+iy)\|_{\mathrm{p}_2} \leq 1$, ce qui montre le lemme.

Poursuivons maintenant la preuve du (a) de la proposition. D'après le lemme 3.2.1, il existe $G \in \mathcal{B}_{1,2}(E_\#)$ telle que $G(s) = g$ et $\|G\| \leq 1$. Soit $F \in \mathcal{B}_{1,2}(E)$ telle que $F(s) = f$, et posons $h(z) = \displaystyle\int F(z)G(z)d\mu$, $z \in \Omega$. Il résulte de l'inégalité de Hölder que $h(z)$ est bornée dans $\Omega$. De plus

**Lemme 3.2.2.**

*$h$ est holomorphe dans $\Omega$ et continue dans $\overline{\Omega}$.*

*Démonstration.* Par construction $G(z)$ est étagée: $G(z) = \sum_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}(z)\chi_{A_{\mathrm{i}}}$, $\mu(A_{\mathrm{i}}) \neq 0$, la somme étant finie. Alors $h(z) = \sum_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}(z) < F(z), \chi_{A_{\mathrm{i}}} >$, ce qui montre le lemme puisque $a_{\mathrm{i}}(z) = \frac{1}{\mu(A_{\mathrm{i}})} < G(z), \chi_{A_{\mathrm{i}}} >$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$.

Achevons maintenant la preuve du (a): puisque $h(s) \geq 1 - \epsilon$, par le théorème de Phragmen–Lindelöf (proposition 3.1.1), $|h(z)|$ doit dépasser $1 - \epsilon$ sur $\partial\Omega$, et comme sur cet ensemble on a $|h(z)| \leq \|F\|\|G\| \leq \|F\|$ (par l'inégalité de Hölder), on doit avoir $\|F\| \geq 1 - \epsilon$, ce qui entraine $\|f\|_{\mathrm{s}} \geq 1 - \epsilon$.

Le (b) de la proposition résulte aussitôt de ce qui précède: tout d'abord la preuve du (a) montre que $\|f\|_{\mathrm{s}} \geq 1$; l'inégalité inverse résulte elle du lemme 3.2.1.

**Remarque.** Dans la proposition précédente, si $p_2 < \infty$, on a $\|f\|_{\mathrm{s}} = \|f\|_{\mathrm{p_s}}$ pour toute $f \in L^{\mathrm{p}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{p}_2}(\mu)$: en effet, si $f \in L^{\mathrm{p}_1} \cap L^{\mathrm{p}_2}$, il existe une suite de fonctions étagées $f_{\mathrm{n}}$ qui converge vers $f$ dans $L^{\mathrm{p}_1}$ et dans $L^{\mathrm{p}_2}$. Comme la norme interpolée est majorée par le max des deux normes $L^{\mathrm{p}_1}$ et $L^{\mathrm{p}_2}$, $f_{\mathrm{n}}$ converge aussi vers $f$ pour la norme interpolée. La conclusion résulte donc de la proposition.

**Théorème 3.2.1 (théorème de Riesz–Thorin).**

*Soient $(X, \mu)$ et $(Y, \nu)$ deux espaces mesurés, $1 \leq p_1, p_2, p_1', p_2' \leq +\infty$, $p_1 \neq p_2$, $p_1' \neq p_2'$. On pose $E = L^{\mathrm{p}_1}(\mu) \cap L^{\mathrm{p}_2}(\mu)$, $E' = L^{\mathrm{p}_1'}(\nu) \cap L^{\mathrm{p}_2'}(\nu)$. Soit $T : E \longrightarrow E'$ une application linéaire telle que*

$$\|T\|_i = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_{\mathrm{p_i}} \leq 1}} \|T(f)\|_{\mathrm{p}_{\mathrm{i}}'} < +\infty, \ i = 1, 2.$$

*Alors, pour $0 < s < 1$, $T$ se prolonge en un opérateur linéaire continu de $L^{\mathrm{p_s}}(\mu)$ dans $L^{\mathrm{p}_{\mathrm{s}}'}(\nu)$ avec $\frac{1}{p_{\mathrm{s}}} = \frac{1-s}{p_1} + \frac{s}{p_2}$, $\frac{1}{p_{\mathrm{s}}'} = \frac{1-s}{p_1'} + \frac{s}{p_2'}$ de norme $\|T\|_{\mathrm{s}} \leq \|T\|_1^{1-\mathrm{s}} \|T\|_2^{\mathrm{s}}$.*

*Démonstration.* En effet, soit $E_{\#}$ l'espace des fonctions étagées sur $(X, \mu)$. On considère alors $T : E_{\#} \longrightarrow E$, et on applique le théorème 3.1.1 et la proposition 3.2.2 (rappelons que $E_{\#}$ (resp. $E$) est dense dans $L^{\mathrm{p_s}}(\mu)$ (resp. $L^{\mathrm{p}_{\mathrm{s}}'}(\nu)$ car $p_{\mathrm{s}} < \infty$ (resp. $p_{\mathrm{s}}' < \infty$)).

**Corollaire 1 (théorème de Hausdorff-Young).**

*Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ (i.e. $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} f(x) e^{-\mathrm{i}<\mathrm{x},\xi>} dx$). Soit $1 \leq p \leq 2$ et soit $2 \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\mathcal{F}$ est continue de $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^{\mathrm{q}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ de norme $\leq (2\pi)^{\mathrm{n}/\mathrm{q}}$.*

*Démonstration.* On sait que $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow L^\infty$ de norme 1 et que $\mathcal{F}$ est une "isométrie" de $L^2$ sur lui même de norme $(2\pi)^{\mathrm{n}/2}$. Le corollaire résulte donc aussitôt du théorème.

**Corollaire 2 (inégalité de Young).**
*Soient* $k \in L^{\mathrm{r}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ *et* $f \in L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, *avec* $1 < p < r'$ $(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}= 1)$. *Alors* $f * k \in L^{\mathrm{q}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ *avec* $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}$ *et* $\|f * k\|_{\mathrm{q}} \leq \|f\|_{\mathrm{p}}\|k\|_{\mathrm{r}}$.

*Démonstration.* Posons $T(f)(x) = f * k(x)$, $k \in L^{\mathrm{r}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ fixée. Par l'inégalité de Hölder, on a

$$|f * k(x)|^{\mathrm{r}} \leq \left(\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} |k(x-y)|^{\mathrm{r}}|f(y)|dy\right)(\|f\|_1)^{r/r'},$$

ce qui donne $\|f * k\|_{\mathrm{r}} \leq \|k\|_{\mathrm{r}}\|f\|_1$, c'est à dire que $T$ est continu de $L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^{\mathrm{r}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ de norme $\|k\|_{\mathrm{r}}$. D'autre part, clairement (par Hölder) $T$ est continu de $L^{\mathrm{r}'}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^\infty(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ de norme $\|k\|_{\mathrm{r}}$. La conclusion résulte donc du théorème de Riesz–Thorin.

**Remarque.** On peut interpoler par cette méthode d'autres espaces classiques. Par exemple, l'interpolation de deux espaces de Sobolev donne les espaces de Sobolev intermédiaires.

## 3. Le théorème de Marcinkiewicz.

**Définition 3.3.1.**
*Soit* $(X, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu \geq 0$. *Soit* $f : X \longrightarrow \mathrm{C}$ *une fonction mesurable finie* $\mu$*-presque partout. On appelle* **fonction de répartition** *de* $f$ *la fonction* $\sigma \longrightarrow m(\sigma, f)$ *définie par*

$$m(\sigma, f) = \mu\{x \in X \;/\; |f(x)| > \sigma\}.$$

*La fonction de répartition est à valeurs dans* $\mathrm{R}_+$, *décroissante et continue à droite.*

**Proposition 3.3.1.**
*Soit* $(X, \mu)$ *un espace mesuré, et* $f$ *une fonction mesurable sur* $X$.
*(a) Pour* $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f\|_{L^{\mathrm{p}}(\mu)} = \left(p\int_0^{+\infty} \sigma^{\mathrm{p}} m(\sigma, f)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*(b) Pour* $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \inf\{\sigma \;/\; m(\sigma, f) = 0\}.$$

*Démonstration.* Le (b) étant évident, montrons le (a). On peut naturellement supposer $f > 0$. Considérons tout d'abord le cas $p = 1$. Soit $g = \sum_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}\chi_{E_{\mathrm{i}}}$, $\mu(E_{\mathrm{i}}) < \infty$, $E_{\mathrm{i}} \cap E_{\mathrm{j}} = \emptyset$, si $i \neq j$, une fonction étagée. On a, $m(\sigma, f) = \sum_{|\mathrm{a_i}|>\sigma} \mu(E_{\mathrm{i}})$, d'où

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} m(\sigma, f)d\sigma &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{|a_i|>\sigma} \mu(E_{\mathrm{i}})\right) d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_i \mu(E_{\mathrm{i}})\chi_{[0,|a_i|[}(\sigma)\right) d\sigma \\
&= \|f\|_{L^1(\mu)}.
\end{aligned}
$$

Si maintenant $f \in L^1(\mu)$, $f > 0$, il existe une suite croissante de fonctions étagées $f_{\mathrm{n}}$ qui converge vers $f$ $\mu$-presque partout. On a alors $m(\sigma, f_{\mathrm{n}}) < m(\sigma, f_{\mathrm{n+1}})$, et $m(\sigma, f_{\mathrm{n}}) \to m(\sigma, f)$ quand $n \to \infty$, car si $A_{\mathrm{n}} = \Big\{|f_{\mathrm{n}}| > \sigma\Big\}$, on a $A_{\mathrm{n}} \subset A_{\mathrm{n+1}}$ et $\bigcup_{\mathrm{n}} A_{\mathrm{n}} = \Big\{|f| > \sigma\Big\}$ a un ensemble de mesure nulle près, et par suite $\mu(A_{\mathrm{n}}) \to \mu(A)$. Par le théorème de Beppo-Levi, $\int m(\sigma, f_{\mathrm{n}})d\sigma$ tend donc vers $\int m(\sigma, f)d\sigma$, et comme, par le même théorème, $\|f_{\mathrm{n}}\|$ tends vers $\|f\|$, on conclut lorsque $p = 1$. Supposons maintenant $p > 1$. Alors $g = |f|^{\mathrm{p}} \in L^1$ et donc $\int m(\sigma, g)d\sigma = \|f\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$. Or $m(\sigma, g) = m(\sigma^{1/\mathrm{p}}, f)$, d'où,

$$
\|f\|_{L^{\mathrm{p}}(\mu)} = \int_0^{+\infty} m(\sigma^{1/\mathrm{p}}, f)d\sigma = p\int_0^{+\infty} \sigma^{\mathrm{p}} m(\sigma, f)\frac{d\sigma}{\sigma},
$$

par un changement de variable élémentaire.

**Définition 3.3.2.**
*Soient $(X, \mu)$ un espace mesuré $(\mu \geq 0)$ et $1 \leq p < +\infty$. On appelle* **espace $L^{\mathrm{p}}$ faible** *l'espace vectoriel $L^{\mathrm{p}\infty}(\mu)$ des fonctions mesurables $f$ sur $X$ telles que $\sup_\sigma \Big(\sigma m(\sigma, f)^{1/\mathrm{p}}\Big) < +\infty$. Pour $f \in L^{\mathrm{p}\infty}(\mu)$, on notera $\|f\|_{\mathrm{p}\infty} = \sup_\sigma \Big(\sigma m(\sigma, f)^{1/\mathrm{p}}\Big)$.*

**Proposition 3.3.2.**
*Soient $(X, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. Alors $L^{\mathrm{p}}(\mu) \subset L^{\mathrm{p}\infty}(\mu)$.*

*Démonstration.* Cela résulte des inégalités

$$
\|f\|_{L^{\mathrm{p}}(\mu)}^{\mathrm{p}} \geq \int_{\{\,|f|>\sigma\}} |f|^{\mathrm{p}} \geq \sigma^{\mathrm{p}}\mu\{\,|f| > \sigma\} = \sigma^{\mathrm{p}} m(\sigma, f).
$$

**Remarque.** $\| \ \|_{\mathrm{p}\infty}$ n'est pas une norme, c'est une quasi-norme: on a
$$m(\sigma, f + g) \leq m(\sigma/2, f) + m(\sigma/2, g)$$

d'où, $m(\sigma, f+g)^{1/\mathrm{p}} \leq m(\sigma/2, f)^{1/\mathrm{p}} + m(\sigma/2, g)^{1/\mathrm{p}}$, d'où

$$\|f+g\|_{\mathrm{p}\infty} \leq 2\Big(\|f\|_{\mathrm{p}\infty} + \|g\|_{\mathrm{p}\infty}\Big).$$

Pour $p > 1$, on peut définir la topologie de $L^{\mathrm{p}\infty}$ par une vraie norme: c'est un espace de Banach. Par contre $L^{1\infty}$ est complet mais pas normable.

**Exemple.** $X = \mathrm{R}$, muni de la mesure de Lebesgue. si $f(x) = 1/x$, on a $m(\sigma, f) = 2/\sigma$ donc $f \in L^{1\infty}$, et bien sûr, $f \notin L^1$. De même, $\frac{1}{x^\alpha} \in L^{1/\alpha\infty}$.

**Théorème 3.3.1 (théorème de Marcinkiewicz).**

*Soient $(X, \mu)$ et $(Y, \nu)$ deux espaces mesurés, $\mu$ et $\nu$ étant des mesures positives. Soit $T$ un opérateur sous-linéaire (i.e. $|T(\lambda f)| \leq |\lambda||T(f)|$ et $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$) vérifiant:*
*(i) $T : L^{\mathrm{p}_0}(X, \mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q}_0\infty}(Y, \nu)$ de norme $M_1^*$*
*(ii) $T : L^{\mathrm{p}_1}(X, \mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q}_1\infty}(Y, \nu)$ de norme $M_1^*$.*
*Soit $0 < \theta < 1$, et soient $p$ et $q$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Alors Si $p \leq q$, $T$ s'étend en un opérateur continu de $L^{\mathrm{p}}(X, \mu)$ dans $L^{\mathrm{q}}(Y, \nu)$ de norme majorée par $C_\theta M_0^{*(1-\theta)} M_1^{*\theta}$ .*

**Remarques.** 1°) Le terme de norme de $T$ utilisé dans le théorème s'entend au sens usuel (i.e. $T$ est de norme $M$ si $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, $M$ étant la plus petite constante possible pour l'inégalité).

2°) $T$ peut être seulement R-sous-linéaire.

3°) Le théorème reste vrai si on suppose seulement $T$ défini sur $L^{\mathrm{p}}$.

4°) On remarquera que ce théorème ne remplace pas le théorème de Riesz-Thorin à cause de la restriction $p \leq q$.

*Démonstration.* Pour simplifier, nous allons nous contenter de faire la démonstration lorsque $p_0 = q_0$ et $p_1 = q_1$, $p_0 \leq p_1$, de sorte que $p = q \in ]p_0, p_1[$. Soit $f$ une fonction mesurable, et posons $f_0 = f\chi_{\{|\mathrm{f}|>\mathrm{t}\}}$ et $f_1 = f\chi_{\{|\mathrm{f}|\leq\mathrm{t}\}}$, de sorte que $f = f_0 + f_1$, et de plus si $f \in L^{\mathrm{p}}$, alors $f_0$ et $f_1$ aussi. Pour tous $\sigma$ et $t$, on a

$$\nu\{\,|Tf| > \sigma\}\ \leq \nu\{\,|Tf_0| > \sigma/2\} + \nu\{\,|Tf_1| > \sigma/2\},$$

et, par hypothèse,

$$\sigma\nu\{\,|Tf_0| > \sigma\}^{1/p_0} \leq M_0^*\|f_0\|_{L^{\mathrm{p}_0}},$$

$$\sigma\nu\{\,|Tf_1| > \sigma\}^{1/p_1} \leq M_1^*\|f_1\|_{L^{\mathrm{p}_1}}.$$

Supposons tout d'abord $p_1 < +\infty$. En faisant $\sigma = t$, on obtient

$$\nu\{\,|Tf| > t\}\ \leq 2^{\mathrm{p}_0}\frac{M_0^{*\mathrm{p}_0}\|f\|_{\mathrm{p}_0}^{p_0}}{t^{\mathrm{p}_0}} + 2^{\mathrm{p}_1}\frac{M_1^{*\mathrm{p}_1}\|f\|_{\mathrm{p}_1}^{p_1}}{t^{\mathrm{p}_1}}.$$

Alors, d'après la proposition 3.3.1 et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} &\leq pM_0^{*\mathrm{p}_0}2^{\mathrm{p}_0}\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{p}-1-\mathrm{p}_0}\int_{|f|>t}|f|^{\mathrm{p}_0}d\mu dt \\
&\quad + pM_1^{*\mathrm{p}_1}2^{\mathrm{p}_1}\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{p}-1-\mathrm{p}_1}\int_{|f|\leq t}|f|^{\mathrm{p}_1}d\mu dt \\
&= pM_0^{*\mathrm{p}_0}2^{\mathrm{p}_0}\int_X |f|^{\mathrm{p}_0}\left(\int_0^{|f(x)|} t^{\mathrm{p}-1-\mathrm{p}_0}dt\right)d\mu \\
&\quad + pM_1^{*\mathrm{p}_1}2^{\mathrm{p}_1}\int_X |f|^{\mathrm{p}_1}\left(\int_0^{|f(x)|} t^{\mathrm{p}-1-\mathrm{p}_1}dt\right)d\mu.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|Tf\|_{\mathrm{p}} \leq p^{1/\mathrm{p}}\left(\frac{2^{\mathrm{p}_0}}{p-p_0}M_0^{*\mathrm{p}_0}+\frac{2^{\mathrm{p}_1}}{p_1-p}M_1^{*\mathrm{p}_1}\right)^{1/p}\|f\|_{\mathrm{p}},$$

et $T$ s'étend en un opérateur continu sur $L^{\mathrm{p}}$.

Considérons maintenant le cas $p_1=+\infty$. Puisque $|f_1|\leq t$, on a $|Tf_1|\leq M_1^*t$. On choisit alors $\sigma=2M_1^*t$. On a donc

$$\nu\{\,|Tf|>2M_1^*t\}\leq \sigma\{\,|Tf_0|\geq M_1^*t\}\leq \frac{M_0^{*\mathrm{p}_0}\|f_0\|_{\mathrm{p}_0}^{p_0}}{M_1^{*\mathrm{p}_0}t^{\mathrm{p}_0}},$$

d'où

$$\|Tf\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \leq p2^{\mathrm{p}}M_1^{*\mathrm{p}-\mathrm{p}_0}M_0^{*\mathrm{p}_0}\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{p}-1-\mathrm{p}_0}\left(\int_{|f|>t}|f|^{\mathrm{p}_0}d\mu\right)dt,$$

et on conclut comme dans le premier cas.

**Corollaire.**

*Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ et soit $p\in[1,2]$. Alors $\mathcal{F}$ est continue de $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^{\mathrm{p}}(|\xi|^{-\mathrm{n}(2-\mathrm{p})}d\lambda)$ ($\lambda$ mesure de Lebesgue sur $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$).*

*Démonstration.* Posons $T(f)(\xi)=|\xi|^{\mathrm{n}}\mathcal{F}(f)(\xi)$. Par le théorème de Plancherel, $T$ est continu de $L^2(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^2(|\xi|^{-2\mathrm{n}}d\lambda)$.

**Lemme 3.3.1.**

*$T$ est continu de $L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^{1\infty}(|\xi|^{-2\mathrm{n}}d\lambda)$.*

Admettons le lemme un instant pour conclure le corollaire: d'après le théorème de Marcinkiewicz $T$ est continu de $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ dans $L^{\mathrm{p}}(|\xi|^{-2\mathrm{n}}d\lambda)$, ce qui est exactement la conclusion du corollaire.

Démontrons maintenant le lemme. Supposons $\|f\|_1\leq 1$ de sorte que $|\mathcal{F}f|\leq 1$. Si $\xi\in E_\sigma=\Big\{|\xi|^{\mathrm{n}}|\mathcal{F}(f)(\xi)|>\sigma\Big\}$, on a donc $|\xi|^{\mathrm{n}}>\sigma$, d'où

$$m(\sigma,T(f))=\int_{E_\sigma}|\xi|^{-2\mathrm{n}}d\lambda(\xi)\leq\int_{|\xi|^{\mathrm{n}}>s}|\xi|^{-2\mathrm{n}}d\lambda\leq\sigma^{-1}.$$

Comme nous l'avons vu, le théorème de Marcinkievicz comporte une restriction. Nous allons maintenant donner sans démonstration un théorème de Marcinkievicz plus général qui, en quelque sorte, explique cette restriction. Pour pouvoir l'énoncer, il nous faut introduire une nouvelle notion:

**Définition 3.3.3.**
*Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré, et $f$ une fonction mesurable sur $X$. On appelle* **réarrangée decroissante** *de $f$ la fonction $f^*$ définie par*

$$f^*(t) = \inf\ \{\sigma\ /\ m(\sigma, f) \leq t\},\ t \geq 0.$$

*On appelle* **espace de Lorentz** $L^{\mathrm{p,r}}(X, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq r \leq +\infty$ *l'espace vectoriel des fonctions mesurables sur $X$ telles que*

$$\|f\|_{L^{\mathrm{p,r}}(X,\mu)} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{1/\mathrm{p}} f^*(t)\right)^{\mathrm{r}} \frac{dt}{t}\right)^{1/r} < +\infty,\ si\ 1 \leq r < +\infty,$$
$$\|f\|_{L^{\mathrm{p},\infty}(X,\mu)} = \sup_t t^{1/\mathrm{p}} f^*(t) < +\infty,\ si\ r = +\infty.$$

**Proposition 3.3.3.**
*Avec les notations de la définition ci-dessus, on a:*
*1°) $f^*(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathrm{R}$.*
*2°) $t_1 \leq t_2$ entraine $f^*(t_1) \geq f^*(t_2)$ et $f^*$ est continue à droite.*
*3°) Pour tout $\rho \geq 0$ on a $m(\rho, f^*) = m(\rho, f)$.*
*4°) Si $f^*$ est continue en $t$, alors, $t = m(f^*(t), f)$.*
*5°) Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^{\mathrm{p,p}}(X, \mu) = L^{\mathrm{p}}(X, \mu)$ et l'espace $L^{\mathrm{p}\infty}(X, \mu)$ définit ci-dessus est l'espace faible de la définition 3.3.2.*

A titre d'exercice, montrons par exemple les 2°) et 3°). La décroissance de $f^*$ étant évidente, montrons qu'elle est continue à droite. Soit $t_{\mathrm{n}} \geq t$ une suite de réels qui tend vers $t$ en décroissant. $f^*(t_{\mathrm{n}})$ est donc une suite croissante majorée par $f^*(t)$ qui converge donc vers $l \in \mathrm{R}$. Supposons $l < f^*(t)$. Il existe donc $\sigma < f^*(t)$ tel que $m(\sigma, f) \leq t_{\mathrm{n}}$, pour tout $n$ ce qui entraine $m(\sigma, f) \leq t$ et contredit la définition de $f^*(t)$. Vérifions maintenant le 3°). Si $f^*(t) > \sigma$, alors $m(\rho, f) > t$ d'où $\lambda\Big(\Big\{t\ /\ f^*(t) > \rho\Big\}\Big) \leq m(\rho, f)$ soit $m(\rho, f^*) \leq m(\rho, f)$. Inversement, $\Big\{t\ /\ f^*(t) > \rho\Big\}$ étant un intervalle de la forme [0, ), on a $m(\rho, f^*) = \sup\Big\{t\ /\ f^*(t) > \rho\Big\}$. Alors si $x > m(\rho, f^*)$, on a $f^*(x) \leq \rho$, donc $m(\rho, f) \leq x$, soit $m(\rho, f) \leq m(\rho, f^*)$.

Enonçons maintenant le théorème de Marcinkiewicz général:

**Théorème 3.3.2 (théorème de Marcinkiewicz).**

*Les notations étant les même que dans le théorème 3.3.1, supposons que:*
*(i)* $T : L^{\mathrm{p_0,r_0}}(X, \mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q_0,s_0}}(Y\nu)$,
*(ii)* $T : L^{\mathrm{p_1,r_1}}(X\mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q_1,s_1}}(Y\nu)$,
*avec* $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$.
*Soient* $0 \leq \theta \leq 1$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$. *Alors,* $T : L^{\mathrm{p,r}}(X, \mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q,r}}(Y, \nu)$, *pour* $0 < r \leq +\infty$.

**Remarque**. Notons que si $p \leq q$ (puisque $L^{p,q} \subset L^{p,p} = L^p$), on retrouve le résultat $T : L^{\mathrm{p}}(X, \mu) \longrightarrow L^{\mathrm{q}}(Y, \nu)$ du théorème précédent.

# CHAPITRE IV

## DIFFERENTIATION DES MESURES

### 1. Différentiation des mesures.

Dans tout ce chapitre, $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{R}^n$.

**Définition 4.1.1.**
*On dit qu'une famille $\Omega$ d'ouverts de $\mathrm{R}^n$ est* **substantielle** *si les propriétés suivantes sont satisfaites:*
*(a) $\exists \beta > 0$ tel que $\forall E \in \Omega$, $\exists B$ boule ouverte telle que $E \subset B$ et $\lambda(B) < \beta\lambda(E)$.*
*(b) $\forall x \in \mathrm{R}^n$, $\forall \delta > 0$, $\exists E \in \Omega$ tel que $x \in E$ et $d(E) =$ diamètre de $E \leq \delta$.*

**Définition 4.1.2.**
*Soient $\mu$ une mesure de Borel sur $\mathrm{R}^n$ et $\Omega$ une famille subtantielle. On dit que $\mu$ est* **différentiable en $x$ par rapport à** *$\Omega$ et $D\mu(x) = A$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall E \in \Omega$ tel que $x \in E$ et $d(E) < \delta$, on a $\left|\dfrac{\mu(E)}{\lambda(E)} - A\right| < \epsilon$.*
*Si de plus $\mu$ est réelle, pour $r > 0$ on pose:*

$$\overline{\Delta}^{\mu}_r(x) = \overline{\Delta}_r(x) = \sup_{\substack{x \in E \in \Omega \\ d(E) < r}} \frac{\mu(E)}{\lambda(E)},$$

*et*

$$\underline{\Delta}^{\mu}_r(x) = \underline{\Delta}_r(x) = \inf_{\substack{x \in E \in \Omega \\ d(E) < r}} \frac{\mu(E)}{\lambda(E)}.$$

*De plus, on pose $\overline{D}\mu(x) = \lim\limits_{r\to 0} \overline{\Delta}_r(x)$, et $\underline{D}\mu(x) = \lim\limits_{r \to 0} \underline{\Delta}_r(x)$.*

**Remarque.** $\mu$ étant réelle, il est clair que $\overline{D}\mu(x)$ et $\underline{D}\mu(x)$ existent dans $\overline{\mathrm{R}}$ ($r \mapsto \overline{\Delta}_r(x)$ (resp. $r \mapsto \underline{\Delta}_r(x)$) est croissante (resp. décroissante)) et $\underline{D}\mu(x) \leq \overline{D}\mu(x)$. De plus, $\mu$ est différentiable en $x$ si et seulement si $\overline{D}\mu(x)$ et $\underline{D}\mu(x)$ existent dans $\overline{\mathrm{R}}$ et sont égaux: leur valeur est alors $D\mu(x)$.

**Proposition 4.1.1.**

*Soient $\mu$, $\nu$ deux mesures de Borel réelles sur $\mathrm{R}^n$, et $x \in \mathrm{R}^n$. Alors $\overline{D}(\mu+\nu)(x) \leq \overline{D}\mu(x) + \overline{D}\nu(x)$ si le second membre n'est pas de la forme $+\infty - \infty$. Si $\mu$ et $\nu$ sont différentiables en $x$ alors $\mu + \nu$ l'est et $D(\mu+\nu) = D(\mu) + D(\nu)$.*

*Démonstration.* En effet, supposons $\overline{D}\mu(x) < A$ et $\overline{D}\nu(x) < B$ où $A$ et $A$ sont finis. Alors, $\exists\delta > 0$ tel que pour tout $E \in \Omega$ tel que $x \in E$ et $\delta(E) < \delta$, on a $\mu(E) < A\lambda(E)$ et $\nu(E) < B\lambda(E)$. D'où $\dfrac{(\mu+\nu)(E)}{\lambda(E)} < A + B$ soit $\overline{D}(\mu+\nu)(x) \leq A + B$. De même, on voit que $\underline{D}(\mu+\nu)(x) \geq \underline{D}\mu(x) + \underline{D}\nu(x)$.

**Proposition 4.1.2 (lemme de recouvrement de Vitali).**

*Soient $\Omega$ une famille substantielle et $A$ un borélien borné de $\mathrm{R}^n$. Soit $\Phi$ une famille d'éléments de $\Omega$ qui recouvre $A$ (i.e. $A \subset \bigcup_{E\in\Phi} E$). $\forall E \in \Phi$, soit $B_E = B(x_E, r_E)$ une boule ouverte telle que $E \subset B_E$ et $\mu(B_E) \leq \beta\lambda(E)$. Alors il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathrm{N}}$ d'éléments de $\Phi$ telle que si $B_{E_p} = B_p = B(x_p, r_p)$, les $B_p$ sont deux à deux disjointes et si on pose $4B_p = B(x_p, 4r_p)$, alors $A \subset \bigcup_{p\in\mathrm{N}} 4B_p$. En particulier,*

$$\lambda(A) \leq 4^n \sum_p \lambda(B_p) = \omega_n 4^n \sum_p r_p^n < 4^n\beta \sum_p \lambda(E_p).$$

*Démonstration.* Il suffit clairement de trouver une suite $(B_p)$ extraite de la famille $(B_E)_{E\in\Phi}$ telle que, $p \neq q$ entraîne $B_p \cap B_q = \emptyset$ et $A \subset \bigcup_p B(x_p, 4r_p)$. On peut évidemment supposer que pour tout $E \in \Phi$, $A \cap E \neq \emptyset$, ce qui entraîne $A \cap B_E \neq \emptyset$. Alors on peut supposer $\sup_{E\in\Phi} r_E < +\infty$ (sinon on pourrait avoir $r_E$ aussi grand qu'on veut, et puisque $A$ est borné et $A \cap B_E \neq \emptyset$, on aurait $A \subset 4B_E$ pour un certain $E \in \Phi$ et la preuve serait finie). On construit alors la suite $B_p$ par récurrence. On choisit tout d'abord $B_1 = B(x_1, r_1)$ avec $r_1 > \frac{1}{2}\sup_{E\in\Phi} r_E$. Supposons les $B_i = B(x_i, r_i)$ construits pour $1 \leq i \leq p-1$ avec les propriétés suivantes:

(i)les $B_i$ sont deux à deux disjointes;

(ii) on a

$$(*i) \qquad r_i > \frac{1}{2}\sup\left\{ r_E \;/\; E \in \Phi,\ \text{et},\ B_E \cap \left( A \setminus \bigcup_{1\leq j\leq i-1} 4B_j \right) \neq \emptyset \right\}.$$

Construisons $B_p = B(x_p, r_p)$ avec les même propriétés. Deux possibilités peuvent se présenter:

(a) ou bien $A \subset \bigcup_{1\leq j\leq p-1} 4B_j$ et on s'arrête là;

(b) ou bien $A$ n'est pas contenu dans cette réunion, et on choisit $B_p = B(x_p, r_p) \in \left\{B_E\right\}$ telle que la condition $(*p-1)$ soit satisfaite avec $B_p \cap \left(A \setminus \bigcup_{1\leq j\leq p-1} 4B_j\right) \neq \emptyset$. Il nous faut alors vérifier que $B_j \cap B_p = \emptyset$ pour $j \leq p-1$: si cela était faux, puisque $r_j > \frac{1}{2} r_p$, on aurait $B_p \subset 4B_j$, ce qui est une contradiction.

La récurrence se poursuit donc. Supposons alors que la construction ne s'arrête jamais. Alors nécessairement $\lim_{p\to\infty} r_p = 0$: en effet, les $B_p$ sont deux à deux disjointes, rencontrent $A$, et $\sup_p r_p < \infty$, donc leur réunion est contenue dans une boule, et par suite $\sum_p \lambda(B_p) < +\infty$, ce qui montre que $r_p$ tend vers zéro. Alors nécessairement $A \subset \bigcup_p 4B_p$ sinon il existerait $y$ dans $A \setminus \bigcup_p 4B_p$, et si $E \in \Phi$ est tel que $y \in B_E = B(x_E, r_E)$, il existe $k$ tel que $r_k < \frac{r_E}{2}$ ce qui contredit la définition de $r_k$.

**Théorème 4.1.1.**

*Soient $\Omega$ une famille substantielle et $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$. Alors, pour $\lambda$-presque tout $x_0 \in \mathrm{R}^n$,*

$$\lim_{r\to 0}\left[\sup_{\substack{E\in\Omega\\ x_0\in E\in\Omega,\ d(E)<r}} \frac{1}{\lambda(E)}\int_E |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda(x)\right] = 0.$$

**Remarque.** 1°) Le théorème signifie en particulier que si $\nu = \lambda f$, alors pour $\lambda$-presque tout $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $\nu$ est différentiable en $x_0$ et $D\nu(x_0) = f(x_0)$.

2°) **Exemple.** Si $E$ est un ensemble mesurable, et si on applique le théorème à la fonction caractéristique de $E$, on obtient en particulier que pour $\lambda$-presque tout point $x_0$ de $E$, $\lim_{r\to 0} \dfrac{\lambda(E \cap B(x_0, r))}{\omega_n r^n} = 1$. De tels points $x_0$ sont appelés **points de densité** de $E$.

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord qu'il suffit de faire la preuve lorsque $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$: en effet, dans le cas général d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$, si pour tout $N \in \mathrm{N}$, $B_{\mathrm{N}}$ désigne la boule ouverte de centre l'origine et de rayon $N$, la fonction $f_N = f\chi_{B_N}$ appartient à $L^1(\mathrm{R}^n)$, et on obtient le résultat presque partout sur $B_N$, ce qui donne le théorème en faisant tendre $N$ vers l'infini.

Voyons tout d'abord que le théorème résulte d'un résultat à priori plus faible:

**Lemme 4.1.1.**

*Les notations étant celles du théorème et $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ étant à valeurs réelles, on a*

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\substack{E\in\Phi \\ x_0\in E, d(E)<r}} \frac{1}{\lambda(E)}\int_E f(x)d\lambda(x) = f(x_0),$$

*pour $\lambda$-presque tout $x_0 \in \mathrm{R}^n$.*

Démontrons tout d'abord le théorème en admettant provisoirement le lemme. Soit $S$ un sous-ensemble dénombrable dense dans C. Soient $r \in S$ et $N \in \mathrm{N}$; en appliquant le lemme à la fonction $\tilde{f}_N(x) = |f(x) - r|\chi_{B_N}$, et en faisant tendre $N$vers l'infini, on déduit que, pour presque tout $x_0 \in \mathrm{R}^n$, on a

$$(*) \qquad \lim_{r\to 0} \sup_{\substack{E\in\Phi \\ x_0\in E,\ d(E)<r}} \frac{1}{\lambda(E)}\int_E |f(x) - r|d\lambda(x) = |f(x_0) - r|.$$

Soit $Q_r$ l'ensemble exeptionnel où l'inégalité ci-desus n'a pas lieu, et posons $Q = \bigcup_{r\in S} Q_r$, de sorte que $\lambda(Q) = 0$. Soient $x_0 \notin Q$, $\epsilon > 0$, et $r \in S$ tels que $|f(x_0) - r| < \epsilon$. On a donc, pour $E \in \Omega$,

$$\frac{1}{\lambda(E)}\int_E |f(x) - f(x_0)|d\lambda(x) \leq \frac{1}{\lambda(E)}\int_E |f(x) - r|d\lambda(x) + \epsilon,$$

et la conclusion résulte de $(*)$.

*Démonstration du lemme 4.1.1.* Pour $r \in \mathrm{Q}$, posons $A_r = \Big\{f < r\Big\}$, $B_r = \Big\{f \geq r\Big\} = \mathrm{R}^n \backslash A_r$. Pour tout borélien $E$ posons

$$\mu(E) = \int_{E\cap B_r} (f(x) - r)d\lambda(x) \geq 0,$$

ce qui définit une mesure de Borel positive $\mu$ finie sur les compacts. On a alors, pour $E$ borélien, $\int_E f d\lambda - r\lambda(E) \leq \mu(E)$, puisque $f - r < 0$ sur $A_r$, soit encore

$$(**) \qquad \frac{1}{\lambda(E)}\int_E (f - r)d\lambda \leq \frac{\mu(E)}{\lambda(E)}.$$

On a besoin maintenant du lemme suivant:

**Lemme 4.1.2.**

*Soit $\mu$ une mesure de Borel positive sur $\mathrm{R}^n$ finie sur les compacts. Soit $A$ un borélien tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour $\lambda$-presque tout $x \in A$, $\mu$ est différentiable en $x$ par rapport à $\Omega$ et $D\mu(x) = 0$.*

Admettons un instant ce lemme pour finir la preuve du théorème. Le lemme appliqué à la mesure $\mu$ donne, d'après $(**)$,

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\substack{E\in\Phi \\ x_0\in E,\ d(E)<r}} \left( \frac{1}{\lambda(E)} \int_E (f-r)d\lambda \right) \leq 0,$$

pour $\lambda$-presque tout $x_0 \in A$, c'est-à-dire, si on pose $\nu = f\lambda$, $\overline{D}\nu(x_0) \leq r$. Donc, si $E_r = \Big\{ x \ / \ f(x) < r < \overline{D}\nu(x) \Big\}$, on a $\lambda(E_r) = 0$; or $\Big\{ f(x) < \overline{D}\nu(x) \Big\}$ est égal à $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$, donc $\overline{D}\nu(x) \leq f(x)$ $\lambda$-presque partout. En remplaçant $f$ par $-f$ donc $\nu$ par $-\nu$ et $\overline{D}\nu(x)$ par $-\underline{D}\nu(x)$, on trouve $\underline{D}\nu(x) \geq f(x)$ $\lambda$-presque partout, ce qui achève de démontrer le lemme 4.1.1.

*Démonstration du lemme 4.1.2.* Remarquons tout d'abord que $\overline{D}\mu$ est une fonction mesurable (borélienne). En effet, $\overline{\Delta}_r(x) > \alpha$ signifie qu'il existe $E \in \Omega$, $x \in E$, $d(E) < r$ tel que $\mu(E) > \alpha\lambda(E)$; donc $\overline{\Delta}_r(y) > \alpha$ pour tout $y \in E$, et par suite $\Big\{ x \ / \ \overline{\Delta}_r > \alpha \Big\}$ est ouvert; ceci signifie que $\overline{\Delta}_r$ est semi-continue inférieurement pour $r > 0$ et donc $\overline{D}\mu$ qui est la limite quand $n \to \infty$ de $\overline{\Delta}_{1/n}$ est mesurable. Soit $P = \Big\{ \overline{D}\mu(x) > 0 \Big\}$; $P$ est donc mesurable, et $A \cap P$ aussi, et il nous faut montrer que $\lambda(A \cap P) = 0$. Supposons que cela soit faux; il existe donc $\alpha > 0$, un borélien $E_\alpha$ contenu dans $A \cap P$ et de mesure de Legesgue strictement positive tel que pour tout $x \in E_\alpha$, $\overline{D}\mu(x) > \alpha$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe donc un compact $K \subset E_\alpha$, $\lambda(K) > 0$, tel que, $\forall \delta > 0$ fixé, pour tout $x \in K$, il existe $S \in \Omega$, $x \in S$, $d(S) < \delta$, et $\mu(S) > \alpha\lambda(S)$. L'ensemble de ces $S$ formant un recouvrement de $K$, par le lemme de Vitali (proposition 4.1.2.), il existe des éléments $S_i$ de $\Omega$, $1 \leq i \leq p$, tels que pour $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $d(S_i) < \delta$, $\mu(S_i) > \alpha\lambda(S_i)$ et $\lambda(K) \leq \beta 4^n \sum_{1\leq i\leq p} \lambda(S_i)$. Or, si on note $K_\delta$ l'ensemble des points à une distance inférieure à $\delta$ de $K$, on a $S_i \subset K_\delta$, et par suite $\mu(K_\delta) \geq \sum_i \mu(S_i) > \alpha \sum_i \lambda(S_i)$ soit $\mu(K) \geq \alpha\beta^{-1}4^{-n}\lambda(K)$. En prenant $\delta = 1/n$ et en faisant tendre $n$ vers l'infini, on conclut que $\mu(K) > 0$ ce qui est impossible puisque $K \subset A$ et que $\mu(A) = 0$ par hypothèse.

Avant de donner le prochain résultat de différentiation des mesures, il nous faut faire quelque rappels de théorie de la mesure.

Rappelons que si $\mathcal{M}$ est une $\sigma$-algèbre sur un ensemble $X$, on appelle mesure complexe une fonction $\sigma$-additive définie sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans C. On appelle variation totale d'une mesure complexe $\mu$, la mesure positive *finie* $|\mu|$ définie sur $\mathcal{M}$ par

$$|\mu|(E) = \sup_{\substack{E_i\in\mathcal{M} \\ E_i \ partition \ de \ E}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E)|.$$

De plus, si $\mu$ est à valeurs réelles (i.e. est une mesure réelle) on appelle partie positive (resp. négative) de $\mu$, la mesure positive $\mu^+ = \frac{1}{2}\Big(|\mu| + \mu\Big)$ (resp. $\mu^- = \frac{1}{2}\Big(|\mu| - \mu\Big)$).

**Définition 4.1.3.**
*Soient $\mathcal{M}$ une $\sigma-$algèbre sur un ensemble $X$, $\mu$ une mesure positive sur $\mathcal{M}$, $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ des mesures complexes sur $\mathcal{M}$.*
*1°) On dit que $\lambda$ est* **absolument continue par rapport à** *$\mu$, et on écrit $\lambda \ll \mu$, si $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ impliquent $\lambda(E) = 0$.*
*2°) S'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, on dit que $\lambda$ est* **concentrée** *sur $A$.*
*3°) On dit que deux mesures $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont* **mutuellement singulières**, *et on écrit $\lambda_1 \perp \lambda_2$, s'il existe deux ensembles disjoints $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}$ tels que $\lambda_1$ soit concentrée sur $A$ et $\lambda_2$ sur $B$.*

**Théorème 4.1.2 (décomposition de Lebesgue et théorème de Radon–Nykodym).**
*Soient $\mathcal{M}$ une $\sigma-$algèbre sur un ensemble $X$, $\mu$ une mesure positive $\sigma-$finie sur $\mathcal{M}$ et $\lambda$ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$. Il existe une unique paire $(\lambda_a, \lambda_s)$ de mesures complexes sur $\mathcal{M}$ telles que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ et $\lambda_s \perp \mu$ (***décomposition de Lebesgue***). De plus, il existe un unique $h \in L^1(\mu)$ tel que $\lambda_a = h\mu$ (i.e. $\forall E \in \mathcal{M}$, $\lambda_a(E) = \displaystyle\int_E h d\mu$) (***Théorème de Radon–Nykodym***).*

**Remarque.** Si $\lambda$ est positive $\sigma-$finie, on obtient $\lambda = h\mu + \lambda_s$, avec $h \in L^1_{loc}(\mu)$.

*Démonstration.* 1°) supposons $\lambda$ et $\mu$ positives finies. Soit $\nu = \lambda + \mu$. On a

$$\left|\int f d\lambda\right| \leq \left(\int |f|^2 d\nu\right)^{1/2} \nu(X)^{1/2},$$

de sorte qu'il existe $g \in L^2(\nu)$ telle que, pour toute $f \in L^2(\nu)$,

$$\int f d\lambda = \int f g d\nu.$$

En particulier, si $E \in \mathcal{M}$ est tel que $\nu(E) \neq 0$, $\dfrac{1}{\nu(E)} \displaystyle\int_E g d\nu = \dfrac{\lambda(E)}{\nu(E)}$, ce qui entraîne $0 \leq g \leq 1$ $\nu-$presque partout, et on peut supposer que ces inégalités ont lieu partout, et,

$$(*) \qquad \int (1-g) f d\lambda = \int f g d\mu, \ \forall f \in L^2(\nu).$$

Soient $A = \Big\{0 \leq g < 1\Big\}$, $B = \Big\{g = 1\Big\}$, et posons $\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A)$, $\lambda_s(E) = \lambda(E \cap B)$, pour tout $E \in \mathcal{M}$. En appliquant $(*)$ à $f = \chi_B$, on trouve $\mu(B) = 0$ donc $\lambda_s \perp \mu$.

Appliquons maintenant $(*)$ à $(1+g+...+g^n)\chi_E$; puisque $1-g^{n+1}$ vaut zéro sur $B$ et que $g^{n+1}$ tend vers 0 en décroissant sur $A$, le premier membre de $(*)$ tend vers $\lambda(E\cap A)=\lambda_a(E)$ quand $n\to\infty$; d'autre part, quand $n\to\infty$, $(g+g^2+...+g^{n+1})$ tend en croissant vers une fonction mesurable positive $h$, et le second membre de $(*)$ tend vers $\displaystyle\int_E hd\mu$, ce qui termine la preuve du théorème dans ce cas.

2°): supposons $\lambda\geq 0$ finie et $\mu$ $\sigma$-finie. Par hypothèse sur $\mu$, il existe $X_n\subset X$ tels que $X=\displaystyle\bigcup_n X_n$, $X_j\cap X_i=\emptyset$ si $i\neq j$, et $\mu(X_n)<+\infty$. Le cas précédent montre qu'il existe $h_n\in L^1(X_n,\mu)$, tel que, sur $X_n$ on a $\lambda=h_n d\mu+\lambda_s^n$. On définit alors $h=\displaystyle\sum_n h_n\chi_{X_n}$, $\lambda_s=\displaystyle\sum_n\lambda_s^n$ et la conclusion en découle ($h\in L^1(\mu)$ car $\lambda(X)<+\infty$).

3°): cas général. On écrit $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, où les $\lambda_i$ sont réelles, puis $\lambda_i=\lambda_i^+-\lambda_i^-$, et on applique le cas précédent aux mesures $\lambda_i^+$ et $\lambda_i^-$, $i=1,2$.

**Théorème 4.1.3 (théorème de différentiabilité de Lebesgue).**

*Soient $\Omega$ une famille substantielle, et $\mu$ une mesure (complexe) borélienne sur $\mathrm{R}^n$.*

*(i) $\mu$ est différentiable $\lambda$-presque partout par rapport à $\Omega$;*

*(ii) pour tout borélien $E$, on a*

$$\mu(E)=\mu_s(E)+\int_E D\mu(x)d\lambda(x),$$

*où $\mu_s\perp\lambda$ (on dit que $\mu_s$ est une* **mesure singulière***) et $D\mu_s(x)=0$ $\lambda$-presque partout.*

*Démonstration.* On utilise le lemme suivant:

**Lemme 4.1.3.**

*Soit $\mu$ une mesure singulière sur $\mathrm{R}^n$ (i.e. $\mu\perp\lambda$). Alors $\mu$ est différentiable $\lambda$-presque partout par rapport à $\Omega$ et $D\mu(x)=0$ $\lambda$-p.p.*

*Démonstration.* On peut bien sûr supposer $\mu$ réelle, et en décomposant $\mu=\mu^+-\mu^-$, il vient $\mu^+\perp\lambda$ et $\mu^-\perp\lambda$, et on se ramène au cas où $\mu$ est positive. Or il existe un borélien $A$ tel que $\mu(A)=0$ et $\lambda(A^c)=0$. Par le lemme 4.1.2, on a donc $D\mu(x)=0$ pour presque tout $x\in A$, d'où le lemme.

Le théorème s'en déduit aussitôt: par le théorème 4.1.2, on écrit $\mu=\mu_a+\mu_s$. Alors, par le lemme ci-dessus, on a $D\mu_s(x)=0$ presque partout, et puisque $\mu_a(E)=\displaystyle\int_E hd\lambda$, avec $h\in L^1(\lambda)$ (théorème 4.1.2), la conclusion résulte du théorème 4.1.1.

**2. Fonctions maximales.**

**Définition 4.2.1.**

*1 °) Soient $\Omega$ une famille substantielle et $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$. On appelle* **fonction maximale** *de $f$* **associée à** *$\Omega$ la fonction $M^*_\Omega f(x) = \sup_{r>0} \overline{\Delta}_r(x)$, où $\overline{\Delta}_r(x)$ est associée à la famille $\Omega$ et à la mesure $|f|d\lambda$. En particulier, si on prend pour $\Omega$ la famille des boules de $\mathrm{R}^n$, on obtient la* **fonction maximale non tangentielle** *$M^*f$ de $f$ qui est donc définie par*

$$M^*f(x) = \underset{r>0}{Sup} \underset{|x-y|<r}{Sup} \frac{1}{\lambda(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |f(z)|d\lambda(z).$$

*2 °) Si $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$, on appelle* **fonction maximale de Hardy-Littlewood** *de $f$ la fonction $Mf$ définie sur $\mathrm{R}^n$ par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|d\lambda(y).$$

**Remarques.** 1 °) Il est clair que $Mf(x) \leq M^*f(x) \leq 2^n Mf(x)$. Plus généralement, si on pose, pour $\alpha > 0$,

$$M^{*\alpha} f() = \sup_{r>0} \sup_{|x-y|<\alpha r} \frac{1}{\lambda(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |f(z)|d\lambda(z),$$

du fait que $B(y,r) \subset B(x,(\alpha+1)r)$, on voit que $M^{*\alpha}f(x) \leq (\alpha+1)^n Mf(x)$, et $M^{*\alpha}f(x) \leq \alpha^n M^*f(x)$.

2 °) $Mf$, $M^{*\alpha}f$ et $M^*_\Omega f$ sont des fonctions positives (éventuellement $+\infty$) mesurables. $M$, $M^{*\alpha}$ et $M^*_\Omega$ sont des opérateurs sous-linéaires.

**Théorème 4.2.1.**

*Soient $\Omega$ une famille substantielle, et $T$ l'un des opérateurs $M$, $M^{*\alpha}$, $\alpha > 0$, ou $M^*_\Omega$. Alors, il existe des constantes $C$ et $C_p$, $1 < p \leq +\infty$, telles que, pour $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$, on a:*

*(i)*

$$\|Tf\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

*(ii) Pour $1 < p \leq +\infty$,*

$$\|Tf\|_{L^p(\mathrm{R}^n)} \leq C_p\|f\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}.$$

*Démonstration.* Pour démontrer le (i), nous démontrons un résultat plus précis et plus complet:

**Lemme 4.2.1.**
*Soit $\Omega$ une famille substantielle, et soit $\mu$ une mesure de Borel sur $\mathrm{R}^n$. Pour $x \in \mathrm{R}^n$, posons $M^*_\Omega \mu(x) = \sup_{r>0} \overline{\Delta}^{|\mu|}_r(x)$. Alors*

$$\|M^*_\Omega \mu\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq \beta 4^n |\mu|(\mathrm{R}^n),$$

*$|\mu|$ désignant la variation totale de $\mu$.*
*En particulier, si $f \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$, on a*

$$\|M^*_\Omega f\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq \beta 4^n \|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)},$$

*et, pour $\alpha > 0$,*

$$\|Mf\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq \|M^{*\alpha} f\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq C_\alpha 4^n \|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)},$$

*avec $C_\alpha = \max(1, \alpha^n)$.*

*Démonstration.* Pour $N \in \mathrm{N}$ et $\sigma > 0$, posons $E_N(\sigma) = \Big\{M^*_\Omega \mu > \sigma\Big\} \cap B(0, N)$. Pour tout $x \in E_N(\sigma)$, il existe donc $E_x \in \Omega$ tel que $x \in E_x$ et $\dfrac{|\mu|(E_x)}{\lambda(E_x)} > \sigma$. Les $E_x$, $x \in E_N(\sigma)$ forment un recouvrement de $E_N(\sigma)$, et, par le lemme de Vitali (proposition 4.1.2), on peut trouver une suite $(E_n)$ de ces ensembles telle que $n \neq m$ implique $E_n \cap E_m = \emptyset$ et $\lambda(E_N(\sigma)) \leq \beta 4^n \sum_n \lambda(E_n)$. Par suite, on a

$$\lambda(E_N(\sigma)) \leq \frac{\beta 4^n}{\sigma} \sum_n |\mu|(E_n) = \frac{1}{\sigma} \beta 4^n |\mu| \left( \bigcup_n E_n \right) \leq \frac{1}{\sigma} \beta 4^n |\mu|(\mathrm{R}^n).$$

En faisant tendre $N$ vres l'infini, on conclut donc que $\sigma \lambda \Big\{M^*_\Omega f > \sigma\Big\} \leq \beta 4^n |\mu|(\mathrm{R}^n)$, ce qui montre le lemme.

La preuve du (ii) du théorème en découle aussitôt: en effet, pour $p = +\infty$, le résultat est évident, et il suffit alors d'appliquer le théorème de Marcinkiewicz (théorème 3.3.1).

Si on pose $K_t(x) = \dfrac{1}{\lambda(B(0,t))} \chi_{B(0,t)}(x)$, on remarque que $Mf(x) = \sup_{t>0} K_t * |f|(x)$ et $M^* f(x) = \sup_{t>0} \sup_{|x-y|<t} K_t * |f|(y)$. $K_t$ s'appelle le **noyau de Hardy-Littlewood**; c'est une unité approchée au sens suivant:

**Définition 4.2.2.**

*On dit qu'une famille* $(K_t)$, $t \in ]0,1]$, *est une* **unité approchée** *dans* $L^1(\mathrm{R}^n)$ *quand* $t \to 0$, *si les trois conditions suivantes sont satisfaites:*

*(i)* $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} K_t(x)dx = 1$, $\forall t \in ]0,1]$;

*(ii)* $\exists M > 0$ *tel que* $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} |K_t(x)|dx \leq M$, $\forall t \in ]0,1]$;

*(iii)* $\forall \delta > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathrm{R}^n \setminus B(0,\delta)} |K_t(x)|dx = 0$.

**Exemple.** Un exemple classique d'unité approchée est fournit par le noyau de Fejer.

**Proposition 4.2.1.**

*Soit* $K_t$ *une unité approchée dans* $L^1(\mathrm{R}^n)$. *Alors*

*1°)* $\forall f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, $K_t * f$ *tend vers* $f$ *dans* $L^p(\mathrm{R}^n)$ *quand* $t \to 0$.

*2°) Si* $g$ *est continue à support compact,* $K_t * g$ *converge vers* $g$ *uniformément sur* $\mathrm{R}^n$ *quand* $t \to 0$.

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le 1°). Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (i), on a

$$\|K_t * f - f\|_{L^p}^p \leq \int |K_t(y)| \left[ \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \right] dy,$$

d'où, en coupant la première intégrale en deux

$$\|K_t * f - f\|_{L^p}^p \leq \int_{B(0,\delta)} |K_t(y)| \|f_y - f\|_{L^p}^p dy + 2\|f\|_{L^p}^p \int_{\mathrm{R}^n \setminus B(0,\delta)} |K_t(y)|dy,$$

où $f_y(x) = f(x-y)$. Le second terme du second membre de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand $t \to 0$, pour tout $\delta > 0$ (hypothèse (iii)), et le premier peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant correctement $\delta$ d'après le lemme suivant:

**Lemme 4.2.2.**

*Avec les notations ci-dessus,* $\displaystyle\lim_{|y|\to 0} \|f_y - f\|_{L^p(\mathrm{R}^n)} = 0$.

*Démonstration.* Si $f$ est continue à support compact, elle est uniformément continue et le résultat est évident. Soient alors $f_n$ continues à support compacts telles que $\|f_n - f\|_{L^1}$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. On a

$$\|f_y - f\| \leq \|f_y - f_{ny}\| + \|f_{ny} - f_n\| + \|f_n - f\|$$

$$= 2\|f_n - f\| + \|f_{ny} - f_n\|,$$

et la conclusion s'obtient en choisissant correctement $n$ puis $|y|$ assez petit.

Le 2°) de la proposition se démontre facilement de la même manière: on écrit $(K_t * g - g)(y)$ sous la forme $I_1 + I_2$ où $I_1 = \displaystyle\int_{\{|x|<\delta\}} K_t(x)(g(x-y) - g(y)dx$ et $I_2$, l'intégrale correspondant au domaine complémentaire. On choisit ensuite $\delta > 0$ de sorte que, grâce à l'uniforme continuité de $g$, $I_1$ soit majorée par $\epsilon$, puis on majore la deuxième intégrale par $\|g\|_\infty \int_{\{|x|>\delta\}} |K_t(x)|dx$, et cette dernière intégrale tend vers zéro quand $t \to 0$ par hypothèse sur $K_t$.

**Corollaire.**
*Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$. Quand $t \to 0$, $\frac{1}{\lambda(B(x,t))}\int_{B(x,t)} f(y)dy$ tend vers $f$ dans $L^1(\mathrm{R}^n)$.*

Remarquons maintenant que si l'on pose $\psi_0(\rho) = \frac{1}{\omega_n}\chi_{[0,\rho[}$, où $\omega_n$ est le volume de la boule unité dans $\mathrm{R}^n$, on a $K_t(x) = \frac{1}{t^n}\psi_0\left(\frac{|x|}{t}\right)$. Ceci nous amène à poser la définition suivante:

**Définition 4.2.3.**
*Soit $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathrm{R}^+$ une fonction décroissante possédant les propriétés suivantes:*
*(a)* $\int_{\mathrm{R}^n} \psi(|x|)d\lambda(x) = n\omega_{\mathrm{n}} \int_0^{+\infty} \rho^{\mathrm{n}-1}\psi(\rho)d\rho = 1,$
*(b) $\exists\delta > 0$ et $c > 0$ tels que $\psi(\rho) \leq \frac{c}{\rho^{\mathrm{n}+\delta}}$.*
*Posons alors $\psi_{\mathrm{t}}(x) = \frac{1}{t^{\mathrm{n}}}\psi\left(\frac{|x|}{t}\right)$. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, si $\psi * f$ est définie, on appelle* **fonction maximale radiale $M_\psi f$ associée à $\psi$** *et* **fonction maximale non tangentielle $M_\psi^{*\alpha} f$ associée à $\psi$, et à** *$\alpha > 0$, les fonctions définies par*

$$M_\psi f(x) = \sup_{t>0} |(\psi_{\mathrm{t}} * f)(x)|,$$

*et*

$$M_\psi^{*\alpha} f(x) = \sup_{t>0} \sup_{|x-y|<t} |(\psi_{\mathrm{t}} * f)(y)|.$$

**Remarque.** $M_\psi f$ et $M_\psi^{*\alpha} f$ sont définies pour $f \in \bigcup_{1\leq p\leq\infty} L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ et sont des fonctions mesurables. $M_\psi$ et $M_\psi^{*\alpha}$ sont des opérateurs sous-linéaires.

**Proposition 4.2.3.**
*Sous les hypothèses de la définition ci-dessus, $(\psi_{\mathrm{t}})$ est une unité approchée dans $L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$. En particulier, si $f \in L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, $\psi_{\mathrm{t}} * f$ tend vers $f$ dans $L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ quand $t \longrightarrow 0$.*

*Démonstration.* Il faut vérifier les conditions (i) (ii) et (iii) de la définition 4.2.2. (i) et (ii) sont immédiats par un changement de variable:

$$\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} \psi_{\mathrm{t}}(x)dx = n\omega_{\mathrm{n}}\int_0^{+\infty} u^{\mathrm{n}-1}\psi(u)du = 1$$

(iii) se voit de la même manière

$$\int_{B(0,\eta)^c} \psi_t(x)dx = n\omega_n \int_{\eta/t}^{+\infty} u^{n-1}\psi(u)du \le \omega_n c \int_{\eta/t}^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\delta}} = \frac{n\omega_n c t^\delta}{\delta \eta^\delta},$$

qui tend vers zéro quand $t \to 0$.

**Proposition 4.2.4.**
*Les notations étant les même qu'à la proposition précédente, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a $M_\psi f(x) \le CMf(x)$ et $M_\psi^{*\alpha} f(x) \le CM^{*\alpha} f(x)$, $\alpha > 0$.*

*Démonstration.* La proposition résulte du lemme suivant:

**Lemme 4.2.3.**
*Avec les notations de ci-dessus, il existe une constante $C$ ne dépendant que de $\psi$ et $n$ telle que pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, on a*

$$\psi_t(\xi) \le C\left(K_t(\xi) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\delta}} K_{t2^{k+1}}(\xi)\right).$$

*Démonstration.* Puisque $\psi$ est positive décroissante, on peut écrire

$$\begin{aligned}\psi(y) &\le \psi(0)\chi_{[0,1[}(y) + \sum_0^\infty \psi(2^k)\chi_{[2^k,2^{k+1}[}(y)\\ &\le \psi(0)\chi_{[0,1[}(y) + \sum_0^\infty \psi(2^k)\chi_{[0,2^{k+1}[}(y).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\psi_t(\xi) \le \psi(0)\frac{1}{t^n}\chi_{B(0,t)}(\xi) + \sum_0^\infty \psi(2^k)2^{(k+1)n}\frac{1}{(t2^{k+1})^n}\chi_{B(0,t2^{k+1})}(\xi).$$

Comme $K_t(\xi) = \frac{1}{\lambda(B(0,t))}\chi_{B(0,t)}(\xi)$ et $\psi(2^k) \le c2^{-nk}2^{-k\delta}$, il vient

$$\psi_t(\xi) \le \omega_n\left[\psi(0)K_t(\xi) + 2^n c\sum_0^\infty \frac{1}{2^{k\delta}}K_{t2^{k+1}}(\xi)\right] \le c'\left[K_t(\xi) + \sum_0^\infty \frac{1}{2^{k\delta}}K_{t2^{k+1}}(\xi)\right].$$

La proposition s'en déduit aussitôt: d'après le lemme, on a

$$M_\psi f(x) \le c'\left[Mf(x) + \sum_k \frac{1}{2^{k\delta}}Mf(x)\right] \le CMf(x),$$

et de même, $M_\psi^{*\alpha} f(x) \leq C M^{*\alpha} f(x)$.

**Théorème 4.2.2.**
*$T$ étant l'un des opérateurs $M_\psi$ et $M_\psi^{*\alpha}$, $\alpha > 0$, on a:*
*(i) $\exists C > 0$ tel que $\|Tf\|_{1\infty} \leq C\|f\|_1$;*
*(ii) pour $1 < p \leq +\infty$, $\exists C_{\mathrm{p}} > 0$ tel que $\|Tf\|_{\mathrm{p}} \leq C_{\mathrm{p}}\|f\|_{\mathrm{p}}$.*

*Démonstration.* Résulte immédiatement de la proposition précédente et du théorème 4.2.1.

**Théorème 4.2.3 (limites non tangentielles).**
*Soient $\psi$ comme précédemment, $f \in L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, $1 \leq p \leq +\infty$, et $\alpha > 0$. Alors pour presque tout $x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, on a*

$$\lim_{t\to 0}\left\{\sup_{|x-y|<\alpha t}\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} \psi_{\mathrm{t}}(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi)\right\} = 0.$$

*Démonstration.* On utilise le lemme suivant:

**Lemme 4.2.4.**
*Soit $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $K_t$ étant le noyau de Hardy-Littlewood, pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a*

$$\sup_{t>0}\sup_{|x-y|<t}\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) < +\infty.$$

*Démonstration.* Si $p = +\infty$, on a

$$\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathrm{R}^n)},$$

et la preuve est finie. Supposons donc $p < +\infty$. Par l'inégalité de Hölder, il vient

$$\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) \leq |f(x)| + \left(\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)|^p d\lambda(\xi)\right)^{1/p}.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le lemme 4.2.1 avec la mesure $\mu = |f|^{1/p}\lambda$ car une fonction de $L^{1\infty}$ est finie presque partout.

Démontrons maintenant le théorème 4.2.3. Considérons tout d'abord le cas $\alpha = 1$. Soit $x \in \mathrm{R}^n$ tel que la conclusion du lemme 4.2.4 soit satisfaite, c'est-à-dire

$$\sup_{t>0}\sup_{|x-y|<t}\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) = M < +\infty.$$

Alors, la série $\sum_k \frac{1}{2^{k\delta}}$ étant convergente (puisque $\delta > 0$), d'après le lemme 4.2.3, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon, M) \in \mathrm{N}$ tel que, pour $|x-y| < t$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{R}^n} \psi_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) \\
&\qquad \leq C\int_{\mathrm{R}^n} K_t(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) \\
&\qquad +C\sum_0^{N(\epsilon,M)} \frac{1}{2^{k\delta}}\int_{\mathrm{R}^n} K_{t2^{k+1}}(y-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\lambda(\xi) \\
&\qquad +\epsilon,
\end{aligned}$$

et la conclusion résulte donc du théorème 4.1.1.

Le cas général $\alpha > 0$ s'en déduit aisément. Soit $\psi^\alpha$ la fonction définie par $\psi^\alpha(\rho) = \alpha^n\psi\Big(\alpha\rho\Big)$. On voit immédiatement que $\psi^\alpha$ vérifie les deux hypothèses de la définition 4.2.3, et comme $\psi_t^\alpha(x) = \alpha^n\psi_t(\alpha x)$, le cas $\alpha = 1$ appliqué à $\psi_t^\alpha$ et à la fonction $x \mapsto f(\alpha x)$ donne (après un changement de variable élémentaire), pour presque tout $x' \in \mathrm{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x'-y'|<t}\int_{\mathrm{R}^n} \psi_t(\alpha y'-\zeta)|f(\zeta)-f(\alpha x')|d\lambda(\zeta) = 0,$$

ce qui donne le résultat cherché si on pose $x = \alpha x'$ et $y = \alpha y'$.

**Remarque.** La démonstration du théorème 4.2.3 que nous venont de donner utilise les théorèmes 4.2.1 et 4.1.1. On peut donner une démonstration du théorème 4.2.3 qui n'utilise que le théorème 4.2.2 (et par la même occasion redémontrer le théorème 4.1.1 pour $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$). Cette démonstration étant instructive nous allons la donner maintenant (avec $\alpha = 1$, le cas général s'en déduisant comme ci-dessus).

On considère tout d'abord le cas $p = 1$. Il est clair qu'il suffit de faire la preuve dans le cas où $f$ est à valeurs réelles. On commence tout d'abord par montrer que, pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x-y|<t} \psi_t * f(y) = \lim_{t\to 0}\inf_{|x-y|<t} \psi_t * f(y) = f(x). \tag{1}$$

Pour cela, posons

$$\Omega_f^*(x) = \overline{\lim_{t\to 0}}\sup_{|x-y|<t} \psi_t * f(y) - \underline{\lim}_{|x-y|<t} \psi_t * f(y).$$

Soit $g$ une fonction continue à support compact telle que $f = g + h$ avec $\|h\| < \eta$, $\eta > 0$ fixé. Comme $f \mapsto \Omega_f^*$ est linéaire, on a $\Omega_f^* = \Omega_g^* + \Omega_h^*$. D'après la proposition 4.2.1, on a $\Omega_f^*(x) = \Omega_h^*(x)$ pour tout $x \in \mathrm{R}^n$. Or, $|\Omega_h^*| \leq 2M_\psi^* h$, donc $\Big\{\Omega_f^* > \epsilon\Big\} \subset \Big\{M_\psi^* h > \epsilon/2\Big\}$, et, d'après le théorèem 4.2.2, $\lambda\Big\{M_\psi^* h > \epsilon/2\Big\} \leq \frac{2C}{\epsilon}\|h\|_1 \leq \frac{2C}{\epsilon}\eta$. Comme $\eta$ peut être choisi aussi petit que l'on veut, et que $\Omega_f^* \geq 0$, on en déduit que l'ensemble $\Big\{\Omega_f^* \neq 0\Big\}$ est négligeable. Par suite, les deux limites de la formule (1) existent presque partout et sont égales à $\lim_{t\to 0}\psi_t * f(x)$, et, puisque $\psi_t * f$ tend vers $f$ dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ (proposition 4.2.1), il existe une suite $t_i$ tendant vers zéro telle que $\psi_{t_i} * f$ tend vers $f$ presque partout, ce qui achève de démontrer (1).

On termine alors la preuve en procédant comme dans la preuve du théorème 4.1.1. Soit $S$ un sous-ensemble dénombreble dense de C. Soit $N \in \mathrm{N}$, et, pour $r \in S$, posons $f_N^r(x) = |f(x) - r|\chi_{B(0,N)}$. D'après (1), pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x-y|<t}\int \psi_t(y-\xi) f_N^r(\xi)dx = f_N^r(x). \tag{2}$$

Si $B_r$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{R}^{\mathbf{n}}$ tels que, pour tout $x \in B_r$, $(*)$ ait lieu pour tout $N \in \mathrm{N}$, $A_r = B_r^c$ est négligeable. Voyons alors que pour tout $x \in B_r$, on a

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x-y|<t}\int \psi_t(y-\xi)|f(\xi) - r|f\xi = |f(x) - r|. \tag{3}$$

D'après (2), pour $N > |x|$, on a

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x-y|<t}\int_{\{|\xi|\leq N\}} \psi_t(y-\xi)|f(\xi) - r|d\xi = |f(x) - r|,$$

il suffit donc de voir que

$$I_N^t = \sup_{|x-y|<t}\int_{\{|\xi|>N\}} \psi_t(y-\xi)|f(\xi) - r|d\xi \tag{4}$$

tend vers zéro quand $N$ tend vers l'infini uniformément par rapport à $t \leq 1$. Remarquons que $|\xi| > N$, $|x-y| < 1$ impliquent $|x-y| > N - |x| - 1$ et par suite

$$\int_{\{|\xi|>N\}} \psi_t(y-\xi)d\xi \leq \int_{N-|x|-1}^{\infty} v^{n-1}\psi(v)dv,$$

et cette dernière intégrale tend vers zéro quand $N \to +\infty$. Par ailleurs,

$$J_N^t = \int_{\{|\xi|>N\}} \psi_t(y-\xi)|f(\xi)|d\xi \leq \int_{\{|\zeta|>N-|x|-1\}} \psi_t(\zeta)|f(y-\zeta)|d\zeta,$$

et, par les propriétés de $\psi$, pour $t \leq 1$,

$$J_N^t \leq \frac{c}{(N-|x|-1)^{n+\delta}}\int_{\{|\xi|N-2|x|-2\}} |f(\xi)|d\xi,$$

et cette dernière intégrale tend zéro quand $N \to +\infty$. Ceci termine de montrer (4) et donc aussi (3).

Soit $A = \bigcup_{r \in S} A_r$, et soit $x_0 \notin A$. Il existe $r \in S$ tel que $|f(x_0) - r| \leq \epsilon$. Par suite, pour tout $t > 0$ et tout $y \in \mathrm{R}^n$, on a

$$\int \psi_t(y-\xi)|f(\xi) - f(x_0)|d\xi \leq \int \psi_t(y-\xi)|f(\xi) - r|d\xi + \epsilon,$$

et le théorème découle donc de (2).

Reste àvoir le cas général $p \geq 1$. Si $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, pour $N \in \mathrm{N}$, on considère $f_N = f\chi_{B(0,N)}$ qui appartient à $L^1(\mathrm{R}^n)$ et on lui applique le résultat que l'on vient de montrer. Puis on utilise le même procédé que celui que l'on a utilisé pour déduire (3) de (2).

**Théorème 4.2.4.**

*Soit $\mu$ une mesure complexe sur $\mathrm{R}^\mathrm{n}$ et soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $t \in ]0, +\infty[$, $\psi_\mathrm{t} * \mu \in L^1(\mathrm{R}^\mathrm{n})$, et, pour presque tout $x \in \mathrm{R}^\mathrm{n}$,*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{|x-y|<\alpha t} |\psi_\mathrm{t} * \mu(y) - D\mu(x)| = 0$$

*Démonstration.* D'après les théorèmes 4.2.3 et 4.1.2, il suffit de voir que si $\mu_\mathrm{s} \perp \lambda$, presque partout sur $\mathrm{R}^\mathrm{n}$, on a

$$\lim_{t\to 0} \sup_{|x-y|<\alpha t} |\psi_\mathrm{t} * \mu_\mathrm{s}| = 0.$$

On raisonne comme dans le théorème précédent. Tout d'abord, on peut bien sûr supposer $\mu_\mathrm{s} \geq 0$. Supposons en premier lieu $\alpha = 1$. Il résulte alors du lemme 4.2.1 que, pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$, $\sup_{t>0} \overline{\Delta}_t^{|\mu_s|}(x) < +\infty$, et, pour de tels $x$, par le lemme 4.2.3, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(x,\epsilon) \in \mathrm{N}$ tel que, pour $|x-y| < t$, $t > 0$, on a

$$\int \psi_\mathrm{t}(y-\xi)d\mu_\mathrm{s}(\xi) \leq C\left[\int K_\mathrm{t}(y-\xi)d\mu_\mathrm{s}(\xi) + \sum_0^{N(x,\epsilon)} \frac{1}{2^{\mathrm{k}\delta}}\int K_{t2^{\mathrm{k}+1}}(y-\xi)d\mu_\mathrm{s}(\xi) + \epsilon\right].$$

La conclusion résulte donc du lemme 4.1.3.

Pour le cas général $\alpha > 0$, d'après ce qui précède, il suffit de voir que si $\alpha > 1$, on a

$$\lim_{t\to 0} \sup_{|x-y|<\alpha t} K_t * \mu_s(y) = 0$$

presque partout. Or, si, pour $|x-y| < \alpha t$, on pose $y' = x + \frac{1}{\alpha}(y-x)$, on a $B(y,t) \subset B(y', \alpha t)$, et comme $\mu_s$est positive, il vient $K_t * \mu_s(y) = \alpha^n K_{\alpha t} * \mu_s(y')$, et (puisque $|x-y'| < t < \alpha t$), la conclusion résulte à nouveau du lemme 4.1.3.

**Exemples.** 1°) Si on prend
$$\psi(\rho) = \frac{1}{\left(\rho^2+1\right)^{(n+1)/2}},$$
on obtient le noyau de Poisson sur $\mathrm{R}^n$:
$$P_t(x) = \frac{t}{\left(x^2+t^2\right)^{(n+1)/2}},$$
sur lequel nous reviendrons en détails au chapitre suivant.

2°) Si on prend
$$\psi(\rho) = \frac{1}{\left(4\pi\right)^{n/2}} e^{-y^2/2},$$
on obtient le noyau de Gauss:
$$W_t(x) = \frac{1}{\left(4\pi\right)^{n/2}} \frac{1}{t^n} e^{-|x|^2/2t^2}.$$

### 3. Application à un théorème d'intégrale singulière.

**Proposition 4.3.1.**
*Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$, $f \geq 0$, et soit $\alpha > 0$. Il existe un fermé $F \subset \mathrm{R}^n$ et des constantes $C$, $C_1$ et $C_2$ ne dépendant que de $n$ avec les propriétés suivantes:*
*(i) $f(x) \leq \alpha$ presque partout sur $F$.*
*(ii) Si $\Omega = \mathrm{R}^n \backslash F$, il existe une suite de cubes $Q_j$ tels que*
*(a) $\Omega = \bigcup_j Q_j$, et pour $i \neq j$, $Q_j^o \cap Q_i^o = \emptyset$, où $Q_i^o$ désigne l'intérieur de $Q_i$.*
*(b) Il existe deux constantes $C_1$ et $C_2$ telles que $\forall i$,*
$$C_1 diam(Q_i) \leq d(Q_i, F) \leq C_2 diam(Q_i)$$
*(c) $\lambda(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1}$.*
*(d) $\frac{1}{\lambda(Q_i)} \int_{Q_i} f(y)dy \leq C\alpha$.*

*Démonstration.* On prend $F = \left\{Mf \leq \alpha\right\}$ ($Mf$ étant la fonction maximal de Hardy-Littlewood) d'où $\Omega = \left\{Mf > \alpha\right\}$. D'après le Lemme 4.2.1, on sait que $\lambda(\Omega) \leq \frac{4^n}{\alpha} \|f\|_1$. On voit facilement que $Mf$ est semi-continue inférieurement, et donc $F$ est fermé. D'après le théorème 4.1.1, on a $f \leq Mf$ presque partout, donc (i) est satisfait. Il ne reste plus qu'à construire les cubes vérifiant (a) et (b), et à montrer (d). Pour cela on utilise le lemme suivant:

**Lemme 4.3.1.**
*Soit $F$ un fermé non vide de $\mathrm{R}^n$, et $\Omega = \mathrm{R}^n \backslash F$. Alors $\Omega$ est réunion d'une suite de cubes $Q_j$ vérifiant les conditions (a) et (b) de la proposition 4.4.1.*

Admettons un instant le lemme pour finir la preuve de le proposition. Il est clair que $F \neq \emptyset$ puisque $\Omega$ est de mesure finie. Appliquons le lemme à $F$, et démontrons que l'on a (d). Soient $Q_{\mathrm{i}}$ un des cubes, et $p_{\mathrm{i}} \in F$ tel que $d(F, Q_{\mathrm{i}}) = d(p_{\mathrm{i}}, Q_{\mathrm{i}})$. D'après la condition (b), $d(p_{\mathrm{i}}, Q_{\mathrm{i}})$ est comparable au diamètre de $Q_i$ (dans un rapport indépendant de $i$), et par suite si $B_{\mathrm{i}}$ est la plus petite boule ouverte centrée en $p_{\mathrm{i}}$ et contenant $Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}$, on a $\dfrac{\lambda(B_{\mathrm{i}})}{\lambda(Q_{\mathrm{i}})} \leq C$, $c$ ne dépendant pas de $i$. Puisque $Mf(p_{\mathrm{i}}) \leq \alpha$, on a

$$\alpha \geq \frac{1}{\lambda(B_{\mathrm{i}})} \int_{B_{\mathrm{i}}} f d\lambda \geq \frac{1}{C\lambda(Q_{\mathrm{i}})} \int_{Q_{\mathrm{i}}} f d\lambda,$$

ce qui montre (d).

*Démonstration du lemme 4.4.1.* Soit $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des cubes de $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ dont les sommets ont des coordonnées entières. Pour tout $k \in \mathrm{Z}$, on considère $\mathcal{M}_{\mathrm{k}} = 2^{-\mathrm{k}}\mathcal{M}_0$: pour chaque cube de $\mathcal{M}_{\mathrm{k}}$, on obtient les cubes de $\mathcal{M}_{\mathrm{k+1}}$ en coupant les côtés par 2 ce qui donne $2^{\mathrm{n}}$ cubes. Les côtés d'un cube de $\mathcal{M}_{\mathrm{k}}$ valent donc $2^{-\mathrm{k}}$ et leur diamètre vaut $n^{1/2}2^{-\mathrm{k}}$. Soit

$$\Omega_{\mathrm{k}} = \left\{ x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ / \ c2^{-\mathrm{k}} < d(x, F) < c2^{-\mathrm{k}+1} \right\},$$

où $c$ est fixé pour l'instant, et posons $\Omega = \bigcup\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_{\mathrm{k}}$. De plus posons

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \left\{ Q \in \mathcal{M}_{\mathrm{k}} \ / \ Q \cap \Omega_{\mathrm{k}} \neq \emptyset \right\}.$$

$\mathcal{F}_0$ est dénombrable et, si $c > n^{1/2}$,

$$\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

Si on prend $c = 2n^{1/2}$, on a alors

$$diam(Q) \leq d(Q, F) \leq 4diam(Q), \ \forall Q \in \mathcal{F}_0.$$

La seule chose qui manque est que les cubes vérifient la deuxième condition du (a). Or supposons que l'on ait deux cubes $Q_1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{k}_1}$ et $Q_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{k}_2}$, tels que $Q_1^{\mathrm{o}} \cap Q_2^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$; alors par construction même des cubes l'un est nécessairement contenu dans l'autre: par exemple $Q_1 \subset Q_2$ c'est à dire $k_1 > k_2$. Soit $Q \in \mathcal{F}_0$; alors il existe un et un seul cube maximal contenant $Q$ et appartenant à $\mathcal{F}_0$: en effet, la condition (b) montre qu'il existe un tel cube, et s'il y en avait deux, il se couperaient et, par le raisonnement précédent, l'un serait contenu dans l'autre. Pour la même raison les cubes maximaux sont d'intérieurs deux à deux disjoints et par ce qui précède, leur réunion est égale à $\Omega$. Ceci achève de prouver le lemme 4.3.1.

**Proposition 4.3.2.**

*Soit $K \in L^2(\mathrm{R^n})$. On suppose que:*

*(a) La transformée de Fourier $\widehat{K}$ de $K$ vérifie $|\widehat{K}(x)| \leq B$.*

*(b) $K$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathrm{R^n}\backslash\{0\}$ et $|\bigtriangledown K(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^{\mathrm{n}+1}}$.*

*Pour $f \in L^1(\mathrm{R^n}) \cap L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R^n})$, $1 \leq p < +\infty$, on pose*

$$Tf(x) = K * f(x) = \int_{\mathrm{R^n}} K(x-y)f(y)dy.$$

*Alors:*

*1 °) $T$est continu de $L^1(\mathrm{R^n})$ dans $L^{1,\infty}(\mathrm{R^n})$. Plus précisément, il existe une constante $C$ ne dépendant que $n$ et $B$ telle que, pour toute $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ on a*

$$\|Tf\|_{L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

*2 °) pour $1 < p < +\infty$, $T$ est continu de $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R^n})$ dans lui même. Plus précisément, il existe des constantes $C_p$ ne dépendant que $n$, $B$ et $p$, telles que pour toute $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$ on a*

$$\|Tf\|_{L^p(\mathrm{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}.$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que $Tf$ est bien définie, car, par l'négalité de Hölder, $\|Tf\|_1 \leq \|K\|_2\|f\|_1$.

Dans toute la démonstration qui va suivre, $C$ désignera des constantes qui ne dépendent que de $n$ et $B$.

Première étape. $\mathcal{F}$ étant la transformée de Fourier, on a $\mathcal{F}(Tf) = \widehat{K}\widehat{f}$, donc, si $f \in L^1 \cap L^2$, $\|\mathcal{F}(Tf)\|_2 \leq B\|\widehat{f}\|_2$. Alors par le théorème de Plancherel et la densité de $L^1 \cap L^2$ dans $L^2$, on obtient que $T$ s'étend en un opérateur continu de $L^2$ dans lui même et que

$$\|Tf\|_{L^2(\mathrm{R^n})} \leq B\|f\|_{L^2(\mathrm{R^n})}. \tag{1}$$

De plus, puisque

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathrm{R^n})} \geq \int_{\{|Tf|\geq\alpha\}} |Tf|^2 d\lambda \geq \alpha^2\lambda\{|Tf| > \alpha\},$$

on a

$$\lambda\{|Tf| > \alpha\} \leq \frac{B^2}{\alpha^2}\|f\|^2_{L^2(\mathrm{R^n})}. \tag{2}$$

Deuxième étape. Nous allons maintenant montrer que $T$ envoie $L^1$ dans $L^{1\infty}$. Soit $f \in L^1(\mathrm{R^n})$, et montrons que, pour $\alpha > 0$, on a $\lambda\Big\{Tf > \alpha\Big\} \leq \dfrac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. Pour cela, appliquons la proposition 4.4.1 à $|f|$ et à $\alpha$ et définissons la fonction $g$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in F, \\ \dfrac{1}{\lambda(Q_{\mathrm{j}})} \displaystyle\int_{Q_{\mathrm{j}}} f(y)dy & si\ x \in Q_{\mathrm{j}}^{\circ}, \end{cases}$$

de sorte que si $b = f - g$, on a

$$\begin{cases} b(x) = 0 & si\ x \in F, \\ \displaystyle\int_{Q_{\mathrm{j}}} b(y)dy = 0 & \forall j. \end{cases}$$

Remarquons que $g \in L^1$ (et par suite $b$ aussi) car

$$\int |g| d\lambda \leq \int_F |f| d\lambda + \sum_j \int_{Q_{\mathrm{j}}^{\circ}} |f| d\lambda \leq \|f\|_1,$$

par définition même de $g$. Vérifions maintenant que $g \in L^2$:

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &\leq \alpha \int_F |f| d\lambda + \sum_j \int_{Q_{\mathrm{j}}} |g|^2 d\lambda \\ &= \alpha \int_F |f| d\lambda + \sum_j \frac{1}{\lambda(Q_{\mathrm{j}})} \left| \int_{Q_{\mathrm{j}}} f(y)dy \right|^2 \\ &\leq \alpha \int_F |f| d\lambda + C\alpha \sum_j \int_{Q_{\mathrm{j}}} |f| d\lambda \leq C\alpha \|f\|_1, \end{aligned}$$

par la condition (d) de la proposition 4.4.1. Par conséquent, si on applique le résultat (2) de la première étape, il vient

(3) $$\lambda\Big\{ |Tg| > \frac{\alpha}{2} \Big\} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

Nous allons maintenant démontrer que

(4) $$\int_F |Tb(x)| dx \leq C \|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

Pour tout $j$, soient $b_{\mathrm{j}} = b\chi_{Q_{\mathrm{j}}}$ et $y_{\mathrm{j}}$ le centre de $Q_{\mathrm{j}}$. Par définition de $b$, on a

$(*)$ $$Tb_{\mathrm{j}}(x) = \int_{Q_{\mathrm{j}}} (K(x-y) - K(x-y_{\mathrm{j}}))b(y)dy.$$

Prenons $x \in F$ de sorte que $x - y$ et $x - y_j$ sont non nuls. L'hypothèse (b) faite sur $K$ et la propriété (b) de la proposition 4.4.1, montrent que

$$\sup_{y \in Q_j} |\nabla K(x-y)| \le \frac{C}{|x-y|^{n+1}} \le \frac{C}{d(x, Q_j)^{n+1}},$$

et le théorème des accroissements finis, appliqué dans $(*)$, donne que

$$|Tb_j(x)| \le C diam(Q_j) \int_{Q_j} \frac{|b(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \sim C diam(Q_j) \int_{Q_j} \frac{|b(y)|}{d(x, Q_j)^{n+1}} dy.$$

Notons $\delta_F(y)$ la distance de $y$ à $F$. La condition (b) de la proposition 4.3.1 donne

$$\lambda(Q_j) diam(Q_j) \le C \int_{Q_j} \delta_F(y) dy;$$

la condition (d) de la proposition 4.3.1 et la définition de $g$ donnent

$$\int_{Q_j} |b(y)| dy \le \int_{Q_j} |f| d\lambda + \int_{Q_j} |g| d\lambda \le C\alpha\lambda(Q_j);$$

par conséquent (en utilisant à nouveau le (b) de la proposition 4.3.1), on obtient

$$|Tb_j(x)| \le C\alpha \int_{Q_j} \frac{\delta_F(y)}{d(x, Q_j)^{n+1}} dy \le C\alpha \int_{Q_j} \frac{\delta_F(y)}{|x-y|^{n+1}} dy.$$

En additionnant par rapport à $j$ ces inégalités, il vient

(5) $$|Tb(x)| \le C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta_F(y)}{|x-y|^{n+1}} dy \ , \ x \in F.$$

**Lemme 4.3.2.**

*Dans les conditions ci-dessus*

$$\int_F \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta_F(y)}{|x-y|^{n+1}} dy \right] dx \le C\lambda(\Omega).$$

*Démonstration.* En effet,

$$\begin{aligned}
\int_F \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta_F(y)}{|x-y|^{n+1}} dy dx &= \int_\Omega \delta_F(y) \left( \int_F \frac{dx}{|x-y|^{n+1}} \right) dy \\
&\le \int_\Omega \delta_F(y) \left( \int_{\{|z| > \delta_F(y)\}} \frac{dz}{|z|^{n+1}} \right) dy \\
&\le C \int_\Omega \delta_F(y) \frac{1}{\delta_F(y)} dy = C\lambda(\Omega).
\end{aligned}$$

Finissons maintenant la preuve de la deuxième étape. Le lemme appliqué à (5) et le (c) de la proposition 4.3.1 donnent alors (4). Or

$$\frac{\alpha}{2}\lambda\Big\{x \in F \;/\; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\Big\} \leq \int_{\{\,|Tb|>\alpha/2\}\cap F} |Tb|d\lambda \leq \int_F |Tb|d\lambda,$$

et par suite

$$\lambda\{x \in F \;/\; |Tb(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

D'autre part,

$$\lambda\{x \in \Omega \;/\; |Tb(x)| > \alpha\} \leq \lambda(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)},$$

par le (c) de la proposition 4.4.1, d'où

$$\lambda\{\,|Tb| > \alpha/2\} \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

Ceci et (3) terminent la preuve de la deuxième étape.

<u>Troisième étape</u>: Pour $1 < p \leq 2$, $T$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathrm{R}^n)$ dans lui même. C'est une conséquence immédiate des deux premières étapes et du théorème de Marcinkiewicz (Théorème 3.3.1).

<u>Quatrième étape</u>: montrons que $T$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathrm{R}^n)$ dans lui même pour $2 < p < +\infty$. Soit $q$ le conjugué de $p$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Soient $f \in L^p \cap L^1$ et $\varphi$ une fonction continue à support compact telle que $\|\varphi\|_q \leq 1$. L'intégrale

$$I = \int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n} K(x-y)f(y)\varphi(x)dydx$$

est absolument convergente, et, par le théorème de Fubini, en posant $\widetilde{K}(z) = K(-z)$, il vient

$$I = \int_{\mathrm{R}^n} f(y)\widetilde{K} * \varphi(y)dy.$$

Le résultat de la deuxième étape et l'inégalité de Hölder donnent

$$\left|\int Tf(x)\varphi(x)dx\right| \leq C\|f\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}\|\varphi\|_{L^q(\mathrm{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathrm{R}^n)},$$

ce qui achève de montrer la quatrième étape, et achève par la même occasion la preuve de la proposition.

**Proposition 4.3.3.**

*Si dans la proposition précédente on remplace la condition (b) par*

$$(b') \qquad \sup_{y\neq 0}\int_{\{\,|x|>2|y|\}} |K(x-y) - K(x)|dx \leq B,$$

*on a la même conclusion.*

*Démonstration.* On reprend exactement la preuve de la proposition précédente. La seule chose qu'il faut changer, est, dans la deuxième étape, la démonstration de l'inégalité (4), c'est-à-dire

$$\int_F |Tb(x)|dx \leq C\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)}.$$

Refaisons donc cette preuve. Pour tout cube $Q$, notons $Q^*$ le cube de même centre homothétique de $Q$ dans un rapport $2n^{1/2}$. Posons $\Omega^* = \bigcup_{\mathrm{Q}} Q^*$ et $F^* = \mathrm{R}^{\mathrm{n}}\backslash\Omega^*$. Alors $\Omega \subset \Omega^*$, $F^* \subset F$ et $\lambda(\Omega^*) \leq 2^{\mathrm{n}} n^{\mathrm{n}/2}\lambda(\Omega)$. La formule $(*)$ de la deuxième étape restant valable, on a

$$\begin{aligned}
\int_{F^*} |Tb(x)|dx &\leq \sum_j \int_{F^*}\int_{Q_{\mathrm{j}}} |K(x-y) - K(x-y_{\mathrm{j}})||b(y)|dydx \\
&\leq \sum_j \int_{\{x\notin Q_{\mathrm{j}}^*\}}\int_{Q_{\mathrm{j}}} |K(x-y) - K(x-y_{\mathrm{i}})||b(y)|dydx \\
&= \sum_j \int_{Q_{\mathrm{j}}} |b(y)| \left( \int_{\{x\notin Q_{\mathrm{j}}^*\}} |K(x-y) - K(x-y_{\mathrm{j}})|dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Mais $y \in Q_{\mathrm{j}}$ et $x \notin Q_{\mathrm{j}}^*$ impliquent $|x - y_{\mathrm{j}}| > 2|y - y_{\mathrm{j}}|$, et en posant $z = x - y_{\mathrm{j}}$ soit $x - y = z - (y - y_{\mathrm{j}})$, il vient

$$\int_{\{x\notin Q_{\mathrm{j}}^*\}} |K(x-y) - K(x-y_{\mathrm{j}})|dx \leq \int_{\{|z|>2|y'|\}} |K(z-y') - K(z)|dz \leq B,$$

par hypothèse. Finalement, il vient

$$\int_{F^*} |Tb(x)dx| \leq B\sum_j \left( \int_{Q_{\mathrm{j}}} |f|d\lambda + \int_{Q_{\mathrm{j}}} |g|d\lambda \right) \leq 2B\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)},$$

et on conclut comme dans la deuxième partie de la preuve de la proposition 4.3.2.

**Remarque.** La condition (b') de la proposition 4.3.3 est plus faible que la condition (b) de la proposition 4.3.2. En effet, si $|x| > 2|y| > 0$, la condition (b) du théorème et le théorème des accroissements finis entrainent

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \frac{2^{\mathrm{n}+1}B}{|x|^{\mathrm{n}+1}}|y|,$$

et par suite

$$\int_{\{|x|>2|y|\}} |K(x-y) - K(x)|dx \leq 2^{\mathrm{n}+1}B|y| \int_{\{|x|>2|y|\}} \frac{dx}{|x|^{\mathrm{n}+1}} = (2\pi)^{\mathrm{n}}2^{\mathrm{n}}B.$$

**Théorème 4.3.2 (théorème de la valeur principale (Calderon–Zygmund)).**
*Soit $K(x)$ une fonction mesurable vérifiant les hypothèdes suivantes:*
*(a)* $\forall x \neq 0,\ |K(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^{\mathrm{n}}}$.
*(b)* $\sup_{\mathrm{y}\neq 0} \int_{|\mathrm{x}|>2|\mathrm{y}|} |K(x-y)-K(x)|dx \leq B$.
*(c) Pour* $0 < R_1 < R_2 < +\infty$, *soit* $I(R_1,R_2) = \int_{\{\mathrm{R}_1<|\mathrm{x}|<\mathrm{R}_2\}} K(x)dx$. *Alors, pour tous* $R_i$, $|I(R_1,R_2)| \leq B$, *et* $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon,1)$ *existe.*
*Pour tout* $\epsilon > 0$ *et toute* $f \in L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}}) \cap L^{\mathrm{p}}(R^{\mathrm{n}})$, $1 < p < +\infty$, *on pose*

$$T_\epsilon f(x) = \int_{\{\ |y|\geq\epsilon\}} K(y)f(x-y)dy.$$

*Alors* $T_\epsilon$ *est continu de* $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ *dans lui même* ($1 < p < +\infty$), $\|T_\epsilon\| \leq A_{\mathrm{p}}$ *où* $A_{\mathrm{p}}$ *ne dépend que de $n$, $B$ et $p$, et* $\forall f \in L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f$ *existe dans* $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ *et définit un opérateur $T$ continu de* $L^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ *dans lui même que l'on note*

$$Tf(x) = vp\int K(y)f(x-y)dy,$$

*$vp$ signifiant valeur principale.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que $T_\epsilon f$ est bien définie car la condition (a) du théorème montre que $K \in L^2(\mathrm{R}^n\backslash B(0\delta))$ pour tout $\delta > 0$.

Dans la démonstration qui suit, les constantes $C$ qui apparaissent ne dépendent que $n$ et $B$ et éventuellement de $p$.

**Lemme 4.3.3.**
*Soit $K$ une fonction mesurable varifiant les conditions (a), (b) et (c) du théorème, et posons pour* $\epsilon > 0$

$$K_\epsilon(x) = \begin{cases} K(x) & si\ |x| > \epsilon, \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Alors* $K_\epsilon$ *vérifie (a), (b) et (c) du théorème si on remplace $B$ par $CB$ où $C$ ne dépend que de $n$.*

*Démonstration.* Soit $K' = \epsilon^{\mathrm{n}}K(\epsilon x)$; il est évident que $K'$ vérifie (a), (b) et (c) avec $B$. Soit

$$K_1' = \begin{cases} K' & si\ |x| > 1, \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Vérifions que $K_1'$ satisfait (a), (b) et (c) avec $B$ remplacé par $CB$. Pour (a) et (c) c'est évident; montrons le pour (b). On a

$$\begin{aligned}\int_{\{\,|x|>2|y|\}} |K_1'(x)-K_1'(x-y)|dx &\leq \int_{\{\,|x|>2|y|\}} |K'(x)-K'(x-y)|dx\\ &+\int_{\{\,1<|x|<2\}} |K'(x)|dx\\ &+\int_{\{\,1<|x-y|<3/2\}} |K'(x-y)|dx\\ &\leq B+2Bn\omega_{\mathrm{n}},\end{aligned}$$

d'après la condition (a) (car, $|x-y|<1$, $|x|>1$, $|x|>2|y|$ impliquent $1<|x|<2$ et $|x-y|>1$, $|x|<1$, $|x|>2|y|$ impliquent $1<|x-y|<3/2$), d'où le résultat puisque $K_\epsilon(x)=\epsilon^{-\mathrm{n}}K_1'(\epsilon^{-1}x)$.

**Lemme 4.3.4.**
*Avec les notations du lemme précédent, on a $K_\epsilon\in L^2(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$ et $|\widehat{K}_\epsilon(y)|\leq CB$ presque partout, $C$ ne dépendant pas de $\epsilon$.*

Admettons un instant ce lemme pour démontrer le théorème 4.3.2. D'après les lemmes ci-dessus et le corollaire du théorème 4.3.1, $T_\epsilon$ s'étend en un opérateur continu de $L^{\mathrm{p}}$ dans lui-même de norme majorée par $A_{\mathrm{p}}$ qui ne dépend que de $n$, $B$ et $p$. Soit $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, et écrivons $T_\epsilon g(x)=I_1+I_2^\epsilon+I_3^\epsilon$, où

$$\begin{aligned}I_1(x)&=\int_{\{\,|y|\geq 1\}} K(y)g(x-y)dy,\\ I_2^\epsilon(x)&=\int_{\{\,\epsilon\leq|y|\leq 1\}} K(y)(g(x-y)-g(x))dy,\\ I_3^\epsilon(x)&=g(x)\int_{\{\,\epsilon\leq|y|\leq 1\}} K(y)dy.\end{aligned}$$

La condition (c) montre que $I_3^\epsilon$ converge dans $L^p$ vers $Cg$. D'autre part, la condition (a) et l'inégalité de Hölder montrent que $\|I_1\|_{\mathrm{p}}\leq C\|g\|_1$ car $\|K\|_{L^p(\mathrm{R}^n\setminus B(0,1))}<+\infty$. Enfin, par le théorème des accroissements finis, on a $|g(x-y)-g(x)|\leq A(x)|y|$, et par suite, si $\epsilon_1<\epsilon_2$, en utilisant (a), il vient

$$|I_2^\epsilon(x)-I_2^\epsilon(x)|\leq A(x)B\int_{\{\,\epsilon_1\leq|y|\leq\epsilon_2\}}\frac{dy}{|y|^{\mathrm{n}-1}}=C(x,n)B(\epsilon_1-\epsilon_2),$$

et comme $x$ appartient à un compact de $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, on conclut que, quand $\epsilon\to 0$, $I_2^\epsilon(x)$ converge uniformément par rapport à $x$ donc aussi dans $L^{\mathrm{p}}$. Finalement on a montré que quand $\epsilon\to 0$, $T_\epsilon g$ converge dans $L^{\mathrm{p}}$. Soit alors $f\in L^{\mathrm{p}}$, et écrivons $f=g+h$ avec $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\|h\|_{\mathrm{p}}\leq\eta$. Alors, pout $\epsilon_1>0$ et $\epsilon_2>0$,

$$\|T_{\epsilon_1}f-T_{\epsilon_2}f\|_{\mathrm{p}}\leq\|T_{\epsilon_1}g-T_{\epsilon_2}g\|_{\mathrm{p}}+2A_{\mathrm{p}}\eta,$$

ce qui, d'après ce qui précède, montre que quand $\epsilon \to 0$ $T_\epsilon f$ converge dans $L^{\mathrm{p}}$ et termine la preuve.

*Démonstration du lemme 4.3.4.* Supposons tout d'abord $\epsilon = 1$. Puisque

$$\widehat{K}_1(y) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\{\,|x|\le R\}} K_1(x) e^{2i\pi<x,y>} dx,$$

pour $y \neq 0$, on a $\widehat{K}_1(y) = I_1(y) + \lim\limits_{\mathrm{R}\to+\infty} I_2^R(y)$, où

$$I_1(y) = \int_{\left\{\,|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}} K_1(x) e^{2i\pi<x,y>} dx,\ I_2^R(y) = \int_{\left\{\,\frac{1}{|y|}<|x|<R\right\}} K_1(x) e^{2I\pi<x,y>} dx.$$

En utilisant les conditions (a) et (b), on majore $I_1(y)$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
|I_1(y)| &\le \left|\int_{\left\{\,|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}} K_1(x)\big(e^{2i\pi<x,y>} - 1\big) dx\right| + \left|\int_{\left\{\,|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}} K_1(x) dx\right| \\
&\le C|y| \int_{\left\{\,|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}} |K_1(x)||x| dx + B \\
&\le CB|y| \int_{\left\{\,|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}} \frac{dx}{|x|^{\mathrm{n}-1}} + B \le C'B.
\end{aligned}$$

Majorons maintenant $|I_2^R(y)|$. Soit $z = \dfrac{y}{2|y|^2}$, de sorte que $e^{2i\pi<\mathrm{z},\mathrm{y}>} = -1$. On a alors

$$\begin{aligned}
-\int_{\left\{\,\frac{1}{|y|}\le|x|\le R\right\}} K_1(x-z) e^{2i\pi<x,y>} dx &= \int_{\left\{\,\frac{1}{|y|}\le|x+z|\le R\right\}} K_1(x) e^{2i\pi<x,y>} dx \\
&= \int_{\left\{\,\frac{1}{|y|}\le|x|\le R\right\}} K_1(x) e^{2i\pi<x,y>} dx \\
&\quad + A(y,R).
\end{aligned}$$

On voit aisément que

$$|A(y,R)| \le \int_{C_1} |K_1| d\lambda + \int_{C_2} |K_1| d\lambda,$$

où $C_1 = \left\{\dfrac{1}{2|y|} \le |x| \le \dfrac{3}{2|y|}\right\}$ et $C_2 = \left\{R - \dfrac{1}{2|y|} \le |x| \le R + \dfrac{1}{2|y|}\right\}$. Alors

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \int_{C_2} |K_1| d\lambda \le\ B \lim_{R\longrightarrow+\infty} \int_{C_2} \frac{dx}{|x|^{\mathrm{n}}} = BC \lim_{R\longrightarrow+\infty} \log\left[\frac{R+1/2|y|}{R-1/2|y|}\right] = 0,$$

et par suite,

$$\lim_{R\to+\infty} |A(y,R)| \le B \int_{C_1} \frac{dx}{|x|^{\mathrm{n}}} = B\log 3.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\left|\lim_{R\to+\infty} I_2^R(y)\right| &\leq CBlog3 + \frac{1}{2}\int_{\left\{\,|x|\geq\frac{1}{|y|}\,\right\}} |K_1(x) - K_1(x-z)|dx \\ &\leq CB,\end{aligned}$$

d'après la condition (b) puisque $|z| = \dfrac{1}{2|y|}$ et $|x| \geq \dfrac{1}{|y|}$ impliquent $|x| \geq 2|z|$.

Traitons maintenant pour finir le cas général $\epsilon > 0$. Comme dans le lemme 4.3.3, considérons $K' = \epsilon^n K(\epsilon x)$. Nous avons vu que $K'$ vérifie les même hypothèses que $K$. Donc d'après ce qui précède, $\left|\mathcal{F}(K_1')\right| \leq CB$. Or, $\widehat{K}_\epsilon(y) = \mathcal{F}(\epsilon^n K_1'(\epsilon^{-1}x))(y) = \mathcal{F}(K_1'(\epsilon y))$, par un calcul direct, et le lemme 4.3.4 est démontré.

# CHAPITRE V

## EQUATION DE LAPLACE
## FONCTIONS HARMONIQUES

### 1. La formule de Green.

**Lemme 5.1.1.**
*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathrm{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$. Soit $w = (w_1, ..., w_n)$ un élément de $\left(\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\right)^n$, et posons $\operatorname{div}(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$. Alors, $\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{R}^n$ et $\sigma$ la mesure euclidienne $(n-1)$–dinensionnelle sur $\partial\Omega$, on a*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w) d\lambda = \int_{\partial\Omega} < w, \nu > d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=1}^{n} w_i \nu_i \right) d\sigma.$$

*Démonstration.* Les hypothèses sur $\Omega$ font qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathrm{R}^n)$ telle que $\Omega = \{\rho < 0\}$ et $\bigtriangledown\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $\nu = \frac{1}{| \bigtriangledown \rho|} \left( \frac{\partial\rho}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\rho}{\partial x_n} \right)$. Nous utilisons maintenant le lemme de géométrie différentielle suivant:

**Lemme 5.1.2.**
*Avec les notations précédentes, et en posant*

$$\omega_i = (-1)^i dx_i \wedge ... \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge ... \wedge dx_n,$$

*on a*

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{d\sigma}{|\bigtriangledown\rho|} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} w_i \omega_i.$$

*Démonstration.* Vérifions brièvement que sur $\partial\Omega$, on a $\omega_i = \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{d\sigma}{| \bigtriangledown \rho|}$, $1 \leq i \leq n$. Cette relation étant locale, il suffit de la vérifier au voisinage de tout point $x_0$ de $\partial\Omega$ que l'on peut supposer être l'origine. Si $\rho = x_1$ au voisinage de l'origine, c'est évident. En écrivant le développement de Taylor de $\rho$ au voisinage de l'origine à l'ordre 1, on voit que les relations sont évidentes si ce développement s'écrit $\rho = x_1 + termes\ d'ordre \geq 2$. On se ramène alors à ce cas par un changement de variables linéaire.

La démonstration du Lemme 5.1.1 résulte aussitôt du Lemme 5.1.2 et de la formule de Stokes.

**Proposition 5.1.1 (formules de Green).**

*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathrm{R}^n$ à frontière de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. On a, en notant* $\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ (**Laplacien** *de $u$*), $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ (**gradient** *de $u$*), $\frac{\partial u}{\partial \nu} = < \nabla u, \nu >$ (**dérivée normale extérieure** *de $u$*), *les formules suivantes:*

$$\int_\Omega \Delta u d\lambda = \int_{\partial\Omega} < \nabla u, \nu > d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma;$$

$$\int_\Omega v \Delta u d\lambda + \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > d\lambda = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

*(*$1^{\text{ère}}$ **identité de Green***);*

$$\int_\Omega (v \nabla u - u \nabla v) d\lambda = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

*(*$2^{\text{ème}}$ **identité de Green***).*

*Démonstration.* La première formule s'obtient en appliquant le lemme 5.1.1 à $w = \nabla u$. La première identité de Green découle du même lemme en prenant $w = v \nabla u$. Enfin la seconde identité de Green est la première appliquée deux fois.

## 2. Propriété de la moyenne, principe du maximum.

**Définition 5.2.1.**

*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$. On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est* **harmonique** *(resp.* **sous-harmonique**, *resp.* **super-harmonique** *où* **sur-harmonique***) si $\Delta u = 0$ (resp. $\Delta u \geq 0$, resp. $\Delta u \leq 0$).*

**Théorème 5.2.1 (formules de la moyenne).**
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}^n)$.*
*1 $^\circ$) Supposons u harmonique (resp. sous–harmonique, resp. super–harmonique). Alors, pour tout $y \in \Omega$ et toute boule $B = B(y, R) \subset \Omega$, on a les relations:*
*(a)* $u(y) = (resp. \leq,\ resp. \geq) \dfrac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B} u d\sigma.$
*(b)* $u(y) = (resp. \leq,\ resp. \geq) \dfrac{1}{\omega_n R^n} \displaystyle\int_{B} u d\lambda.$
*où $\omega_n$ désigne le volume de la boule unité de $\mathrm{R}^n$.*
*2 $^\circ$) Réciproquement, si, pour toute boule $B = B(y, R) \subset \Omega$, on a la relation (a), alors u est harmonique (resp. sous–harmonique, resp. super–harmonique).*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le 1 $^\circ$). Pour simplifier les notations montrons les formules (a) et (b) sur une boule $B = B(0, R) \subset \Omega$ centrée à l'origine. Soient $0 < \rho \leq R$ et $B_\rho = B(0, \rho)$. La première formule de la proposition 5.1.1, montre que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0 (resp. \geq 0,\ resp. \leq 0)$. Or $B_\rho = \left\{ \left( \sum x_i^2 \right)^{1/2} < \rho \right\}$, et par suite, sur $\partial B_\rho$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \left( \sum x_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right) \dfrac{1}{\rho}$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) d\sigma(x) \\
&= \frac{\rho^{n-1}}{\rho} \int_{\partial B_1} \sum_{i=1}^n \rho y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\rho y) d\sigma(y) \\
&= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \int_{\partial B_1} u(\rho y) d\sigma(y) \right\} \\
&= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) d\sigma(x) \right\} \\
&= (\text{resp.} \geq,\ \text{resp.} \leq) 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\rho \leq R$, on a

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) d\sigma(x) \quad \begin{matrix} = \\ \text{resp.} \leq \\ \text{resp.} \geq \end{matrix} \quad R^{1-n} \int_{\partial B\rho} u(x) d\sigma(x).$$

En faisant alors tendre $\rho$ vers zéro, on obtient

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_{\partial B\rho} u(x) d\sigma(x) = n\omega_n u(0),$$

ce qui donne la formule (a). Le (b) s'en déduit aisément. Par le théorème de Fubini, on a

$$\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} u d\lambda = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_0^R \left( \int_{\partial B\rho} u d\sigma \right) d\rho,$$

et il suffit donc d'apliquer le (a).

Démontrons maintenant le 2$^\circ$). Comme précédement, pour simplifier les notations, supposons $0 \in \Omega$, et montrons que $u$ est harmonique (resp. sous–harmonique resp. super-harmonique) en zéro. Pour $x \neq 0$ et $r > 0$, posons

$$v(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|x|^{n-2}} + \dfrac{1}{r^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \\ \log \dfrac{|x|}{r}, & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

On vérifie alors immédiatement que pour $x \neq 0$, $\Delta v(x) = 0$. Appliquons maintenant la seconde identité de Green à $u$ et $v$ sur $B_r \backslash B_\rho$, $0 < \rho < r$ (où l'on a noté $B_t = B(0,t)$):

$$\int_{B_r\backslash B_\rho} v\Delta u d\lambda = -\int_{\partial B_r} u\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\partial B_\rho} \left( v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

Faisons maintenant tendre $\rho$ vers zéro: puisque $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $d\sigma(\partial B_\rho)$ est équivalent à $\rho^{n-1}$, il vient

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\partial B_\rho} v\frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Par ailleurs, la normale extérieure à $\mathrm{R}^n \backslash B_\rho$ est égale à l'opposée de la normale à $B_\rho$ c'est à dire $\left(-\frac{x_i}{\rho}\right)_{1\leq i\leq n}$. Un calcul direct donne donc $\frac{\partial v}{\partial \nu} = -(n-2)\frac{1}{\rho^{n-1}}$ si $n \geq 3$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}$ si $n = 2$, et par suite, quitte à remplacer $v$ par $\frac{v}{c_n}$, on obtient

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\partial B_\rho} u\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{\rho\to 0} -\dfrac{n-2}{\rho^{n-1}}\dfrac{1}{c_n}\displaystyle\int_{\partial B_\rho} u d\sigma & \text{si } n \geq 3 \\ \lim\limits_{\rho\to 0} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int_{\partial B_\rho} u d\sigma & \text{si } n = 2 \end{array} \right\} = -u(0).$$

Un calcul immédiat montre que $c_n = n(n-2)\omega_n$ si $n \geq 3$ et $c_n = 2\omega_2$ si $n = 2$, et par suite, sur $\partial B_r$, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}$, et il vient donc

$$\int_{B_r} v\Delta u d\lambda = u(0) - \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u d\sigma.$$

Supposons maintenant que l'on ait $\leq$ dans l'hypothèse (a) faite sur $u$. De $(*)$, on déduit donc $\int_{B_r} v\Delta u d\lambda \leq 0$. Comme $u \in \mathcal{C}^2$, on a $\Delta u(x) = \Delta u(0) + O(|x|)$. Par conséquent

$$(*) \qquad \Delta u(0) \int_{B_r} v d\lambda + \int_{B_r} v(x) O(|x|) d\lambda(x) \leq 0$$

Or un calcul direct montre que

$$\int_{B_r} v d\lambda = \begin{cases} -r^2\left[n\omega_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right], & \text{si } n \geq 3, \\ -r^2 A_2, & \text{avec } A_2 > 0, \text{ si } n = 2, \end{cases}$$

et

$$\left|\int_{B_r} v(x)O(|x|)d\lambda(x)\right| \leq Cr^3,$$

donc, en multipliant $(*)$ par $\frac{1}{r^2}$, et en faisant tendre $r$ vers zéro, on obtient $\Delta u(0) \geq 0$. De la même manière, si on avait $\geq$ dans l'hypothèse (a) faite sur $u$, on trouverait $\Delta u(0) \leq 0$, ce qui termine la preuve du théorème.

**Remarque.** Une intégration en polaires montre que la condition (b) du théorème est plus faible que la condition (a) (voir propositions 5.2.1 et 5.3.3).

**Théorème 5.2.2 (principe du maximum).**
*Soit* $\Omega$ *un ouvert connexe de* $\mathrm{R}^n$. *Soit* $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\Omega)$ *telle que pour toute boule* $B = B(y,R)$ *contenue dans* $\Omega$ *on a* $u(y) \leq (\text{resp.} \geq) \frac{1}{\omega_n R^n}\int_B u d\lambda$. *Alors, s'il existe* $y \in \Omega$ *et* $V$ *un voisinage de* $y$, *tels que* $u(y) = \sup_V u (\text{resp.} \inf_V u)$,*alors* $u$ *est constante sur* $\Omega$. *En particulier, si de plus* $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\overline{\Omega})$ *et est non constante, on a pour tout* $x \in \Omega$, $u(x) < \sup_{\partial\Omega} u$ $(\text{resp.} > \inf_{\partial\Omega} u)$.

*Démonstration.* Supposons par exemple que l'on ait $\leq$ dans l'hypothèse sur $u$. Soit $M = u(y) = \sup_{\Omega} u$, et posons $\Omega_M = \left\{x \in \Omega \;/\; u(x) = M\right\}$. $\Omega_M$ est clairement fermé et non vide. Soit $z \in \Omega_M$. L'hypothèse implique que si $B = B(z,R)$ est contenue dans $\Omega$, on a

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_B (u-M)d\lambda.$$

Or $u - M \leq 0$ sur $V$, donc, $R$ étant assez petit, si $u - M < 0$ en un point de $B$, on aura $\int_B (u-M)d\lambda < 0$, ce qui est impossible, et par suite, $u = M$ dans $B$, ce qui montre que $\Omega_M$ est ouvert. Comme $\Omega$ est connexe, on a $\Omega_M = \Omega$. Le cas $\geq$ dans l'hypothèse sur $u$ s'en déduit en remplaçant $u$ par $-u$.

**Corollaire.**
$\Omega$ *étant comme dans le théorème ci-dessus, soient* $u$ *et* $v$ *des fonctions de* $\mathcal{C}^2_{\mathrm{R}}(\Omega) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\overline{\Omega})$. *Alors:*
*1°)* $\Delta u = \Delta v$ *dans* $\Omega$ *et* $u = v$ *sur* $\partial\Omega$ *impliquent* $u = v$ *dans* $\Omega$.
*2°)* $\Delta u = 0$, $\Delta v \geq 0$ *dans* $\Omega$ *et* $u = v$ *sur* $\partial\Omega$ *impliquent* $v \leq u$ *dans* $\Omega$.
*3°)* $\Delta u = 0$, $\Delta v \leq 0$ *dans* $\Omega$ *et* $u = v$ *sur* $\partial\Omega$ *impliquent* $v \geq u$ *dans* $\Omega$.

*Démonstration.* Résulte des deux théorèmes précédents.

Ce corollaire suggère de généraliser la définition des fonctions sous-harmoniques et super-harmoniques de la manière suivante

**Définition 5.2.2.**
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$. On dit qu'une fonction $u$ de $\Omega$ dans $[-\infty, +\infty[$ (resp. $]-\infty, +\infty]$) est sous-harmonique (resp. super-harmonique) si elle vérifie les deux conditions suivantes:*
*(a) $u$ est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement);*
*(b) pour toute boule $B$ telle que $\overline{B}$ est contenue dans $\Omega$, et toute fonction $v \in \mathcal{C}(\overline{B})$ harmonique dans $B$ et telle que $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) sur $\partial B$, on a $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) dans $B$.*

**Proposition 5.2.1.**
*Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$, et $u$ une fonction de $\Omega$ dans $[-\infty, +\infty[$ (resp. $]-\infty, +\infty]$) semi-continue supérieurement (resp. inférieurement). Alors, si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite,*
*(i) Il existe $R > 0$ tel que pour toute boule $B = B(x, r)$, $r \leq R$, telle que $\overline{B}$ est contenue dans $\Omega$* on a *$u(x) \leq$ (resp. $\geq$)$\dfrac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B} u d\sigma$,*
*(ii) Il existe $R > 0$ tel que pour toute boule $B = B(x, r)$, $r \leq R$, telle que $\overline{B}$ est contenue dans $\Omega$, on a $u(x) \leq$ (resp. $\geq$ )$\dfrac{1}{\omega_n R^n} \displaystyle\int_B u d\lambda$,*
*$u$ est sous-harmonique (resp. super-harmonique) dans $\Omega$.*

*Démonstration.* Faisons la démonstration pour les fonctions sous-harmoniques avec la condition la plus faible c'est-à-dire la condition (ii). Soit $B$ une boule dont l'adhérence est contenue dans $\Omega$, et soit $h \in \mathcal{C}(B)$ une fonction harmonique telle que $u \leq h$ sur $\partial B$. Supposons que l'on n'a pas $u \leq h$ sur $B$. La semi-continuité implique donc que si $M = \sup\limits_{\overline{B}}(u - h) > 0$, $\Big\{u - h = M\Big\} = F$ est un compact non vide de $B$. Soit alors $z_0$ un point de $F$ tel que $\mathrm{dist}(z_0, \partial B) = \mathrm{dist}(F, \partial B)$. Si $B_0$ est une boule centrée en $z_0$, de rayon $r \leq R$, d'adhérence contenue dans $B$, $B_0$ rencontre le complémentaire de $F$ dans $B$, et par suite, $u - h$ est strictement plus petite que $M$ sur un ouvert non vide de $B_0$. Ceci contredit l'inégalité de la moyenne volumique pour $u - h$ (hypothèse (ii) et théorème 5.2.1).

**Théorème 5.2.3 (inégalité de Harnack).**
*Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$ et $\Omega'$ un ouvert relativement compact dans $\Omega$. Alors il existe une constante $C = C(n, \Omega, \Omega')$ ne dépendant que de $n$, $\Omega$ et $\Omega'$ telle que pour toute fonction harmonique positive $u$ dans $\Omega$ on a $\sup\limits_{\Omega'} u \leq C \inf\limits_{\Omega'} u$.*

**Remarque.** On peut avoir $u > 0$, $\sup_\Omega u = +\infty$ et $\inf\limits_{\Omega} u = 0$. Par exemple, la fonction $u(z) = \dfrac{1 - |z|^2}{|1 + z|^2}$ est harmonique (car partie réelle de la fonction holomorphe $\dfrac{1 - z}{1 + z}$) dans le disque $\Big\{|z| < 1\Big\}$, strictement positive dans le disque, nulle si $|z| = 1$, $z \neq -1$ et lorsque $z \to -1$, $u(z) \to +\infty$.

*Démonstration du théorème 5.2.3.* Soit $x \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $B(x, 4R) \subset \Omega$. Soient $y_1$ et $y_2$ deux points de $B(x, R)$. Puisque $B(y_1, R) \subset B(x, 2R)$ et $B(x, 2R) \subset B(y_2, 3R)$, il résulte du théorème 5.2.1 que

$$u(y_1) = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B(y_1,R)} u d\lambda \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B(x,2R)} u d\lambda,$$

et

$$u(y_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n}\int_{B(y_2,3R)} u d\lambda \geq \frac{1}{\omega_n (3R)^n}\int_{B(x,2R)} u d\lambda,$$

et par suite, $\sup\limits_{B(x,R)} u \leq 3^n \inf\limits_{B(x,R)} u$. Soient alors $x_1 \in \overline{\Omega}'$ et $x_2 \in \overline{\Omega}'$ tels que $u(x_1) = \sup\limits_{\Omega'} u$ et $u(x_2) = \inf\limits_{\Omega'} u$. Soit $R > 0$ tel que $4R < \operatorname{dist}(\overline{\Omega}', \partial\Omega)$. Puisque $\Omega'$ est relativement compact dans $\Omega$, il existe un arc continu $\Gamma$ contenu dans $\Omega'$ de longueur plus petite qu'une constante $C$ ne dépendant que de $n$ $\Omega$ et $\Omega'$ joignant $x_1$ à $x_2$. Il existe alors un entier $N$ ne dépendant que de $n$ $\Omega$ et $\Omega'$ tel que $\Gamma$ soit réunion de $N$ boules de rayons $R$ centrées en des points de $\Gamma$. D'après ce qui précède, on a alors $u(x_1) \leq 3^{nN} u(x_2)$, ce qui montre le théorème.

## 3. Fonction de Green et noyau de Poisson.

On appelle **solution fondamentale du Laplacien** la fonction définie sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ privé de la diagonale par

$$(x, y) \longrightarrow \Gamma(x - y) = \gamma(|x - y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}\dfrac{1}{|x-y|^{2-n}}\,, & \text{si } n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x - y|\,, & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Par un calcul direct, on vérifie que pour $x \neq y$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x - y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^n},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Gamma(x - y) = \frac{1}{n\omega_n}\left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^n} - \frac{n(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+2}}\right].$$

En particulier, pour $x \neq y$, $\Delta_x \Gamma(x - y) = 0$, c'est-à-dire que $x \mapsto \Gamma(x - y)$ est harmonique sur $\mathrm{R}^n \backslash \{y\}$.

Nous dirons que $\Gamma$ et une fonction, mesurable $f$ sont **convolables** si

$$\Gamma * f(y) = \int_{\mathrm{R}^n} \Gamma(x-y) f(x) d\lambda(x)$$

est définie pour presque tout $y \in \mathrm{R}^n$ et si $\Gamma * f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$.

Par exemple si $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ et est à support compact, alors $\Gamma$ et $f$ sont convolables (ceci résulte du théorème de Fubini).

Si $\Gamma$ et $f$ sont convolables, la fonction $\Gamma * f$ est appelée le **potentiel Newtonien de densité** $f$.

**Proposition 5.3.1.**

*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathrm{R}^n$ et soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Pour tout $y \in \Omega$, on a*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) d\lambda(x).$$

*En particulier, si $u \in \mathcal{C}^2_c(\mathrm{R}^n)$ (i.e. est à support compact) on a pour $y \in \mathrm{R}^n$:*

$$u(y) = \int_{\mathrm{R}^n} \Gamma(x-y) \Delta u(x) d\lambda(x).$$

*Démonstration.* En appliquant la seconde identité de Green (proposition 5.1.1) sur $\Omega \backslash B(y,\rho)$, $\rho > 0$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \backslash B(y,\rho)} \Gamma(x-y) \Delta u(x) d\lambda(x) &= \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x-y) \right) d\sigma(x) \\ &\quad - \int_{\partial B(y,\rho)} \left( \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x-y) \right) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Sur $\partial B(y,\rho)$ on a $\Gamma(x-y) = \gamma(\rho)$, et, par suite, $\left| \int_{\partial B(y,\rho)} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x) \right| \le n\omega_n \rho^{n-1} \gamma(\rho) \sup_{B(y,\rho)} |\nabla u|$, ce qui tend vers zéro quand $\rho \to 0$. Par ailleurs, sur $\partial B(y,\rho)$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x-y) = \gamma'(\rho)$, et, par suite, $\int_{\partial B(y,\rho)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x-y) d\sigma(x) = \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(y,\rho)} u(x) d\sigma(x)$, ce qui tend vers $u(y)$ quand $\rho \to 0$.

**Corollaire 1.**

*Au sens des distributions, on a $\Delta_x \Gamma(x-y) = \delta_y$ ($\delta_y$ étant la mase de Dirac au point $y$). En particulier, si $f$ et $\Gamma$ sont convolables, $\Gamma * f = v$ est telle que $\Delta v = f$.*

**Corollaire 2.**

*Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique. Alors $u$ est analytique (i.e. localement développable en série entière) donc en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$. En conséquence, $u$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur un ouvert (non vide) de $\Omega$.*

*Démonstration.* Ceci résulte du fait que, pour $x \in \partial\Omega$, $y \mapsto \Gamma(x-y)$ est analytique dans $\Omega$.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathrm{R}^n$. Supposons que pour tout $y \in \Omega$ il existe $h_y \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique telle que $h_y(x) = -\Gamma(x-y)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Alors en posant $G_\Omega(x,y) = \Gamma(x-y) + h_y(x)$, il vient, pour toute $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$:

$$(*) \qquad u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G_\Omega(x,y)}{\partial \nu_x} d\sigma(x) + \int_\Omega G_\Omega(x,y) \Delta u(x) d\lambda(x).$$

Remarquons de plus que la fonction $h_y$ si elle existe est unique (corollaire de la proposition 5.2.2) et par suite la fonction $G_\Omega$ (avec les propriétés $\Delta_x G_\Omega(x,y) = \delta_y$ et $G_\Omega(x,y) = 0$ si $(x,y) \in \partial\Omega \times \Omega$) est unique.

Lorsqu'elle existe, $G_\Omega(x,y)$ est appelée la **fonction de Green** de $\Omega$ et la fonction $P_\Omega(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} G_\Omega(x,y)$ est appelée le **noyau de Poisson** de $\Omega$. Nous appellerons **formule intégrale de Green** la formule $(*)$ ci-dessus.

**Remarque.** On peut démontrer que tout ouvert borné de $\mathrm{R}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ (et même moins) possède une fonction de Green.

Nous allons maintenant donner explicitement la fonction de Green et le noyau de Poisson d'une boule dans $\mathrm{R}^n$. Pour simplifier les notations, nous nous contentons de donner la formule dans le cas d'une boule $B_R = B(0,R)$ centrée à l'origine, le cas d'une boule quelconque s'en déduisant par translation. Pour $x \in B_R$, posons

$$\overline{x} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{|x|^2} x, & \text{si } x \neq 0, \\ \infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction de Green de $B_R(0,R)$ est alors donnée par la formule

$$\begin{aligned} G(x,y) = G_{B_R}(x,y) &= \begin{cases} \gamma(|x-y|) - \gamma\left(\dfrac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right), & \text{si } y \neq 0 \\ \gamma(|x|) - \gamma(R), & \text{si } y = 0 \end{cases} \\ &= \gamma\Big(\big(|x|^2 + |y|^2 - 2 < x,y >\big)^{1/2}\Big) \\ &\quad - \gamma\left(\left(\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} + R^2 - 2 < x,y >\right)^{1/2}\right), \text{ si } x \neq y. \end{aligned}$$

Le fait que cette fonction est la fonction de Green de $B_R$ résulte de ce que $\Delta_x G(x,y) = \delta_y$ (définition de $\Gamma$ et calcul de ses dérivées) et que, pour $(x,y) \in \partial B_R \times B_R$ on a $G(x,y) = 0$.

De plus, on a $G(x,y) = G(y,x)$, et $G(x,y) \leq 0$. Un calcul direct montre alors que le noyau de Poisson de $B(0,R)$ est donné par

$$P(x,y) = P_{B_R}(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \frac{1}{|x-y|^n} \ .$$

En particulier, $P(x,y) \geq 0$.

**Proposition 5.3.2 (intégrale de Poisson).**
*Les notations étant comme ci-dessus, soit $u \in \mathcal{C}^2(B_R) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B}_R)$. Si $u$ est harmonique, pour tout $y \in B_R$, on a*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(x)}{|x-y|^n} d\sigma(x).$$

*Démonstration.* Ceci est un cas particulier de la formule intégrale de Green $(*)$.

**Théorème 5.3.1 (problème de Dirichlet classique dans $B_R$).**
*Soit $\varphi \in L^\infty(\partial B_R)$, et soit $u$ la fonction définie dans $B_R$ par*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y), & \text{si } x \in B_R \\ \varphi(x), & \text{si } x \in \partial B_R. \end{cases}$$

*Alors, $u$ est harmonique dans $B_R$, et, si $\varphi$ est continue en un point $x_0$ de $\partial B_R$, $u(x)$ tend vers $\varphi(x_0)$ quand $x \to x_0$, $x \in B_R$. En particulier, si $\varphi$ est continue sur $\partial B_R$, $u$ est continue sur $\overline{B}_R$ et est égale à $\varphi$ sur $\partial B_R$.*

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, on a

$$\int_{\partial B_R} P_{B_R}(y,x) d\sigma(y) = 1.$$

Par conséquent,

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \int_{\partial B_R} P_{B_R}(y,x) |\varphi(y) - \varphi(x_0)| d\sigma(y).$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\varphi$ est continue en $x_0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $M = \|\varphi\|_\infty$,

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \epsilon + 2M \int_{\{|y-x_0|>\delta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n} d\sigma(y).$$

Par suite, si $|x - x_0| < \delta/2$, on a

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \epsilon + 2MR^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \left(R^2 - |x|^2\right) \leq 2\epsilon,$$

si $|x - x_0|$ est assez petit.

**Proposition 5.3.3.**

*Soit $\Omega$ un ouvert de* $\mathrm{R}^n$*. Soit $u$ une fonction continue (resp. semi-continue supérieurement resp. semi-continue inférieurement) de $\Omega$ dans* $\mathrm{R}$ *(resp.* $[-\infty, +\infty[$*, resp.* $]-\infty, +\infty]$*). Les propriétés suivantes sontr équivalentes:*

*(i) $u$ est harmonique (resp. sous-harmonique, resp. super-harmonique) dans $\Omega$.*

*(ii) Il existe $R > 0$ tel que pour toute boule $B = B(x, r)$, $r \leq R$ telle que $\overline{B} \subset \Omega$, on a $u(x) =$ (resp $\leq$ , resp $\geq$ ) $\dfrac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B} u d\sigma$.*

*(iii) Il existe $R > 0$ tel que pour toute boule $B = B(x, r)$, $r \leq R$, telle que $\overline{B} \subset \Omega$, on a $u(x) =$ (resp $\leq$ , resp. $\geq$ ) $\dfrac{1}{\omega_n r^n} \displaystyle\int_B u d\lambda$.*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.2.1 et la proposition 5.2.1 il n'y a que deux choses à montrer: d'une part $(iii) \Rightarrow (i)$ dans le cas harmonique, et d'autre part $(i) \Rightarrow (ii)$ dans les cas sous et super harmoniques. Voyons tout d'abord le premier point.

Soit $B$ une boule de rayon $R$ d'adhérence contenue dans $\Omega$. D'après le théorème 5.3.1, il existe une fonction harmonique $h$ continue dans $\overline{B}$ telle que $h_{|\partial B} = u_{|\partial B}$. D'après le théorème 5.2.1, $u - h$ vérifie la propriété de la moyenne volumique dans $B$. Alors, puisque $u - h$ est nulle sur le bord de $B$, d'après le principe du maximum (théorème 5.2.2), $u = h$ dans $B$ ce qui termine la preuve.

Montrons maintenant le second point, par exemple dans le cas sous-harmonique. Soit $B$ une boule centrée en $x$ dont l'adhérence est contenue dans $\Omega$. Soit $\varphi$ une fonction continue sur $\partial B$ telle que $u \leq \varphi$. Soit $h$ la fonction harmonique dans $B$ qui est égale à $\varphi$ sur $\partial B$ (théorème 5.3.1). On a donc $u(x) \leq h(x)$, et par la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, on a $u(x) \leq \displaystyle\int_{\partial B} \varphi d\sigma$. Pour conclure, il suffit de se rappeler que, $u$ étant semi-continue supérieurement, $\displaystyle\int_{\partial B} u d\sigma$ est égal à $\displaystyle\inf_{\varphi \geq u,\ \varphi \text{continue}} \int_{\partial B} \varphi d\sigma$.

**Corollaire.**

*Dans les conditions ci-dessus, si $(u_n)$ est une suite de fonctions harmoniques dans $\Omega$ qui converge uniformément sur les compacts de $\Omega$ vers une fonction $u$, alors $u$ est harmonique dans $\Omega$.*

**Théorème 5.3.2.**

*Soient $\Omega$ un ouvert de* $\mathrm{R}^n$ *et $(u_n)$ une suite croissante de fonctions harmoniques dans $\Omega$. Si il existe $y \in \Omega$ tel que la suite $(u_n(y))$ est bornée, alors la suite $(u_n)$ converge, quand $n \to \infty$, uniformément sur les compacts de $\Omega$ vers une fonction harmonique dans $\Omega$.*

*Démonstration.* La suite $(u_n)$ étant croissante, $(u_n(y))$ converge quand $n \to \infty$. Si $\Omega'$ est un compact de $\Omega$ contenant $y$, d'après l'inégalite de Harnack (Théorème 5.2.3), pour $(p, q) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}$, $p$ assez grand, on a donc $\sup_{\Omega'}(u_{p+q} - u_p) \leq C(u_{p+q}(y) - u_p(y)) \leq \epsilon$, ce qui prouve le théorème.

**Proposition 5.3.4.**

*Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$ et $u$ une fonction harmonique dans $\Omega$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soient $\alpha \in \mathrm{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, et $\Omega'$ un ouvert relativement compact dans $\Omega$. Soit $d > 0$ la distance de $\Omega'$ à $\partial\Omega$. Alors*

$$\sup_{\Omega'}|D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega}|u|,$$

*où $D^\alpha u$ désigne une dérivée d'ordre $\alpha$ de $u$.*

*Démonstration.* Soit $y \in \Omega$, et soit $R = \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq n$, la fonction $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est harmonique dans $\Omega$. Alors la propriété de la moyenne (théorème 5.2.1, (b)) et le lemme 5.1.1 entraînent que, si on note $B_R = B(y, R)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R} u\nu_i d\sigma.$$

Par suite, $|Du(y)| \leq \dfrac{n}{R} \sup\limits_{B(y,R)} |u|$. Par récurrence sur $k$, si $D^\alpha$ est une dérivation d'ordre $k$ ($|\alpha| = k$) et si $R = \dfrac{1}{k}\mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$, il vient $|D^\alpha u(y)| \leq \left(\dfrac{n}{R}\right)^{|k|} \sup\limits_{B(y,kR)} |u|$, d'où on déduit immédiatement la proposition.

**Théorème 5.3.3.**

*Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathrm{R}^n$, et $(u_n)$ une suite de fonctions harmoniques dans $\Omega$. Si la suite $(u_n)$ est bornée, il existe une sous-suite $(u_{n_k})$ qui converge uniformément sur les compacts de $\Omega$ vers une fonction harmonique.*

*Démonstration.* En effet, soit $\Omega'$ un ouvert relativement compact dans $\Omega$. La proposition précédente montre que la suite $(Du_n)$ est bornée sur $\Omega'$. Par suite l'ensemble des $u_n$ est équicontinu sur $\overline{\Omega}'$ et le théorème d'Ascoli implique qu'il existe une sous-suite de la suite $(u_n)$ qui converge uniformément sur $\Omega'$. Pour conclure, il suffit alors de considérer une suite croissante $(\overline{\Omega}_k)$ formée d'ouverts $\Omega_k$ relativements compacts dans $\Omega$ telle que $\bigcup\limits_k \Omega_k = \Omega$ et d'utiliser un procédé diagonal.

## 4. Fonctions harmoniques dans le demi-espace $\mathrm{R}^{n+1}_+$.

On note $\mathrm{R}^{n+1}_+ = \Big\{x = (x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R} \;\text{ tels que } x_{n+1} > 0\Big\}$. On appelle **noyau de Poisson** de $\mathrm{R}^{n+1}_+$, la fonction

$$P(x,y) = \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}}\frac{x_{n+1}}{|x-y|^{n+1}}\ ,\ x \in \mathrm{R}^{n+1}_+,\ y \in \mathrm{R}^n.$$

Intuitivement $P(x,y)$ provient du noyau de Poisson de la boule centrée en $(0,R) \in \mathrm{R}^{n+1}$ et de rayon $R$ (c'est-à-dire $\dfrac{R^2 - |x|^2 - (x_{n+1}-R)^2}{(n+1)\omega_{n+1} R |x-y|^{n+1}}$) lorsque l'on fait tendre $R$ vers l'infini. Remarquons de plus que, si on reprend les notations du premier exemple de la fin du paragraphe 2 du chapitre précédent, on a $P(x,y) = c_n P_{x_{n+1}}(x'-y)$. Ainsi, en utilisant encore les notations du chapitre précédent, pour $u \in L^p(\mathrm{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathrm{R}^n} P(x,y) u(y) d\lambda(y) = c_n \big(P_{x_{n+1}} * u\big)(x').$$

Les propriétés de base du noyau de Poisson de $\mathrm{R}^{n+1}_+$ sont résumées dans la proposition suivante:

**Proposition 5.4.1.**
*Soit* $P(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{R}^{n+1}_+ \times \mathrm{R}^n$, *le noyau de Poisson de* $\mathrm{R}^{n+1}_+$. *Alors:*
*(i) Pour tous* $x$, $y$, $P(x,y) \geq 0$.
*(ii)* $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} P(x,y) d\lambda(y) = 1$.
*(iii) Pour tout* $x \in \mathrm{R}^{n+1}_+$, *la fonction* $y \mapsto P(x,y)$ *appartient à* $L^p(\mathrm{R}^n)$ *pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
*(iv) Pour tout* $y \in \mathrm{R}^n$, *la fonction* $x \mapsto P(x,y)$ *est harmonique dans* $\mathrm{R}^{n+1}_+$, *et, en particulier, si* $u \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$,

$$Pu(x) = \int_{\mathrm{R}^n} P(x,y) u(y) d\lambda(y)$$

*est harmonique dans* $\mathrm{R}^{n+1}_+$. *Pu s'appelle* **l'intégrale de Poisson de** $u$.

*Démonstration.* Le (ii) résulte du fait (vu au chapitre précédent) que $P_{x_{n+1}}$ est une identité approchée. Le (iii) est immédiat, et le (iv) découle d'un calcul direct des dérivées secondes de $P(x,y)$.

La proposition suivante est un cas particulier des proposition 4.2.4 et 4.2.1 (voir aussi les remarques suivant la définition 4.2.1):

**Proposition 5.4.2.**
*Soit* $u \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors:*
*1°) Pour tout* $x' \in \mathrm{R}^n$, $\sup\limits_{x_{n+1}>0} |Pu(x', x_{n+1})| \leq CMu(x')$ *(*$Mu$ *étant la fonction maximale de Hardy-Littlewood de* $u$*).*
*2°) Pour* $\alpha > 0$ *et* $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $\sup\limits_{|x'-x_0|<\alpha x_{n+1}} |Pu(x', x_{n+1})| \leq C_\alpha M^* u(x_0)$ *(*$M^*u$ *étant la fonction maximale non tangentielle de* $u$*).*
*3°) Pour* $p < +\infty$, $\Big\| Pu(., x_{n+1}) - u \Big\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}$ *tend vers zéro quand* $x_{n+1}$ *tend vers zéro.*

Il résulte de la proposition ci-dessus que si $u \in L^p(\mathrm{R}^n)$, on a $\sup\limits_{x_{n+1}>0} \Big\| Pu(.,x_{n+1}) \Big\| < +\infty$. Ceci nous amène à poser la définition suivante:

**Définition 5.4.1.**
*Soit $p \in [1,+\infty]$. On note $H^p(\mathrm{R}^{n+1}_+)$ l'espace de Banach des fonctions $v$ harmoniques dans $\mathrm{R}^{n+1}_+$ telles que $\sup\limits_{x_{n+1}>0} \|v(.,x_{n+1})\|_{L^p(\mathrm{R}^n)} < +\infty$, muni de la norme*

$$\|v\|_{H^p(\mathrm{R}^n)} = \sup_{x_{n+1}>0} \|v(.,x_{n+1})\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}$$

**Proposition 5.4.3.**
*Soit $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}^{n+1}_+)$. Alors $u$ est harmonique et bornée si et seulement si elle est l'intégrale de Poisson d'une fonction de $L^\infty(\mathrm{R}^n)$.*

*Démonstration.* Soit $M = \sup\limits_{\mathrm{R}^{n+1}_+} |u|$. Pour $k \in \mathrm{N}^*$, posons $u_k(x') = u\Big(x', \frac{1}{k}\Big)$, $U_k(x', x_{n+1})$ $= Pu_k(x', x_{n+1})$, et

$$\Delta_k(x', x_{n+1}) = u\left(x', \frac{1}{k} + x_{n+1}\right) - U_k(x', x_{n+1}).$$

$\Delta_k$ est donc harmonique dans $\mathrm{R}^{n+1}_+$ et $|\Delta_k| \leq 2M$. De plus, $U_k$ étant continue sur l'adhérence de $\mathrm{R}^{n+1}_+$ (la continuité sur $\mathrm{R}^{n+1}_+$ est évidente et la continuité au bord résulte de la proposition 4.2.1), $\Delta_k$ est continue sur l'adhérence de $\mathrm{R}^{n+1}_+$, et $\Delta_k(x', 0) = 0$. Montrons alors que $\Delta_k = 0$:

Remarquons tout d'abord que si on remplace $u$ par $\tilde{u}(x', x_{n+1}) = u(x'+y, x_{n+1})$, alors $\Delta_k(x', x_{n+1})$ est remplacé par $\Delta_k(x'+y, x_{n+1})$ et par suite, quite à changer $u$, il nous suffit de montrer que $\Delta_k(0, x_{n+1}) = 0$. De plus, $\Delta_k$ étant harmonique, il suffit de le faire lorsque $x_{n+1} \geq 1$. Alors, si on change $u$ en $\tilde{u}(x', x_{n+1}) = u\Big(\lambda x', \lambda x_{n+1} + \frac{1-\lambda}{k}\Big)$, $\lambda \leq 1$, $\Delta_k(0, x_{n+1})$ est remplacé par $\Delta_k(0, \lambda x_{n+1})$, ce qui montre que, quitte à changer à nouveau $u$, il suffit de voir que $\Delta_k(0,1) = 0$.

Démontrons donc que $\Delta_k(0,1) = 0$. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et posons

$$V_\pm(x', x_{n+1}) = \pm \Delta_k(x', x_{n+1}) + 2M\epsilon x_{n+1} + \epsilon \left( \prod_{j=1}^n \mathrm{ch}\left( \frac{\epsilon\pi}{4\sqrt{n}} x_j \right) \right) \cos\left( \frac{\epsilon\pi}{4} x_{n+1} \right).$$

Il est clair que $V_\pm$ est harmonique sur $\mathrm{R}^{n+1}_+$ et continue sur son adhérence. Considérons alors l'ouvert

$$\Omega = \left\{ 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{\epsilon},\ |x'| \leq R \right\}.$$

Sur $\partial\Omega \cap \Big\{ x_{n+1} = 0 \Big\}$, on a $\Delta_k = 0$ et par suite $V_\pm(x', 0) = \epsilon \prod\limits_1^n \mathrm{ch}\Big(\frac{\epsilon\pi}{4\sqrt{n}} x_j\Big) > 0$. Sur $\partial\Omega \cap \Big\{ x_{n+1} = \frac{1}{\epsilon} \Big\}$, on a $\cos\frac{\epsilon\pi}{4} x_{n+1} = \cos\frac{\pi}{4} > 0$, et comme $|\Delta_k| \leq 2M$, on a $V_\pm \geq 0$.

Le reste de la frontière de $\Omega$ est l'ensemble $\left\{0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{\epsilon},\ |x'| = R\right\}$, sur lequel, si $R$ est assez grand, on a $V_\pm \geq 0$. Ainsi, puisque $(0,1) \in \Omega$, on a $V_\pm(0,1) \geq 0$, c'est-à-dire $\pm\Delta_k(0,1) + 2\epsilon M + \epsilon\cos\frac{\epsilon\pi}{4} \geq 0$, soit encore $\pm\Delta_k(0,1) \geq -\epsilon(2M+1)$, ce qui montre, en faisant tendre $\epsilon$ vers zéro, que $\Delta_k(0,1) = 0$.

Ainsi, pour tout $k$, $u(x', \frac{1}{k} + x_{n+1}) = Pu_k(x', x_{n+1})$. Comme $\|u_k\|_\infty \leq M$, d'après le théorème de Banach–Alaoglu (théorème 1.4.1) il existe $\varphi \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$ et une suite d'entiers $(k_l)_{l\in\mathrm{N}}$ telles que $u_{k_l}$ converge faiblement vers $\varphi$ (pour $\sigma(L^\infty, L^1)$), et en particulier, pour tout $(x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $Pu_{k_l}(x', x_{n+1})$ tend vers $P\varphi(x', x_{n+1})$ quand $l \to \infty$, d'où $u(x', x_{n+1}) = P\varphi(x', x_{n+1})$.

**Théorème 5.4.1.**
*Soit $u$ une fonction de $\mathrm{R}_+^{n+1}$ dans $\mathrm{R}$. Alors:*
*1°) Soit $p \in ]1, +\infty]$. $u \in H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ si et seulement si il existe $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$ telle que $u = Pf$.*
*2°) $u \in H^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$ si et seulement si il existe une mesure complexe $\mu$ telle que $u = P\mu$ (i.e. pour tout $(x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $u(x', x_{n+1}) = \int_{\mathrm{R}^n} P(x,y)d\mu(y)$).*

*Démonstration.* Le cas $p = +\infty$ étant traité par la proposition précédente, supposons $1 \leq p < +\infty$. Soit donc $u \in H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$, et, pour $k \in \mathrm{N}^*$, posons $u_k(x') = u\left(x', \frac{1}{k}\right)$. $u_k$ est donc harmonique dans $\mathrm{R}_+^{n+1}$ et continue dans son adhérence. Montrons de plus qu'elle est bornée. Soit $B$ la boule de centre $(x', x_{n+1})$ et de rayon $x_{n+1}$. La propriété de la moyenne volumique (théorème 5.2.1) appliquée à $u$ sur $B$ et l'inégalité de Hölder donnent (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$|u(x', x_{n+1})|^p \leq \frac{1}{\lambda(B)^p}\left[\left(\int_B |u|^p d\lambda\right)^{1/p} \lambda(B)^{1/q}\right]^p = \frac{1}{\omega_n x_{n+1}^{n+1}} \int_B |u|^p d\lambda.$$

Comme $B \subset \left\{(z', y) \in \mathrm{R}_+^{n+1} \text{ tels que } 0 \leq y \leq 2x_{n+1}\right\}$, il vient

$$|u(x', x_{n+1})|^p \leq \frac{1}{\omega_n x_{n+1}^{n+1}} \int_0^{2x_{n+1}} \left(\int_{\mathrm{R}^n} |u(z', z_{n+1})|^p d\lambda(z')\right) dz_{n+1} \leq \frac{2}{\omega_n x_{n+1}^n} \|u\|_{H^p},$$

et par suite, $|u_k(x')| \leq \frac{C}{k^{n/p}}$. La proposition 5.4.3 appliquée à $u_k$ implique donc que, pour $(x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $u(x', \frac{1}{k} + x_{n+1}) = Pu_k(x', x_{n+1})$.

Supposons maintenant $p > 1$. La suite $u_k$ étant par hypothèse bornée dans $L^p(\mathrm{R}^n)$, d'après le théorème de Banach–Alaoglu (théorème 1.4.1) il existe une suite $(k_l)_{l\in\mathrm{N}}$ et $\varphi \in L^p(\mathrm{R}^n)$, telles que $u_{k_l}$ tend vers $\varphi$ faiblement quand $l \to +\infty$. On a donc en particulier $u = P\varphi$.

Le cas $p = 1$ est identique: la seule différence étant que l'on considère la suite $(u_k)$ comme étant une suite bornée de mesures complexes sur $\mathrm{R}^n$ (qui est le dual de l'espace des fonction continues à support compact), et la suite $(u_{k_l}$ converge faiblement vers une mesure $\mu$.

**Proposition 5.4.4.**

*Soit $u \in H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$, $1 \leq p \leq +\infty$.*

*1 $^\circ$) Pour tout $\alpha > 0$ la foction définie sur $\mathrm{R}^n$ par*

$$x \mapsto \sup_{|x-y|<\alpha x_{n+1}} |u(y, x_{n+1})|,$$

*appartient à $L^p(\mathrm{R}^n)$ si $p > 1$ (de norme majorée par $C_\alpha \|u\|_{H^p}$) et à $L^{1\infty}(\mathrm{R}^n)$ si $p = 1$.*

*2 $^\circ$) Supposons $p > 1$. Alors, si $u = Pf$ avec $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, on a $\|u\|_{H^p} = \|f\|_{L^p}$. Ainsi, pour $p \in ]1, +\infty]$, $H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ s'identifie isométriquement à $L^p(\mathrm{R}^n)$. En particulier, si, $1 < p < +\infty$, le dual de $H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ est $H^q(\mathrm{R}_+^{n+1})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}= 1$.*

*Démonstration.* Le premièrement résulte du théorème 5.4.1 de la proposition 5.4.2 et du théorème 4.2.2. Le deuxièmement résulte du théorème 5.4.1 du fait que, puisque le noyau de Poisson est une identité approchée, on a $\|u\|_{H^p} \leq \|f\|_{L^p}$, et (avec les notations de la preuve du théorème précédent) de la convergence de $u_k$ vers $f$ dans $L^p(\mathrm{R}^n)$ (proposition 5.4.2).

**Remarque.** Le théorème 5.4.1 montre que le 2 $^\circ$ ) de la proposition ci-dessus ne s'applique pas à l'espace $H^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$.

## 5. Limites non tangentielles.

Soient $\alpha > 0$ et $h > 0$. Pour $x_0' \in \mathrm{R}^n$, on considère le cône $\Gamma_\alpha^h(x_0')$ défini de la manière suivante:

$$\Gamma_\alpha^h(x_0') = \big\{ x = (x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}_+^{n+1} \text{ tels que } \; |x' - x_0'| < \alpha x_{n+1}, \; 0 < x_{n+1} < h \big\}.$$

De plus, si $E \subset \mathrm{R}^n$, on note

$$\mathcal{R}_\alpha^h(E) = \bigcup_{x_0' \in E} \Gamma_\alpha^h(x_0').$$

On pose alors la définition suivante:

**Définition 5.5.1.**

*Soit $u$ une fonction réelle définie sur $\mathrm{R}_+^{n+1}$ et soit $x_0' \in \mathrm{R}^n$. On dit que $u$ a une* **limite non tangentielle** *$l$* **en** *$x_0'$ si pour tout $\alpha > 0$, tout $\epsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que, pour $x \in \Gamma_\alpha^h(x_0')$, on a $|u(x) - l| < \epsilon$.*

**Remarque.** *Soit $u$ une fonction continue sur $\mathrm{R}_+^{n+1}$. Alors l'ensemble des pionts $x' \in \mathrm{R}^n$ tels que $u$ a une limite non tangentielle en $x'$ est un borélien de $\mathrm{R}^n$.*

En effet, si on pose, pour $m$, $n$, $k$ dans $\mathrm{N}^*$,

$$E_{m,n}^k = \left\{ x_0' \in \mathrm{R}^n \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} |u(x_0'+x', h_1) - u(x_0'+x''-h_2)| \le \dfrac{1}{m} \\ \\ |x'| \le kh_1,\ |x''| \le kh_2,\ 0 < h_i < \dfrac{1}{n},\ i=1,2 \end{array} \right. \right\},$$

alors $E_{m,n}^k$ est fermé et, par le critère de Cauchy, l'ensemble des points de $\mathrm{R}^n$ où $u$ a une limite non tangentielle est égal à $\bigcap_k \bigcap_m \bigcup_n E_{m,n}^k$.

Le théorème suivant est alors une conséquence immédiate de la proposition 5.4.4 et des théorèmes 5.4.1, 4.2.3 et 4.2.4:

**Théorème 5.5.1.**
*Soit $u \in H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$. Alors $u$ à des limites non tangentielles presque partout sur $\mathrm{R}^n$. De plus, si on note $u^*$ la fonction définie presque partout sur $\mathrm{R}^n$ par ces limites, on a $u^* \in L^p(\mathrm{R}^n)$ et, si $p > 1$, on a de plus $\|u\|_{H^p} = \|u^*\|_{L^p}$ et $u = Pu^*$.*

Nous allons maintenant donner des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'une fonction harmonique (quelconque) sur $\mathrm{R}_+^{n+1}$ ait des limites non tangentielles en presque tout point d'un sous-ensemble donné de $\mathrm{R}^n$. Pour cela introduisons tout d'abord une définition:

**Définition 5.5.2.**
*Soit $u$ une fonction réelle définie sur $\mathrm{R}_+^{n+1}$ et soit $x_0' \in \mathrm{R}^n$. On dit que $u$ est* **non tangentiellement bornée en** $x_0'$ *s'il existe* $\alpha > 0$ et $h > 0$ *tels que*

$$\sup_{x \in \Gamma_\alpha^h(x_0')} |u(x)| < +\infty.$$

**Remarque.** 1°) Il est clair que si $u$ admet une limite non tangentielle en un point, elle est non tangentiellement bornée en ce point. Le théorème 5.5.2 montre que, si $u$ est harmonique, la réciproque est vraie "presque partout".

2°) Il serait naturel de considérer l'analogue "radial" du "non tangentiel". Plus précisément, on dit que $u \in \mathcal{C}(\mathrm{R}_+^{n+1})$ a une limite radiale en $x_0' \in \mathrm{R}^n$ si $u(x', x_{n+1})$ converge quand $x_{n+1} \to 0$, et, est radialement bornée en $x_0'$ s'il existe $h_0 > 0$ tel que $\sup_{0<h<h_0} |u(x', h)| < +\infty$. Il est clair que les notions "radiales" sont plus faibles que les notions "non tangentielles". Mais, même pour les fonctions harmoniques, elles ne sont pas presque partout équivalentes, et, de plus, les notions "non tangentielles" conduisent à des résultats inaccessibles par les notions "radiales". En particulier, les deux théorèmes qui suivent deviennent *faux* si on remplace partout "non tangentiel" par "radial" (pour un exemple voir E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, 4.12, p.238).

**Théorème 5.5.2 (théorème de Fatou local).**
*Soit $u$ une fonction harmonique dans $\mathrm{R}_+^{n+1}$. Soit $E$ une partie mesurable de $\mathrm{R}^n$. Si $u$ est non tangentiellement bornée en tout point de $E$ alors $u$ admet des limites non tangentielles en presque tout point de $E$.*

*Démonstration.* Le théorème va résulter facilement des deux lemmes suivants:

**Lemme 5.5.1.**
*Soit $E_1$ une partie compacte de $\mathrm{R}^n$. Soient $\alpha > 0$ et $h > 0$. Soit $u$ une fonction harmonique dans $\mathrm{R}_+^{n+1}$ telle que $|u| \leq 1$ sur $\mathcal{R}_\alpha^h(E_1)$. Alors pour presque tout $x_0' \in E_1$, $u(x)$ a une limite quand $x$ tend non tangentiellement vers $x_0'$ en restant dans $\mathcal{R}_\alpha^h(E_1)$.*

**Lemme 5.5.2.**
*Soit $E$ une partie mesurable de $\mathrm{R}^n$, et soit $u \in \mathcal{C}(\mathrm{R}_+^{n+1})$ une fonction non tangentiellement bornée en tout point de $E$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $E_1 \subset E$, $E_1$ compact, tel que:*
*(a) $\lambda(E \backslash E_1) \leq \epsilon$;*
*(b) pour tous $\alpha > 0$ et $h > 0$, il existe $M = M(\epsilon, \alpha, h)$ tel que, pour $x \in \mathcal{R}_\alpha^h(E_1)$, on a $|u(x)| \leq M$.*

Admettons un instant les lemmes pour voir que le théorème s'en déduit aisément. Pour tout entier $p$, posons $\alpha_p = p$, et prenons $h = 1$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. D'après le lemme 5.5.2, pour tout $p$, il existe $E_p \subset E$ compact, et $M = M(\epsilon, p)$, tel que $\lambda(E \backslash E_p) \leq \frac{\epsilon}{2^p}$ et $\left|\frac{u}{M}\right| \leq 1$ sur $\mathcal{R}_{\alpha_p}^1(E_p)$. Il résulte alors du lemme 5.5.1 que $u$ a des limites non tangentielles presque partout sur $E_p$ en restant dans $\mathcal{R}_{\alpha_p}^1(E_p)$. Comme on peut évidemment supposer $E_{p+1} \subset E_p$, $E(\epsilon) = \bigcap_p E_p$ est tel que $\lambda(E \backslash E(\epsilon)) \leq \epsilon$ et $u$ a des limites non tangentielles presque partout sur $E(\epsilon)$. Comme ceci est valable pour tout $\epsilon > 0$, le théorème est démontré.

*Démonstration du lemme 5.5.1.* Pour tout $m \in \mathrm{N}^*$ et tout $x' \in \mathrm{R}^n$, posons

$$\varphi_m(x') = \begin{cases} u\left(x', \dfrac{1}{m}\right), & \text{si } \left(x', \dfrac{1}{m}\right) \in \mathcal{R}_\alpha^h(E_1), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que $\|\varphi_m\|_\infty \leq 1$ et que $\varphi_m$ est continue sur un voisinage de $E_1$ (puisque $\alpha > 0$) pour $m \geq m_0$. Posons de plus

$$\psi_m(x', x_{n+1}) = u\left(x', \frac{1}{m} + x_{n+1}\right) - P\varphi_m(x', x_{n+1}),\ (x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}_+^{n+1}.$$

La suite $\varphi_m$ étant bornée dans $L^\infty(\mathrm{R}^n)$, il existe une sous-suite $\varphi_{m_p}$ qui converge faiblement vers $\varphi \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$. Par suite $P\varphi_{m_p}$ converge ponctuellement vers $P\varphi$, donc $\psi_{m_p}$ converge pnctuellement vers $\psi$, et on a, pour $x \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $u(x) = P\varphi(x) + \psi(x)$. Comme $u$

et $P\varphi$ sont harmoniques, il en est de même de $\psi$, et, puisque $P\varphi$ a des limites non tangentielles presque partout sur $\mathrm{R}^n$ (théorème 5.5.1), pour conclure, il nous suffit de montrer que:

$$(*) \qquad \begin{cases} \textit{pour presque tout } x'_0 \in E_1,\ \psi(x) \textit{ tend vers zéro quand} \\ x \textit{ tend vers } x'_0 \textit{non tangentiellement en restant dans } \mathcal{R}^h_\alpha(E_1). \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B}$ la frontière de $\mathcal{R}^h_\alpha(E_1)$, et posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_+$ où $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathrm{R}^n$ et $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} \cap \mathrm{R}^{n+1}_+$. Soit $\chi$ la fonction caractéristique de $\mathrm{R}^n \backslash E_1$, et posons

$$H(x', x_{n+1}) = c[P\chi(x', x_{n+1}) + x_{n+1}],\ (x', x_{n+1}) \in \mathrm{R}^{n+1}_+,$$

où $c$ est une constante que nous préciserons plus loin. Il est clair que $H$ est harmonique et d'après le théorème 5.5.1, elle admet des limites non tangentielles presque partout sur $\mathrm{R}^n$ qui sont positives et nulles sur $E_1$. Montrons que, de plus, pour un choix convenable de $c$, on a $H \geq 2$ sur $\mathcal{B}_+$. Sur $\mathcal{B}_+ \cap \{x_{n+1} = h\}$, il suffit de prendre $c > \frac{2}{h}$. Soit maintenant $(x', x_{n+1}) \in \mathcal{B}_+$, $x_{n+1} < h$; alors $x_{n+1} = \frac{1}{\alpha} d(x', E_1)$ et, par suite, $B(x', \alpha x_{n+1}) \cap E_1 = \emptyset$. On a donc

$$\begin{aligned} P\chi(x', x_{n+1}) &= c_n x_{n+1} \int_{\mathrm{R}^n} \frac{\chi(y)}{\left(|x' - y|^2 + x^2_{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}} d\lambda(y) \\ &\geq c_n x_{n+1} \int_{B(x', \alpha x_{n+1})} \frac{\chi(y)}{\left(|x' - y|^2 + x^2_{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}} d\lambda(y) \\ &= c_n x_{n+1} \int_{\{|z| < \alpha x_{n+1}\}} \frac{dz}{\left(|z|^2 + x^2_{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= c_n \alpha^n \int_{\{|u|<1\}} \frac{du}{(\alpha^2 |u|^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= A > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $H(x', x_{n+1}) \geq cA + cx_{n+1} \geq 2$, pour $c$ assez grand, puisque $A$ est indépendant de $x_{n+1}$. Montrons maintenant que, pour tout $m$, $|\psi_m| \leq H$ sur $\mathcal{R}^h_\alpha(E_1)$, ce qui achèvera de montrer $(*)$ et par conséquent le lemme. Si cela était faux, par le principe du maximum, il existerait une suite $((x'_k, x^k_{n+1}))_{k \in \mathrm{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}^h_\alpha(E_1)$ qui tend vers un point $x$ de $\mathcal{B}$, et $\epsilon > 0$, tels que, pour tout $k$, $|\psi_m(x'_k, x^k_{n+1})| \geq H(x'_k, x^k_{n+1}) + \epsilon$. Puisque $|\psi_m| \leq 2$ et $H \geq 2$ sur $\mathcal{B}_+$, on a nécessairement $x \in \mathcal{B}_0$. Or, $\varphi_m$ étant continue sur un voisinage de $E_1$, $P\varphi_m(x'_k, x^k_{n+1})$ tend vers $\varphi_m(x)$ de même que $u(x'_k, x^k_{n+1} + 1/m)$, ce qui donne que $\psi_m(x'_k, x^k_{n+1})$ tend vers zéro et contredit le fait que que $H$ est positive sur $\mathrm{R}^n$.

*Démonstration du lemme 5.5.2.* Pour tout $n \in \mathrm{N}$, soit

$$E_n = \Big\{ x' \in E \text{ tels que, pour } x \in \Gamma^{1/n}_{1/n}(x'),\ \text{on a } |u(x)| \leq n \Big\}.$$

Il est clair que $E_n$ est mesurable, $\bigcup_n E_n = E$, $E_n \subset E_{n+1}$, et donc $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$. Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe donc $n_0 \in \mathrm{N}$ tel que $\lambda(E \backslash E_{n_0}) < \epsilon$ et, pour tout $x \in \mathcal{R}_{1/n_0}^{1/n_0}(E_{n_0})$, $|u(x)| \leq n_0$. Notons $\alpha_0 = h_0 = 1/n_0$, $M_0 = n_0$. Soit $E_0$ un compact contenu dans $E_{n_0}$ tel que $\lambda(E \backslash E_0) < \epsilon$. D'après le théorème 4.1.1, presque tout point de $E_0$ est point de densité (remarque 2 °) suivant le théorème 4.1.1). Soit alors $k \in \mathrm{N}^*$, $k > \alpha_0 + 1$, et soit $\eta$ tel que $1 - \left(\frac{\alpha_0}{k+1}\right)^n < \eta < 1$. Il existe donc $E_k$ un compact contenu dans $E_0$ et $\delta > 0$ tels que $\lambda(E \backslash E_k) < \epsilon$, et, pour $x' \in E_k$, $r < \delta$, on a

$$\frac{\lambda(B(x', r) \cap E_0)}{\lambda(B(x', r))} \geq \eta.$$

Soit alors $\delta' = \min\left\{h_0, \frac{\delta}{k+1}\right\}$, et montrons que $\mathcal{R}_k^{\delta'}(E_k) \subset \mathcal{R}_{\alpha_0}^{h_0}(E_0)$ ce qui prouvera que $u$ est bornée sur $\mathcal{R}_k^k(E_k)$. En effet, dans le cas contraire, pour au moins un $(x', x_{n+1}) \in \mathcal{R}_k^{\delta'}(E_k)$, on aurait $B(x', \alpha_0 x_{n+1}) \cap E_0 = \emptyset$, et comme, par définition de $\mathcal{R}_k^{\delta'}(E_k)$, il existe un $x'_0 \in E_k$ tel que $B(x', \alpha_0 x_{n+1}) \subset B(x'_0, (k+1)x_{n+1})$, il viendrait $((k+1)x_{n+1} \leq (k+1)\delta' \leq \delta)$

$$\eta \leq \frac{\lambda(B(x'_0, (k+1)x_{n+1}) \cap E_0)}{\lambda(B(x'_0, (k+1)x_{n+1})} \leq \frac{(k+1)^n x_{n+1}^n - \alpha_0^n x_{n+1}^n}{(k+1)^n x_{n+1}^n} = 1 - \left(\frac{\alpha_0}{k+1}\right)^n,$$

ce qui contredit la définition de $\eta$. Pour terminer la preuve du lemme il suffit de considérer maintenant une intersection décroissante de $E_k$ vérifiant tous $\lambda(E \backslash E_k) \leq \epsilon$.

Pour terminer, nous allons donner un second résultat classique caractérisant l'existence "presque partout" des limites non tangentielles. Pour cela, il nous faut donner une autre définition:

**Définition 5.5.3.**
*Soit* $u \in \mathcal{C}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$. *Pour* $x' \in \mathrm{R}^n$), $\alpha > 0$ *et* $h > 0$, *on appelle* **intégrale d'aire de Lusin relative au cône** $\Gamma_\alpha^h(x')$ *l'intégrale*

$$S_\alpha^h(u)(x') = \left(\int_{\Gamma_\alpha^h(x')} |\nabla u|^2 x_{n+1}^{1-n} d\lambda(x') dx_{n+1}\right)^{1/2}.$$

**Remarque.** La terminologie "intégrale d'aire" provient du fait que pour une fonction holomorphe dans $\mathrm{R}_+^2$, $S_\alpha^h(u)(x')$ est l'aire de l'image par $u$ du cône $\Gamma_\alpha^h(x')$.

**Théorème 5.5.3 (théorème de l'intgrale d'aire).**
*Soit $u$ une fonction harmonique dans* $\mathrm{R}_+^{n+1}$. *En dehors d'un ensemble de mesure nulle de* $\mathrm{R}^n$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*
*(1) $u$ a une limite non tangentielle en $x'_0$;*
*(2) Pour tous $\alpha > 0$ et $h > 0$, $S_\alpha^h(u)(x'_0) < +\infty$;*
*(3) il existe $\alpha > 0$ et $h > 0$ tels que $S_\alpha^h(u)(x'_0) < +\infty$.*

*Démonstration.* Nous utiliserons deux lemmes:

**Lemme 5.5.3.**
*Soient $E$ un compact de $\mathrm{R}^n$, $\alpha > 0$ et $h > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie $\mathcal{R}_\epsilon$ de $\mathrm{R}_+^{n+1}$ telle que:*
*(i) $\overline{\mathcal{R}}_\epsilon \subset \mathcal{R}_\alpha^h(E)$, pour $\epsilon_1 < \epsilon_2$, on a $\mathcal{R}_{\epsilon_1} \subset \mathcal{R}_{\epsilon_2}$, et $\bigcup_{\epsilon>0} \mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\alpha^h(E)$.*
*(ii) Soit $\mathcal{B}_\epsilon$ la frontière de $\mathcal{R}_\epsilon$. Alors $\mathcal{B}_\epsilon = \mathcal{B}_\epsilon^1 \cup \mathcal{B}_\epsilon^2$ où $\mathcal{B}_\epsilon^2 \subset \mathrm{R}^n \times \{h - \epsilon\}$, et $\mathcal{B}_\epsilon^1 \subset \left\{x_{n+1} = \frac{\delta_\epsilon(x')}{\alpha}\right\}$ où $\delta_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}^n)$, $\left|\frac{\partial \delta_\epsilon}{\partial x_i}\right| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$, et, sur $\mathcal{B}_\epsilon^1$, on a $dx' \leq d\sigma_\epsilon \leq \left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} dx'$.*

*Démonstration.* En effet, soit $\delta(x')$ la distance de $x'$ à $E$, et régularisons $\delta$ par convolution: on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathrm{R}^n} \varphi d\lambda = 1$, $\varphi_\eta = \eta^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right)$, et $\delta_\eta = \varphi_\eta * \delta$. Comme $|\delta(x') - \delta(x'')| \leq |x' - x''|$, on a $\delta_\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}^n)$, $\left|\frac{\partial \delta_\eta}{\partial x_i}\right| \leq 1$, et, quand $\eta \to 0$, $\delta_\eta \to \delta$ uniforménent. Il suffit alors de prendre $\delta_\epsilon = \delta_\eta + \eta'$ avec $\eta$ et $\eta'$ assez petits, puis $\mathcal{R}_\epsilon = \left\{(x', x_{n+1}) \text{ tels que } \delta_\epsilon(x') < \alpha x_{n+1},\ 0 < x_{n+1} < h - \epsilon\right\}$.

**Lemme 5.5.4.**
*Soient $0 < \alpha < \beta$, $0 < h < k$. Soient $x_0' \in \mathrm{R}^n$ et $u$ une fonction harmonique dans $\Gamma_\beta^k(x_0')$. Alors il existe une constante $C = C(\alpha, \beta, h, k)$ telle que:*
*(i) Si $|u| \leq 1$ dans $\Gamma_\beta^k(x_0')$ alors $x_{n+1}| \nabla u| \leq C$ dans $\Gamma_\alpha^h(x_0')$;*
*(ii) Si*

$$\int_{\Gamma_\beta^k(x_0')} |\nabla u|^2 x_{n+1}^{1-n} d\lambda(x) \leq 1,$$

*alors $x_{n+1}| \nabla u| \leq C$ dans $\Gamma_\alpha^h(x_0')$.*

*Démonstration.* Soit $x = (x', x_{n+1}) \in \Gamma_\alpha^k(x_0')$; il existe $C = C(\alpha, \beta, h, k)$ tel que $B = B(x, C x_{n+1}) \subset \Gamma_\beta^k(x_0')$. Par suite, par la propriété de la moyenne (théorème 5.2.1) et le lemme 5.1.1, il vient

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| = \frac{1}{\omega_{n+1}(C x_{n+1})^{n+1}} \left|\int_{\partial B} u \nu_i d\sigma\right| \leq \frac{C}{x_{n+1}} \sup_B |u|,$$

d'où $| \nabla u(x)| \leq \frac{C}{x_{n+1}} \sup_B |u| \leq \frac{C}{x_{n+1}}$. De la même manière, on a

$$| \nabla u(x)|^2 \leq \frac{C}{x_{n+1}^{n+1}} \int_B | \nabla u(y)|^2 d\lambda(y);$$

or, $(y', y_{n+1}) \in B$ implique $y_{n+1} \leq C x_{n+1}$, d'où

$$x_{n+1}^2 | \nabla u(x)|^2 \leq C \int_B | \nabla u(y)|^2 y_{n+1}^{n+1} d\lambda(y),$$

ce qui achève la preuve du lemme.

*Démonstration du théorème 5.5.3.* Démontrons tout d'abord que (1) entraîne (2). Soient $\alpha > 0$ et $h > 0$ donnés. Soit $E$ l'ensemble des points de $\mathrm{R}^n$ où $u$ a une limite non tangentielle. En considérant les ensembles $E_m = \Big\{x' \in E$ tels que $|u(x')| \leq m$ sur $\Gamma^k_\beta(x')\Big\}$, on voit aussitôt qu'il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \text{Si } E \subset \mathrm{R}^n \text{ est un conpact tel que pour un } \beta > \alpha \text{ et un } k > h \text{ on a} \\ \\ \sup\limits_{\mathcal{R}^k_\beta(E)} |u(x)| \leq 1, \text{ alors } I = \displaystyle\int_E \Big(S^h_\alpha(u)(x'_0)\Big)^2 d\lambda(x'_0) < +\infty. \end{cases}$$

Soit $\chi(x'_0, x', x_{n+1})$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\Big\{|x' - x'_0| < \alpha x_{n+1}, 0 < x_{n+1} < h\Big\}$ dans $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^{n+1}_+$. Alors

$$I = \int_{\mathcal{R}^h_\alpha(E)} \Big(\int_E \chi d\lambda(x'_0)\Big) x^{1-n}_{n+1} |\bigtriangledown u(x)|^2 d\lambda(x).$$

Or, $\displaystyle\int_E \chi dx'_0 \leq \int_{|x'-x'_0|<\alpha x_{n+1}} = C x^n_{n+1}$, et par suite, avec les notations du lemme 5.5.3, il suffit de voir que

$$\forall \epsilon > 0, \ I_\epsilon = \int_{\mathcal{R}_\epsilon} x_{n+1} |\bigtriangledown u(x)|^2 d\lambda(x) \leq A, \ A \text{ indépendant de } \epsilon.$$

Remarquons alors que $\Delta\Big(\dfrac{|u|^2}{2}\Big) = |\bigtriangledown u|^2$ et appliquons la seconde identité de Green (proposition 5.1.1):

$$I_\epsilon = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_\epsilon} \Big(x_{n+1}\frac{\partial u^2}{\partial \nu \epsilon}(x) - u^2(x)\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \nu_\epsilon}\Big) d\sigma_\epsilon(x).$$

Or, d'après le lemme 5.5.4, on a $x_{n+1}\left|\dfrac{\partial u^2}{\partial \nu_\epsilon}\right| \leq C$, et comme $\left|u^2 \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial \nu_\epsilon}\right| \leq 1$, il vient

$$I_\epsilon \leq C\int_{\mathcal{B}_\epsilon} d\sigma_\epsilon = C\bigg(\int_{\mathcal{B}^1_\epsilon} d\sigma_\epsilon + \int_{\mathcal{B}^2_\epsilon} d\sigma_\epsilon\bigg) = C(J_1 + J_2).$$

Il est clair que $J_2 \leq A$; par ailleurs, sur $\mathcal{B}^1_\epsilon$, on a, d'après le lemme 5.5.3

$$d\sigma_\epsilon = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial \delta_\epsilon}{\partial x_j}\Big)^2\right)^{1/2} d\lambda(x') \leq \Big(1 + \frac{n}{\alpha^2}\Big)^{1/2} d\lambda(x'),$$

ce qui montre que $J_1 \leq A$.

(2)$\Rightarrow$(3) étant évident, montrons maintenant que (3) implique (1). En considérant les ensembles $E_n = \left\{x' \text{ tels que } S_{1/n}^{1/n}(u)(x') \leq n\right\}$, on voit aussitôt qu'il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \text{Si } E_0 \text{ est un compact de } \mathrm{R}^n \text{ tel que il existe } \beta > 0 \text{ et } k > 0 \text{ tels que} \\ \forall x_0' \in E_0, \text{ on a } \displaystyle\int_{\Gamma_\beta^k(x_0')} |\nabla u(x)|^2 x_{n+1}^{1-n} d\lambda(x) \leq 1, \\ \text{alors, } u \text{ a des limites non tangentielles presque partout sur } E_0. \end{cases}$$

Pour le voir, appliquons tout d'abord le théorème 4.1.1: $\epsilon_1 > 0$ étant donné, soit $E$ un compact contenu dans $E_0$ tel que $\lambda(E_0 \backslash E) \leq \epsilon_1$ et tel qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0' \in E$ et tout $r \in ]0, \eta[$ on a

$$\frac{\lambda(B(x_0', r) \cap E_0)}{\lambda(B(x_0', r))} \geq \frac{1}{2},$$

et, pour terminer la preuve du théorème, montrons que $u$ a des limtes non tangentielles presque partout sur $E$. Soient $\alpha$ et $h$ fixés tels que $0 < \alpha < \beta$ et $0 < h < k$. Considérons les $\mathcal{R}_\epsilon$ associés à $\mathcal{R}_\alpha^h(E)$ par le lemme 5.5.3.

**Lemme 5.5.5.**

*Avec les notations ci-dessus,*

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_{\mathcal{B}_\epsilon^1} u^2 d\sigma_\epsilon < +\infty.$$

Admettons un instant ce lemme pour terminer la preuve du théorème. Soit $\Pi$ la projection de $R_+^{n+1}$ sur $\mathrm{R}^n$ définie par $\Pi(x', x_{n+1}) = x'$ et définissons la fonction $f_\epsilon$ sur $\mathrm{R}^n$ par

$$f_\epsilon(x') = \begin{cases} u\left(x', \dfrac{1}{\alpha}\delta_\epsilon(x')\right), & \text{si } x' \in \Pi\big(\mathcal{B}_\epsilon^1\big), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $d\sigma_\epsilon \geq d\lambda(x')$ (lemme 5.5.3), le lemme 5.5.5 dit que $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} |f_\epsilon(x')|^2 d\lambda(x') \leq C < +\infty$. Soit $v_\epsilon = P(|f_\epsilon|)$ et montrons que

$$(*) \qquad |u| \leq C_1 v_\epsilon + C_2, \text{ dans } \mathcal{R}_\epsilon, \text{ avec } C_i \text{ indépendants de } \epsilon.$$

En effet, tout d'abord, sur $\mathcal{B}_\epsilon^2$, puisque $v_\epsilon \geq 0$, il suffit de prendre $C_2$ assez grand; soit alors $x = (x', x_{n+1}) \in \mathcal{B}_\epsilon^1$. Si $c$ est assez petit (indépendant de $\epsilon$) la boule $B = B(x, cx_{n+1})$ est contenue dans $\mathcal{R}_{\alpha'}^{h'}(E)$ avec $\alpha < \alpha' < \beta$ et $h < h' < k$, et par le (ii) du lemme 5.5.4, on a $x_{n+1}| \nabla u| \leq C$ dans $B$, et par suite, si $\tilde{x} \in B$, $|u(x) - u(\tilde{x})| \leq C$, ce qui donne, si on note $S(\epsilon) = \mathcal{B}^1_\epsilon \cap B$, $|u(x)| \leq \frac{1}{d\sigma_\epsilon(S(\epsilon))}\int_{S(\epsilon)} |u(\tilde{x})| d\sigma_\epsilon(\tilde{x}) + C$. Comme $d\sigma_\epsilon \geq d\lambda(x')$ (lemme 5.5.3)), on a $d\sigma_\epsilon(S(\epsilon)) \geq C x^n_{n+1}$, et puisque $d\sigma_\epsilon \leq C d\lambda(x')$ (lemme 5.5.3), il vient

$$|u(x)| \leq \frac{C}{x^n_{n+1}} \int_{\{\,|y'-x'|<Cx_{n+1}\}} |f_\epsilon(y')| d\lambda(y') + C.$$

$(*)$ s'en déduit aussitôt car si $|z'| \leq C x_{n+1}$, on a $P(z', x_{n+1}) \geq \frac{C}{x^n_{n+1}}$, donc $|u| \leq C_1 v_\epsilon + C_2$ sur $\mathcal{B}^1_\epsilon$, d'où $(*)$ par le principe du maximum (théorème 5.2.2). On achève maintenant facilement la preuve du théorème: la famille $(f_\epsilon)$ étant bornée dans $L^2(\mathrm{R}^n)$, il existe une suite $(\epsilon_p)$ tendant vers zéro telle que $f_{\epsilon_p}$ tend faiblement vers $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$. Alors $v_{\epsilon_p}$ converge ponctuellement vers $v = Pf$, $\mathcal{R}_\epsilon$ tend vers $\mathcal{R}^h_\alpha(E)$, et $(*)$ donne $|u| \leq C_1 v + C_2$ dans $\mathcal{R}^h_\alpha(E)$. Mais par le théorème 5.5.1, $v$ est presque partout non tangentiellement bornée, ce qui donne que $u$ est presque partout non tangentiellement bornée sur $E$, et, par le théorème 5.5.2, $u$ a des limites non tangentielles presque partout sur $E$.

*Démonstration du lemme 5.5.5.* Par hypothèse,

$$J = \int_{E_0} \left( \int_{\mathcal{R}^k_\beta(x'_0)} |\nabla u(x)|^2 x^{1-n}_{n+1} d\lambda(x) \right) d\lambda(x'_0) < +\infty.$$

Soit alors $\widetilde{\chi}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $(x, x'_0) = (x', x_{n+1}, x'_0) \in \mathrm{R}^{n+1}_+ \times \mathrm{R}^n$ tels que $|x' - x'_0| < \beta x_{n+1}$ et $0 < x_{n+1} < k$. On a donc

$$J = \int_{\mathcal{R}^k_\beta(E_0)} \left( \int_{E_0} \widetilde{\chi}(x, x'_0) d\lambda(x'_0) \right) |\nabla u(x)|^2 x^{1-n}_{n+1} d\lambda(x).$$

Remarquons maintenant que pour tout $x = (x', x_{n+1}) \in \mathcal{R}^h_\alpha(E)$, il existe $z' \in E$ tel que $|x' - z'| \leq \alpha x_{n+1}$, et par suite, pour $x'_0 \in E_0$, $|x'_0 - z'| \leq (\beta - \alpha) x_{n+1}$ entraîne $|x' - x'_0| < \beta x_{n+1}$, soit $\widetilde{\chi}(x, x'_0) = 1$, d'où

$$\int_{E_0} \widetilde{\chi}(x, x'_0) d\lambda(x'_0) \geq \int_{E_0 \cap \left\{ |x'_0 - z'| < (\beta-\alpha) x_{n+1} \right\}} d\lambda(x'_0).$$

Si $\beta - \alpha < \eta$ cette dernière intégrale est supérieure à $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^n x^n_{n+1}$, donc, $J < +\infty$ implique

$$\int_{\mathcal{R}^h_\alpha(E)} |\nabla u(x)|^2 x_{n+1} d\lambda(x) < +\infty,$$

ce qui, avec les notations du lemme 5.5.3 donne

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_{\mathcal{R}_\epsilon} x_{n+1} |\nabla u(x)|^2 d\lambda(x) < +\infty.$$

Appliquons à cette dernière intégrale la seconde identité de Green (proposition 5.1.1): il vient

$$(*) \qquad \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{\mathcal{B}_\epsilon}\left(x_{n+1}\frac{\partial u^2}{\partial\nu_\epsilon}(x)-u^2(x)\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\nu_\epsilon}\right)d\sigma_\epsilon(x)\right|\leq C.$$

Il est clair que dans $(*)$ l'intégrale sur $\mathcal{B}_\epsilon^2$ est finie et majorée indépendament de $\epsilon>0$; par suite, on a

$$(**) \qquad \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}\left(x_{n+1}\frac{\partial u^2}{\partial\nu_\epsilon}(x)-u^2(x)\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\nu_\epsilon}\right)d\sigma_\epsilon(x)\right|\leq C.$$

Le vecteur $\left(\frac{\partial\delta_\epsilon}{\partial x_1},...,\frac{\partial\delta_\epsilon}{\partial x_n},-\alpha\right)$ est normal à $\mathcal{B}_\epsilon^1$ et, par le lemme 5.5.3, sa norme est inférieure à $\left(\alpha^2+n^2\right)^{1/2}$; on a donc $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\nu_\epsilon}\leq\frac{-\alpha}{(\alpha^2+n^2)^{1/2}}$. $(**)$ implique donc

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}u^2(x)d\sigma_\epsilon(x)\leq C\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}x_{n+1}|u(x)||\bigtriangledown u(x)|d\sigma_\epsilon(x)+C.$$

Comme $\mathcal{B}_\epsilon^1$ est inclus dans l'adhérence de $\mathcal{R}_\alpha^h(E)$, l'hypothèse et le lemme 5.5.4 entraînent que $x_{n+1}|\bigtriangledown u(x)|\leq C$ sur $\mathcal{B}_\epsilon^1$, et, par l'inégalité de Cauchy-schwarz,

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}u^2(x)d\sigma_\epsilon(x)\leq C\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}u^2(x)d\sigma_\epsilon(x)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}d\sigma_\epsilon\right)^{1/2}+C.$$

Or, comme nous l'avons déjà vu, par le lemme 5.5.3, l'aire de $\mathcal{B}_\epsilon^1$ est $\leq C$, donc en utilisant l'inégalité $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, il vient

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}u^2(x)d\sigma_\epsilon(x)\leq\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_\epsilon^1}u^2(x)d\sigma_\epsilon(x)+C,$$

ce qui achève la preuve du lemme.

## 6. Conjugués harmoniques, espaces $\mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$.

Nous avons vu que, pour $p>1$, l'espace $H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ est isomorphe à $L^p(\mathrm{R}^n)$, mais que cet isomorphisme ne s'étend pas au cas $p=1$. c'est pour mieux comprendre les relations entre $L^1(\mathrm{R}^n)$ et les fonctions harmoniques que l'on va introduire la notion de conjugués harmoniques. Pour cela, il nous faut tout d'abord définir les transformés de Riesz:

**Définition 5.6.1.**

*Pour $1 \leq j \leq n$, et $x \in \mathrm{R}^n$, soient $K_j(x) = \dfrac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$, où $\Omega_j(x) = \dfrac{1}{(n+1)\omega_{n+1}} \dfrac{x_j}{|x|}$. Pour $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, on appelle $j^{ème}$* **transformée de Riesz de $f$** *la fonction définie presque partout sur $\mathrm{R}^n$ par*

$$R_j f(x) = vp \int K_j(y) f(x-y) d\lambda(y) \ .$$

*De plus, si $p > 1$ $R_j$ est un opérateur continu de $L^p(\mathrm{R}^n)$ sur lui-même.*

Le fait que $R_j f$ est définie presque partout et que $R_j$ est continu sur $L^p(\mathrm{R}^n)$ sont des conséquences du théorème de Calderon-Zygmund (théorème 4.3.2).

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant:

**Lemme 5.6.1.**

*Soit $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$. Notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathrm{R}^n$. Alors $\mathcal{F}(R_j f)(\xi) = -i \dfrac{\xi_j}{|\xi|} \mathcal{F}(f)(\xi)$.*

*Démonstration.* Démontrons brièvement ce lemme purement technique. Soit $\chi_r$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|y| \geq r\}$. On a donc $R_j f = \lim_{\epsilon \to 0} f * \chi_\epsilon K_j$. Si on pose

$$S_{j,\epsilon,T}(x) = \int_{\{\epsilon \leq |y| \leq T\}} K_j(y) e^{-2i\pi <x,y>} d\lambda(y),$$

un calcul élémentaire montre que

$$S_{j,\epsilon,T}(x) = -i \int_{\{\epsilon \leq |y| \leq T\}} K_j(y) \sin < 2\pi x, y > d\lambda(y),$$

et par suite, il existe $C > 0$ indépendante de $\epsilon$ et $T$ telle que $\|S_{j,\epsilon,T}\|_\infty \leq C$. De plus, en intégrant en polaire, on voit que

$$\lim_{(\epsilon,T) \to (0,+\infty)} S_{j,\epsilon,T}(x) = -ic_n \frac{\pi}{2} \int_{S_{n-1}} y_j \mathrm{sgn} < 2\pi x, y > d\sigma(y) = S_j(x),$$

et par un calcul élémentaire, il vient $S_j(x) = -i \dfrac{x_j}{|x|}$. Remarquons maintenant que $\mathcal{F}(f * \chi_\epsilon K_j - f * \chi_T K_j) = S_{j,\epsilon,T} \widehat{f}$, et comme, d'après ce qui précède, $\lim_{(\epsilon,T) \to (0,+\infty)} S_{j,\epsilon,T} f = S_j f$, on conclut, par passage à la limite, que $\mathcal{F}(R_j f) = S_j \widehat{f}$.

**Remarque.** Notons que la formule du lemme s'étend immédiatement à toute $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$ pour $1 < p \leq 2$ par continuité des transformées de Riesz.

Les transformées de Riesz et les fonctions harmoniques sont étroitement reliés par la proposition suivante:

**Proposition 5.6.1.**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, et soient $u = Pf$ et $v = Pg$. Pour $j \in \{1, ..., n\}$, les conditions suivantes sont équivalentes:*
*(i)* $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v}{\partial x_{n+1}}$;
*(ii)* $g = R_j f$.

**Remarque.** Intuitivement, on dit que les transformées de Riesz échangent les dérivées tangentes (dérivée par rapport à $x_j$) et la dérivée normale (dérivée par rapport à $x_{n+1}$)(c.f. la remarque 2 $^\circ$ ) suivant la définition 5.6.3).

*Démonstration.* Considérons tout d'abors le cas $p = 2$. On vérifie alors l'équivalence en utilisant la transformée de Fourier sur $\mathrm{R}^n$. Par un calcul direct, on montre que (avec les notations de la fin du paragraphe 2 du chapitre IV),

$$(*) \qquad \mathcal{F}\big(P_{x_{n+1}}\big)(\xi) = e^{-2\pi|\xi|x_{n+1}}$$

(voir remarque ci–dessous), et, par le lemme 5.6.1 et la formule d'inversion de Fourier, on vérifie que

$$\begin{aligned} u(x', x_{n+1}) &= \int_{\mathrm{R}^n} \widehat{f}(t) e^{2i\pi<t,x'>} e^{-2\pi|t|x_{n+1}} d\lambda(t), \\ v(x', x_{n+1}) &= \int_{\mathrm{R}^n} \widehat{g}(t) e^{2i\pi<t,x'>} e^{-2\pi|t|x_{n+1}} d\lambda(t), \\ P(R_j f)(x', x_{n+1}) &= -\int_{\mathrm{R}^n} \widehat{f}(t) \frac{it}{|t|} e^{2i\pi<t,x'>} e^{-2\pi|t|x_{n+1}} d\lambda(t). \end{aligned}$$

Si (i) est satisfait, on a alors

$$2i\pi t_j \widehat{f}(t) e^{2i\pi|t|x_{n+1}} = 2\pi|t|\widehat{g}(t) e^{2i\pi|t|x_{n+1}},$$

soit $\widehat{g}(t) = \dfrac{-it_j}{|t|}\widehat{f}(t)$ et donc $g = R_j f$. Réciproquement, si (ii) est satisfait, on a

$$v(x', x_{n+1}) = -\int_{\mathrm{R}^n} \widehat{f}(t) \frac{it_j}{|t|} e^{2i\pi<t,x'>} e^{-2\pi|t|x_{n+1}},$$

et le (i) s'obtient par dérivation sous le signe d'intégration.

Le cas général $1 < p < +\infty$ s'obtient facilement par régularisation. En effet, soit $\varphi_\epsilon$ une suite régularisante, et soient $f_\epsilon = \varphi_\epsilon * f$, $g_\epsilon = \varphi_\epsilon * g$. Alors, avec les notations de la fin du paragraphe 2 du chapitre précédent, $u_\epsilon = Pf_\epsilon = P_{x_{n+1}} * \varphi_\epsilon * f = \varphi_\epsilon * u$ et de même, $v_\epsilon = Pg_\epsilon = \varphi_\epsilon * v$. Si on suppose (i) il vient donc $\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial x_{n+1}}$, et par le cas $p = 2$, $g_\epsilon = R_j f_\epsilon$, ce qui par passage à la limite quand $\epsilon \to 0$ donne le résultat (d'après le théorème 4.3.2). Réciproquement, supposons $g = Rjf$. Avec les notations de la preuve du lemme 5.6.1, on a $R_j f = \lim_{\eta \to 0} f * \chi_\eta K_j$, la convergence ayant lieu dans $L^p(\mathrm{R}^n)$ d'après le théorème 4.3.2. On a donc

$$g_\epsilon = \varphi_\epsilon * R_j f = \lim_{\eta \to 0} (\varphi_\eta * f) * \chi_\eta K_j = R_j * f_\epsilon,$$

ce qui, par le cas $p = 2$, donne $\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial x_{n+1}}$, et la conclusion s'obtient en faisant tendre $\epsilon$ vers zéro.

**Remarque.** La formule $(*)$ ci-dessus peut se démontrer par exemple à partir des deux formules classiques suivantes:

$$(1) \qquad e^{-\pi\delta|\xi|^2} = \int_{\mathrm{R}^n} \delta^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-2i\pi<x,\xi>} d\lambda(x), \ \delta > 0,$$

et

$$(2) \qquad e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\gamma^2}{4u}} du, \ \gamma > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(P_{x_{n+1}}\big)(\xi) &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathrm{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} \frac{x_{n+1} e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}}}{\big(|x|^2 + x_{n+1}^2\big)^{\frac{n+1}{2}}} du \right) e^{-2i\pi<x,\xi>} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathrm{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} e^u e^{\frac{|x|^2 u}{x_{n+1}^2}} x_{n+1}^{-n} u^{\frac{n-1}{2}} du \right) e^{-2i\pi<x,\xi>} d\lambda(x). \end{aligned}$$

En appliquant (1) avec $\delta = \dfrac{\pi x_{n+1}^2}{u}$, il vient

$$\mathcal{F}\big(P_{x_{n+1}}\big)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\pi\frac{x_{n+1}^2}{u}|\xi|^2} du,$$

et, par (2), on obtient $(*)$

**Définition 5.6.2.**

*Soit $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, soit $u = Pf$. Les fonctions $u_j = P(R_j f)$ s'appellent les* **conjugués harmoniques** *de $u$.*

**Définition 5.6.3.**

*Soit* $F = (u_0, u_1, ..., u_n) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}_+^{n+1}))^n$. *On dit que* $F$ *vérifie les* **équations de Cauchy–Riemann généralisées** $(C.R.)$ *si:*

$$(C.R.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x_{n+1}} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, & \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}, & j \neq k,\ 1 \leq j,k \leq n, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_{n+1}} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}, & 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

*En particulier, les fonctions* $u_i$ *sont harmoniques. De plus, si* $|F| = \left(\sum_0^n |u_j|^2\right)^{1/2}$, *pour* $1 \leq p \leq +\infty$, *on note* $\mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ *l'espace des* $F = (u_0, ..., u_n) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}_+^{n+1}))^n$ *vérifiant les conditions de Cauchy–Riemann généralisées et telles que*

$$\|F\|_{\mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})} = \sup_{x_{n+1}>0} \left( \int_{\mathrm{R}^n} |F(x', x_{n+1})|^p d\lambda(x') \right)^{1/p} < +\infty.$$

**Remarque.** 1°) On remarquera que, dans le cas $n = 1$, si on note $(x', x_2) = (x, y)$, dire que $(u_0, u_1)$ vérifie $(C.R.)$ revient à dire que la fonction $u_0 - iu_1$ est holomorphe de la variable $z = x + iy$.

2°) Si $(u_0, ..., u_n)$ vérifie les conditions $(C.R.)$, il est clair qu'il existe une fonction harmonique $u$ dans $\mathrm{R}_+^{n+1}$, unique à une constante additive près, telle que $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = u_j$, $1 \leq j \leq n$, et $\dfrac{\partial u}{\partial x_{n+1}} = u_0$. Réciproquement, les dérivées d'une fonction harmonique vérifient évidement les conditions $(C.R.)$.

**Théorème 5.6.1.**

*Soit* $p \in ]1, +\infty[$. *L'espace* $\mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ *est isomorphe à* $L^p(\mathrm{R}^n)$ *(donc aussi à* $H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$*). Plus précisément, si* $F = (u_0, ..., u_n) \in \mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$, *il existe* $f_0 \in L^p(\mathrm{R}^n)$ *telle que* $u_0 = Pf_0$, $u_j = P(R_j f_0)$, $1 \leq j \leq n$, *et*

$$\|f_0\|_{L^p(\mathrm{R}^n)} \leq \|F\|_{\mathcal{H}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})} \leq C_p \|f_0\|_{L^p(\mathrm{R}^n)}.$$

*Démonstration.* En effet, d'après le théorème 5.4.4, pour $0 \leq j \leq n$, il existe $f_j \in L^p(\mathrm{R}^n)$ telle que $u_j = Pf_j$, et $\|u_j\|_{H^p} = \|f_j\|_{L^p}$. Or, d'après la proposition 5.6.1, pour $1 \leq j \leq n$, on a $f_j = R_j f_0$, ce qui montre que $u_j = P(R_j f_0)$ et l'équivalence des normes provient du théorème 4.3.2.

Nous allons maintenant étudier le cas particulier $p = 1$. C'est l'espace $\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$ qui aura des propriétés raisonnables, dans le sens où il peut se définir comme intégrales de Poisson de fonctions appartenant à un sous-espace de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Pour le voir introduisons la définition suivante:

**Définition 5.6.4.**

*1°) Nous dirons que, pour $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$, et $1 \leq j \leq n$, $R_j f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ s'il existe $f_j \in L^1(\mathrm{R}^n)$ telle que $\widehat{f}_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$ (une telle fonction $f_j$ est unique).*

*2°) On note $\mathcal{H}^1(\mathrm{R}^n)$ l'espace des fonctions $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ telles que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ les transformées de Riesz $R_j f$ appartiennent aussi à $L^1(\mathrm{R}^n)$. Dans ce cas, on notera*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}^n)} = \|f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1(\mathrm{R}^n)},$$

*où $\|R_j f\|_{L^1}$ désigne la norme $L^1(\mathrm{R}^n)$ d'une fonction $f_j$ vérifiant la condition du 1°).*

Nous pouvons maintenat énoncer le principal résultat de ce paragraphe, à savoir, l'analogue pour $p = 1$ du théorème 5.6.1:

**Théorème 5.6.2.**

*L'espace $\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$ est isomorphe à $\mathcal{H}^1(\mathrm{R}^n)$. Plus précisément, si $F = (u_0, ..., u_n) \in \mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$, il existe $f_0 \in L^1(\mathrm{R}^n)$ telle que $u_0 = Pf_0$ et, pour $1 \leq j \leq n$, $u_j = P(R_j f_0)$ et de plus*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}^n)} \leq \|F\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}^n)}.$$

*Démonstration.* nous allons faire la preuve dans le cas $n \geq 2$; le cas $n = 1$ est sensiblement différent (voir remarque après la preuve). Soit

$$H(x', x_{n+1}) = \frac{1}{\left(|x'|^2 + (x_{n+1}+1)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}},$$

de sorte que $H$ est harmonique dans $\mathrm{R}_+^{n+1}$, et posons

$$\begin{aligned}
v_j(x', x_{n+1}) &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_{n+1}}, \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_n}\right), \qquad 1 \leq j \leq n,\\
v_0(x', x_{n+1}) &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_{n+1}^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x_{n+1}\partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 H}{\partial x_{n+1}\partial x_n}\right),\\
\Phi(x', x_{n+1}) &= (v_0, v_1, ..., v_n) \in \left(\mathcal{C}^\infty\left(\mathrm{R}_+^{n+1}\right)\right)^{n^2+2n+1}.
\end{aligned}$$

Pour tout $j \geq 1$, on pose encore

$$u_j^\epsilon(x', x_{n+1}) = (u_j(x', x_{n+1}+\epsilon), \epsilon v_j(x', x_{n+1})) \in \left(\mathcal{C}^\infty\left(\mathrm{R}_+^{n+1}\right)\right)^{n+2},$$

et de même

$$u_0^\epsilon(x', x_{n+1}) = (u_0(x', x_{n+1}+\epsilon), \epsilon v_0(x', x_{n+1})) \in \left(\mathcal{C}^\infty\left(\mathrm{R}_+^{n+1}\right)\right)^{n+2},$$

puis finalement, $F_\epsilon(x', x_{n+1}) = (u_0^\epsilon, u_1^\epsilon, ..., u_n^\epsilon) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}_+^{n+1}))^{(n+1)(n+2)}$. On a donc

$$|F_\epsilon(x', x_{n+1})|^2 = \sum_0^n |u_j(x', x_{n+1})|^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \left|\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k}(x', x_{n+1})\right|^2.$$

Remarquons que $F_\epsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'adhérence de $\mathrm{R}_+^{n+1}$ et vérifie les équations de Cauchy-Riemann généralisées dans le sens où

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0^\epsilon}{\partial x_{n+1}} + \displaystyle\sum_{j=1}^n \dfrac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_j} = 0 & \\ \dfrac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_{n+1}} = \dfrac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_j}, & j \neq k,\ 1 \leq j, k \leq n, \\ \dfrac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_{n+1}} = \dfrac{\partial u_0^\epsilon}{\partial x_j}, & 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

ces égalités ayant lieu dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}_+^{n+1}))^{n+2}$. D'autre part, on voit facilement que

$$|\Phi(x', x_{n+1})| \leq \left(n^2-1\right)\left(n^2-n\right) \frac{1}{\left(|x'|^2 + |x_{n+1}+1|^2\right)^{n-1/2}},$$

et comme les $u_j$ sont dans $H^1(\mathrm{R}_+^{n+1})$, d'après le théorème 5.4.1, elles sont intégrales de Poisson de mesures complexes sur $\mathrm{R}^n$, et on a donc

$$(**) \qquad \lim_{|(x', x_{n+1})| \to +\infty} |F_\epsilon(x', x_{n+1})| = 0$$

Nous utilisons maintenant le lemme suivant:

**Lemme 5.6.2.**
*Avec les notations précédentes, pour* $q \geq \frac{n-1}{n}$, *on a*

$$C_q |F|^{q-2} |\bigtriangledown F|^2 \geq \Delta(|F|^q) \geq c_q |F|^{q-2} |\bigtriangledown F|^2,$$

*avec* $C_q > 0$, $c_q \geq 0$, *et* $c_q > 0$ *si* $q > \frac{n-1}{n}$.

Admettons ce lemme un instant pour terminer la preuve du théorème. Posons

$$g_\epsilon(x') = |F_\epsilon(x', 0)|^{\frac{n-1}{n}} = \left(|F(x', \epsilon)|^2 + \epsilon^2 |\Phi(x', 0)|^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Si $p = \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{n-1}$, on a alors

$$(***) \qquad \int_{\mathrm{R}^n} (g_\epsilon(x'))^p d\lambda(x') \le \|F\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})} + \epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})},$$

où la norme de $\Phi$ est définie de manière évidente. Soit $g_\epsilon(x', x_{n+1}) = (Pg_\epsilon)(x', x_{n+1})$; la fonction $|F|^{(n-1)/n} - g_\epsilon$ est continue sur l'adhérence de $\mathrm{R}_+^{n+1}$, sous harmonique d'après le lemme 5.6.2, et nulle à l'infini (d'après $(**)$) ainsi que sur $\mathrm{R}^n$. D'après le principe du maximum (corollaire du théorème 5.2.2), on a

$$|F_\epsilon(x', x_{n+1})|^{\frac{n-1}{n}} \le g_\epsilon(x', x_{n+1}), \text{ sur } \overline{\mathrm{R}_+^{n+1}}.$$

Comme $g_\epsilon(x')$ est uniformément bornée dans $L^p(\mathrm{R}^n)$, il existe une suite $\epsilon_l$ tendant vers zéro et une fonction $g \in L^p(\mathrm{R}^n)$ positive telles que $g_{\epsilon_l}$ converge faiblement vers $g$ (théorème 1.4.1). Alors, si $g(x', x_{n+1}) = (Pg)(x', x_{n+1})$, on a $g \in H^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$ et

$$|F(x', x_{n+1})|^{\frac{n-1}{n}} \le g(x', x_{n+1}), \text{ sur } \mathrm{R}_+^{n+1}.$$

En particulier, si $Mg$ désigne la fonction maximale de Hardy–Littlewood de $g$,

$$\sup_{x_{n+1}>0} |F(x', x_{n+1})| \le (Mg(x'))^p,$$

et, par $(***)$ et le théorème 4.2.1, il vient

$$\int_{\mathrm{R}^n} \sup_{x_{n+1}>0} |F(x', x_{n+1})| d\lambda(x') \le C_p \int_{\mathrm{R}^n} (g(x'))^p d\lambda(x') \le C_p \|F\|_{\mathcal{H}^1(\mathrm{R}_+^{n+1})}.$$

Pour tout $j \ge 0$, soient $u_j^* \in L^1(\mathrm{R}^n)$ les limites non tangentielles de $u_j$ (théorème 5.5.1). Si on pose $u_j^\delta(x') = u_j(x', x_{n+1} + \delta)$, on a $u_j^\delta \to u_j^*$ presque partout, et la preuve du théorème 5.4.1 montre que $u_j(x', x_{n+1} + \delta) = Pu_j^\delta(x', x_{n+1})$. De plus, nous avons montré que, pour tout $\delta > 0$, $|u_j^\delta(x')| \le (Mg(x'))^p$, donc le théorème de convergence dominé de Lebesgue montre que, pour $0 \le j \le n$, $u_j^\delta$ tend vers $u_j^*$ dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ et donc $u_j = Pu_j^*$. Enfin, puisque $u_j^\delta \in L^1(\mathrm{R}^n) \cap L^\infty(\mathrm{R}^n) \subset L^2(\mathrm{R}^n)$ (preuve du théorème 5.4.1), d'après la proposition 5.6.1 et le lemme 5.6.1, on a $\widehat{u}_j^\delta(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{u}_0^\delta(\xi)$, ce qui, quand $\delta \to 0$ donne $\widehat{f}_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}_0(\xi)$.

*Démonstration du lemme 5.6.2.* Fixons tout d'abord quelques notations. Si $F = (u_0, , u_n)$, $G = (v_0, , v_n)$ avec les $u_j$ et les $v_j$ dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}_+^{n+1}))^{n+2}$, on note $< F, G >= \sum_0^n < u_j, v_j >$, où, si $u_j = (u_j^1, ..., u_j^{n+2})$ et de même pour les $v_j$, $< u_j, v_j >= \sum_{k=1}^{n+2} u_j^k v_j^k$, $|F|^2 = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^{n+2} |u_j^k|^2$, $F_{x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}$, $|\bigtriangledown F|^2 = \sum_{j=0}^n |F_{x_j}|^2$, et on vérifie aussitôt que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|F|^q = q|F|^{q-2} < F_{x_j}, F >,$$

et que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}|F|^q = q(q-2)|F|^{q-4} < F_{x_j}, F >^2 + q|F|^{q-2}\Big[\left|F_{x_j}\right|^2 + < F_{x_jx_j}, F >\Big].$$

Les composantes de $F_\epsilon$ étant des fonctions harmoniques, on a $\sum_{k=1}^{n+1} F_{\epsilon x_k x_k} = 0$, d'où

$$(*) \qquad \Delta|F_\epsilon|^q = q|F_\epsilon|^{q-4}\left[(q-2)\sum_{k=1}^{n+1} < F_{\epsilon x_k}, F_\epsilon >^2 + |F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2\right]$$

De l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on déduit tout d'abord

$$\sum_k < F_{\epsilon x_k}, F_\epsilon >^2 \leq |F_\epsilon|^2 \sum_k |F_{\epsilon x_k}|^2,$$

et par suite, l'expression entre crochets de $(*)$ est majorée par $|F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2$ si $q \leq 2$ et $(q-1)|F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2$ si $q \geq 2$, ce qui donne la première inégalité du lemme. Si $q \geq 2$, cette même expression est supérieure où égale à $|F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2$ et l'autre inégalité s'en déduit. Considérons donc le cas $\frac{n-1}{n} < q < 2$.

**Lemme 5.6.3.**
*on a*

$$\sum_k < F_{\epsilon x_k}, F_{\epsilon > 2} \leq \frac{n}{n+1}|F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2.$$

Admettons un instant ce lemme pour conclure: le terme entre crochets de $(*)$ est donc minoré par $|F_\epsilon|^2|\bigtriangledown F_\epsilon|^2\Big(1 + (q-2)\frac{n}{n+1}\Big)$, ce qui donne le résultat.

*Démonstration du lemme 5.6.3.* Il résulte d'un lemme d'algèbre linéaire:

**Lemme 5.6.4.**
*Soit $A = (\alpha_{i,j})$, $0 \leq i, j \leq n$ une matrice $(n+1) \times (n+1)$ dont les coefficients sont dans $\mathrm{R}^m$, et qui est symétrique et de trace nulle. Posons $\|A\| = \sup_{|F| \leq 1} |A(F)|$ où $F = (f_1, ..., f_{n+1}) \in (\mathrm{R}^m)^{n+1}$, $|F|^2 = \sum_j |f_j|^2$. Alors*

$$\|A\|^2 \leq \frac{n}{n+1}\sum_{i,j} |\alpha_{i,j}|^2.$$

Le lemme 5.6.3 est un cas particulier du résultat ci–dessus: en effet, il suffit de prendre pour matrice $A$ la matrice définie par $\alpha_{i,j} = \dfrac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_j}$, si $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha_{00} = \dfrac{\partial u_0^\epsilon}{\partial x_{n+1}}$, $\alpha_{0,j} = \dfrac{\partial u_0^\epsilon}{\partial x_j}$, si $1 \leq j \leq n$, $\alpha_{i,0} = \dfrac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_{n+1}}$, si $1 \leq i \leq n$, et les hypothèses sur $A$ sont satisfaites car $F_\epsilon$ vérifie les équations $(C.R.)$ (équation $(*)$ de la preuve du théorème).

*Démonstration du lemme 5.6.4.* En considérant la base canonique de $\mathrm{R}^m$, on se ramène au cas où $m = 1$. $\|A\|$ est la norme usuelle des opérateurs et $\sum_{i,j} |\alpha_{i,j}|^2$ le carré de la norme de Hilbert–Schmidt $\|A\|_{HS}$ de $A$. Ces deux normes étant invariantes par changement de base orthonormale dans $\mathrm{R}^{n+1}$, considérons une base orthonormale de $\mathrm{R}^{n+1}$ dans laquelle $A$ devient diagonale: $\alpha_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\alpha_{j,j} = \lambda_j$, les valeurs propres de $A$. La trace de $A$ étant nulle, on a $\sum_j \lambda_j = 0$. Soit $\lambda_{j_0}$ la plus grande des valeurs propres de $A$ en module, de sorte que $\|A\| = |\lambda_{j_0}|$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\lambda_{j_0}^2 = \left(\sum_{j \neq j_0} \lambda_j\right)^2 \leq n \sum_{j \neq j_0} \lambda_j^2,$$

soit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_{j_0}^2 \leq \|A\|_{HS}^2$, ce qui démontre le lemme.

**Remarque.** La démonstration que nous venons de donner du théorème 5.6.2 doit évidement être modifiée pour $n = 1$. Dans ce cas on a tout avantage à utiliser le fait que $u_0 - iu_1$ est holomorphe de la variable $z = (x' + ix_2)$. Une telle preuve est donnée dans le livre de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, dans le cas des fonctions holomorphes dans le disque unité $\{|z| \leq 1\}$, démonstration qui peut s'adapter sans grande difficulté au cas $\mathrm{R}_+^2$.