Irrationalité de $\zeta(3)$

1 Preuve de Beukers

Pour k un entier naturel positif, l'arithmétique des $\zeta(2k)$ est connue depuis fort longtemps: en effet, Euler trouve

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} B_{2k} \frac{\pi^{2k}}{(2k)!}$$

avec B_k les nombres de Bernouilli (donc rationnels). Par contre, l'arithmétique de $\zeta(2k+1)$ est beaucoup plus mystérieuse. Le premier résultat intéressant obtenu est le théorème d'Apéry, prouvé en 1979 (cf [1]), affirmant l'irrationalité de $\zeta(3)$. La méthode utilisée, bien qu'élémentaire, était assez compliquée, et ce n'est qu'un an plus tard que Beukers (cf [2]) donne une preuve très simple de l'irrationalité de $\zeta(3)$, preuve que nous reprenons ici.

- $I = [0, 1]$.
- $d_n = ppcm\{1, ..., n\} = \prod_{p \leq n} p^{[\frac{\log n}{\log p}]}$.
- $P_n(x) = \frac{1}{n!}\{\frac{d}{dx}\}^n c^n (1-x)^n \in \mathbb{Z}[X]$: le n^e polynôme de Legendre.
- $\int f(x)dx = \int_0^1 d(x)dx, \quad \iint f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy, ...$

L'idée de la démonstration est toute simple, la "seule" que l'on ait pour montrer l'irrationalité, et repose sur la construction d'une suite de formes linéaires à coefficients entiers en 1 et $\zeta(3)$ et tendant vers 0. En effet, si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est "la" représentation irréductible d'un réel α, alors si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $|m + n\alpha| \neq 0$ alors $|m + n\alpha| \geq \frac{1}{q}$ et donc ne peut tendre vers 0...

Lemme 1.1 *Pour n suffisamment grand, $d_n < 3^n$.*

Démonstration 1 $d_n = \prod_{p \leq n} p^{[\frac{\log p}{\log n}]}$ *de sorte que*

$$\begin{aligned} \log d_n &= \sum_{p \leq n} \log[\frac{\log p}{\log n}] \\ &\leq \sum_{p \leq n} \log p \\ &\leq \pi(n) \log n \end{aligned}$$

Or par le théorème des nombres premiers, $\pi(n) \simeq \frac{n}{\log n}$. Le résultat s'ensuit aussitôt.

Lemme 1.2 *Soit*

$$f(x, y, w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(xy)w}.$$

Alors

$$\sup_{[0,1]^3} f = (\sqrt{2} - 1)^4.$$

Démonstration 2 *Puisque* $1-(1-xy)w \geq 1-w$, f *s'annule sur le bord de* I^3 *sauf éventuellement sur la face* $w=1$. *Mais puisque* $f(x,y,1)=0$, *la fonction s'annule sur* $\partial(I^3)$. *De sorte que le sup de* f *existe et est atteint dans l'intérieur de* I^3. *On cherche donc les points critiques de* f : *Or on a*

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,w) &= y(1-y)w(1-w)\frac{-wyx^2+(2w-2)x+(1-w)}{(1-(1-xy)w)^2} \qquad (1)\\
\partial_y f(x,y,w) &= x(1-x)w(1-w)\frac{-wxy^2+(2w-2)y+(1-w)}{(1-(1-xy)w)^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

de sorte que si (x,y,w) *est un point critique de* f *situé à l'intérieur de* I^3 *on trouve en retranchant (1) à (2):*

$$(x-y)[(1-2xy+x+y)+wx^2y^2]=0.$$

Puisque $0<x,y,w<1$ *le terme entre crochet est* >1 *de sorte que l'on doit avoir* $x=y$.
On est ainsi ramené à étudier le

$$\sup_{]0,1[^2} g(x,w)$$

avec $g(x,w)=f(x,x,w)=\frac{x^2(1-x)^2w(1-w)}{1-(1-x^2)w}$.
On a

$$\partial_w g(x,w)=\frac{x^2(1-x)^2[(1-x^2)w-2w+1]}{(1-(1-x^2)w)^2}$$

de sorte que $\partial_w g(x,w)=0 \Rightarrow w=\frac{1}{1+x}$. *On est donc ramené à calculer*

$$\sup_{]0,1[}\frac{x^2(1-x)^2}{(1+x)^2}$$

qui est précisément $(\sqrt{2}-1)^4$.

Lemme 1.3 *Soit* $r,s\in N$.

Si $r>s$ *alors*

$$-\iint\frac{\log xy}{1-xy}x^ry^sdxdy\in\mathbb{Q},$$

de dénominateur diviseur de d_r^3.

Si $r=s$ *alors*

$$-\iint\frac{\log xy}{1-xy}x^ry^sdxdy=2\big(\zeta(3)-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^3}\big).$$

Démonstration 3 *On pose*

$$I(r,s,\sigma)=\iint\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy.$$

$|xy| < 1$ donc $\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$ et donc

$$\begin{aligned}
\iint \frac{x^{r+\sigma}y^{+}\sigma}{1-xy}dxdy &= \iint \sum x^{r+k+\sigma}y^{s+k+\sigma}dxdy \\
&\overset{TCM}{=} \sum \iint x^{r+k+\sigma}y^{s+k+\sigma}dxdy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+r+\sigma+1)}
\end{aligned}$$

Si $r > s$: la somme vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}[\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1}] = \frac{1}{r-s}(\frac{1}{s+1+\sigma} + ... + \frac{1}{r+\sigma}).$$

On différencie par rapport à σ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}I(r,s,\sigma) &= \iint \frac{\log xy}{1-xy}x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}dxdy \\
&= \frac{d}{d\sigma}(\frac{1}{r-s}[\frac{1}{s+1+\sigma} + ... + \frac{1}{r+\sigma}]) \\
&= -\frac{1}{r-s}([(\frac{1}{s+1+\sigma})^2 + ... + (\frac{1}{r+\sigma})^2])
\end{aligned}$$

Le premier point se déduit en évaluant en $\sigma = 0$.
Si $r = s$ on trouve

$$\iint \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}.$$

On différencie selon σ et on évalue en 0 pour trouver le deuxième point.

Théorème 1.4 *On a:*

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Démonstration 4 *Soit*

$$J = -\iint \frac{\log xy}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy = (A_n + B_n\zeta(3))d_n^3$$

avec $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ d'après le lemme 1.3. On a

$$-\frac{\log xy}{1-xy} = \int \frac{1}{1-(1-xy)z}dz$$

donc $J = \iiint \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz \overset{n-IPP/x}{=} \iiint \frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz$ On fait *le changement de variable involutif* $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ *pour trouver*

$$\begin{aligned}
J &= \iiint (1-x)^n(1-w)^n \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z} dxdydz \\
&\overset{n-IPP/y}{=} \iiint \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dxdydz \\
&\leq (\sqrt{2}-1)^{4n} \iiint \frac{1}{1-(1-xy)w} dxdydw \\
&= 2(\sqrt{2}-1)^{4n} \iint \frac{\log xy}{1-xy} dxdy \\
&= 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3).
\end{aligned}$$

$J \neq 0$ *donc pour* n *assez grand*

$$\begin{aligned}
0 < |A_n + B_n\zeta(3)| &< 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n} d_n^3 \\
&< 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n} 27^n \to 0.
\end{aligned}$$

de sorte que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

L'arithmétique de $\zeta(3)$ reste cependant encore très mystérieuse....on ne sait toujours pas par exemple si $\zeta(3)$ appartient à une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ (fait fort peu probable...!).
On pourrait être tenté d'essayer de généraliser les intégrales de Beukers afin de montrer l'irrationalité d'autres $\zeta(5)$. Mais pour la méthode ne marche plus en dimension supérieure. Des résultats récents obtenus, par Rivoal, et ayant des racines communes avec les travaux de Beukers, ont cependant montré qu'il exsite une infinité de valeurs de k pour lesquelles $\zeta(2k+1) \notin \mathbb{Q}$.

2 Infinité du nombre de valeurs irrationnelles de ζ aux valeurs impaires

La grande idée repose sur la construction, une fois de plus, de formes linéaires en les $\zeta(2k+1)$, à coefficients entiers , et d'utiliser le lemme suivant:

Lemme 2.1 (Nesterenko) *Considérons* N *réels* $\theta_1, ..., \theta_N$ *et supposons qu'il existe* N *suites d'entiers* $p_{i,n}$ *telles que:*

$$(i): \ \log|\sum_{i=1}^{N} p_{i,n}\theta_i| = n\log\alpha + o(n) \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$(ii) \ \forall i = 1..N, \log|p_{i,n}| \leq n\log\beta + o(n) \quad (\beta > 1)$$

(bref, on a des "petites" formes linéaires avec des coefficients pas trop "gros"). Alors $Dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_1 + ... + \mathbb{Q}\theta_N) \geq 1 + \frac{\log\alpha}{\log\beta}$.

Rivoal utilise ce lemme en considérant, pour $n, r, a \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq r \leq a/2$, a impair, la fonction

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n!^{a-2r} \frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+1)_{n+1}^a} z^{-k}$$

(avec $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$: symbole de Pochammer) dont il montre qu'elle admet une représentation sous forme intégrale (type Beukers), et que c'est une forme linéaire en 1 et les $\zeta(2k+1)$ $(k = 1..\frac{a-1}{2})$ dont il arrive à optimiser les coefficents (entiers) pour obtenir le résultat:

Théorème 2.2 (Rivoal) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ *tel que* $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$Dim_{\mathbb{Q}}(Q + Q\zeta(3) + .. + \mathbb{Q}\zeta(2n+1)) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log 2} \log n.$$

Il montre ainsi (aussi...) que l'un des neufs nombres $\zeta(5), ..., \zeta(21)$ est irrationnel (ce résultat a depuis été amélioré).

Signalons enfin que l'hypothèse la plus forte avancée concernant les $\zeta(2k+1)$ est celle consistant à dire que ceux-ci sont algébriquement indépendants...

References

R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque* 61 (1979), 11-13

F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bull. London Math. Soc.* 11:3 (1979), 268-272.

T. Rivoal La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *C. R. A. S. Paris Sér. I Math.* 331.4 (2000) 267-270