

La jacobienne d'une surface de Riemann compacte

Nicolas Mascot

TNT HD

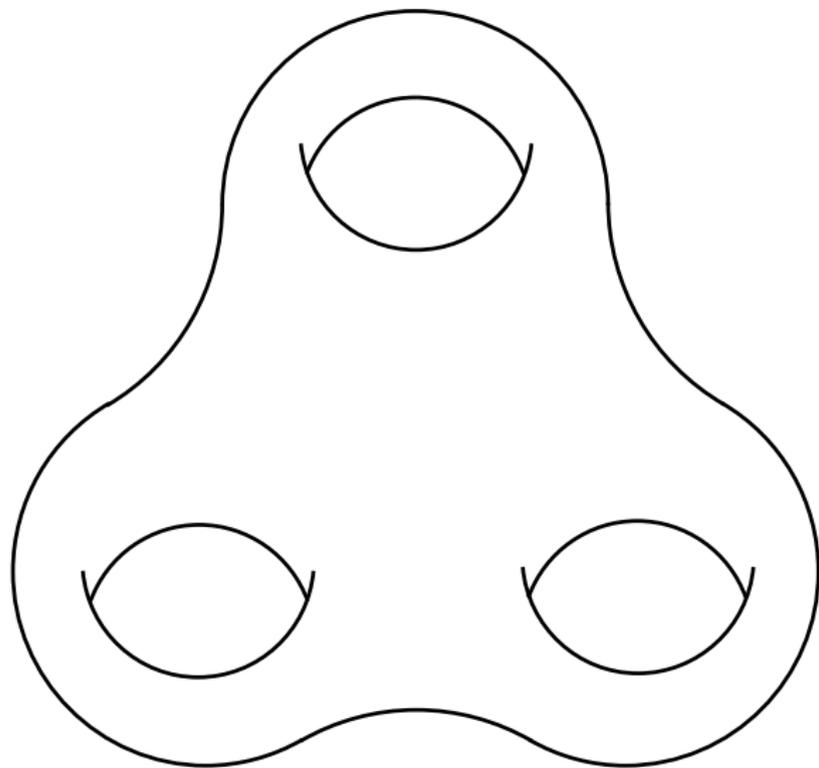
23 mai 2012

Surfaces de Riemann compactes

Nous allons étudier quelques propriétés des surfaces de Riemann connexes compactes.

Soit X une telle surface, de *genre* g .

Une surface de Riemann compacte de genre 3

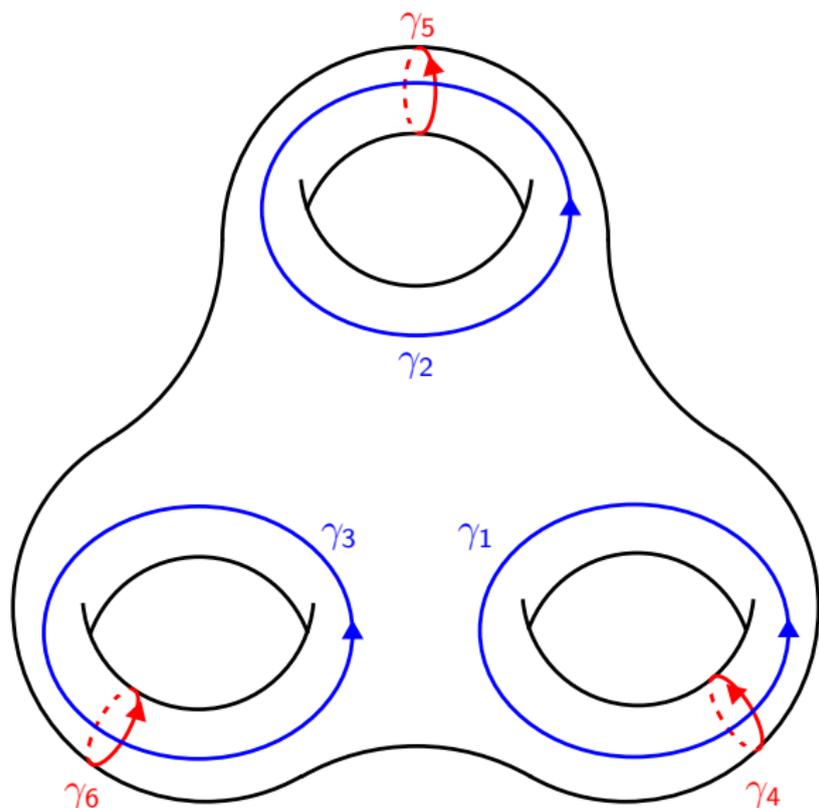


Formes différentielles

L'ensemble des 1-formes différentielles holomorphes sur X forme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension g .

Soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de cet espace.

Une base symplectique de l'homologie



Matrice des périodes

La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Matrice des périodes

La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Nous allons voir que ses colonnes engendrent un réseau dans \mathbb{C}^g , que nous noterons Λ .

Matrice des périodes

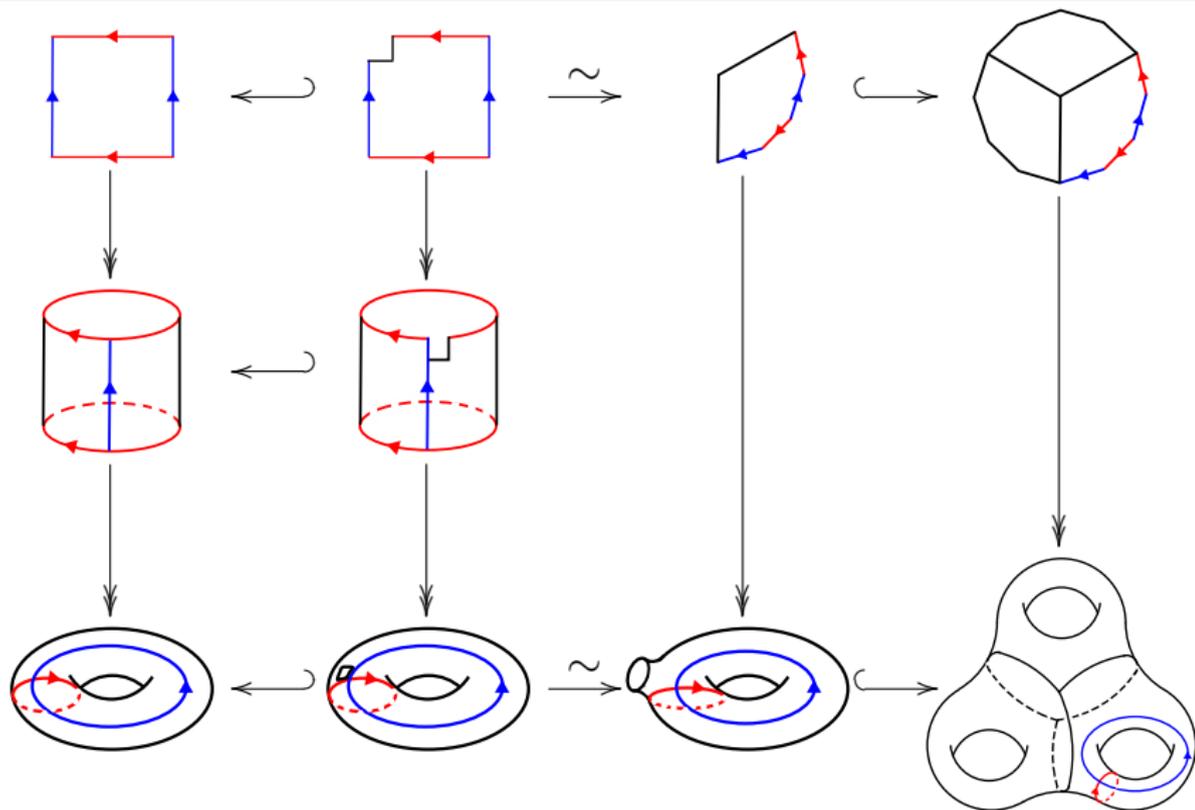
La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

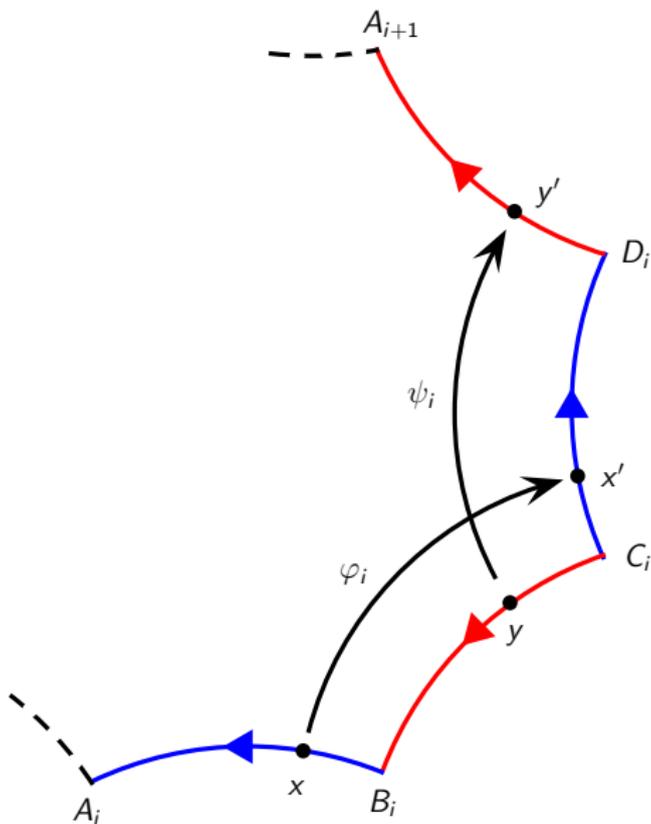
Nous allons voir que ses colonnes engendrent un réseau dans \mathbb{C}^g , que nous noterons Λ .

La *jacobienne* de X est $J = \mathbb{C}^g / \Lambda$.

Dissection canonique



Détail du collage



Produit extérieur et (anti)holomorphic

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Produit extérieur et (anti)holomorphic

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Produit extérieur et (anti)holomorphic

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Si $\omega \neq 0$ est holomorphe, alors

$$i \iint_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

Produit extérieur et (anti)holomorphic

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Si $\omega \neq 0$ est holomorphe, alors

$$i \iint_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

En effet, localement, $\omega = f(z)dz$ et $\bar{\omega} = \overline{f(z)}d\bar{z}$, donc $\omega \wedge \bar{\omega} = |f(z)|^2 dz \wedge d\bar{z}$, or

$$idz \wedge d\bar{z} = i(dx + idy) \wedge (dx - idy) = 2dx \wedge dy.$$

τ est symétrique

$$\tau_{j,i} - \tau_{i,j} = \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i$$

τ est symétrique

$$\begin{aligned}\tau_{j,i} - \tau_{i,j} &= \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i \\ &= \sum_{k=1}^g \left(\int_{\gamma_k} \omega_i \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j - \int_{\gamma_k} \omega_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_i \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{j,i} - \tau_{i,j} &= \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i \\ &= \sum_{k=1}^g \left(\int_{\gamma_k} \omega_i \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j - \int_{\gamma_k} \omega_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_i \right) \\ &= \iint_X \omega_i \wedge \omega_j = 0.\end{aligned}$$

Im τ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leq j \leq g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega_j \neq 0.$$

$\text{Im } \tau$ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leq j \leq g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega_j \neq 0.$$

$${}^t v (\text{Im } \tau) v = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g v_j \text{Im } \tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g v_k \sum_{j=1}^g v_j (\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k})$$

$\text{Im } \tau$ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leq j \leq g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega_j \neq 0.$$

$$\begin{aligned} {}^t v (\text{Im } \tau) v &= \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g v_j \text{Im } \tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g v_k \sum_{j=1}^g v_j (\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k}) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \left(v_k \sum_{j=1}^g v_j \int_{\gamma_{g+k}} \overline{\omega_j} - v_k \sum_{j=1}^g v_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j \right) \end{aligned}$$

Im τ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leq j \leq g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega_j \neq 0.$$

$$\begin{aligned} {}^t v (\operatorname{Im} \tau) v &= \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g v_j \operatorname{Im} \tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g v_k \sum_{j=1}^g v_j (\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k}) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \left(v_k \sum_{j=1}^g v_j \overline{\int_{\gamma_{g+k}} \omega_j} - v_k \sum_{j=1}^g v_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j \right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \left(\int_{\gamma_k} \omega \int_{\gamma_{g+k}} \bar{\omega} - \int_{\gamma_k} \bar{\omega} \int_{\gamma_{g+k}} \omega \right) = \frac{i}{2} \iint_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0. \end{aligned}$$

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire formelle finie

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \text{ de points de } X.$$

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire formelle finie

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \text{ de points de } X.$$

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire formelle finie

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \text{ de points de } X.$$

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle α sur X ,

$$(\alpha) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\alpha) P, \quad \alpha \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire formelle finie

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \text{ de points de } X.$$

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle α sur X ,

$$(\alpha) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\alpha) P, \quad \alpha \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Théorème

Tout diviseur principal est de degré nul.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire formelle finie

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \text{ de points de } X.$$

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle α sur X ,

$$(\alpha) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\alpha) P, \quad \alpha \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Théorème

Tout diviseur principal est de degré nul.

Le *groupe de Picard* de X est

$$\text{Pic}^0(X) = \text{Diviseurs de degré } 0 / \text{Diviseurs principaux}.$$

Plongement dans la jacobienne

Le choix d'une origine $O \in X$ permet de définir un plongement de X dans sa jacobienne :

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow J = \mathbb{C}^g / \Lambda \\ J_O : P &\longmapsto \left(\int_O^P \omega_i \right)_{1 \leq i \leq g} . \end{aligned}$$

L'application d'Abel-Jacobi

On prolonge par \mathbb{Z} -linéarité aux diviseurs, et on obtient un morphisme de groupes

$$j: \begin{array}{ccc} \text{Div}^0(X) & \longrightarrow & J = \mathbb{C}^g / \Lambda \\ \sum_{P \in X} n_P P & \longmapsto & \sum_{P \in X} n_P \left(\int_0^P \omega_i \right)_{1 \leq i \leq g} \end{array} .$$

L'application d'Abel-Jacobi

On prolonge par \mathbb{Z} -linéarité aux diviseurs, et on obtient un morphisme de groupes

$$j: \begin{array}{ccc} \text{Div}^0(X) & \longrightarrow & J = \mathbb{C}^g / \Lambda \\ \sum_{P \in X} n_P P & \longmapsto & \sum_{P \in X} n_P \left(\int_0^P \omega_i \right)_{1 \leq i \leq g} \end{array} .$$

Théorème (Abel-Jacobi)

Le noyau de j est exactement formé des diviseurs principaux, donc j induit un isomorphisme $\text{Pic}^0(X) \longrightarrow J$.