# Calcul Différentiel et Séries de Fourier

Patrick Fischer [1]

[1]MAB, Université de Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France
(Patrick.Fischer@math.u-bordeaux1.fr)

Notes du cours dispensé au second semestre 2009-10 en $2^{eme}$ année du Cycle Préparatoire du Polytechnicum de Bordeaux. Ces notes reprennent des parties des ouvrages cités en références bibliographiques

**Références bibliographiques :**


- *Analyse* $2^{\text{ième}}$ *année,* $PC - PC^* - PSI - PSI^*$, H-Prépa, Hachette.
- *Cours de mathématiques, Tome 2, Analyse*, Dunod,
  J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudies.
- *Mathématiques pour le DEUG, Analyse* $2^{\text{ième}}$ *année*, Dunod,
  F. Liret, D. Martinais.
- *Calcul différentiel*, Ellipses,
  G. Christol, A. Cot, C.M. Marle.
- *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod,
  P. Donato.
- *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini,
  J. Hubbard, B. B. West, (V. Gautheron, traduction).

# Table des matières

# Chapitre 1

# Fonctions de plusieurs variables réelles

## 1.1 La notion de dérivée

### 1.1.1 Définitions

- Cas général.
  **Définition 1.1** *Soient $E$ et $F$ deux e.v.n. Soit $U$ un ouvert de $E$.*
  *On dit qu'une application $f$ de $U$ dans $F$ est* **dérivable** *en $x_0 \in U$, s'il existe une application linéaire continue $L$ telle que $\forall h \in E$ vérifiant $x_0 + h \in U$,*

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_E \epsilon(x_0, h) \tag{1.1}$$

  *avec* $\lim\limits_{\|h\|_E \to 0} \|\epsilon(x_0, h)\|_F = 0$.
  L'application $L$ est la dérivée de $f$ et est souvent notée $f'(x_0)$, $Df(x_0)$ ou encore $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.
- Cas particulier : $E = \mathbb{R}$.
  On pose $h = x - x_0$ dans la définition précédente :
  **Définition 1.2** *Soit $F$ un e.v.n. Soit $U$ un intervalle de $\mathbb{R}$.*
  *On dit qu'une application $f$ de $U$ dans $F$ est* **dérivable** *en $x_0 \in U$, s'il existe une application linéaire continue $L$ telle que $\forall x \in U$,*

  $$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + |x - x_0| \epsilon(x, x_0) \tag{1.2}$$

  *avec* $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x, x_0) = 0_F$.

Si de plus $F = \mathbb{R}$, l'application $L$ s'écrit $L(x - x_0) = a.(x - x_0)$ où $a \in \mathbb{R}$. Par abus de notation, $a$ est aussi noté $f'(x_0)$. La définition précédente se réécrit donc :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + |x - x_0|\epsilon(x, x_0) \tag{1.3}$$

soit encore,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \epsilon(x, x_0) \tag{1.4}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x, x_0) = 0_F$.

On retrouve alors la définition vue au lycée : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
(Si $F = \mathbb{R}^n$, alors $a \in \mathbb{R}^n$.)
**Remarque :**
- Si $h = x - x_0 > 0$, alors on parle de **dérivée à droite** $f'_d(x_0)$, et si $h = x - x_0 < 0$ de dérivée à gauche $f'_g(x_0)$.
- L'application $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

**Définition 1.3** *L'application $f$ est dite* **dérivable** *sur $U$, si $f$ est dérivable en tout point de $U$.*

**Définition 1.4** *L'application $f$ est* **dérivable dans la direction** *$v$ en $x_0$ si la limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t.v) - f(x_0)}{t}$ existe.*

**Remarque :** Une application peut admettre des dérivées en un point dans toutes les directions sans être dérivable en ce point.

**Exemple :** Soit $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^8 + (y - x^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

### 1.1.2 Propriétés élémentaires

**Théorème 1.1** *Si l'application $f$ est dérivable en $x_0 \in U$, alors sa dérivée est unique.*

**Démonstration:** En utilisant les définitions. ■

**Théorème 1.2** *Si l'application $f$ est dérivable en $x_0 \in U$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Démonstration:** En utilisant les définitions. ■

**Théorème 1.3 Dérivée d'une application linéaire**
*Soient $E$ et $F$ deux e.v.n., $U$ un ouvert de $E$, et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Alors $f$ est dérivable sur $U$ et $\forall x \in U, f'(x) = f$.*

**Démonstration:** En utilisant les définitions. ■

**Théorème 1.4 Dérivée d'une application bilinéaire**
*Une application bilinéaire continue est dérivable en tout point $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, et sa dérivée en ce point est l'application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans $F$ :*

$$(h_1, h_2) \mapsto Df(x_1, x_2)(h_1, h_2) = f(h_1, x_2) + f(x_1, h_2). \tag{1.5}$$

**Démonstration:** Comme $f$ est bilinéaire,

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + f(h_1, x_2) + f(x_1, h_2) + f(h_1, h_2), \tag{1.6}$$

donc,

$$\begin{aligned} \|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - f(h_1, x_2) - f(x_1, h_2)\| &= \|f(h_1, h_2)\| \\ &\leq \|f\|\|h\|^2 \end{aligned}$$

Montrons que $Df$ est bien continue (elle est trivialement linéaire). Nous avons,

$$\|f(h_1, x_2) + f(x_1, h_2)\| \leq \|f\|(\|x_2\|\|h_1\| + \|x_1\|\|h_2\|). \tag{1.7}$$

Nous avons alors :

$$\|f(h_1, x_2) + f(x_1, h_2)\| \leq 2\|f\|\|x\|\|h\|, \tag{1.8}$$

où $\|h\| = \sup(\|h_1\|, \|h_2\|)$. Ce qui prouve la continuité de l'application linéaire.
■

**Théorème 1.5 Dérivée d'une application composée**
*Soient $E, F, G$ trois e.v.n., $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$, $f : U \longrightarrow F$ et $g : V \longrightarrow G$ deux applications, et a un point de $U$ tel que $f(a)$ appartienne à $V$. On suppose $f$ dérivable en $a$ et $g$ dérivable en $f(a)$.*
*Alors l'application $g \circ f$ est dérivable en $a$, et a pour dérivée en ce point :*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a) \tag{1.9}$$

**Démonstration:** En utilisant les définitions. ■

**Application :** Dérivée d'un produit
Soient $E$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f$ et $g$ deux applications d'un ouvert $U$ de $E$ dans $\mathbb{K}$, et $x_0$ un point de $U$. Posons $h = fg$. L'application $h$ est composée de $(f, g)$ : $U \longrightarrow \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ et de l'application bilinéaire continue $\phi : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \phi(y_1, y_2) = y_1y_2$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, $h = fg$ l'est aussi et nous avons, pour tout $k \in E$, la formule de Leibniz,

$$Dh(x_0)(k) = f(x_0).Dg(x_0)(k) + Df(x_0)(k).g(x_0) \tag{1.10}$$

**Corollaire 1.1** *Si $f$ est dérivable dans $U$ et $g$ dérivable dans $V$, l'application composée $g \circ f$ est dérivable dans son domaine de définition $U \cap f^{-1}(V)$.*

**Théorème 1.6 Linéarité de la dérivation**
*Soient $f$ et $g$, deux applications de $E$ dans $F$, dérivables sur $U$ ouvert de $E$, et $\alpha$ et $\beta$ deux scalaires.*
*L'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur $U$, et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.*

**Démonstration:** En utilisant les définitions. ■

**Théorème 1.7 Applications constantes**
*Toute application constante est dérivable, et sa dérivée est identiquement nulle.*

## 1.2 Applications partielles et dérivées partielles

### 1.2.1 Applications partielles

**Définition 1.5** *Soit $U$ un ouvert d'un produit $E = E_1 \times E_2$ de deux espaces vectoriels normés $E_1$ et $E_2$, et $f : U \to F$ une application de $U$ dans $F$ (e.v.n.). $f$ est* *l'application de 2 variables $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de $U$. On appelle* **première application partielle** *associée à $f$ au point $a$, l'application,*

$$x_1 \mapsto f(x_1, a_2) \tag{1.11}$$

*Elle est définie sur l'ouvert de $E_1$,*

$$U_1 = \{x_1 \in E_1 | (x_1, a_2) \in U\}. \tag{1.12}$$

*On appelle* **seconde application partielle** *associée à $f$ au point $a$, l'application,*

$$x_2 \mapsto f(a_1, x_2) \tag{1.13}$$

*Elle est définie sur l'ouvert de $E_2$,*

$$U_2 = \{x_2 \in E_2 | (a_1, x_2) \in U\}. \tag{1.14}$$

### 1.2.2 Dérivées partielles

**Définition 1.6** *Si la première application partielle associée à $f$ au point $a$ est dérivable au point $a_1 \in U_1$, sa dérivée en ce point est appelée* **dérivée partielle** *de $f$ par rapport à sa première variable au point $a$, et notée $f'_{x_1}(a), D_1 f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$. De même pour la seconde variable.*

Les définitions précédentes s'étendent aux applications définies sur un ouvert d'un produit de $n$ espaces vectoriels normés.

**Proposition 1.1** *Si l'application $f$ est dérivable au point $a = (a_1, a_2) \in U$, les deux applications partielles associées à $f$ au point $a$ sont dérivables, respectivement au point $a_1 \in U_1$ et au point $a_2 \in U_2$, et on a la relation*

$$f'(a)(h) = f'_{x_1}(a)(h_1) + f'_{x_2}(a)(h_2), \quad h = (h_1, h_2) \in E = E_1 \times E_2. \tag{1.15}$$

**Démonstration:** La première application partielle est la composée de l'application injective $x_1 \mapsto (x_1, a_2)$ et de l'application $f$. Elle est donc dérivable, et sa dérivée s'obtient par la formule de dérivation des applications composées $f'_{x_1}(a)(h_1) = f'(a)(h_1, 0)$.
De même pour la seconde application partielle. ■

**Remarque :** On notera que l'existence des dérivées partielles ne suffit pas pour assurer la dérivabilité de $f$.

**Théorème 1.8** *Pour qu'une application f, définie sur un ouvert de* $E_1 \times ... \times E_n$ *soit dérivable en a, il suffit que les n dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *existent* **et** *soient continues en a.*

**Théorème 1.9** *Soient* $E, F$ *et* $G$ *trois espaces vectoriels normés, où* $E = E_1 \times ... \times E_n$ *est un produit de n espaces vectoriels. Soient* $U$ *un ouvert de* $E$*, et* $V$ *un ouvert de* $F$*. Soient* $f$ *une application dérivable de* $U$ *dans* $F$ *et* $g$ *une application dérivable de* $V$ *dans* $G$*. Alors pour tout* $a \in U$ *tel que* $f(a) \in V$*,*

$$\partial_i(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ \partial_i f(a) \tag{1.16}$$

## 1.3 Application à valeurs dans un espace produit

**Exemple :** Application à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Composantes d'une application :**
Soit $U$ un ouvert d'un espace vectoriel normé $E$, et $F = F_1 \times F_2$ un produit de deux espaces vectoriels normés $F_1$ et $F_2$. Soient $p_1 : F \longrightarrow F_1$ et $p_2 : F \longrightarrow F_2$ les projections (applications linéaires continues). Soit $f : U \longrightarrow F$ une application de $U$ dans $F$. Les applications $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ de $U$ dans les espaces $F_1$ et $F_2$ sont appelées **composantes** de l'application $f$.

**Proposition 1.2** *Une application f de U dans* $F = F_1 \times F_2$ *est dérivable en* $a \in U$ *si et seulement si* $f_1 = p_1 \circ f$ *et* $f_2 = p_2 \circ f$ *sont dérivables en a. Lorsque c'est le cas, on a :*

$$Df(a) = (Df_1(a), Df_2(a)), \quad Df_1(a) = p_1 \circ Df(a), \quad Df_2(a) = p_2 \circ Df(a). \tag{1.17}$$

*De même, f est dérivable dans U, si et seulement si* $f_1$ *et* $f_2$ *le sont.*

**Démonstration:** Supposons $f$ dérivable en $x_0$. Les projections $p_1$ et $p_2$ étant linéaires, continues, sont dérivables, et nous avons :

$$Df_1(x_0) = D(p_1 \circ f)(x_0) = Dp_1(f(x_0)) \circ Df(x_0) = p_1 \circ Df(x_0), \tag{1.18}$$

et, de même,

$$Df_2(x_0) = p_2 \circ Df(x_0). \tag{1.19}$$

Réciproquement, supposons $f_1$ et $f_2$ dérivables en $x_0$. Munissons $F_1 \times F_2$, par exemple, de la norme $\|(y_1, y_2)\|_\infty = \sup(\|y_1\|, \|y_2\|)$, et posons pour tout $h \in E$,

$$L(h) = (Df_1(x_0)(h), Df_2(x_0)(h)). \tag{1.20}$$

Nous avons pour tout $x \in U$,

$$\begin{array}{rcl} \|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\| & = & \sup_{i \in \{1,2\}} \|f_i(x) - f_i(x_0) - Df_i(x_0)(x - x_0)\| \\ & = & \|x - x_0\|_E \|\epsilon(x - x_0)\|_F. \end{array}$$

Cela prouve que $f$ est dérivable en $x_0$, et admet en ce point $L$ pour dérivée. ■

**Remarque :**
- Le cas où $f$ est dérivable dans $U$ se déduit immédiatement, car $Df = (Df_1, Df_2)$ est continue si et seulement si ses deux composantes le sont.
- La proposition se généralise au cas où $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$ est le produit d'un nombre fini $n$ d'espaces vectoriels normés.

### 1.3.1 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Supposons données une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ et une base $(e'_j)_{1 \leq j \leq p}$ de $\mathbb{R}^p$ ; et soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est une application dérivable au point $a \in U$, l'application linéaire $f'(a)$ est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases $(e_i)$ et $(e'_j)$. Cette matrice est appelée la **matrice jacobienne** de $f$ au point $a$ dans les bases $(e_i)$ et $(e'_j)$.
Les vecteurs colonnes de cette matrice sont formés avec les composantes des $n$ vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ dans la base $(e'_j)$.
La matrice jacobienne de $f$ au point $a$ est la $(p, n)$-matrice :

$$\mathcal{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Si $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne est appelé **jacobien** de l'application $f$ au point $a$ dans les bases considérées :

$$J_f(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

**Divergence et rotationnel dans $\mathbb{R}^3$**

**Définition 1.7** *Soit $f$ une application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour composantes $f_1, f_2$ et $f_3$. On appelle divergence de $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$divf = \nabla.f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \tag{1.21}$$

Cette définition se généralise en dimension quelconque.

**Définition 1.8** *Soit $f$ une application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour composantes $f_1, f_2$ et $f_3$. On appelle rotationnel de $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$rotf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Espaces $C^0(U,F)$ et $C^1(U,F)$

**Définition 1.9** *L'ensemble des applications continues de $U$ dans $F$ est un espace vectoriel noté $C^0(U,F)$.*
*Les applications dérivables sur $U$ dont la dérivée $f'$ est continue sur $U$ sont dites* **continûment dérivables** *ou de* **classe** *$C^1$ sur $U$. L'ensemble de ces applications est noté $C^1(U,F)$.*

**Théorème 1.10** *$C^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(U,F)$.*

**Théorème 1.11** *Soit $f$ une application définie sur un ouvert $U$ de $E = E_1 \times ... \times E_n$. Pour que $f$ soit de classe $C^1$ sur $U$, il faut et il suffit que chacune des dérivées partielles existe et soit continue sur $U$.*

## 1.4 Dérivées d'ordre supérieur

**Définition 1.10** *Soient $k \in \mathbb{N}$, $f$ une application de $U$ ouvert de $E$ (e.v.n.) dans $F$(e.v.n.). $f$ est dite :*

- *de* **classe $\boldsymbol{C^0}$** *sur $U$ si elle est continue sur $U$*
- *de* **classe $\boldsymbol{C^{k+1}}$** *sur $U$ si elle est dérivable sur $U$ et si sa dérivée $f'$ est de classe $C^k$ sur $U$*
- *de* **classe $\boldsymbol{C^\infty}$** *sur $U$ si elle est de classe $C^k$ pour tout entier $k$.*

**Remarques :**

- $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $C^k$ sur $U$ à valeurs dans $F$.
- La dérivée $k^{ieme}$ de $f$ est notée $f^{(k)}$, $D^k f$, ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$, et est définie par récurrence,

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(k)} = D(f^{(k-1)}). \tag{1.22}$$

**Théorème 1.12** *La composée d'applications de classe $C^k$ est une application de classe $C^k$.*

**Proposition 1.3** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. Pourt tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des applications de $U$ dans $F$ $n$ fois dérivables en un point $a \in U$ est un espace vectoriel, et l'application qui associe à une application élément de cet espace sa dérivée d'ordre $n$ au point $a$ est linéaire.*

**Démonstration:** Par récurrence. ■

### 1.4.1 Symétrie des dérivées d'ordre supérieur

**Théorème 1.13** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. On suppose $f$ deux fois dérivable en un point $a \in U$. Sa dérivée seconde $f''(a)$ au point $a$ est une application bilinéaire continue et symétrique de $E^2$ dans $F$.*
*(i.e. $\forall (h,k) \in E^2, \quad f''(a)(h,k) = f''(a)(k,h)$)*

**Théorème 1.14** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. On suppose $f$ $n$ fois dérivable en un point $a \in U$. Sa dérivée d'ordre $n$ $f^{(n)}(a)$ au point $a$ est une application multilinéaire continue et symétrique de $E^n$ dans $F$.*

**Théorème 1.15** *(Schwarz) Soit $f$ une application définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F$ (e.v.n.) telle que la dérivée d'ordre $p$ $f^{(p)}$ existe au point $a \in U$. Alors la dérivée partielle $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$ est une application symétrique de $i_1, \dots, i_p$. (i.e. la valeur d'une dérivée partielle d'ordre $p$ ne change pas lorsqu'on change l'ordre des dérivations successives)*

**Théorème 1.16** *(Schwarz avec n=p=2) Soit $f$ une application définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $F$ (e.v.n.) telle que la dérivée seconde $f''$ existe au point $a \in U$.*
*Alors on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \tag{1.23}$$

### 1.4.2 Applications de classe $C^k$ par morceaux

Soit $f$ une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $F$.

**Définition 1.11** *$f$ est dite de* **classe $\boldsymbol{C^k}$ par morceaux sur $\boldsymbol{[a, b]}$**, *s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ à chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ soit prolongeable en une application de classe $C^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.*

**Théorème 1.17** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $I$ dans $F$. Si $f$ est continue sur $I$ et de classe $C^1$ par morceaux sur cet intervalle, alors $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f' = 0$.*

### 1.4.3 Difféomorphismes de classe $C^k$

**Définition 1.12** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. On dit que $f$ est un* **difféomorphisme** *de $U$ sur un ouvert $V$ de $F$, si $f$ est dérivable sur $U$, est une bijection de $U$ sur $V$, et si l'application réciproque $f^{-1} : V \longrightarrow E$ est dérivable sur $V$. On dit que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ si $f$ est un difféomorphisme et si $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $C^1$.*

**Définition 1.13** *On dit que $f$ est un* $\boldsymbol{C^k}$**-difféormorphisme** *si $f$ est un difféomorphisme et si $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $C^k$.*

### 1.4.4 Théorème d'inversion globale

#### Cas scalaire

**Théorème 1.18** *Soit $U$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\phi$ une application de classe $C^k$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. L'application $\phi$ sera un $C^k$-difféomorphisme de l'intervalle $U$ dans l'intervalle $\phi(U)$ si et seulement si,*

$$\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0. \tag{1.24}$$

**Démonstration:** Nous allons détailler la démonstration pour le cas $k = 1$. Le cas $k$ quelconque se déduit par récurrence.
Démonstration en 2 parties.

- Montrons que : $\phi \quad C^1$-difféomorphisme de U dans $\phi(U) \Rightarrow \forall x \in U, \quad \phi'(x) \neq 0$.
  Par définition, $\phi^{-1}$ est $C^1$. Nous avons alors $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Id}$. En dérivant cette égalité :
  $$\forall x \in U (\phi^{-1} \circ \phi)'(x) = (\phi^{-1})'(\phi(x)) \circ \phi'(x) = 1. \tag{1.25}$$
  (Etant dans $\mathbb{R}$, l'opération $\circ$ est ici une multiplication)
  Donc,
  $$\forall x \in U \phi'(x) \neq 0. \tag{1.26}$$
- Montrons que : $\forall x \in U, \quad \phi'(x) \neq 0 \Rightarrow \phi \quad C^1$-difféomorphisme de U dans $\phi(U)$.
  $\phi$ est strictement monotone et continue, elle est donc injective, et donc bijective de $U$ dans $\phi(U).\phi^{-1}$ est donc aussi continue.
  Montrons que $\phi^{-1}$ est dérivable. Soit $y_0 \in \phi(U)$ et $y \in \phi(U), y \neq y_0$. Alors $\exists x$ et $x_0 \in U$ tels que $\phi(x_0) = y_0$ et $\phi(x) = y$.
  $$\lim_{y \to y_0} \frac{\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\phi(x) - \phi(x_0)} = (\phi'(x_0))^{-1}. \tag{1.27}$$
  Donc $\phi^{-1}$ est dérivable car $\phi'(x_0)$ est non nul.
  Nous en déduisons,
  $$(\phi^{-1})'(y_0) = (\phi' \circ \phi^{-1}(y_0))^{-1} \tag{1.28}$$
  qui est continue (composée d'applications continues).

■

**Cas général**

**Théorème 1.19** *Soit $f$ une application de classe $C^1$ définie sur un ouvert $U$ de $E$ et à valeurs dans $F$, où $E$ et $F$ sont deux espaces de Banach.*
*Si $f$ est injective et si $\forall x \in U, f'(x)$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ alors $f(U)$ est un ouvert de $F$ et $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ de $U$ sur $f(U)$.*

**Remarque :**

Ce dernier résultat peut être utilisé pour effectuer un changement de variables dans un calcul d'intégrales multiples. Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}^n$, on obtient une condition pour le changement de variables : $f'(x)$ isomorphisme $\Leftrightarrow$ le jacobien ne s'annule pas.

## 1.5 Extrema d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$

### 1.5.1 Cas général

**Définition 1.14** *Soit $f$ une application définie sur une partie $U$ d'un espace vectoriel $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que l'application $f$ admet un* **minimum local** *en un point $a \in U$, s'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $E$ tel que, pour tout $x \in V \cap U, \quad f(x) \geq f(a)$.*
*On dit que $f$ admet un* **maximum local** *au point $a$ si $-f$ admet un minimum local en $a$.*
*L'extremum sera dit* **stricte** *si $\forall x \in V \cap U, x \neq a$, l'inégalité est stricte.*

**Théorème 1.20** *Si l'application $f$ admet en un point $a$ intérieur à $U$ un extremum local, et si $f$ est dérivable en $a$, sa dérivée en ce point est nulle.*

**Démonstration:** Supposons que $a \in U$ soit un extremum. Pour tout $h \in E$, on pose

$$\psi(t) = f(a + th) \tag{1.29}$$

qui est définie sur un voisinage ouvert de 0, image réciproque de $U$ par l'application $t \longmapsto a+th$. Le point $t = 0$ est alors un extremum de $\psi$, et on a $\psi'(0) = f'(a)(h) = 0$ pour tout $h \in E$. Donc $f'(a) = 0$. ∎

**Proposition 1.4** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$. Si $f$ a un extremum local en un point $a \in U$, alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

**Remarque :**
Attention la réciproque est fausse.

**Définition 1.15** *Soit $f$ une application de classe $C^1$. Si toutes les dérivées partielles premières de $f$ sont nulles au point $a$, on dit que $a$ est un* **point critique** *de $f$.*

Pour qu'une application de classe $C^1$ ait un extremum local en $a$, il faut que $a$ soit un point critique de $f$.

### 1.5.2 Cas d'une application de deux variables

**Proposition 1.5** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2$, $a = (a_1, a_2) \in U$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que le segment $[a, a + h]$ soit contenu dans $U$. On peut alors écrire le développement de Taylor - Young de $f$ à l'ordre 2 :*

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2+\frac{1}{2}Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2)+\|h\|^2\epsilon(h), \tag{1.30}$$

*avec*

$$Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2).h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2).h_1.h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2).h_2^2 \tag{1.31}$$

*Supposons que $a$ est un point critique de $f$, alors :*

- *Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ quel que soit $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors $f$ a un minimum local en $(a_1, a_2)$.*
- *Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) < 0$ quel que soit $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors $f$ a un maximum local en $(a_1, a_2)$.*
- *S'il existe $(h_1, h_2)$ tel que $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ et $(k_1, k_2)$ tel que $Q_{a_1,a_2}(k_1, k_2) < 0$, alors $f$ n'a ni maximum local, ni minimum local en $(a_1, a_2)$.*

**En pratique :**
On définit la forme quadratique,

$$Q(X, Y) = pX^2 + 2qXY + rY^2 \tag{1.32}$$

où

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) \\ q &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) \\ r &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Supposons $p \neq 0$. On a alors,

$$Q(X,Y) = p\left(X^2 + \frac{2q}{p}XY + \frac{r}{p}Y^2\right) = p\left(\left(X + \frac{q}{p}Y\right)^2 + \frac{rp - q^2}{p^2}Y^2\right). \quad (1.33)$$

- Si $rp - q^2 > 0$ alors pour tout $(X,Y) \neq (0,0)$, $\quad Q(X,Y)$ a le signe de $p$.
- Si $rp - q^2 < 0$ alors $Q(1,0)$ a le signe de $p$ et $Q(-q/p, 1)$ a le signe de $-p$ : il n'y a ni maximum local, ni minimum local au point $(a_1, a_2)$.
- Si $rp - q^2 = 0$ alors $Q(X,Y)$ est nul ou a le signe de $p$ : la proposition ne s'applique pas, on ne peut donc rien conclure.

# Chapitre 2

# Séries de Fourier

## 2.1 Introduction : l'analyse des signaux

La théorie du signal a pour objet l'étude des signaux et des systèmes qui les transmettent. Mais qu'est-ce qu'un signal ? La notion de signal est très variée. Cela peut être l'évolution d'une quantité qui dépend du temps, de l'espace, d'une fréquence ou de toute autre variable. Ces quantités mesurables seront appelées signaux ; elles correspondent en mathématiques à la notion de fonction, ou plus exactement à celle de distribution. Il y a différentes façons de considérer un signal :

- déterministe ou aléatoire
- la variable peut être continue (signal analogique) $x = x(t)$ par exemple, ou discrète(signal discret) $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Un signal discret sera souvent obtenu par échantillonnage d'un signal analogique.

Nous ne considérons dans ce chapitre que des signaux déterministes.
On appelle système toute entité (appareil physique, opérateur mathématique, etc) qui reçoit un signal d'entrée, et fournit un signal de sortie. S'il y a plusieurs signaux d'entrée ou de sortie, on dira alors que le signal est vectoriel. En théorie du signal, on ne s'intéresse pas nécessairement aux composantes du système, mais surtout à la façon dont il transforme un signal d'entrée en un signal de sortie. C'est une *boite noire* modélisée par un opérateur agissant sur des fonctions :

$$y = Ax \tag{2.1}$$

avec $x \in X$ ensemble des signaux d'entrée, et $y \in Y$ ensemble des signaux de sortie.
**Exemples de signaux :**

- fonction de Heaviside : $s(t) = 0$ si $t < 0$ et $s(t) = 1$ si $t \geq 0$.

– signal sinusoïdal (ou monochromatique) $s(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ où
$|\alpha| = \max |s(t)|$ est l'*amplitude* du signal
$\omega$ est la *pulsation*
$a = \frac{2\pi}{\omega}$ est la plus petit *période*
$\lambda = \frac{1}{a}$ est la *fréquence*
$\varphi$ est la *phase* initiale.

Les valeurs d'un signal sont, en principe, des nombres réels, et la fréquence un nombre positif. Cependant, on utilise souvent une fonction à valeurs complexes pour représenter des signaux $z(t) = \alpha e^{i(\omega t+\varphi)}$. Cette écriture conduit à l'emploi de fréquences négatives, ce qui physiquement n'a aucun sens. Le signal $z(t)$ peut aussi s'écrire $z(t) = \beta e^{2i\pi\lambda t}$ où $\beta$ est complexe et inclut la phase initiale $\varphi$.

## 2.2 Série de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi$-périodiques et continues par morceaux.

### 2.2.1 Polynômes trigonométriques

**Définition 2.1** *On définit les suites de fonctions* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *par :*
- $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{int}$
- $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \cos(nt)$
- $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sin(nt)$

On note $\mathcal{P}_n$ les sous espaces vectoriels de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ engendré par $\{e_k; -n \leq k \leq n\}$.

**Proposition 2.1** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*
1. $\mathcal{P}_n = Vect(r_0, r_1, \cdots, r_n, s_1, s_2, \cdots, s_n)$.
2. $dim\ \mathcal{P}_n = 2n + 1$

**Démonstration:**
1. Il suffit d'utiliser les relations entre $r_n, s_n$ et $e_n$.
2. On montre que la famille $\{e_k; -n \leq k \leq n\}$ est libre.

   Soit $(\lambda_k)_{-n\leq k\leq n}$ une famille de nombres complexes t.q. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k = 0$.

Alors

$$\begin{aligned}
&\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k(t) = 0 \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R}, \lambda_{-n} e^{-int} + \lambda_{-(n-1)} e^{-i(n-1)t} + \cdots + \lambda_n e^{int} = 0 \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R}, \lambda_{-n} + \lambda_{-(n-1)} e^{it} + \cdots + \lambda_n e^{i2nt} = 0 \\
&\implies \int_0^{2\pi} \lambda_{-n} + \lambda_{-(n-1)} e^{it} + \cdots + \lambda_n e^{i2nt} dt = 0 \\
&\implies \lambda_{-n} = 0.
\end{aligned}$$

On montre ainsi que $\lambda_{-(n-1)} = 0$, puis que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{-n, \cdots, n\}$.

■

**Définition 2.2** *L'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ est appelé ensemble des polynômes trigonométriques. Un polynôme trigonométrique $P$ peut donc s'écrire sous la forme $P = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \alpha_{-k}) r_k + i(\alpha_k - \alpha_{-k}) s_k$.*

### 2.2.2 Coefficients de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique

**Définition 2.3** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \left( = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) e^{-int} dt \right)$.*
*Les coefficients $c_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier de $f$. Le coefficient $c_0$ est la valeur moyenne de $f$ sur une période.*

**Exemple :** Si $f$ est un polynôme trigonométrique alors $c_k = \alpha_k$.

**Proposition 2.2** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On a :*

1. *$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{c_n(f)} = c_{-n}(\overline{f})$.*
2. *Soit $g(t) = f(-t)$. Alors $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et on a $c_n(g) = c_{-n}(f)$. En particulier, si $f$ est paire alors $c_n(f) = c_{-n}(f)$ et si $f$ est impaire alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$.*
3. *Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ alors la suite $(c_n(f))_n$ est bornée et $|c_n(f)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.*

**Démonstration:** Evidente ■

**Proposition 2.3** *Soit $f$ continue, $2\pi$-périodique et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors $c_n(f') = inc_n(f)$.*

**Démonstration:** On effectue une intégration par partie dans l'intégrale du calcul de $c_n(f')$. ■

**Rem :** Le résultat s'étend facilement au calcul des coefficients de Fourier des dérivées successives des fonctions de classe $C^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

### 2.2.3 Coefficients trigonométriques d'une fonction $2\pi$-périodique

**Définition 2.4** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle coefficients trigonométriques de $f$ les coefficients*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

**Proposition 2.4** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On a :*

1. *$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f); \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.*
2. *Si $f$ est paire alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = 0$.*
3. *Si $f$ est impaire alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0$.*
4. *Si $f$ est continue et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f') = nb_n(f)$, et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

**Démonstration:** Evidente ■

### 2.2.4 Série de Fourier - Définition

**Définition 2.5** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de $f$ la série de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)r_n + b_n(f)s_n).$$

*Si on note* $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *la suite des sommes partielles de cette série de fonctions, on a*

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p(f)(x) &= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))\end{aligned}$$

## 2.3 Convergence en moyenne quadratique

### 2.3.1 L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$

**Définition 2.6** *L'espace vectoriel des fonctions continues et* $2\pi$*-périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est noté* $\mathcal{C}_{2\pi}$. *C'est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

**Définition 2.7** *On définit* $\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *:*

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

*C'est un produit scalaire de* $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ *dans* $\mathbb{C}$. *La norme associée est notée* $\|.\|_2$ *et est définie pour tout* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *par :*

$$\|f\|_2^2 = (f|f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

**Rappel** :
- $(.|.)$ est sesquilinéaire (linéaire par rapport à la seconde variable et semi-linéaire (ou anti-linéaire) par rapport à la première variable).
- $(.|.)$ est hermitienne ($(f|g) = \overline{(g|f)}$)
- $(.|.)$ est définie positive (définie : $(f|f) = 0 \implies f = 0$ ; positive : $(f|f) \geq 0$).

**Proposition 2.5** *La famille* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une famille orthonormale de* $\mathcal{C}_{2\pi}$, *et pour tout* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}, c_n(f) = (e_n|f)$.

**Démonstration:** Evidente ■

### 2.3.2 Convergence dans l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$

**Définition 2.8** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par $(e_n)_{-p \leq n \leq p}$.*

**Proposition 2.6** *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Soit $(S_p(f))_p$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de $f$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p(f)$ est la projection de $f$ sur $\mathcal{P}_p$. En particulier,*

$$\|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|f - S_p(f)\|_2^2 \qquad (*)$$

**Démonstration:** Comme $\mathcal{P}_p$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$, on peut considérer la projection orthogonale $q(f)$ de $f$ sur $\mathcal{P}_p$. On sait que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$, donc $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$ est une base de $\mathcal{P}_p$. Ainsi, $q(f) = \sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n = S_p(f)$. La relation $(*)$ est une application du théorème de Pythagore. ∎

**Théorème 2.1** *(convergence en moyenne quadratique dans $\mathcal{C}_{2\pi}$)*
*Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Alors la suite $(S_p(f))_p$ converge vers $f$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_2)$ :*

$$\lim_{p\to+\infty} \|f - S_p(f)\|_2 = 0.$$

**Démonstration:** Admis ∎

**Théorème 2.2 Formule de Parseval**
*Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\ &= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \end{aligned}$$

*où* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2.$

**Démonstration:** Calculons $\|S_p(f)\|_2^2$. Comme $(e_n)_{-p\le n\le p}$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}_p$, on a :

$$\begin{aligned}
\|S_p(f)\|_2^2 &= \|\sum_{n=-p}^{p}(e_n|f)e_n\|_2^2 \\
&= \|\sum_{n=-p}^{p}c_n(f)e_n\|_2^2 \\
&= \sum_{n=-p}^{p}|c_n(f)|^2 \\
&= |c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{p}|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2 \\
&= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2
\end{aligned}$$

On applique le théorème de Pythagore :

$$\|f\|_2^2=\|S_p(f)\|_2^2+\|f-S_p(f)\|_2^2$$

On en déduit que $\|S_p(f)\|_2^2\le\|f\|_2^2$.

Donc les suites $\left(\sum_{n=-p}^{p}|c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(\sum_{n=1}^{p}|a_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$, et $\left(\sum_{n=1}^{p}|b_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont majorées. Comme elles sont également croissantes, elles sont donc convergentes.

On passe à la limite $p\to+\infty$ dans l'égalité de Pythagore.
Comme $\lim_{p\to+\infty}\|f-S_p(f)\|_2=0$, on obtient alors le résultat. ■

La démonstration précédente permet également d'obtenir l'inégalité de Bessel :

**Théorème 2.3 Inégalité de Bessel**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-p}^{p}|c_n(f)|^2 &\le \|f\|_2^2 \\
\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2 &\le \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

**Corollaire 2.1** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{2\pi} & \to & \{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\} \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

*est injective.*

**Démonstration:** Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ telles que $(c_n(f))_n = (c_n(g))_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Cela entraine $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f-g) = 0$. Donc $\|f-g\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f-g)|^2 = 0$ et donc $f = g$. ∎

**Corollaire 2.2** *Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. Le produit scalaire de $f$ et $g$ peut alors s'exprimer en fonction des coefficients de Fourier de $f$ et de $g$ :*

$$(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g)$$

**Démonstration:** Continuité du produit scalaire et passage à la limite $p \to +\infty$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$(S_p(f)|S_p(g)) = \sum_{n=-p}^{p} \overline{c_n(f)}c_n(g).$$

Donc :

$$(f|g) = \lim_{p\to+\infty} (S_p(f)|S_p(g)).$$

∎

### 2.3.3 Extension au cas des fonctions continues par morceaux

**Définition 2.9** *Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On définit la fonction régularisée de $f$, notée $f_r \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

*où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de $f$ en $x$.*
*En particulier, $f_r(x) = f(x)$ en tout point où $f$ est continue.*

**Rem :** Comme $f$ et $f_r$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, on a $\|f\|_2 = \|f_r\|_2$.

**Définition 2.10** *On introduit le sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ constitué des fonctions $g$ vérifiant $g = g_r$. Il est noté $\mathcal{D}_{2\pi}$.*

**Proposition 2.7** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{2\pi} \times \mathcal{D}_{2\pi} & \to & \mathbb{C} \\ (f,g) & \mapsto & (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt \end{array}$$

*est un produit scalaire sur $\mathcal{D}_{2\pi}$.*
*La norme associée est encore notée $\|.\|_2$ : $\forall f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$.*

**Démonstration:** Démonstration analogue à celle sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. Pour le caractère "défini-positif", on se place sur les segments inclus dans $[-\pi, \pi]$ où $f$ est continue. ∎

Le théorème de convergence quadratique est vrai dans $\mathcal{D}_{2\pi}$. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\lim_{p\to+\infty} \|f_r - S_p(f_r)\|_2 = 0, \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \|S_p(f_r)\|_2 = \|f\|_2$$

On peut en déduire alors la formule de Parseval :

**Théorème 2.4** *(Formule de Parseval)*

$$\begin{aligned} \|f_r\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_r(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f_r)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\ &= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \end{aligned}$$

**Démonstration:** Admis ∎

## 2.4 Convergence ponctuelle

### 2.4.1 Convergence normale de la série de Fourier

**Théorème 2.5** *Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique, continue et $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de fonctions (série de Fourier de $f$)*

$$c_0(f) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f)\ e_{-n})$$

*converge normalement vers $f$ sur $\mathbb{R}$.*

**Démonstration:** Démonstration en deux étapes. Nous allons d'abord montrer que la série de fonctions $\sum (c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f) e_{-n})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, puis nous montrerons ensuite que sa limite est bien $f$.
Etudions $\|c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f)\ e_{-n}\|_\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \|c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f)\ e_{-n}\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |c_n(f)\ e^{int} + c_{-n}(f)\ e^{-int}| \\ &\leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Nous avons vu que $c_n(f') = i\,n\,c_n(f)$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(f)| = \left| \frac{c_n(f')}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2 \right).$$

D'où :

$$\|c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f)\ e_{-n}\|_\infty \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}|c_n(f')|^2 + \frac{1}{2}|c_{-n}(f')|^2.$$

Comme $f' \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, les séries numériques $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ convergent, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge également, on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f) e_{-n})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Deuxième partie de la démonstration, il faut maintenant montrer que la limite de cette série de fonctions est bien $f$.
Soit $S$ la fonction définie par :

$$S(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f)\ e_n(t) + c_{-n}(f) e_{-n}(t))$$

Montrons que $S = f$. Comme la convergence de la série numérique précédente est normale et comme

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad t \mapsto c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} (c_n(f)\ e_n(t) + c_{-n}(f) e_{-n}(t))$$

est continue, on en déduit que $S$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $S$ est $2\pi$-périodique (puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n$ et $e_{-n}$ sont $2\pi$-périodiques). Donc $S \in \mathcal{C}_{2\pi}$, et on peut calculer ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}
c_k(S) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(t) e^{-ikt}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f)\ e_n(t) + c_{-n}(f)\ e_{-n}(t))\, e^{-ikt}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} c_0(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\, dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\, dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+k)t}\, dt
\end{aligned}$$

On trouve donc que $c_k(S) = c_k(f),\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
Donc $S$ et $f$ sont deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier, d'où $S = f$. ■

### 2.4.2 Convergence simple de la série de Fourier

**Théorème 2.6** *(Théorème de Dirichlet)*
*Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de $f$, $c_0(f) + \sum c_n(f)\ e_n + c_{-n}(f)\ e_{-n}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à la fonction régularisée $f_r$ de $f$ :,*

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_r(x) &= \frac{1}{2} \left( f(x^+) + f(x^-) \right) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( c_n(f)\ e^{inx} + c_{-n}(f)\ e^{-inx} \right) \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\ \cos(nx) + b_n(f)\ \sin(nx))
\end{aligned}$$

*En particulier, si $f$ est continue en $x$, alors :*

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f)\, e^{inx} + c_{-n}(f)\, e^{-inx}\right) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\ \cos(nx) + b_n(f)\ \sin(nx)\right) \end{aligned}$$

**Démonstration:** Admis ■

**Remarque :** Dans le cas général de fonctions T-périodiques où $T \in \mathbb{R}$ n'est pas égal à $2\pi$, tous les résultats précédents s'adaptent en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{2\pi}{T}\, t$ dans la définition des fonctions $e_n(t) = e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ . Les intégrales sur $(-\pi, \pi)$ sont remplacées par des intégrales sur une période ($(0, T)$ par exemple).
On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\, dt \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\, dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\, dt \end{aligned}$$

Les résultats vus dans ce chapitre se déduisent alors facilement à partir de ces nouvelles définitions.

# Chapitre 3

# Formes différentielles et intégrales multiples

## 3.1 Champs scalaires et vectoriels

Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $k$ un entier naturel.

**Définition 3.1** *Un champ de vecteurs de classe $C^k$ sur $U$ est une application $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}^p$ de classe $C^k$ sur $U$.*
*Un champ de scalaires de classe $C^k$ sur $U$ est une application $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^k$ sur $U$.*

**Définition 3.2 Gradient d'un champ de scalaires** *Soit un entier $k \geq 1$ et un champ de scalaires $g$ de classe $C^k$ sur $U$. Alors $g'$ est un champ de vecteurs de classe $C^{k-1}$ sur $U$.*

**Définition 3.3 Circulation d'un champ de vecteurs** *Soit $f$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^p$ et $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ses composantes.*
*Soit $([a, b], \gamma, \Gamma)$ un arc paramétré de clase $C^1$ dont le support $\Gamma$ est inclus dans $U$.*
*On note pour tout $t \in [a, b], \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))$.*
*L'intégrale du champ de vecteurs $f$ le long de l'arc orienté $\Gamma$ est la quantité :*

$$\int_\Gamma f.dx = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^{p} f_i \left( x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t) \right) \, x_i'(t) \right] dt. \tag{3.1}$$

En physique, cette quantité représente la circulation du champ de vecteurs $f$ le long de l'arc orienté $\Gamma$. Par exemple, la circulation d'un champ de forces le long d'un arc représente le travail de cette force le long de cet arc.

## 3.2 Formes différentielles

### 3.2.1 Définitions

**Définition 3.4 Forme différentielle** *Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.*
*On appelle* forme différentielle *de degré 1 sur $U$ toute application $\omega$ de $U$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.*

**Exemple :**
Soit $f$ une fonction numérique de classe $C^1$ sur $U$. Pour tout $a \in U$, la dérivée $df(a)$ de $f$ en $a$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. L'application $df$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{array}$$

est une forme différentielle de degré 1 sur $U$.

**Définition 3.5 Base duale** *La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(dx_1, \ldots, dx_p)$. Toute application linéaire $\varphi$ sur $\mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme :*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i dx_i \tag{3.2}$$

*où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Avec cette notation, pour $h = (h_1, \ldots, h_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ :*

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, dx_i(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i. \tag{3.3}$$

**Définition 3.6** *Soit $\omega$ une forme différentielle sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^p$. Pour tout $a \in U$, $\omega(a)$ se décompose selon la base $(dx_1, \ldots, dx_p)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Il existe $p$ réels $(P_1(a), \ldots, P_p(a))$ tels que :*

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{p} P_i(a) dx_i. \tag{3.4}$$

*Ces réels sont appelés les composantes de $\omega$. Pour $i = 1, \ldots, p$, $P_i$ est une application de $U$ dans $\mathbb{R}$, et on note :*

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i dx_i. \tag{3.5}$$

**Définition 3.7** *Soit $k \in \mathbb{N}$. La forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, dx_i$ est dite de classe $C^k$ sur $U$ si $\forall i = 1, \ldots, p$, $P_i \in C^k(U, \mathbb{R})$.*

**Exemple :**
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f$ une application de classe $C^k$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. La forme différentielle $df$ est telle que :

$$\forall a \in U, \quad f'(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \tag{3.6}$$

Ses composantes sont donc les dérivées partielles de $f$ et :

$$df = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{3.7}$$

On en déduit que $df$ est une forme différentielle de classe $C^{k-1}$ sur $U$.

**Définition 3.8 Forme exacte**
*La forme différentielle $\omega$, définie sur l'ouvert non vide $U$ de $\mathbb{R}^p$ est dite* exacte *sur $U$ si :*

$$\exists f \in C^1(U, \mathbb{R}) \quad t.\ q. \quad \forall a \in U, \quad \omega(a) = df(a). \tag{3.8}$$

### 3.2.2 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Soit $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i \, dx_i$ une forme différentielle de classe $C^k$ sur $U$. Soit $([a, b], \gamma, \Gamma)$ une courbe de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^p$ dont le support $\Gamma$ est inclus dans $U$. On pose $[a, b] = I$, et pour tout $t$ de $I$, on note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))$.

**Définition 3.9** *L'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega$ le long de la courbe $([a, b], \gamma, \Gamma)$ est le réel :*

$$\int_{([a,b],\gamma,\Gamma)} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t)) \gamma_i'(t) \right] dt. \tag{3.9}$$

A priori, cette quantité dépend du paramétrage de la courbe $\Gamma$. Le théorème suivant montre cependant qu'elle ne dépend que du sens de parcours du support de $\Gamma$.

**Théorème 3.1** *Soit $\varphi$ un $C^1$-difféomorphisme de $J = [c, d]$ dans $I = [a, b]$.*

- *Si $\varphi$ est croissante, alors $\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = \int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)} \omega$.*
- *Si $\varphi$ est décroissante, alors $\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = -\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)} \omega$.*

**Démonstration:** On a :

$$\begin{aligned}\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)}\omega &= \int_c^d \omega(\gamma\circ\varphi(u))(\gamma\circ\varphi)'(u)du \\ &= \int_c^d \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(\varphi(u)),\ldots,\gamma_p(\varphi(u)))\gamma_i'(\varphi(u))\right]\varphi'(u)\,du. \quad (3.10)\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $t=\varphi(u)$ qui donne $dt=\varphi'(u)\,du$.
On obtient donc :

- Si $\varphi$ est croissante, $\varphi(c)=a, \varphi(d)=b$, et on a :

$$\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)}\omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right] dt. \quad (3.11)$$

- Si $\varphi$ est décroissante, les bornes sont inversées et on a :

$$\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)}\omega = -\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right] dt. \quad (3.12)$$

■

### 3.2.3 Intégrale curviligne d'une forme exacte

**Théorème 3.2** *Soient $\omega$ une forme différentielle exacte sur $U$, $f$ une primitive de $\omega$ sur $U$, et deux points $A$ et $B$ de $U$. Pour toute courbe paramétrée $([a,b],\gamma,\Gamma)$ de classe $C^1$, de support inclus dans $U$, d'origine $A=\gamma(a)$ et d'extrémité $B=\gamma(b)$, on a :*

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma df = f(B)-f(A). \quad (3.13)$$

**Démonstration:** On note $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))$. Puisque $\omega=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right] dt. \quad (3.14)$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t) = \frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)(t). \quad (3.15)$$

Donc

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t)\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A). \tag{3.16}$$

■

**Définition 3.10** *Une courbe paramétrée $([a, b], \gamma, \Gamma)$ est dite fermée lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

**Corollaire 3.1** *L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur $U$, le long d'une courbe fermée de classe $C^1$ de support contenu dans $U$, est nulle.*

### 3.2.4 Formes différentielles fermées

**Définition 3.11** *Forme fermée*
*Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i\, dx_i$ une forme différentielle de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $U$ de $\mathbb{R}^p$.*
*On dit que $\omega$ est une forme différentielle fermée sur $U$ si :*

$$\forall a \in U, \quad \forall i = 1, \ldots, p,\ \forall j = 1, \ldots, p, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(a). \tag{3.17}$$

**Théorème 3.3** *Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i\, dx_i$ une forme différentielle de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $U$ de $\mathbb{R}^p$. Si $\omega$ est une forme exacte sur $U$ alors $\omega$ est fermée sur $U$.*

**Démonstration:** On suppose $\omega$ exacte sur $U$. Soit $f$ une primitive de $\omega$ sur $U$ :

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i\, dx_i = df = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i. \tag{3.18}$$

Puisque $\omega$ est de classe $C^1$ sur $U$, $f$ est de classe $C^2$ et :

$$\forall i = 1, \ldots, p,\ \forall j = 1, \ldots, p, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}. \tag{3.19}$$

■

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en général.

**Définition 3.12** *Un ouvert non vide $U$ de $\mathbb{R}^p$ est dit* étoilé *s'il existe un point $a$ de $U$ tel que, pour tout point $m$ de $U$, le segment $[a, m]$ est contenu dans $U$.*

**Théorème 3.4 Poincaré**
*Soit $U$ un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^p$. Toute forme différentielle fermée sur $U$ est exacte sur $U$.*

## 3.3 Changements de variables dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

**Définition 3.13** *On appelle compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$, un compact de $\mathbb{R}^2$ pouvant s'écrire comme une réunion d'un nombre fini d'ensembles $K$ tels que :*

- *Il existe un segment $[a, b]$ et deux fonctions continues $f_1$ et $f_2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1 \leq f_2$ et :*
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b \text{ et } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}, \tag{3.20}$$
- *ou bien il existe un segment $[c, d]$ et deux fonctions continues $g_1$ et $g_2$ de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g_1 \leq g_2$ et :*
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d \text{ et } g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}, \tag{3.21}$$

**Théorème 3.5** *Soit $U$ un ouvert non vide $\mathbb{R}^2$, $\phi : (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$ une application de classe $C^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^2$, $A$ un compact élémentaire inclus dans $U$ et $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à $A$. Si*

- *l'ensemble $D = \phi(A)$ est un compact élémentaire*
- *la restriction de $\phi$ à $\mathring{A}$ est injective*
- *le jacobien de $\phi$, $J_\phi$ ne s'annule pas sur $\mathring{A}$*

*alors, pour toute fonction $f$ continue de $D$ dans $\mathbb{R}$, on a :*
$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_A f(x(s, t), y(s, t)) J_\phi\, ds\, dt. \tag{3.22}$$

**Exemple fondamental :** Coordonnées polaires.

- L'application $\phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit le rectangle $A = [0, R] \times [-\pi, \pi]$ avec $R > 0$.
- Son image par $\phi$ est le disque $D$ de centre 0 et de rayon $R$ : $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. L'ensemble des points intérieurs de $A$ est : $\mathring{A} = ]0, R[\times] - \pi, \pi[$. La restriction de $\phi$ à $\mathring{A}$ est injective et on a :
$$J_\phi = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

– Le théorème s'applique alors et on obtient :

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)\; r\,dr\,d\theta. \tag{3.23}$$

Un théorème analogue existe pour calculer des intégrales sur des domaines dans des espaces plus généraux. Par exemple, on obtient la formule suivante dans le cas de $\mathbb{R}^3$ :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_A f(x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u))J_\phi\,ds\,dt\,du, \tag{3.24}$$

où $\phi : (s,t,u) \mapsto (x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u))$ et $D = \phi(A)$.

**Exemples** :

– Coordonnées cylindriques :

$$\phi : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

– Coordonnées sphériques :

$$\psi : (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$$

## 3.4 Formule de Green-Riemann

**Théorème 3.6** *Soit $K$ un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est un arc $\Gamma$, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $C^1$ par morceaux. Soient $P$ et $Q$ deux applications de classe $C^1$ d'un ouvert $U$ contenant $K$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :*

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy, \tag{3.25}$$

*où le terme de gauche représente l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ le long de la courbe $\Gamma$.*

# Chapitre 4

# Courbes et surfaces

## 4.1 Courbes d'équation $f(x, y) = 0$

Nous considérons dans ce chapitre des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ où $f$ est une fonction de deux variables. De nombreuses courbes sont définies de cette façon, comme par exemple le cercle de centre 0 et de rayon $R$ avec $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$.

**Définition 4.1** *Soient $P$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si $a$ est un nombre réel, l'ensemble*

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$$

*s'appelle la ligne de niveau $a$ de l'application $f$.*

Par définition, la ligne de niveau $a$ de $f$ est l'image réciproque de $a$ par $f$.

**Proposition 4.1** – *Les lignes de niveau d'une application sont disjointes :*

$$a \neq b \implies L_a \cap L_b = \emptyset.$$

– *Tout point de $P$ est sur une ligne de niveau.*

**Proposition 4.2** *Soit $f$ une application de classe $C^1$. La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet une tangente en tout point $(x_0, y_0)$ qui n'est pas un point critique de $f$ et l'équation de la tangente en $(x_0, y_0)$ est :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) = 0$$

**Rappel :** On rappelle que le vecteur $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$ s'appelle le vecteur gradient de $f$ au point $p$.

**Proposition 4.3** *Soit $f$ une application de classe $C^1$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et si $(x_0, y_0)$ n'est pas un point critique de $f$, alors la tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est orthogonale au vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ en $(x_0, y_0)$.*

**Corollaire 4.1** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$ et $p = (a, b)$ un point de $U$. Si $p$ n'est pas un point critique de $f$, alors la ligne de niveau de $f$ qui passe par $p$ est "orthogonale" au vecteur $\nabla f(p)$. De plus, ce vecteur gradient pointe dans la direction des niveaux croissants.*

**Théorème 4.1 Fonctions implicites**
*Soient :*

- *$E_1, E_2$ et $F$ trois espaces vectoriels de dimensions finies tels que dim($E_2$) = dim($F$),*
- *$\Omega_1 \subset E_1, \Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts,*
- *$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow F$ une application de classe $C^1$,*
- *$(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $f(a_1, a_2) = 0$.*

*Si $\partial_2 f(a_1, a_2)$ est un isomorphisme de $E_2$ dans $F$ alors*

1. *il existe un voisinage ouvert $U_1 \subset E_1$ tel que $a_1 \in U_1$*
2. *il existe un voisinage ouvert $U_2 \subset E_2$ tel que $a_2 \in U_2$*
3. *il existe une unique application $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ telle que $\forall (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2, f(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_2 = \varphi(x_1)$*
4. *l'application $\varphi$ est de classe $C^1$ et*

$$\forall x_1 \in U_1, \quad \varphi'(x_1) = -\left(\partial_2 f(x_1, \varphi(x_1))\right)^{-1} \circ \partial_1 f(x_1, \varphi(x_1)) \tag{4.1}$$

5. *Si $f$ est de classe $C^p$ alors $\varphi$ sera aussi de classe $C^p$.*

Ce théorème affirme que si l'équation $f(x, y) = 0$ a une solution $(x_0, y_0)$, alors sous certaines hypothèses, cette équation peut se résoudre au voisinage de $(x_0, y_0)$ sous la forme $y = \varphi(x)$. C'est à dire que l'équation $f(x, y) = 0$ est équivalente à $y = \varphi(x)$, où $\varphi$ est une certaine application. On peut également résoudre sous la forme $x = \psi(y)$, où $\psi$ est une autre application.
**Exemple :**
Au voisinage d'un point $(x_0, y_0)$ avec $y_0 \geq 0$, l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ peut se résoudre sous la forme $y = \sqrt{1 - x^2}$.

## 4.2 Surfaces

Le théorème des fonctions implicites permet aussi de définir des surfaces du type $z = f(x, y)$ (ou $x = h(y, z), \quad y = k(x, z)$) pour les équations $g(x, y, z) = 0$.

**Définition 4.2** *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
*L'ensemble $S$ des points $(x, y, z) \in U \times \mathbb{R},$ tels que $z = f(x, y)$ s'appelle la surface d'équation $z = f(x, y)$.*

A chaque point $m = (x, y)$ appartenant à $U$ correspond un point $M = (x, y, f(x, y))$ appartenant à $S$. Le point $M$ se projette en $m$ sur le plan $xOy$. L'ensemble $S$ est, par définition, le graphe de la fonction $f$.

**Définition 4.3 Lignes de niveau**
*Soit $k$ un nombre réel, et soit $L$ la ligne de niveau $k$ de $f$. On a donc $L = \{(x, y) \in U | f(x, y) = k\}$. Supposons que $L$ est non vide, et considérons l'ensemble $\Lambda$ des points $(x, y, z) \in S$ tels que $(x, y) \in L$. On a $(x, y, z) \in \Lambda$ si et seulement si $z = f(x, y)$ et $z = k$. L'ensemble $\Lambda$ est donc l'intersection de $S$ avec le plan d'équation $z = k$. On dit que $\Lambda$ est la ligne de niveau $k$ de la surface $S$.*

**Définition 4.4 Plan tangent**
*Soient $S$ une surface, et $M_0$ un point de $S$. Tous les vecteurs tangents en $M_0$ aux courbes paramétrées tracées sur $S$ appartiennent à un même plan $P$ appelé plan tangent en $M_0$ à la surface $S$.*
*L'équation du plan tangent $P$ en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à la surface d'équation $z = f(x, y)$ s'écrit :*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0).$$

**Proposition 4.4** *La position de la surface par rapport au plan tangent en $M_0$ est donnée par le signe de :*

$$g(x, y) = f(x, y) - \left( z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) \right).$$

*Le point $(x_0, y_0)$ est un point critique de $g(x, y)$. On en déduit que :*

- *Si l'application $g$ a un minimum local en $(x_0, y_0)$ alors la surface est au-dessus de son plan tangent en $M_0$.*
- *Si l'application $g$ a un maximum local en $(x_0, y_0)$ alors la surface est en-dessous de son plan tangent en $M_0$.*

– *Si l'application $g$ n'a ni maximum local, ni minimum local, alors on dit que la surface présente un "col" au point $M_0$.*

**Proposition 4.5** *Le plan tangent en $(x_0, y_0, z_0)$ à la surface d'équation $z = f(x, y)$ est horizontal si et seulement s'il a une équation de la forme $z = z_0$, c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

# Chapitre 5

# Equations différentielles - Etude qualitative

**Définition 5.1** *Une* **équation différentielle** *est une équation portant sur une fonction inconnue d'une variable réelle ; dans l'équation peuvent apparaître la variable, la fonction et ses dérivées. L'***ordre** *de cette équation est l'ordre de dérivation le plus élevé qui y intervient. Une équation différentielle d'ordre supérieur à un peut s'exprimer comme un système d'équations du premier ordre.*

**Remarque :**
Une équation différentielle de la forme,

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{5.1}$$

peut s'écrire sous la forme d'une E.D.O. du premier ordre en posant,

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) = (x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{5.2}$$

et

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_3(t) \\ . & = & . \\ . & = & . \\ . & = & . \\ y_n'(t) & = & f(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) \end{array}$$

**Définition 5.2** *Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$. Soit $f$ une application de classe $C^1$ de $\Omega$ dans $E$.*

*On appelle* **solution** *de l'équation différentielle du premier ordre,*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{5.3}$$

*tout couple $(I, x)$ tel que :*

- *$I$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$*
- *l'application $x : t \longmapsto x(t)$ est une application de classe $C^1$ de $I$ dans $E$*
- *le graphe $(t, x(t))$ est contenu dans $\Omega$*
- *$\forall t \in I, x'(t) = f(t, x(t))$*

**Définition 5.3** *On appelle* **problème de Cauchy** *le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ & & \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

*Le couple $(t_0, x_0)$ est la donnée de Cauchy.*

**Remarque :**
$E$ est appelé l'espace des phases. Lorsque $dimE = 1$, on dit que l'équation est scalaire.
L'application $t \longmapsto x(t)$ est aussi appelée **courbe intégrale** de l'équation différentielle.

**Définition 5.4** *L'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ est dite autonome si $f$ ne dépend pas du temps $t$ ; elle s'écrit alors $x'(t) = f(x(t))$.*

## 5.1 Rappels

**Définition 5.5** *Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, et $k$ un entier naturel.*

- *Un champ de vecteurs de classe $C^k$ sur $U$ est une application $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^k$ sur $U$.*
- *Un champ de scalaires de classe $C^k$ sur $U$ est une application $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^k$ sur $U$.*

**Définition 5.6 Gradient d'un champ de scalaires**.
*Soit $f$ un champ de scalaire de classe $C^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. On appelle gradient de $f$ le champ de vecteurs :*

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right). \tag{5.4}$$

*$\nabla f(a)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^p, f'(a)(h) = (\nabla f(a)|h)$ où $(.|.)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^p$.*

**Théorème 5.1** *Soit un entier $k \geq 1$ et un champ de scalaires $f$ de classe $C^k$ sur $U$, alors $\nabla f$ est un champ de vecteurs de classe $C^{k-1}$ sur $U$.*

**Définition 5.7** *Soient $P$ une partie de $\mathbb{R}^2$, et $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $L_a = \{(x, y) \in P / f(x, y) = a\}$ s'appelle la ligne de niveau $a$ de l'application $f$.*

**Propriétés :**
- Les lignes de niveau sont disjointes : $a \neq b \Longrightarrow L_a \cap L_b = \emptyset$.
- Tout point de $P$ est sur une ligne de niveau.

## 5.2 Cas scalaire non autonome

En un point $(t, u(t))$ du graphe d'une solution, la **pente** de sa tangente est $f(t, u(t))$. On est ainsi amené à considérer un **champ de directions** dont les propriétés sont au coeur des méthodes qualitatives d'étude des équations différentielles.

**Définition 5.8** *Le* **champ de directions** *associé à l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est, en chaque point $(t, x)$ du plan, la* **pente** *$f(t, x)$, qui sera la pente de la tangente au graphe d'une solution passant par ce point.*

### 5.2.1 Méthode de la grille

L'idée la plus simple est de choisir un quadrillage rectangulaire régulier de points $(t, x)$, et d'évaluer la pente $f(t, x)$ en chacun de ces points. Une solution de l'équation suit le champ de directions : son graphe est tangent en chaque point à chacun des petits segments. Chaque point du plan représente une **condition initiale** $(t_0, x_0)$ ; la courbe qu'on trace à partir de ce point sera le graphe de la solution valant $x_0$ à l'instant $t_0$.

**Exemple :** $x' = -tx$.

**Interprétation graphique de l'existence et l'unicité des solutions :**

- L'existence d'une solution signifie qu'on peut en tracer le graphe de façon "compatible" avec le champ de directions.
- L'unicité signifie que, par chaque point, on ne peut en tracer qu'une : les graphes des solutions ne se croisent jamais.

### 5.2.2 Méthode des isoclines

Une autre façon de représenter le champ de directions d'une équation différentielle est de trouver les **isoclines**, c'est-à-dire les courbes sur lesquelles le champ a une direction donnée $c$, i.e. $\{(t,x)|f(t,x)=c\}$. En chaque point d'une isocline, la solution passant par ce point croise cette isocline avec la pente $c$.
**Exemples :**
- $x' = -tx$
- $x' = -t/x$
- $x' = x^2 - t$ Les solutions de cette équation ne peuvent pas s'exprimer à partir de fonctions élémentaires et de leurs primitives.

**Remarque :** L'intérêt des méthodes qualitatives est de permettre l'étude du comportement de solutions pour lesquelles il n'existe pas de formule élémentaire.

### 5.2.3 Barrières

**Définition 5.9** *Une fonction dérivable $a(t)$ est une* **barrière inférieure** *sur l'intervalle $I$ pour l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ si, pour tout $t \in I$, on a*

$$a'(t) \leq f(t, a(t)). \tag{5.5}$$

**Définition 5.10** *Une fonction dérivable $b(t)$ est une* **barrière supérieure** *sur l'intervalle $I$ pour l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ si, pour tout $t \in I$, on a*

$$b'(t) \geq f(t, b(t)). \tag{5.6}$$

Intuitivement, les barrières inférieures empêchent les solutions de s'échapper vers le bas, et les barrières supérieures les empêchent de s'échapper vers le haut.

**Définition 5.11** *Une barrière est dit* **forte** *si les inégalités sont strictes.*
*Elle est dit* **faible** *si on a l'égalité en au moins un point $t$.*

**Définition 5.12** *Une barrière inférieure $a(t)$ sur un intervalle $I$ est dite* **non poreuse** *si,pour toute solution $u(t)$, dès que $a(t_0) \leq u(t_0)$ pour un certain $t_0$ de $I$, on*

*a $a(t) \leq u(t), \forall t > t_0$ de $I$ pour lequel $u(t)$ est définie.*
*Une barrière supérieure $b(t)$ sur un intervalle $I$ est dite* **non poreuse** *si,pour toute solution $u(t)$, dès que $b(t_0) \geq u(t_0)$ pour un certain $t_0$ de $I$, on a $b(t) \geq u(t), \forall t > t_0$ de $I$ pour lequel $u(t)$ est définie.*

**Théorème 5.2** *Toute barrière forte d'une équation différentielle est non poreuse.*

### 5.2.4 Entonnoirs et anti-entonnoirs

Nous supposerons dans la suite que toutes les barrières sont non poreuses.

**Définition 5.13** *Si, pour une équation différentielle $x' = f(t,x)$, $a(t)$ est une barrière inférieure et $b(t)$ une barrière supérieure définies sur un intervalle $I$, et si $a(t) < b(t)$ sur $I$, on dit que*

$$\{(t,x) | t \in I \text{ et } a(t) \leq x \leq b(t)\} \tag{5.7}$$

*est un* **entonnoir** *sur $I$.*

**Théorème 5.3** *Soit $u(t)$ une solution d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$. Si $a(t)$ et $b(t)$ définissent un entonnoir sur $I$, et s'il existe $t^* \in I$ tel que $(t^*, u(t^*))$ est dans l'entonnoir, alors $(t, u(t))$ est dans l'entonnoir pour tout $t > t^*$ de $I$.*

**Définition 5.14** *Si, pour une équation différentielle $x' = f(t,x)$, $a(t)$ est une barrière inférieure et $b(t)$ une barrière supérieure définies sur un intervalle $I$, et si $a(t) > b(t)$ sur $I$, on dit que*

$$\{(t,x) | t \in I \text{ et } a(t) \geq x \geq b(t)\} \tag{5.8}$$

*est un* **anti-entonnoir** *sur $I$.*

La plupart des solutions “quittent” l'anti-entonnoir, mais le théorème suivant nous assure qu'au moins une solution y reste piégée.

**Théorème 5.4** *Si $a(t)$ et $b(t)$ définissent un anti-entonnoir sur $I$ pour l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, il existe une solution $u(t)$ telle que*

$$b(t) \leq u(t) \leq a(t), \tag{5.9}$$

*pour tout $t$ de $I$.*

## 5.3 Cas bidimensionnel autonome

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

où $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

**Définition 5.15**
- *La projection d'une solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ dans le plan $x_1 0 x_2$ s'appelle une* **orbite***.*
- *On appelle* **points d'équilibre** *du problème $(P)$ les points $x^* \in C^1$ tels que $f(x^*) = 0$.*
- *les orbites qui "joignent" des points d'équilibre différents s'appellent des* **orbites séparatrices***.*
- *les solutions correspondant aux points d'équilibre s'appellent des* **solutions stationnaires***.*

**Remarque :**
Toute équation différentielle peut se ramener à l'étude d'une équation autonome à condition de lui adjoindre une variable supplémentaire $\tau$ vérifiant $d\tau/dt = 1$. Si l'on pose $y = (\tau, x)$, l'équation $x' = f(t,x)$ est équivalente à l'équation autonome $y' = (1, f(y))$.

**Exemple :** Le pendule :

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \theta' & = & y \\ y' & = & -\dfrac{g}{l}\sin(\theta)(-\epsilon y \text{ frottement}) \end{array}\right.$$

# Chapitre 6

# Equations différentielles

## 6.1 Cas général

**Définition 6.1** *Soient $(I_1, x_1)$ et $(I_2, x_2)$ deux solutions du problème de Cauchy. On dit que $(I_2, x_2)$ prolonge $(I_1, x_1)$ si $I_1 \subset I_2$ et $x_2|_{I_1} = x_1$.*
*Une solution est dite* **maximale** *si elle n'admet aucun prolongement.*

**Définition 6.2** *On appelle* **extrémité droite** *(resp. gauche) d'une solution $(I, x)$ l'ensemble des couples $(t^+, x^+)$ (resp. $(t^-, x^-)$) où $t^+$ est l'extrémité droite de $I$ (éventuellement $+\infty$) et $x^+$ un point d'accumulation de $x(t)$ quand $t$ tend vers $t^+$ : $\exists t_k \to t^+, x^+ = \lim\limits_{k \to +\infty} x(t_k)$ (resp. $t^-$ est l'extrémité gauche de $I$ et $x^-$ un point d'accumulation de $x(t)$).*
*On note $\mathcal{E}^+(I, x)$ l'ensemble des extrémités droites, et $\mathcal{E}^-(I, x)$ l'ensemble des extrémités gauche, et on pose $\mathcal{E}(I, x) = \mathcal{E}^-(I, x) \cup \mathcal{E}^+(I, x)$.*
*L'ensemble des extrémités droites ou gauches peut être vide.*

**Exemples :**
- $I = ]0, +\infty[, x(t) = \sin(\frac{1}{t})$
  $\mathcal{E}^-(I, x) = \{0\} \times [-1, 1], \mathcal{E}^+(I, x) = (+\infty, 0)$
- $I = ]-1, 1[, x(t) = \dfrac{1}{1 - t^2}$
  $\mathcal{E}(I, x) = \emptyset$

**Théorème 6.1** *(Cauchy-Lipschitz)*
*Soit $f$ une application de classe $C^1$ de $\Omega$ dans $E$ alors :*

- *$\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ il existe une unique solution maximale $(I, x)$ du problème de Cauchy.*
- *Les extrémités de la solution maximale $(I, x)$ n'appartiennent pas à $\Omega$ : $\mathcal{E}(I, x) \cap \Omega = \emptyset$.*

## 6.2 Equations scalaires à variables séparables

**Définition 6.3** *On appelle* **équation à variables séparables** *une équation du type $x'(t) = a(t)f(x)$. Cette classe comprend deux cas particuliers :*
- *Equations du type $x'(t) = a(t)$. La fonction inconnue $x$ n'intervient pas dans l'équation ; les solutions sont alors les primitives de $a(t)$.*
- *Equations du type $x'(t) = f(x)$ : équation autonome.*

**Théorème 6.2** *Soit $a$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\Omega_{x_0}$ la composante connexe de $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ contenant $x_0$. Soit,*

$$F(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(y)} dy, \tag{6.1}$$

*définie dans $\Omega_{x_0}$ et*

$$A(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) ds. \tag{6.2}$$

*Soit $I$ la composante connexe de l'ouvert $A^{-1}(F(\Omega_{x_0}))$ contenant $t_0$.*
*Alors $F$ est un difféomorphisme de $\Omega_{x_0}$ sur $I$ et $(I, x(t))$ avec $x(t) = F^{-1}(A(t))$ est la solution maximale pour la donnée de Cauchy $(t_0, x_0)$.*

**Remarque :** Si $a(t)$ a un nombre fini de discontinuités, on note $\Omega_{t_0}$ la composante connexe de l'ensemble $\{t, a(t) \text{ continue}\}$ contenant $t_0$, et on prend $I = A^{-1}(F(\Omega_{x_0}) \cap A(\Omega_{t_0}))$.

## 6.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

**Définition 6.4** *On appelle* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *une équation du type,*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{6.3}$$

*où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I$. Si $b(t) \equiv 0$, l'équation est dite homogène.*
*On dit que,*

$$x'(t) = a(t)x(t), \tag{6.4}$$

*est* **l'équation homogène associée** *à l'équation 6.3. On appelle parfois $b(t)$ le* **second membre** *de l'équation 6.3 .*

**Théorème 6.3** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $a$ et $b$ deux applications continues de $I$ dans $\mathbb{R}$.*
*Alors l'unique solution maximale du problème de Cauchy,*

$$\begin{cases} x'(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*est $(I, x)$ où,*

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds. \tag{6.5}$$

**Démonstration:** L'existence et l'unicité sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il suffit ensuite de montrer par un calcul simple de dérivation que,

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds. \tag{6.6}$$

est bien solution du problème de Cauchy 6.3. ■

**Théorème 6.4** *La solution $x(t)$ de 6.3 peut s'écrire,*

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t), \tag{6.7}$$

*où $x_p(t)$ est une solution particulière de l'équation générale et $x_g(t)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant $x_g(t_0) = x_0 - x_p(t_0)$ :*

$$\begin{aligned} x_g(t) &= x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \\ x_p(t) &= \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds. \end{aligned}$$

## 6.4 Méthode de variation des constantes

La formule donnant les solutions comporte une intégrale ; on dit alors que l'on a résolu l'équation différentielle, même si on ne sait pas calculer explicitement cette intégrale.

1. On résout l'équation homogène associée $x'(t) = a(t)x(t)$.
   Les solutions sont :
   $$x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{6.8}$$
   Cherchons alors les solutions de 6.3 sous la forme,
   $$u(t) = v(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{6.9}$$
   avec $v(t_0) = u(t_0) = x_0$.
2. On substitue $u(t)$ dans 6.3, et l'on trouve
   $$\begin{aligned} u'(t) &= v'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + v(t)a(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \\ &= a(t)v(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + b(t). \end{aligned}$$
   Après simplification, on obtient :
   $$v'(t) = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{6.10}$$
3. On trouve alors $v(t)$ par un calcul de primitive, et on reporte dans $u(t)$ :
   $$v(t) = \int_{t_0}^{t} v'(s)ds + x_0 = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds + x_0, \tag{6.11}$$
   et donc,
   $$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left\{ \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds + x_0 \right\}. \tag{6.12}$$

On peut vérifier facilement que cet $u(t)$ est bien solution de notre problème.
**Exemple :**
$$x'(t) = ax(t) + b. \tag{6.13}$$
L'équation est à la fois à variables séparables et linéaire. Résolvons-la ici en tant qu'équation linéaire :

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$x_0 e^{a(t-t_0)}. \tag{6.14}$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$u(t) = v(t)e^{a(t-t_0)}. \tag{6.15}$$

2. En substituant dans $x' = ax + b$, on trouve :

$$v'(t)e^{a(t-t_0)} + av(t)e^{a(t-t_0)} = av(t)e^{a(t-t_0)} + b, \tag{6.16}$$

soit encore :

$$v'(t) = be^{-a(t-t_0)}. \tag{6.17}$$

3. La fonction vérifiant $v(t_0) = x_0$ est donc

$$v(t) = -\frac{b}{a}e^{-a(t-t_0)} + x_0 + \frac{b}{a}. \tag{6.18}$$

En reportant dans $u(t)$, on trouve finalement :

$$u(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1). \tag{6.19}$$

## 6.5 Exemples : l'homme de Neandertal et les comptes bancaires

### 6.5.1 Comptes bancaires à taux d'intérêt variable

Une façon de concrétiser l'équation différentielle linéaire $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ est de considérer qu'elle représente l'évolution du solde d'un compte en banque, bénéficiant d'un taux d'intérêt $a(t)$ variable au cours du temps ; $b(t)$ représente les dépôts (valeurs positives) ou les retraits (valeurs négatives) au cours du temps. On peut observer que l'équation représentant l'évolution d'un compte en banque n'est linéaire que si :

– le taux d'intérêt ne dépend que du temps, et en aucune façon du solde du compte, ni des sommes déposées ;
– les dépôts et les retraits sont aussi fonctions du temps seul, et ne dépendent pas du solde du compte.

La formulation de la solution,

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds \right\}. \tag{6.20}$$

s'interprete très bien en termes bancaires. La solution est une somme de deux termes, le premier dépendant du dépôt initial, et le second des dépôts et des retraits ultérieurs.
Introduisons la fonction de deux variables,

$$w(s,t) = e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{6.21}$$

Considérée comme fonction de $t$ seul, $w(s,t)$ est la solution de l'équation différentielle homogène associée qui prend la valeur 1 pour $t = s$. Autrement dit, c'est la valeur au temps $t$ d'un compte valant 1 euro au temps $s$, et sur lequel il n'y a ni retrait ni dépôt. On peut penser, pour $t > s$, à la valeur au temps $t$ d'une somme de 1 euro déposée au temps $s$, et pour $t < s$ à la somme qu'il faut déposer au temps pour disposer de 1 euro au temps $s$. La fonction $w(s,t)$ a pour rôle d'actualiser les montants : il revient au même de posséder $X$ à l'instant $s$, ou $w(s,t)X$ à l'instant $t$.
La solution peut se réécrire en fonction de $w$ :

$$u(t) = w(t_0, t)x_0 + \int_{t_0}^{t} w(s,t)b(s)ds. \tag{6.22}$$

La somme disponible sur le compte résulte de l'addition de toutes les sommes déposée entre $t_0$ et $t$ ($x_0$ à l'instant $t_0$, et $b(s)ds$ à l'instant $s$) actualisées au moyen de la fonction $w(s,t)$.

### 6.5.2 Homme de Neandertal : datation au carbone 14

On sait que la matière radio-active se désintègre avec un débit proportionnel à chaque instant à la quantité de matière radio-active restante. La quantité $q(t)$ de matière radio-active à l'instant $t$ vérifie donc l'équation $q'(t) = -aq(t)$, où $a$ est une constante positive.
**Carbone 14 :** Le carbone contenu dans la matière vivante contient une infime proportion d'isotope radio-actif $C^{14}$. Ce carbone radio-actif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de $C^{14}$ dans son carbone total,

essentiellement composé de l'isotope stable $C^{12}$.
Après la mort, les échangent cessent et la quantité de carbone radio-actif diminue : elle perd $1/8000$ de sa masse chaque année. La proportion de $C^{14}$ dans le carbone total perd elle aussi $1/8000$ de sa valeur chaque année. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un individu.
**Exercice :** Des fragments de squelette humain de type Neandertal sont retrouvés dans une caverne. L'analyse montre que la proportion de $C^{14}$ n'est que 6.24% de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Quand cet individu a-t-il vécu ?
Si le temps $t$ compté après la mort est exprimé en années, la proportion de $C^{14}$ vérifie l'équation,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{8000}x \tag{6.23}$$

dont les solutions sont

$$x(t) = x_0 e^{-t/8000}, \tag{6.24}$$

où $x_0$ représente la proportion de $C^{14}$ chez un être vivant.
Ici, on a

$$x(t) = 0.0624 x_0 = x_0 e^{-t/8000} \tag{6.25}$$

d'où

$$t = -8000 \log(0.0624) \approx 22200. \tag{6.26}$$

Cet homme de Neandertal a vécu il y a environ 22200 ans.

## 6.6 Systèmes différentiels linéaires

Comme pour les équations différentielles linéaires dans $\mathbb{R}$, nous dirons qu'une équation différentielle linéaire de $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{6.27}$$

est homogène si $b(t) = 0$, et non homogène si $b(t) \neq 0$. Dans ce cas, l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{6.28}$$

est appelée l'équation homogène associée.

**Théorème 6.5** *Si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions d'une équation différentielle homogène, alors toute combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$ est aussi une solution.*

**Traduction :** Les solutions d'un système linéaire homogène forment un espace vectoriel.

**Théorème 6.6** *Soit $u_p(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{6.29}$$

*Une fonction (vectorielle) $u(t)$ est solution si et seulement si elle peut s'écrire*

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t), \tag{6.30}$$

*où $u_h(t)$ est solution de l'équation homogène associée.*

**Théorème 6.7** *Si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont respectivement solutions des équations différentielles*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b_1(t) \quad \text{et} \quad x'(t) = A(t)x(t) + b_2(t) \tag{6.31}$$

*ayant la même équation homogène associée, alors*

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{6.32}$$

*est solution de l'équation*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b_1(t) + b_2(t). \tag{6.33}$$

**Traduction :** Les solutions d'un système linéaire non homogène forment un espace affine, translaté de l'espace vectoriel du système homogène associé par n'importe quelle solution du système non homogène.

### 6.6.1 Système fondamental - Wronskien

On considère l'équation homogène d'ordre $n$ :

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)x(t) = 0 \tag{6.34}$$

La résolution de cette équation se ramène à celle du système homogène :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ . \\ . \\ . \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & -a_{n-3}(t) & ... & -a_1(t) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ x' \\ . \\ . \\ . \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

A chaque solution de 6.34 nous associerons la solution $X = (x, x', ..., x^{(n-1)})$ du système linéaire.
On voit alors immédiatement que l'indépendance linéaire de $p$ solutions $X_i = (x_i, x'_i, ..., x_i^{(n-1)})$, $i = 1, ..., p$ du système linéaire équivaut à l'indépendance linéaire des $p$ fonctions scalaires $x_1, x_2, ..., x_p$.

**Définition 6.5** *On dit que $p$ solutions $x_1, ..., x_p$ de 6.34 sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ non tous nuls, vérifiant*

$$\forall t, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i(t) = 0. \tag{6.35}$$

*Pour $p = n$, un système de $n$ solutions linéairement indépendantes de 6.34 est appelé un* **système fondamental** *de solutions.*

**Théorème 6.8** *Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un sytème fondamental de solutions, les solutions de 6.34 sont les fonctions*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t), \tag{6.36}$$

*où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ désignent des constantes scalaires arbitraires.*

**Théorème 6.9** *Pour que $p$ solutions $x_i$ de 6.34 soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit que, pour une valeur $t \in I$, la matrice*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & ... & x_p(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & ... & x'_p(t) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & ... & x_p^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

*soit de rang $p$ ; et il en est de même pour tout $t \in I$.*
*En particulier, pour que $n$ solutions $x_1, x_2, ..., x_n$ de 6.34 forment un système fondamental, il faut et il suffit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que la fonction*

$$D(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & ... & x_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & ... & x'_n(t) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & ... & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

*vérifie* $D(t_0) \neq 0$ *; et on a alors* $D(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in I$.
*La fonction* $D : t \longrightarrow D(t)$ *est appelée* **wronskien** *du système* $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

### 6.6.2 Systèmes linéaires à coefficients constants

Soit un système d'équations différentielles de la forme,

$$x'(t) = Ax(t) + b(t) \tag{6.37}$$

où $A \in \mathcal{L}(E), b \in C^0(I, E)$.

**Théorème 6.10** *Soit* $(t_0, x_0) \in I \times E$. *La solution maximale du problème de Cauchy est* $(I, x)$ *où* $x$ *est donné par :*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds. \tag{6.38}$$

**Définition 6.6** *L'application* $(t, s) \longmapsto e^{(t-s)A} = R(t, s)$ *s'appelle la résolvante.*

### 6.6.3 Rappels d'algèbre linéaire

**Définition 6.7** *Si* $A$ *est une matrice carrée, on définit*

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \tag{6.39}$$

**Proposition 6.1** *Si* $A$ *est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *alors* $e^A$ *est diagonale, et ses éléments diagonaux sont* $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$.

**Proposition 6.2** *La série définissant* $e^A$ *converge pour toute matrice carrée* $A$.

**Proposition 6.3** *Si* $A$ *et* $B$ *sont deux matrices carrées qui commutent,* $AB = BA$, *alors*

$$e^A.e^B = e^{A+B} \tag{6.40}$$

**Proposition 6.4** *Si* $A$ *est une matrice carrée, on a la formule :*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \tag{6.41}$$

**Démonstration:** D'après la définition de la dérivée, on a :

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}). \tag{6.42}$$

Comme $tA$ et $hA$ commutent, on a $e^{(t+h)A} = e^{tA}e^{hA}$, et donc,

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{hA} - I)e^{tA}. \tag{6.43}$$

Or,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{hA} - I) = A \tag{6.44}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \tag{6.45}$$

■

**Proposition 6.5** *Si $M$ est une matrice inversible, alors*

$$e^{(M^{-1}AM)} = M^{-1}e^{A}M \tag{6.46}$$

**Théorème 6.11** *Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$, et soit $v_1, ..., v_n$ une base de vecteurs propres de $A$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. On note $P$ la matrice de passage, de changement de base. On a alors :*

$$e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

## 6.7 Stabilité des points d'équilibre pour une EDO autonome

Le comportement des solutions est contrôlé par les signes des parties réelles des valeurs propres :

- l'origine est attractive si les valeurs propres ont des parties réelles négatives ; on dit alors que c'est un puits,

- l'origine est répulsive si les valeurs propres ont des parties réelles positives ; on dit alors que c'est une source,
- l'origine est un point selle (ou col) si les valeurs propres sont réelles et de signes opposés.

**Théorème 6.12** *Si $A$ est une matrice $n \times n$ dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives, toutes les solutions $x(t)$ de l'équation $x' = Ax$ vérifient :*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \tag{6.47}$$

**Remarques** :
- L'origine s'appelle alors un puits.
- Il existe un théorème analogue si toutes les valeurs propres ont des parties réelles positives. On a alors :

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0 \tag{6.48}$$

  et l'origine s'appelle une source,
- la réciproque du théorème est vraie.

Si aucune valeur propre n'est imaginaire pure, l'espace $\mathbb{R}^n$ admet deux sous-espaces propres supplémentaires $V^+$ et $V^-$ vérifiant $AV^+ = V^+$ et $AV^- = V^-$ auxquels on peut appliquer le théorème précédent. Si $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, $V^-$ est engendré par les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres négatives, et $V^+$ par les autres. Si $A$ n'est pas diagonalisable, ou possède des valeurs propres complexes, c'est un peu plus compliqué, mais le résultat reste vrai.

**Théorème 6.13** *Soit $A$ une matrice $n \times n$ dont aucune valeur propre n'a de partie réelle nulle. Soit $P_A$ son polynôme caractéristique qu'on peut écrire $P_A = P_+P_-$, où les racines de $P_+$ sont de partie réelle positive, et celles de $P_-$ de partie réelle négative. Posons $V^{\pm} = \ker(P_{\pm}(A))$.*
*Considérons alors l'équation différentielle $x' = Ax$.*

1. *Toute solution $x(t)$ peut s'écrire $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$, où $x_+(t)$ est à valeurs dans $V^+$ et $x_-(t)$ dans $V^-$.*
2. *On a $\lim_{t \to +\infty} x_-(t) = \lim_{t \to -\infty} x_+(t) = 0$.*

Plus généralement :

**Définition 6.8** *Soit $x^*$ un point d'équilibre, i.e. tel que $f(x^*) = 0$.
On dit que $x^*$ est stable si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x_0/|x_0 - x^*| \leq r$ la solution maximale $(I, x)$ issue de $(t_0, x_0)$ vérifie :*

$$I = ]t^-, +\infty[ \ \text{ et } \ |x(t) - x^*| \leq R\,, \quad \forall t \geq t_0. \tag{6.49}$$

**Définition 6.9** *On dit que $x^*$ est asymptotiquement stable s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x_0/|x_0 - x^*| \leq r$ la solution maximale $(I, x)$ issue de $(t_0, x_0)$ vérifie :*

$$I = ]t^-, +\infty[ \ \text{ et } \ \lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*. \tag{6.50}$$

# Chapitre 7

# Exercices

## 7.1 Fonctions de plusieurs variables

### 7.1.1 Dérivation

**Exercice 1.** Montrer, en utilisant la définition de la dérivée, que les applications suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée :

1. $f$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
2. $f$ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 z - 2xy, z^3 - xyz)$.
3. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients réels. $f$ est l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ vers lui-même qui à $p : p(x) = ax^2 + bx + c$, associe $q : q(x) = 3ax^2 + c$.
4. $f$ est l'application de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $f(A, B) = A^2 B$.
5. $f$ est l'application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (u(x), x)$ avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
6. $E$ et $F$ sont deux evn de dimension finie et $f$ est l'application de $\mathcal{L}(E, F) \times E$ vers $F$ définie par : $f(l, x) = l(x)$.
7. $E$ et $F$ sont deux evn de dimension finie, $g$ est une application dérivable de $E$ vers $\mathcal{L}(E, F)$ et $f$ est l'application de $E$ vers $F$ définie par : $f(x) = g(x)(x)$.

**Exercice 2.** Etudier la dérivabilité des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ suivantes :

- $x \mapsto \|x\|_2$
- $x \mapsto \|x\|_1$
- $x \mapsto \|x\|_\infty$

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Exprimer au moyen de $f'$ les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $g : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f(y/x)$.
2. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = f(z \sin(x))$.

**Exercice 4.** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y} & \text{si} \quad x^2 + y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f$ admet en $(0, 0)$ des dérivées dans toutes les directions mais que $f$ n'est pas dérivable en ce point.

**Exercice 5.** On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue.
2. Calculer les dérivées partielles.
3. Montrer que $f$ n'est pas dérivable.

**Exercice 6.** Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $C^1$ :

– $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

– $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \dfrac{x \sin(y)}{y}$ si $y \neq 0$ et $g(x, 0) = x$.

**Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^3 + x, y - x^2)$.

1. Montrer que $f$ est de classe $C^1$.
2. Calculer la matrice jacobienne de $f$.
3. Montrer que $f$ est bijective.
4. Montrer que l'application $f^{-1}$ est de classe $C^1$.

**Exercice 8.** Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ouvert composé par les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$.

– Montrer que $f$ est dérivable et calculer sa dérivée $f'(A)(H)$.
– Montrer que $f'(A)$ est continue.

### 7.1.2 Dérivées d'ordre supérieur

**Exercice 9.** Calculer la dérivée seconde des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^3 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^3yz - 2y^2z^2 \end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & A^2B \end{array}$$

**Exercice 10.** Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application de classe $C^2$ telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que, pour tout $x \in E, D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

**Exercice 11.** Les applications suivantes sont-elles des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x + e^x \cos(\frac{1}{1+x^2y^2}), y, x^2+y^2) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

$$k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y). \end{array}$$

### 7.1.3 Extrema

**Exercice 12.** Etudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ .$$

**Exercice 13.** Déterminer la plus grande et la plus petite valeurs de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

dans le domaine $D = \{(x, y) \,|\, x \leq 0, \ y \leq 0, \ x + y \geq -3 \}$ .

**Exercice 14.** Soient $a, b, c$ des nombres réels, tels que $c \neq 0$ et soit $f \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) \ = \ \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \ .$$

Montrer que $f$ a un maximum et le calculer.

**Exercice 15.** Rechercher les extrema des fonctions suivantes :

- $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^2 - y^3$
- $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^2 + y^4$
- $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

**Exercice 16.** Un magasin prévoit d'investir 100000 Euros en publicité. Une minute de publicité coûte 30000 Euros à la télévision et 10000 Euros à la radio.
Si le magasin achète $t$ minutes de pub TV et $r$ minutes de pub radio, ses revenus en milliers de Euros sont :

$$f(t, r) = -2t^2 - r^2 + tr + 8t + 3r.$$

Comment ce magasin peut-il maximiser ses revenus ?

**Exercice 17.** Un fermier souhaite cultiver du blé (bio et non bio) et du maïs. Les contraintes qui lui sont fixées sont les suivantes : il doit produire la même superficie de blé que de maïs, et la superficie de blé bio doit être 2 fois moins importante que la superficie de blé non-bio. Les prix de vente sont les suivants :

– $x_1$ hectares de blé bio est vendu $(300 - 50x_1) euro/hect$.
– $x_2$ hectares de blé non bio est vendu $(500 - 25x_2) euro/hect$.
– $x_3$ hectares de maïs est vendu $(3750 - 75x_3) euro/hect$.

Les couts de production sont :
– le blé bio coûte $500 euro/hect$.
– le blé non bio coûte $1000 euro/hect$.
– le maïs coûte $750 euro/hect$.

De plus la location de la terre s'élève à $500 euro/hect$. Comment ce fermier peut-il maximiser ces profits ?

**Exercice 18.** Chaque matin, 10000 personnes se rendent en centre ville. Le trajet en métro dure 40 minutes. Si $x$ milliers de personnes utilisent leur voiture, la durée du trajet en voiture est de $(20 + 5x)$ minutes.

1. Montrer que si les personnes sont libres de choisir, alors 4000 personnes utilisent la voiture. (pour cela on assume que les personnes se répartissent de façon à ce que la durée du trajet en métro et en voiture soit la même ; à cet équilibre, il n'y a pas de raison à ce que quelqu'un change de moyen de transport).
2. Montrer que la durée moyenne de trajet serait minimisée si 2000 personnes seulement prenaient leur voiture.

**Exercice 19.** Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
une matrice carrée symétrique à coefficients réels et soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A$ dans la base canonique. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par
$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en posant $f(x, y) = q(x, y)e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y)$ est un point critique de $f$ si et seulement si l'on a $u(x, y) = \big(q(x, y)\big)(x, y)$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que $(x, y)$ est un point critique de $f$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :
   (a) le vecteur $(x, y)$ est un vecteur propre de $u$,
   (b) on a l'égalité $(1 - x^2 - y^2)q(x, y) = 0$.

3. Montrer que les éléments du noyau de $u$ sont des points critiques de $f$ .
4. Soit $(x, y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au noyau de $u$ . Montrer que $(x, y)$ est un point critique de $f$ si et seulement si $(x, y)$ est un vecteur propre de $u$ , de norme euclidienne 1, pour une valeur propre non nulle.
5. A quelles conditions la fonction $f$ a-t-elle-un nombre fini de points critiques ? Dans ce cas, combien y a-t-il de points critiques ? La fonction $f$ a-t-elle un extremum local en ces points ?

## 7.2 Séries de Fourier

**Exercice 20.** Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la fonction $f$, $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[ \\ \cosh(\pi a) & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

Déterminer les coefficients de Fourier de $f$.
**Exercice 21.** Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction $f$, $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par : $f(x) = \cosh(ax)$ dans les deux cas suivants :

1. $a \in i\mathbb{Z}$
2. $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

**Exercice 22.** Déterminer la série de Fourier des fonctions $f$ des exercices 26 et 27.
**Exercice 23.**

1. Peut-on appliquer la formule de Parseval aux fonctions $f$ des exercices 26 et 27 ?
2. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
3. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

**Exercice 24.**

1. Peut-on appliquer le *théorème de convergence normale* aux fonctions $f$ des exercices 26 et 27 ?
2. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?

3. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

**Exercice 25.**

1. Peut-on appliquer le *théorème de convergence simple* aux fonctions $f$ des exercices 26 et 27 ?
2. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
3. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

**Exercice 26.**

1. Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction $T-$périodique $f$ définie par :
$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{T}x\right)\right|.$$
2. Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de $f$ ?

**Exercice 27.** La série trigonométrique $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ ?

**Exercice 28.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ définie par $\forall x \in ]-\pi, \pi], \quad f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Calculer les coefficients trigonométriques de $f$.
3. On note $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de $f$. Calculer $S_p(f)(\pi)$. Est-ce que $S_p(f)(\pi) \to f(\pi)$ lorsque $p \to +\infty$ ? Pourquoi ?
4. Calculer la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ à partir de $S_p(f)$.
5. En appliquant la formule de Parseval, en déduire la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 29.** On définit les fonctions T-périodiques $f$ et $g$ par :
$$\forall x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad f(x) = x^4, \quad g(x) = x^2.$$

1. Calculer les coefficients trigonométriques de $f$ et de $g$.
2. Ecrire $f$ et $g$ sous la forme de séries trigonométriques.
3. On pose $\forall x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad h(x) = f(x) - \frac{T^2}{2} g(x)$.
   Ecrire la série trigonométrique de $h$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$.

## 7.3 Formes différentielles et intégrales multiples

**Exercice 30.** Montrer que $\omega = -\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy$ est exacte dans $(\mathbb{R}_+)^2$.

**Exercice 31.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\omega = f(x)dx + g(y)dy$. Montrer que $\omega$ est exacte dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 32.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\omega = 2xzdx + f(y)g(z)dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dz$. Déterminer $f$ et $g$ telles que $\omega$ soit fermée sur $\mathbb{R}^3$ puis calculer $F$ telle que $\omega = dF$.

**Exercice 33.** Soit $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$.

**1.** Montrer que $\omega$ est fermée dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
**2.** Montrer que $\omega$ n'est pas exacte dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
**3.** Montrer que $\omega$ est exacte dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0),\ x \leq 0\}$.
**4.** Calculer $F$ telle que $\omega = dF$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0),\ x \leq 0\}$.

**Exercice 34.**

**1.** Définir l'orientation directe sur le bord du compact $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.
**2.** Soit $\omega = -yx^2 dx + xy^2 dy$. Calculer $\int_{\partial K} \omega$ de deux manières différentes.

**Exercice 35.** Même exercice avec $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

## 7.4 Equations différentielles - Etude qualitative

**Exercice 36.** Sur chacun des huit champs de directions suivants :
– Trouver l'isocline $I_0 = \{(t,x)|f(t,x) = 0\}$.
– Trouver les points où la pente n'est pas définie.
– Dessiner quelques solutions.
– Marier chaque dessin avec l'une des équations ci-dessous :

1. $x' = 2$
2. $x' = t$
3. $x' = x - t$
4. $x' = x$
5. $x' = x/t$
6. $x' = -t/x$
7. $x' = (x-2)/(t-1)$
8. $x' = tx^2 + t^2$

**Exercice 37.** On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions stationnaires
2. Dessiner le champ de vecteurs
3. Dessiner une solution pour chacun des cas suivants : $x_0 < 0, \quad x_0 \in ]0,1[, \quad x_0 > 1$.

**Exercice 38.** On considère l'équation différentielle dépendante du temps :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xt \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Résolution graphique de ce problème.

**Exercice 39.** On considère l'équation

$$x' = x^2 - t.$$

1. Tracer les isoclines $x^2 - t = 0$, $x^2 - t = 1$, $x^2 - t = -1$.
2. En déduire l'existence d'entonoirs et d'anti-entonoirs.
3. Que peut-on dire de la solution du problème de Cauchy pour $-\sqrt{t_0} \leq x_0 \leq \sqrt{t_0}$.
4. Déterminer les régions du plan où pour $-\sqrt{t_0 - 1} \geq x_0$ la solution vérifie $-\sqrt{t-1} \geq x(t)$.
5. Que peut-on dire pour $x_0 \geq \sqrt{t_0 + 1}$ ?
6. On se propose maintenant de montrer que certaines solutions tendent vers l'infini en temps fini. Déterminer les régions du plan où les solutions de $\alpha' = \alpha^{3/2}$ sont des barrières inférieures pour (1). Conclure.

**Exercice 40.** On considère le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - x^2 - 3xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2y^2 - xy \\ \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Résolution graphique de ce problème.

## 7.5 Equation différentielles

**Exercice 41.** On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une et une seul solution maximale notée $(I, x)$.
2. Montrer que si $x_0 \in ]0,1[$, alors : $\forall t \in I, x(t) \in ]0,1[$. En déduire que dans ce cas $I = \mathbb{R}$.

3. Montrer que si $x_0 > 1$, alors : $\forall t \in I, x(t) > 1$. En déduire que dans ce cas, $I$ est de la forme $]a, +\infty[$.
4. Résoudre explicitement l'équation.

**Exercice 42.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $x' = -\dfrac{x^2}{t^3}\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$
2. $x' = \dfrac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$ (Utiliser le changement de variable $x = yt$.)
3. $x' = \dfrac{x - t^2}{t}\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$

**Exercice 43.** Résoudre le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = ty + e^{t^2/2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 44.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 u'(t) + t^2 u^2(t) = tu(t) - 1 \quad \forall t > 0 \quad (E)$$

1. Chercher une solution particulière $u_0$ de la forme : $u_0(t) = at^p$ où $a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $u$ une solution de $(E)$. On pose $v(t) = u(t) - u_0(t)$.
   Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $v$, et la résoudre.
3. Donner la solution $u$ de $(E)$ telle que $u(1) = 2$.

**Exercice 45.** Résoudre l'équation suivante :

$$t^2 y' + y + y^2 = 0 \qquad t > 0$$

**Exercice 46.** Montrer que l'équation suivante possède des solutions non nulles développables en série entière.

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = f(t) \tag{7.1}$$

où $C$ : capacité, $L$ : self-induction et $R$ : résistance.

**Exercice 47.** On considère le problème suivant (équation de la chaleur 1D) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in ]0,1[, \quad t > 0 \\ u(t,0) = u(t,1) & \forall t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in ]0,1[ \end{cases}$$

1. Ramener ce problème à un problème sur $\mathbb{R}^+ \times ]0, 2\pi[$.
2. Développer $u(t, .)$ en une série de Fourier tronquée à $M$ termes.
3. Ramener le problème à une équation différentielle ordinaire.
4. Calculer la solution analytique de cette équation différentielle.
5. En déduire la solution du problème initial.

**Exercice 48.** Soit l'équation différentielle (*) $y' = ty^2 - y$ et soit $r$ un nombre réel.

1. Dessiner l'isocline de la pente 0. Dans quelles régions les solutions sont-elles croissantes ? décroissantes ?
2. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $\phi_r : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (*) telle que $\phi_r(0) = r$.
3. Montrer que l'on a $\phi_1(t) = \dfrac{1}{1+t}$ pour tout $t \in ]-1, +\infty[$.
4. Supposons $r \neq 0$. Montrer que l'on a $\phi_r(t) \neq 0$ quel que soit $t \in ]a, b[$. Posons $h(t) = \dfrac{1}{\phi_r(t)}$ pour tout $t \in ]a, b[$. Montrer que la fonction $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = y - t$.
5. Résoudre l'équation différentielle (*).

**Exercice 49.** Soit $A$ une matrice réelle carrée de taille 2 et soient $\lambda_1$, $\lambda_2$ ses valeurs propres. On considère le système linéaire

$$x' = Ax.$$

Tracer le portrait de phase du système, en fonction de $\lambda_1$, $\lambda_2$ :

- $\lambda_1$, $\lambda_2$ valeurs propres réelles

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 < 0, \qquad \lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

$$0 < \lambda_1 = \lambda_2, \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2, \qquad \lambda_1 < \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = 0 < \lambda_2.$$

- $\lambda_1$, $\lambda_2$ valeurs propres complexes, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

$$\alpha = 0, \qquad \alpha < 0, \qquad \alpha > 0.$$

**Exercice 50.** Etudier la stabilité des systèmes linéaires suivants et donner l'allure des solutions autour de $(0,0)$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y \\ y' & = & 2x + 3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x + 4y \\ y' & = & -9x + y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - 2y \\ y' & = & -3x + 2y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x + 2y \\ y' & = & x + y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x + 2y \\ y' & = & -2x + 3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -2x + y \\ y' & = & -x - 4y \end{array}\right.$$

**Exercice 51.** On considère les équations différentielles

$$x'' = x + x^3, \qquad x'' = -x + x^3,$$

$$x'' = x - x^3, \qquad x'' = -x - x^3.$$

Traiter les questions suivantes pour chacune de ces équations.

1. Ecrire l'équation sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.
2. Déterminer les points stationnaires et tracer l'allure des courbes solutions au voisinage de ces points dans le plan $(x, x')$.
3. Trouver une fonction $H(x', x)$ telle que $H(x'(t), x(t)) = const.$ si $x(t)$ est une solution. (Multiplier l'équation par $x'$ et intégrer par rapport à $t$).

**Exercice 52.**

1. Résoudre explicitement l'équation $x' = \sqrt{|x|} + k$, avec $k \neq 0$.
2. Montrer que $f(t, x) = \sqrt{|x|} + k$ ne satisfait aucune condition de Lipschitz dans le rectangle $[a, b] \times [-1, 1]$.
3. Conclusion ?

**Exercice 53.** On considère l'équation dite équation de Clairaut,

$$x = tx' - (x')^2/2$$

1. Montrer que les droites $x = Ct - C^2/2$ sont des solutions.
2. Montrer que la parabole $x = t^2/2$ est aussi une solution.
3. Montrer que toutes les droites de la première question sont tangentes à la parabole de la deuxième question. Conclusion ?
4. Pourquoi le théorème d'existence et d'unicité vu en cours ne s'applique pas ici ?

## 7.6 Th. fonctions implicites et inversion locale

**Exercice 54.** On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{7.2}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

1. Montrer que $\phi$ est bijective, de classe $C^1$ et que l'application $\phi^{-1}$ est de classe $C^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   - Montrer que la fonction $g$ est de classe $C^1$.
   - Montrer que $f$ est solution de (1) si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. Montrer que $f$ vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f(x,y) = h(y - x^2)$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 55.** Soit $\phi$ et $\psi$ deux fonctions de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x + x^2\phi(x,y), y + y^2\psi(x,y))\,.$$

Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa dérivée au point $(x,y)$. Prouver qu'il existe deux voisinages ouverts $U$ et $V$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f$ détermine un $C^1$-difféomorphisme de $U$ sur $V$.

**Exercice 56.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que la norme sur $E$ est associée à un produit scalaire, $(x,y) \to (x|y)$. Soit $f : E \mapsto E$ une application de classe $C^1$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tous $h$ et $x \in E$, $(f'(x)h|h) \geq \alpha(h|h)$.

1. Montrer que, pour tous $a$ et $b \in E$, $(f(b) - f(a)|b - a) \geq \alpha(b - a|b - a)$. [On pourra introduire la fonction $\phi$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par $\phi(t) = (f(a + t(b - a))|(b - a))$.]
   En déduire que $f$ est une application fermée.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $f'(x)$ est un isomorphisme de $E$.
   En déduire que $f$ est une application ouverte.
3. Montrer que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ de $E$ sur lui-même.

**Exercice 57.**

1. Montrer que la relation
$$x^3 + y^3 - 2xy = 0 \qquad (*)$$
définit, implicitement au voisinage de $(1,1)$ une unique fonction $\varphi(x)$ vérifiant
$$x^3 + \varphi(x)^3 - 2x\varphi(x) = 0\,.$$
2. Calculer $\varphi'(1)$.
3. Montrer que si $P \neq (0,0)$, alors au voisinage de $P$ l'équation (*) se résout en $x$ ou en $y$.
4. L'équation (*) définit une courbe $C \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que $C$ a une tangente en tout point $P \neq (0,0)$.

**Exercice 58.**

1. Montrer que la relation
$$e^{x-y} = 1 + x + y$$
définit, implicitement au voisinage de $(0,0)$ une fonction $C^\infty$, $x \mapsto \varphi(x)$ vérifiant $e^{x-\varphi(x)} = 1 + x + \varphi(x)$.
2. Calculer $\varphi'(x)$ puis $\varphi''(x)$.
3. En déduire que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{4}\,.$$

**Exercice 59.** On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f(X, Y) = B - (I_n - X + Y^2)/2 \ .$$

1. Calculer $f'_Y(X, Y)$.
2. Montrer qu'au voisinage de $I_n$ il existe une fonction $\varphi(X)$ telle que $\varphi(X)^2 = X$ .
3. La fonction $\varphi(X)$ est-t-elle unique ?

**Exercice 60.** Soit la surface $S$ d'équation $z = x - 2(x^2 + y^2)^2$. Soit $(a, b, c) \in S$.

1. Ecrire l'équation du plan tangent à $S$ au point $(a, b, c)$. En quel point le point tangent à $S$ est horizontal ?
2. Montrer qu'au point $(0, 0, 0)$ la surface est en-dessous de son plan tangent.
3. Montrer qu'en tout point de $S$ la surface est en-dessous de son plan tangent.

## 7.7 Exercices complémentaires

**Exercice 61.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère une fonction continue $f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $[a, b] \times I$.

1. Montrer que la fonction $H$ définie pour tout élément $(u, v, x)$ de $[a, b]^2 \times I$ par :

$$H(u, v, x) = \int_u^v f(t, x) dt \qquad (7.3)$$

   est de classe $C^1$.
2. Soient $u : I \longrightarrow [a, b]$ et $v : I \longrightarrow [a, b]$ des applications dérivables.
   Montrer que la fonction $K$ définie pour tout élément $x$ de $I$ par $K(x) = H(u(x), v(x), x)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

**Exercice 62.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

$$G(x) = \left( \int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont définies, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $F' + G' = 0$.
2. Calculer $F + G$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.4}$$

**Exercice 63.** Montrer qu'on peut définir une fonction $F$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt. \tag{7.5}$$

Montrer que $F$ est dérivable et calculer sa dérivée.

### 7.7.1 Théorèmes des accroissements finis

**Exercice 64.** Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$. On considère la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \ . \tag{7.6}$$

1. Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \ = \ \frac{1}{n x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \ . \tag{7.7}$$

2. Soient $a$ et $h$ deux nombres réels positifs. Montrer que si l'on a $a \leqslant x_i \leqslant a+h$, alors

$$0 \leqslant (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \ - \ a \ \leqslant \ \frac{a+h}{a} \left( \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \ - \ a \right) . \tag{7.8}$$

**Exercice 65.**

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$, est nulle en 0, alors il existe une fonction $g \in C^\infty$ telle que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ admet-elle une telle décomposition ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f(0,0,z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des fonctions continues $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$f(x,y,z) = xg(x,y,z) + yh(x,y,z). \tag{7.9}$$

**Exercice 66.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $d$, et $p$ un entier. Montrer que :

$$\| A^p - B^p \| \leq p \| A - B \| \Big(\sup(\| A \|, \| B \|)\Big)^{p-1}. \tag{7.10}$$

**Exercice 67.**

1. Soit $\Omega$ un ouvert convexe d'un e.v.n. $E$ et $f : \Omega \to F$ (où $F$ est un espace de Banach). Montrer que si $f$ est dérivable sur $\Omega$, à dérivée bornée, alors $f$ est lipschitzienne.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai si $\Omega$ est l'ouvert $]-1, 0[\cup]0, 1[$ de $\mathbb{R}$ ?
3. Montrer que le résultat subsiste lorsque $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ 0 <\| x \|< 1\}$ et $d > 1$. Montrer qu'alors $f$ admet un prolongement continu à $\{x \in \mathbb{R}^d,\ \| x \|< 1\}$.
4. On appelle $g$ le prolongement de $f$ sur $\{x \in \mathbb{R}^d,\ \| x \|< 1\}$. On suppose que $\lim_{x\to 0} f'(x) = l$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que si $x$ et $y$ sont suffisamment proches de 0 (à préciser), on a $\| g(x) - g(y) - l(x - y) \|\leq \epsilon \| x - y \|$. En déduire que $g$ est différentiable en 0 et que $g'(0) = l$.

**Exercice 68.** Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On définit $f$ par :

$$f \ :\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{7.11}$$

$$(x, y) \ \longmapsto\ \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right). \tag{7.12}$$

1. Montrer que $f$ est différentiable et déterminer sa matrice jacobienne $\mathcal{J}f$.
2. Montrer que :$\| \mathcal{J}f(x, y) \|= \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
3. Soit $R > 0$ fixé. On pose $\Omega = \{M \in \mathbb{R}^2 / \| M \|> R\}$.
   (a) Pour $X, Y \in \Omega$ tel que $[X, Y] \in \Omega$, montrer que :$\| f(Y) - f(X) \|\leq \dfrac{1}{R^2} \| Y - X \|$ .
   (b) Pour $X, Y \in \Omega$ quelconques, montrer que : $\| f(Y) - f(X) \|\leq \dfrac{2}{R^2} \| Y - X \|$ .
4. $f$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ?

### 7.7.2 Formules de Taylor

**Exercice 69.** Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour l'application $f(x, y) = y^x$ au point $(1, 1)$.

**Exercice 70.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^2$, telle que

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Montrer qu'il existe trois applications $U$, $V$ et $W$, continues sur $\mathbb{R}^2$, telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 U(x, y) + xyV(x, y) + y^2 W(x, y).$$

**Exercice 71.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^3$. On pose pour $h > 0$

$$g_h(x, y) = \frac{1}{h^2}\Big( f(x + h, y) + f(x - h, y) + f(x, y + h) + f(x, y - h) - 4f(x, y)\Big).$$

Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^2$, il existe $C$ tel que

$$\forall (x, y) \in K, \forall h \in ]0, 1[, |g_h(x, y) - \Delta f(x, y)| \leq C\ h.$$

**Exercice 72.**

1. Soit $\psi : \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ définie par $\psi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Montrer que $\psi$ est $C^1$ et calculer le jacobien de $\psi$.
   Montrer que $\psi$ est un $C^1$-difféomorphisme local.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^2$. On note $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On note $\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Calculer le laplacien de $f$ en fonction des dérivées partielles de $\tilde{f}$.

### 7.7.3 Courbes paramétrées

**Exercice 73.** Etude complète (symétries, tableau de variation, tangentes, branches infinies, courbe) de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$$

**Exercice 74.** Etude de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= e^{t-1} - t \\ y(t) &= t^3 - 3t \end{cases}$$

au voisinage de $t = 1$. On indiquera les portions de la courbe correspondants à $t < 1$ et $t > 1$.

**Exercice 75.** Etude de la courbe paramétrée (courbe de Lissajous) :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \cos(3t) \end{cases}$$

**Exercice 76.**

1. Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Ecrire l'équation de la tangente et de la normale au graphe de $f$ au point d'abscisse $x_0$.
2. Soit un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $g$ une application de classe $C^1$ de $I$ dans $\mathbb{R}^2$ : $g(t) = (x(t), y(t))$.
   Ecrire l'équation de la tangente et de la normale à la courbe paramétrée par $g$ en $g(t_0)$, lorsque le vecteur "vitesse" en ce point n'est pas nul.
3. Ecrire l'équation de la tangente au point $(x_0, y_0)$ du cercle de centre $O$ et de rayon $R$.

### 7.7.4 Méthodes numériques pour les équations différentielles

**Exercice 77.** On cherche à évaluer la valeur en $t = 1$ et $t = 2$ de la solution de $x'(t) = x(t)$ vérifiant $x(0) = 1$.

1. Résoudre l'équation, et donner les valeurs exactes de $x(1)$ et $x(2)$.

2. Calculer à la main les approximations de $x(1)$ et $x(2)$ obtenues avec les pas $h = 1$ pour chacune des trois méthodes : Euler, point milieu, Runge-Kutta (4).
3. Pour chacune de ce méthodes, marquer sur un graphique lespoints où l'on évalue les pentes, et y tracer des petits segments ayant cette pente ; pour les méthodes du point milieu et de Runge-Kutta, tracer d'une autre couleur le segment joignant les deux points $(t_i, x_i)$ et $(t_{i+1}, x_{i+1})$.
4. Comparer les trois méthodes à la solution exacte.

**Exercice 78.** On considère la solution $u(t)$ de $x'(t) = x^2(t) - t$ vérifiant $x(0) = 1$.

1. On utilise un pas $h = 1/2$ ; calculer les approximations obtenues par laméthodes d'Euler sur le segment $[-1, 1]$, c'est-à-dire les approximations de $u(-1), u(-1/2), u(1/2), u(1)$. Dire si les valeurs trouvées sont des approximations par défaut ou par excès.
2. Trouver les approximations obtenues en ces mêmes points par les méthodes du point milieu et de Runge-Kutta.

**Exercice 79.** Montrer que, pour tout pas $h$, l'appoximation d'Euler $u_h(t)$ de la solution $u(t)$ de $x' = x^2 - t$ vérifiant $u(0) = 1$ est une barrière inférieure pour $t > 0$.

**Exercice 80.** Partant de $(t_0, x_0) = (0, 1)$, effectuer les trois premiers pas de la méthode d'Euler implicite appliquée aux équations :

1. $x' = 4 - x$
2. $x' = 4x - x^2$