



TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **AF1447 V1**

Date de publication :
10 octobre 2010

Analyse multifractale en ondelettes pour l'analyse de données atmosphériques

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Patrick FISCHER**

Résumé Pour décrire les phénomènes climatiques, des modèles mathématiques sont à la disposition des ingénieurs. En considérant que les grandeurs physiques (pression, température...) sont continues dans le temps et l'espace, il est possible d'étudier les comportements météorologiques. Pour cela, il convient de réaliser une analyse multifractale, en ondelettes afin de se concentrer sur des zooms des structures, puis d'étendre les résultats pour appréhender globalement le phénomène physique considéré, de manière récursive. Cet article détaille ainsi cette méthode, les hypothèses retenues ainsi que les résultats obtenus numériquement.

Abstract Mathematical models are available for engineers in order to describe climate phenomena. Considering the fact that physical quantities (pressure, temperature, etc.) are included in time and space, it is possible to study meteorological behaviours. In order to do so, a multifractal analysis in wavelets must be conducted so as to concentrate on zoomed structures and then extend the results in order to apprehend the concerned physical phenomenon globally and recursively. This article thus details this method, the selected hypothesis as well as the results obtained digitally.

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **19/12/2018**

Pour le compte : **7200051982 - universite de bordeaux // 147.210.21.159**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Analyse multifractale en ondelettes pour l'analyse de données atmosphériques

par **Patrick FISCHER**

Docteur en mathématiques, Maître de conférences

Université de Bordeaux I, Laboratoire de mathématiques appliquées de Bordeaux

1. Description de la méthode	AF 1 447 – 2
2. Choix des données et de l'ondelette mère	— 3
3. Résultats numériques	— 4
3.1 Premier ensemble : données mensuelles	— 4
3.2 Second ensemble : données quotidiennes (NAM)	— 6
Pour en savoir plus	Doc. AF 1 447

La météorologie dynamique est l'étude des mouvements de l'atmosphère qui sont associés au climat et au temps. Pour l'étude de ces mouvements, la nature moléculaire particulière de l'atmosphère peut être négligée, et l'atmosphère peut être considérée comme un fluide continu. Les différentes grandeurs physiques (pression, densité, température et vitesse) qui décrivent l'état de l'atmosphère possèdent alors une valeur unique en chaque point de ce continuum. Ces variables, ainsi que leurs dérivées, sont supposées continues en temps et en espace. Les lois fondamentales de la mécanique des fluides et de la thermodynamique permettent alors de décrire les mouvements de l'atmosphère sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles dont les solutions sont les différentes grandeurs physiques.

Le système d'équations différentielles modélisant les mouvements de l'atmosphère est très complexe et il n'en existe pas à ce jour de solutions générales. Un certain nombre de simplifications et d'approximations numériques doivent être faites pour obtenir des prédictions météorologiques et climatiques à peu près fiables.

Parallèlement à la modélisation numérique, l'analyse de données expérimentales permet de mieux comprendre les phénomènes physiques impliqués, ainsi que de valider ou d'invalidier les modèles numériques. Actuellement, la fiabilité des prédictions météorologiques obtenues par simulations numériques ne s'étend pas au delà de cinq, six jours. Ceci est largement dû à la nature chaotique des quantités physiques observables (vents, températures, pressions, etc.). De plus, certains phénomènes physiques sont observés sur plusieurs échelles d'espace ou de temps : la Q.B.O. (Quasi Biennial Oscillation) extratropicale avec une période moyenne de 28 mois, la E.N.S.O. (El Nino Southern Oscillation) avec une période de 4 ans ou le cycle solaire de 11 ans. Certaines oscillations sur des périodes plus petites sont bien connues, comme le cycle annuel, mais la compréhension de tous les phénomènes physiques se produisant à différentes échelles de temps représente un enjeu économique et écologique actuel conduisant à la publication de nombreux articles sur le sujet chaque année.

Les simulations numériques utilisées pour les prédictions météorologiques sont généralement basées sur des modèles décrivant la troposphère (couche inférieure de l'atmosphère) et les données stratosphériques (de la couche

supérieure) sont généralement considérées comme ayant peu d'impact sur les évolutions météorologiques à la surface de la Terre. Cependant, de larges phénomènes stratosphériques persistant sur plusieurs semaines (ou plus) atteignent de temps en temps la surface de la Terre [5] [6] [7]. Selon Baldwin et Dunkerton, des mouvements importants anormaux dans les couches inférieures de la stratosphère peuvent être corrélés à des distributions de valeurs extrêmes de l'A.O. (Arctic Oscillation) et de la N.A.O. (North Atlantic Oscillation). Ces mouvements stratosphériques pourraient alors être utilisés comme prédicteurs de changements météorologiques dans la troposphère.

Afin de mieux décrire ces phénomènes météorologiques, nous proposons une analyse multifractale des données stratosphériques et troposphériques. L'intérêt des fractales en physique et dans d'autres disciplines a été relevé par Mandelbrot qui a développé la théorie dans les années 1980 [8] [9]. La théorie des objets fractals fournit les concepts mathématiques et les outils numériques pour la description des propriétés d'échelles. Pour des objets fractals avec une structure hiérarchique récursive, la connaissance de quelques étapes de raffinement suffit pour appréhender globalement le phénomène physique considéré. Mais certains objets physiques ne présentent pas une structure si ordonnée et nécessitent des outils d'analyse plus sophistiqués. Cette constatation a motivé le développement du formalisme multifractal par Parisi et Frisch [10] [11] dans le cadre de l'étude de la turbulence.

Le formalisme multifractal basé sur la théorie des ondelettes a été introduit dans les années 1990 par Mallat [12] [13], Arnéodo [1] [2] [3], Bacry [4] et Muzy [14]. La transformée en ondelettes permet d'effectuer des zooms sur des structures bien localisées en jouant sur le paramètre d'échelle. Les singularités et les structures irrégulières correspondent souvent à des informations essentielles dans le signal analysé. La régularité locale du signal peut alors être décrite par la décroissance du module de la transformée en ondelettes à travers les échelles. De plus, les singularités peuvent être détectées en suivant les maxima locaux de la transformée en ondelettes aux petites échelles.

1. Description de la méthode

Nous présentons ici un résumé de la théorie afin de permettre au lecteur de mieux comprendre la méthode utilisée. Une description plus complète peut être trouvée dans les références suivantes : [1] [2] [3] [4] [12] [13] [14] [15] [16] [17].

La régularité d'une fonction est habituellement définie par un exposant appelé **exposant de Hölder**. L'exposant de Hölder $h(t_0)$ d'une fonction $s(t)$ en un point t_0 est défini comme étant le plus grand exposant tel qu'il existe un polynôme $P_n(t)$ d'ordre n vérifiant :

$$|s(t) - P_n(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^{h(t_0)}, \quad (1)$$

pour tout t dans un voisinage de t_0 . Le polynôme P_n peut être, par exemple, le développement de Taylor de s au voisinage de t_0 . Si $n < h(t_0) < n + 1$, alors s est de classe C^n mais pas de classe C^{n+1} . L'exposant h évalue la régularité de s au point t_0 . Plus h est grand, et plus la fonction s est régulière.

La **transformée en ondelettes** peut évaluer cet exposant sans avoir besoin de déterminer le polynôme P_n . Partant d'une fonction bien localisée en temps et en fréquence, une famille d'ondelettes analysantes se construit par la formule suivante,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^{++}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

à partir d'une fonction initiale $\psi(t)$ appelée l'**ondelette mère**. Dans cette écriture b est le paramètre de temps et $1/a$ est homogène à une fréquence. On peut alors définir la transformée en ondelettes correspondante à l'aide de la relation :

$$WT_s(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a \in \mathbb{R}^{++}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Cette définition conduit à une transformation qui conserve l'énergie ($\|s\|_2 = \|WT_s\|_2$). Pour évaluer l'exposant de Hölder h , nous devons choisir une ondelette mère avec m moments nuls, $m > h$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt, \quad \text{pour } 0 \leq k < m. \quad (4)$$

Une ondelette avec m moments nuls est orthogonale aux polynômes de degré inférieur ou égal à $m - 1$. En choisissant m tel que $h < m$, le polynôme P_n a un degré au plus égal à $m - 1$, et on peut montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t - t_0) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = 0. \quad (5)$$

Supposons que la fonction s admette un développement de Taylor au voisinage de t_0 ,

$$s(t) = P_n(t - t_0) + C|t - t_0|^{h(t_0)}, \quad (6)$$

on obtient alors pour sa transformée en ondelettes :

$$WT_s(t_0, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} C|t - t_0|^{h(t_0)} \psi^*\left(\frac{t - t_0}{a}\right) dt \quad (7)$$

$$= C|a|^{h(t_0)+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t'|^{h(t_0)} \psi(t') dt'. \quad (8)$$

Ce qui induit l'existence d'une loi de puissance pour la transformée de s au voisinage de t_0 :

$$|WT_s(t_0, a)| \sim a^{h(t_0)+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Nous pouvons alors déterminer l'exposant $h(t_0)$ à partir d'une représentation logarithmique du module de la transformée en ondelettes en fonction de l'échelle a .

On ne peut cependant pas calculer précisément la régularité d'un signal multifractal de cette manière car les singularités ne sont pas isolées. On peut quand même obtenir le spectre de singularités d'un signal multifractal à partir des maxima locaux de sa transformée en ondelettes. Ces maxima sont situés sur des courbes dans le plan temps-échelle (b, a) . Cette méthode introduite par Arnéodo et al. nécessite le calcul d'une fonction de partition globale $Z(q, a)$.

Soient $\{b_i(a)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ l'ensemble des positions de tous les maxima de $|WT_s(b, a)|$ à l'échelle a . La fonction de partition $Z(q, a)$ est alors définie par :

$$Z(q, a) = \sum_i |WT_s(b_i, a)|^q. \quad (10)$$

On peut alors déterminer le taux de décroissance asymptotique $\tau(q)$ de $Z(q, a)$ aux échelles les plus fines pour chaque $q \in \mathbb{R}$:

$$\tau(q) = \lim_{a \rightarrow 0} \inf \frac{\log Z(q, a)}{\log a}. \quad (11)$$

Cette dernière relation peut se réécrire comme une loi de puissance pour la fonction de partition $Z(q, a)$:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}. \quad (12)$$

Si l'exposant $\tau(q)$ est une fonction affine de q , alors le signal est monofractal ou tout simplement fractal, sinon le signal est qualifié de multifractal : les propriétés de régularité du signal ne sont pas homogènes et changent au cours du temps.

À partir de la fonction $\tau(q)$, nous pouvons calculer le **spectre de singularités** $D(h)$ qui mesure la répartition des singularités possédant des exposants de Hölder différents. Le spectre $D(h)$ donne la proportion de singularités dont le coefficient de Hölder est h présent dans le signal. Un signal fractal ou monofractal ne possède qu'un type de singularité, et son spectre $D(h)$ est alors réduit à un point.

Le spectre de singularités d'un signal multifractal peut être obtenu par la transformée de Legendre de la fonction d'échelle $\tau(q)$ précédemment définie :

$$D(h) = \lim_{q \in \mathbb{R}} \left(q \left(h + \frac{1}{2} \right) - \tau(q) \right). \quad (13)$$

Cette formule n'est valable que pour les fonctions dont le spectre de singularités est convexe. En général, la transformée de Legendre donne seulement une borne supérieure pour $D(h)$. Pour un spectre de singularités $D(h)$, son maximum

$$D(h_0) = \max_h D(h) = -\tau(0) \quad (14)$$

est la dimension fractale de l'exposant de Hölder h_0 .

Remarque : Quand les maximales du module de la transformée en ondelettes sont très petites, la fonction de partition définie en (10) peut diverger pour des valeurs de q négatives. Une façon d'éviter ce problème consiste à remplacer la valeur du module de la transformée en ondelettes en chaque maximum par la valeur maximale le long de la ligne des maxima correspondante pour des échelles plus petites que a :

$$Z(q, a) = \sum_{l \in \mathcal{L}(a)} \left(\sup_{(t, a') \in l, a' < a} |WT_s(t, a')| \right)^q, \quad (15)$$

où $\mathcal{L}(a)$ est l'ensemble de toutes les lignes de maxima l vérifiant : $l \in \mathcal{L}(a)$, si $\forall a' \leq a, \exists (x, a') \in l$. Les propriétés de cette fonction de partition sont bien décrites dans [2].

2. Choix des données et de l'ondelette mère

Différents types de transformée en ondelettes existent, dont la transformée en ondelettes continues définie au paragraphe précédent. Cette dernière s'est révélée être particulièrement efficace pour l'étude d'objets multifractals [4]. L'ondelette mère doit également être choisie en fonction de l'application envisagée. Une ondelette mère réelle est généralement choisie pour l'étude de signaux multifractals. Nous avons pris ici les N dérivées successives d'une fonction gaussienne :

$$\psi(x) = \frac{d^N}{dx^N} e^{-x^2/2}. \quad (16)$$

Ces fonctions sont bien localisées en temps et en fréquence et possèdent N moments nuls. Les calculs ont été effectués pour différentes valeurs de N ($N = 1, 2, 4, 6, 8, 10$), et seuls les résultats obtenus pour $N = 2$ (le chapeau mexicain) sont reportés ici. Les résultats obtenus pour d'autres valeurs de N ne présentaient pas de différences significatives.

L'analyse multifractale décrite dans le paragraphe précédent a été appliquée à deux jeux de données. Le premier ensemble est composé de séries temporelles correspondant à des moyennes mensuelles de hauteurs géopotentielle fournies par les NCEP (*National Centers for Environmental Prediction*) aux États-Unis. En météorologie, la hauteur géopotentielle est utilisée pour obtenir des niveaux de pression constante corrigés en fonction de la variation locale de la gravité. Il y a deux facteurs qui influencent la hauteur géopotentielle : la pression au niveau de la mer et la température moyenne de la masse d'air entre le sol et l'altitude à laquelle on atteint la pression désirée. À pression au niveau de la mer égale, la hauteur du géopotential sera d'autant plus basse que la température moyenne de la couche sera basse. Elle correspond donc à une température où l'on a éliminé les variations dues à la gravité et à la densité de l'air. Il s'agit globalement d'une température « absolue » utilisée dans les modèles de prévisions numériques météorologiques.

Les données utilisées dans ce premier ensemble vont de janvier 1948 à juin 2005. Une moyenne spatiale au nord du 60° parallèle a été réalisée afin de n'étudier que les phénomènes correspondant à l'hémisphère nord. Dix-sept niveaux de pression de 10 hPa à 1 000 hPa ont été considérés. Le cycle annuel qui domine ce genre de données a été effacé en soustrayant pour chaque mois la moyenne mensuelle correspondante. Ceci afin de n'étudier que les écarts, appelés aussi anomalies de température. Deux exemples du type de signal obtenu sont donnés sur les figures 1 et 2. Le signal à 100 hPa est un signal stratosphérique et celui à 700 hPa est un signal troposphérique. À première vue, il n'est pas possible de différencier les singularités présentes dans le signal stratosphérique

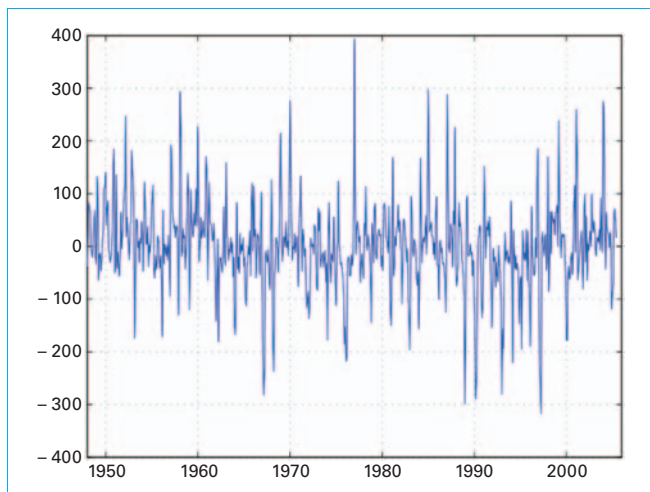


Figure 1 – Anomalies de la hauteur géopotentielle à 100 hPa entre 60° N et 90° N

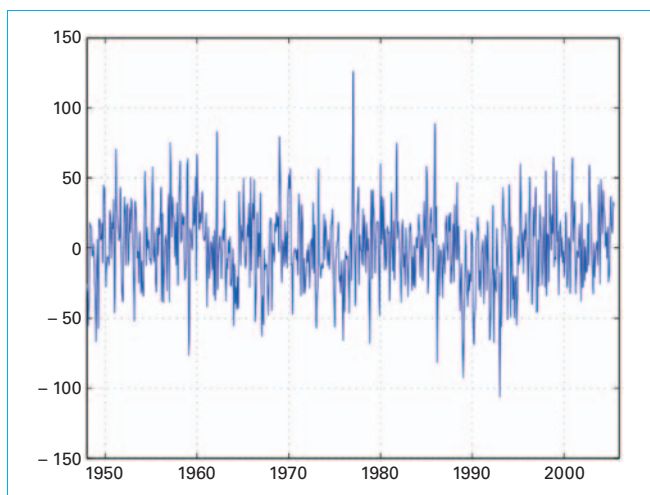


Figure 2 – Anomalies de la hauteur géopotentielle à 700 hPa entre 60° N et 90° N

de celles présentes dans le signal troposphérique. Nous verrons pourtant que cela est possible grâce à une analyse multifractale de ces signaux.

Le second ensemble de données est composé du NAM (*Northern Annular Mode*) pour les mêmes dix-sept niveaux de pressions atmosphériques de 10 hPa à 1 000 hPa. Il s'agit du premier mode obtenu lors d'une décomposition en *Empirical Orthogonal Functions* (EOF), aussi connue sous le nom de *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), des anomalies de la hauteur géopotentielle filtrées avec un filtre passe-bas de 90 jours au nord du 20^e parallèle. Les valeurs quotidiennes sont obtenues pour chaque niveau de pressions en projetant les anomalies quotidiennes sur le premier mode EOF. Ces données couvrent la période de janvier 1958 à juillet 2006 et ont été obtenues sur le site de Baldwin (voir la rubrique Sites Internet du Pour en savoir plus). Dans la stratosphère, les valeurs du mode annulaire sont des mesures de la force du vortex polaire, alors que proche de la surface de la Terre, le mode annulaire est appelé A.O. (*Arctic Oscillation*) ou N.A.O. (*North Atlantic Oscillation*) au-dessus de la zone atlantique. Les signaux NAM pour 100 hPa et 700 hPa sont représentés sur les figures 3 et 4.

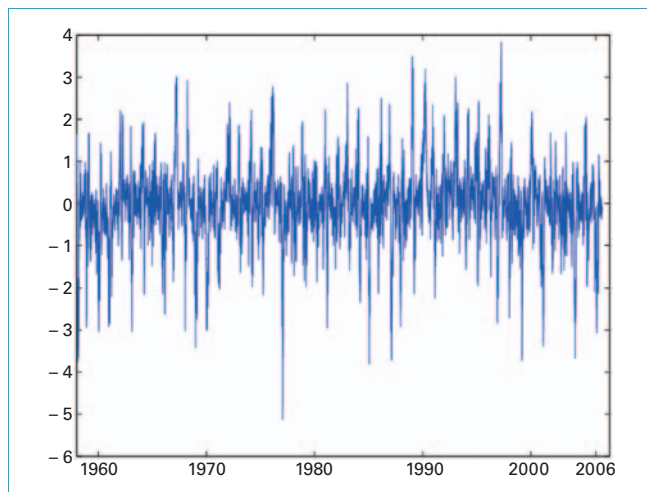


Figure 3 – Signal NAM à 100 hPa

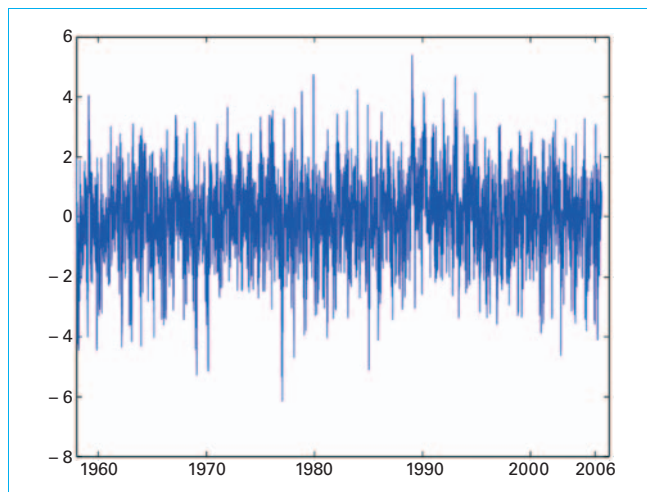


Figure 4 – Signal NAM à 700 hPa

L'index NAM, bien que n'étant pas une donnée physique directe, a été choisi pour cette étude car il est utilisé par de nombreux auteurs pour l'analyse des phénomènes météorologiques. Il est notamment utilisé par Baldwin [5] pour montrer que les grandes anomalies stratosphériques peuvent être utilisées pour affiner les prédictions dans la troposphère.

3. Résultats numériques

3.1 Premier ensemble : données mensuelles

Les décompositions en ondelettes des deux signaux présentés dans le paragraphe précédent et obtenues avec la seconde dérivée de la Gaussienne sont représentées sur les figures 5 et 6. La transformée en ondelettes peut être vue comme le calcul du taux de ressemblance entre le signal et l'ondelette mère. Si le signal présente des similarités à différentes échelles alors la représentation des coefficients présentera aussi des similarités aux mêmes échelles.

On peut remarquer la présence caractéristique de similarités sur les figures 5 et 6. À la seule observation de ces représentations, nous ne pouvons pas distinguer le signal stratosphérique du signal troposphérique. Mais nous verrons dans la suite que l'étude des lignes de maxima conduit à des spectres de singularités différents pour ces deux signaux.

Compte tenu des difficultés techniques présentées précédemment, les fonctions de partition sont calculées à partir de l'équation (15) pour des valeurs de q entre -20 et 20 avec un pas de $0,5$. La première étape du calcul de la fonction de partition consiste en la détection des maxima du module de la transformée en ondelettes. La représentation de ces lignes de maxima, appelée « squelette » de la transformée en ondelettes, est donnée sur la figure 7 dans le cas du signal stratosphérique. Pour le calcul des fonctions de partition, nous n'avons retenu que les lignes de longueur supérieure ou égale à une octave afin de ne garder que les singularités les plus significatives. Les deux fonctions de partitions sont données sur les figures 8 et 9. Les variations en escalier qui peuvent être

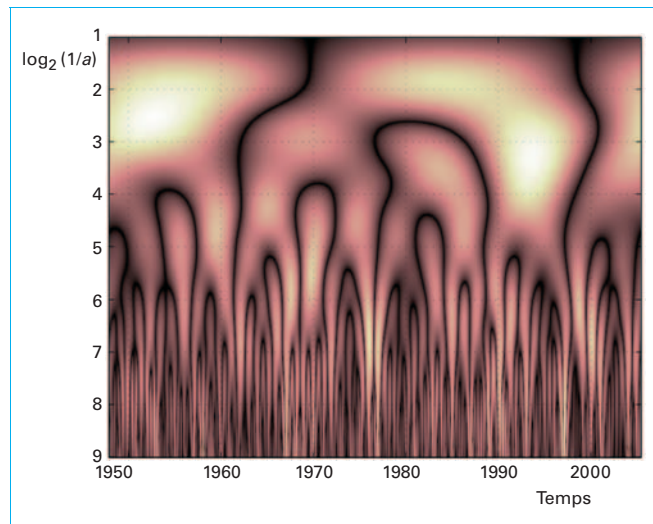


Figure 5 – Premier ensemble : transformée en ondelettes du signal à 100 hPa

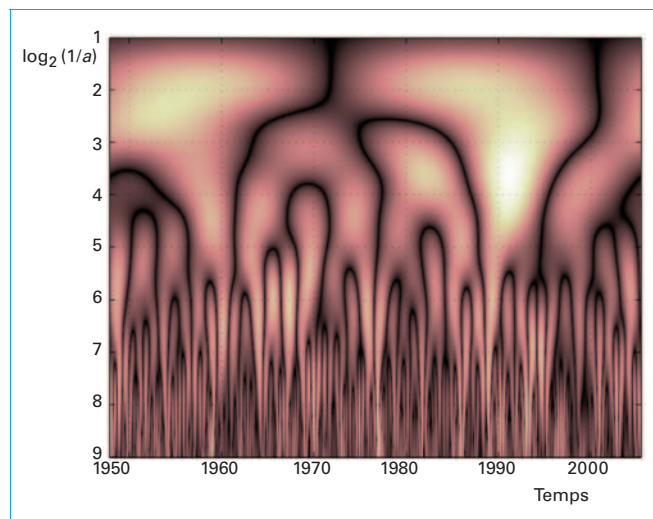


Figure 6 – Premier ensemble : transformée en ondelettes du signal à 700 hPa

observées pour les valeurs négatives de q sont dues à l'utilisation du supremum dans la définition de la fonction de partition. Nous pouvons remarquer que les pentes pour des valeurs négatives de q sont différentes pour la stratosphère et pour la troposphère. Considérant cette simple remarque, nous pouvons déjà prédire que la forme des spectres de singularités correspondants seront aussi différents.

Les spectres de singularités sont donnés sur la figure 10. Le support étendu des spectres montre le caractère multifractal des signaux étudiés. Le spectre d'un signal quasi monofractal se réduirait à quelques valeurs, et celui d'un spectre réellement monofractal se réduirait à un seul point. Le maximum des spectres est atteint autour de $h = -0,29$ pour le signal stratosphérique et entre $h = -0,22$ et $h = -0,23$ pour le signal troposphérique. Nous rappelons ici que le signal est d'autant moins régulier que cette valeur de h est petite.

Ainsi, à partir de cette première étude, nous pouvons conclure que les anomalies sont plus singulières dans la troposphère que dans la stratosphère. Nous pouvons vérifier cette conclusion en

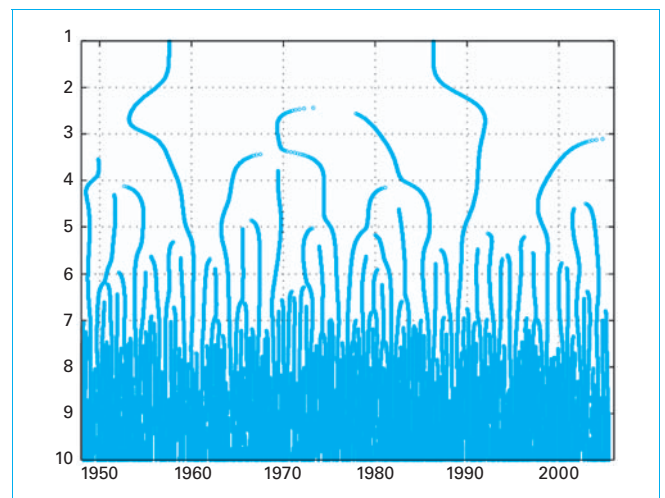


Figure 7 – Lignes des maxima du module de la transformée en ondelettes pour le signal à 100 hPa

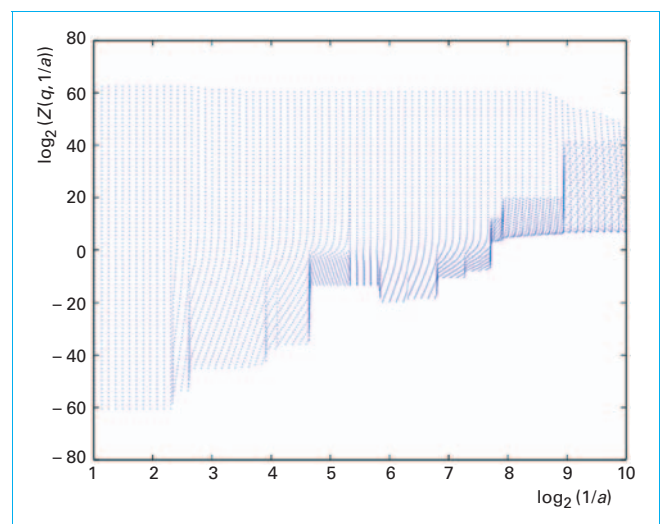


Figure 8 – Fonction de partition du signal à 100 hPa

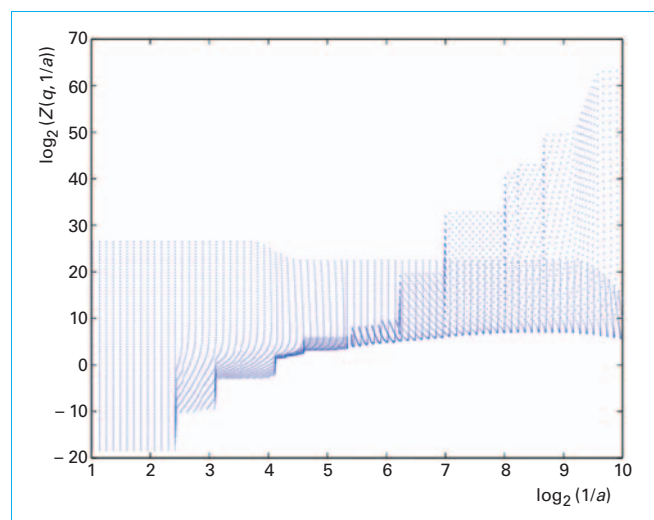


Figure 9 – Fonction de partition du signal à 700 hPa

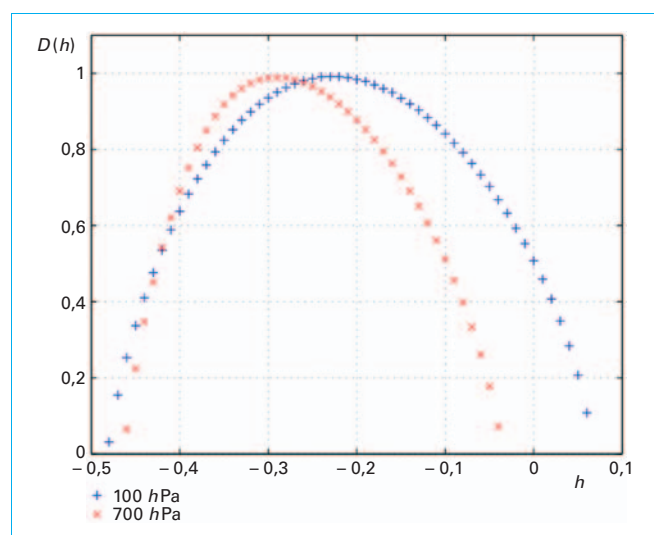


Figure 10 – Spectres de singularités pour les signaux à 100 hPa et 700 hPa

calculant la valeur de h où le maximum du spectre de singularités est atteint pour les dix-sept niveaux de pression entre 10 hPa et 1 000 hPa. Les résultats sont donnés sur la figure 11.

Nous pouvons clairement distinguer deux zones : la première avec des valeurs de h autour de $-0,23$ correspond à la stratosphère et la seconde avec des valeurs de h autour de $-0,29$ correspond à la troposphère. Ceci confirme la différence de régularité entre les anomalies stratosphériques et les anomalies troposphériques.

Ces résultats peuvent être comparés à ceux obtenus pour des signaux artificiels aléatoires. Nous avons réalisé les mêmes calculs sur des signaux composés de nombres aléatoires distribués uniformément sur l'intervalle $(0, 1)$. Les valeurs de h déterminées pour ces signaux artificiels étaient autour de $-0,4$. Ainsi avec $h \sim -0,3$ ou $h \sim -0,2$, les signaux atmosphériques sont proches de signaux non corrélés aux échelles de temps considérées.

La forme globale du spectre de singularités peut aussi être utilisée pour discriminer les signaux atmosphériques. Nous pouvons

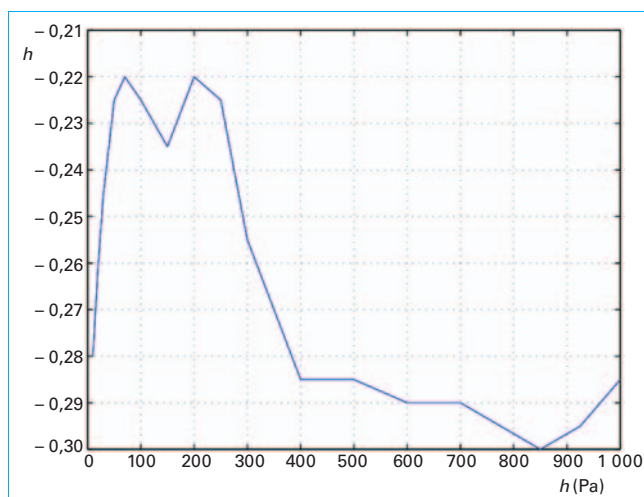
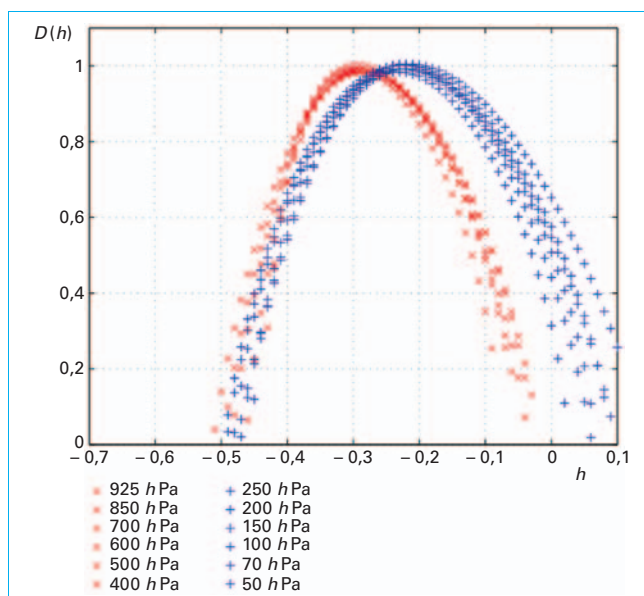
Figure 11 – Évolution de l'exposant de Hölder h en fonction du niveau de pression

Figure 12 – Spectres de singularités pour quelques niveaux de pression dans la stratosphère et dans la troposphère

constater sur la figure 12 que les signaux stratosphériques possèdent un spectre plus large que les signaux troposphériques, confirmant la différence de comportement entre ces deux couches de l'atmosphère.

Les analyses réalisées sur ces moyennes mensuelles ne permettent pas de caractériser les anomalies atmosphériques pour des échelles de temps plus courtes que le mois. Pour obtenir des informations sur des échelles de temps plus courtes, nous devons utiliser les données quotidiennes de l'index NAM.

3.2 Second ensemble : données quotidiennes (NAM)

L'index NAM de longueur 17742 correspond à des valeurs quotidiennes de janvier 1958 à juillet 2006 sur dix-sept niveaux de

pression (de 10 à 1 000 hPa). Le pas de temps d'une journée permet d'obtenir des détails sur des périodes plus courtes que le mois. Nous avons utilisé cinquante fenêtres glissantes de différentes tailles pour obtenir des statistiques à partir du signal total initial. Pour chaque fenêtre, nous avons calculé la transformée en ondelettes, la fonction de partition et déterminé le spectre de singularités correspondant. Nous avons ensuite évalué l'exposant de Hölder principal h correspondant au maximum du spectre de singularités $D(h)$.

Les premiers résultats représentés sur la figure 13 correspondent à une fenêtre de taille 1 an pour les dix-sept niveaux de pression.

Les huit octaves couvrent une période de temps allant d'une année pour l'échelle la plus grande à quelques jours pour l'échelle la plus fine. La répartition des couleurs va du bleu foncé pour $h = -0,5$ au bleu clair pour $h = 1$.

Nous pouvons remarquer que les exposants de Hölder sont plus grands dans la stratosphère que dans la troposphère. De plus, des valeurs supérieures à 0,5 indiquent la présence de corrélation à longue distance dans les signaux. Les exposants décroissent avec l'altitude indiquant un comportement de plus en plus irrégulier à mesure que l'on se rapproche du sol.

Dans le but de vérifier la présence effective de corrélations dans les signaux étudiés, nous pouvons remplacer chaque fenêtre de longueur 1 an par un signal où les mêmes données ont été mélangées. En mélangeant les données, la corrélation est perdue mais le comportement d'une distribution du type loi de puissance reste inchangée. Nous avons donc mélangé nos données et les résultats sont reportés sur la figure 14. La répartition des couleurs va du bleu foncé pour $h = -0,5$ au bleu clair pour $h = -0,25$. Les signaux composés des données mélangées sont donc non corrélés, et il est impossible de différencier la stratosphère de la troposphère. Ces résultats peuvent être comparés à ceux obtenus pour des signaux artificiels construits aléatoirement de la même façon que précédemment. Les résultats obtenus sur les signaux aléatoires sont donnés sur la figure 15. Les résultats sont similaires à ceux obtenus avec les données mélangées. Ce simple test confirme la présence de corrélations dans les signaux aux échelles de temps considérées.

En utilisant une fenêtre plus étendue, nous pouvons vérifier si cette corrélation persiste sur des échelles de temps plus grandes. Les résultats reportés sur la figure 16 ont été obtenus avec une fenêtre de taille 5 ans sur huit octaves. Cela correspond à une période d'étude allant de cinq années à quelques semaines. Comme nous pouvons le constater, la corrélation a disparu dans la stratosphère et le comportement non corrélé est plus fort dans la troposphère. L'apparition de valeurs négatives pour h indique la présence de singularités plus fortes dans les signaux. Cette

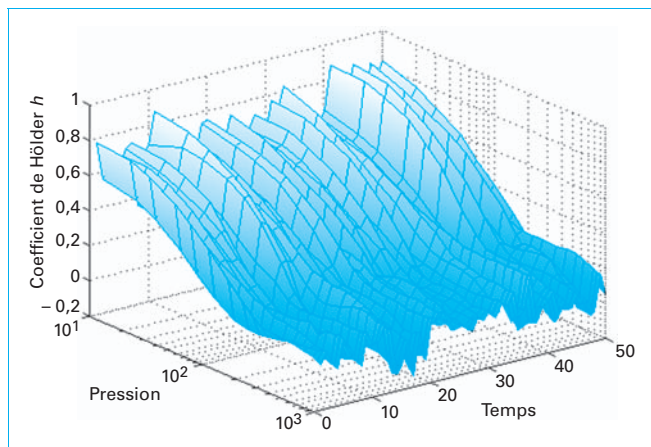


Figure 13 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 1 an et quelques jours

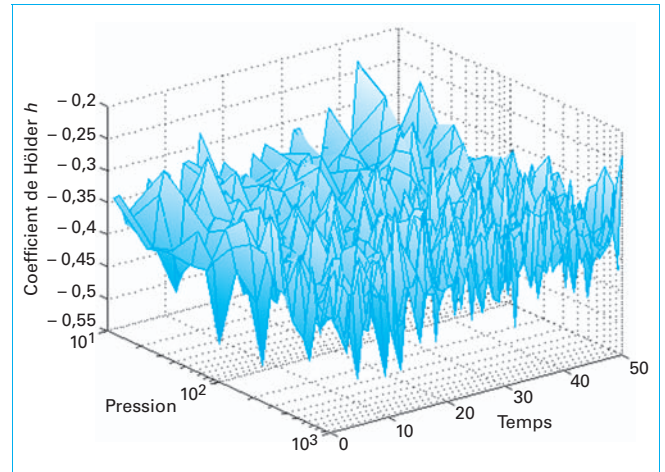


Figure 14 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 1 an et quelques jours pour les données mélangées

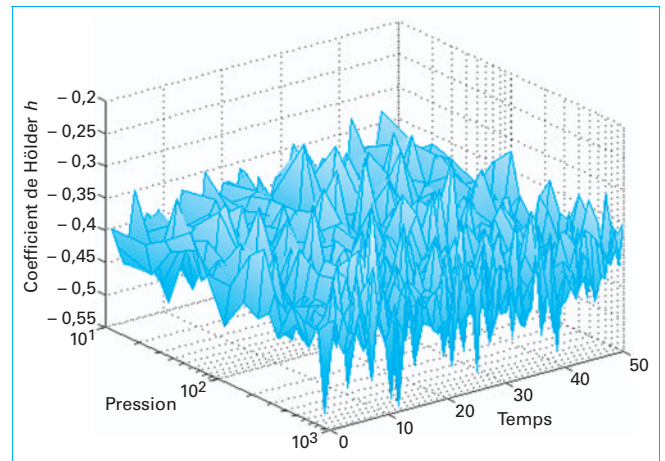


Figure 15 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 1 an et quelques jours pour les données aléatoires

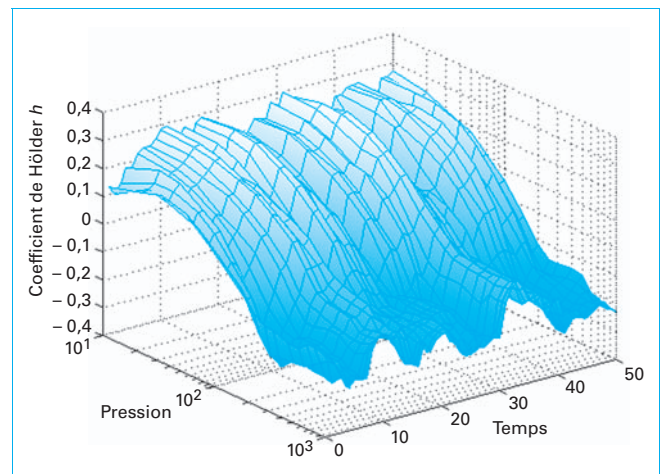


Figure 16 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 5 ans et quelques semaines

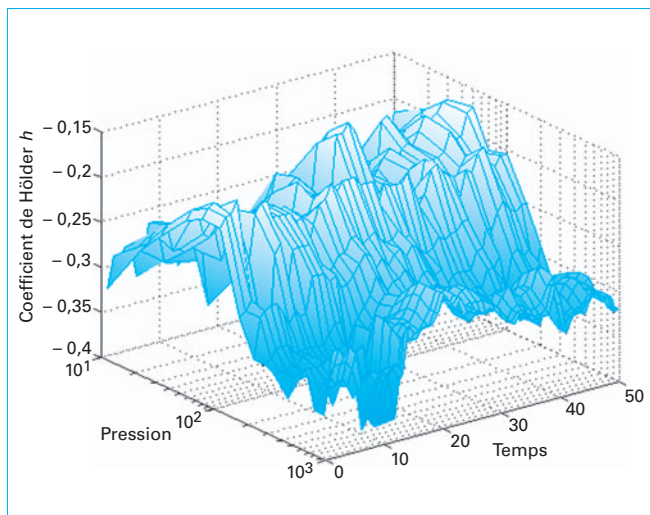


Figure 17 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 25 ans et quelques mois

tendance tend à confirmer les résultats obtenus sur les données mensuelles où nous n'obtenions que des valeurs négatives pour h .

Afin de confirmer cette tendance, les calculs ont été renouvelés avec des fenêtres de taille 25 ans. Les résultats, donnés sur la figure 17, correspondent à une période d'étude allant de 25 ans à quelques mois. La tendance détectée dans les précédents calculs est confirmée, et nous pouvons constater des valeurs négatives pour h à toutes les altitudes. Même si cela n'est pas très clair sur la figure 17, les valeurs sont plus petites dans la troposphère. Nous pouvons également noter la présence d'une ligne de valeurs relativement importantes autour de 100 hPa (dans la stratosphère).

Les résultats pour l'index NAM présentés jusqu'à présent ont été obtenus avec des décompositions sur huit octaves. En gardant, le même nombre d'octaves nous pouvons affiner les résultats pour décrire le comportement de l'atmosphère sur des petites périodes de temps. En effet, nous calculons jusqu'à présent les décroissances asymptotiques $\tau(q)$ des fonctions de partition $Z(q, a)$ sur le domaine tout entier, de 1 an à 5 jours par exemple pour la figure 13. Nous pouvons découper le domaine en deux parties, de 1 an à 45 jours, par exemple, et de 45 jours à 5 jours, et calculer $\tau(q)$ pour ces deux sous-domaines séparément. Les résultats sont exposés sur les figures 18 et 19. Les résultats sont évidemment moins homogènes car ils décrivent des périodes de temps plus courtes. Nous pouvons cependant toujours noter une différence entre la stratosphère et la troposphère, la troposphère présentant un comportement plus irrégulier. Pour des petites échelles de temps, entre 45 et 5 jours, les exposants de Hölder principaux pour la stratosphère sont globalement au-dessus de 0,5 avec quelques valeurs autour de 0. Pour la même période de temps, les données troposphériques présentent de plus petites valeurs pour h . Cette constatation explique la difficulté à faire des prédictions météorologiques fiables au delà de 5 jours. À des échelles de temps plus grandes, de 45 jours à 1 an, les données stratosphériques présentent de longues périodes de corrélation séparées par de courtes périodes non corrélées. Aux mêmes échelles, la troposphère présente de longues périodes de données non corrélées avec de fortes valeurs négatives pour h .

Nous avons également essayé d'affiner les résultats en différenciant les données hivernales des données estivales. Nous n'avons noté aucune différence significative entre les saisons laissant à penser que les anomalies présentent la même régularité en hiver qu'en été. On ne peut cependant pas trop se fier à ces résultats

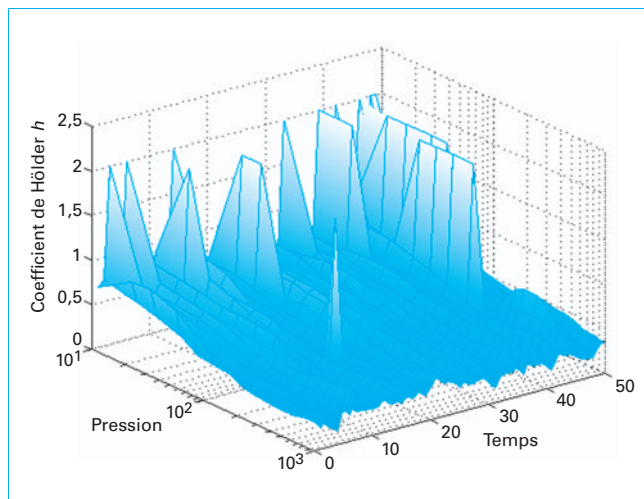


Figure 18 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 45 jours et 5 ans

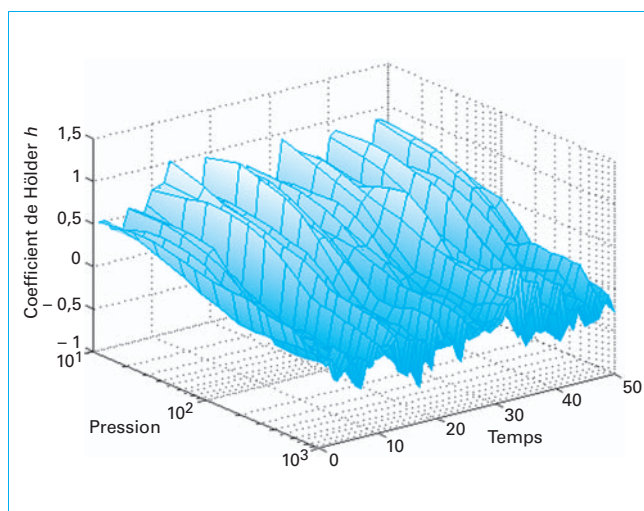


Figure 19 – Exposant de Hölder h pour une période de temps entre 1 an et 45 jours

car la fenêtre de temps utilisée (180 jours) est trop courte pour effectuer une analyse multi-échelle fiable.

L'analyse de l'index NAM n'a pour l'instant porté que sur la localisation h du maximum du spectre de singularités. Or nous avons vu dans la section précédente que la taille du support du spectre pouvait varier en fonction de l'altitude. Nous pouvons donc obtenir aussi des représentations montrant la taille du support du spectre en fonction de l'altitude et du temps. Les résultats sont donnés sur les figures 20, 21 et 22. Nous pouvons à nouveau observer des différences significatives entre les données stratosphériques et troposphériques à toutes les échelles de temps.

Nous avons présenté dans cette partie quelques résultats sur l'analyse du caractère multi-fractal de données atmosphériques obtenus par un formalisme utilisant les ondelettes. Notre étude révèle clairement le comportement fractal des signaux étudiés ainsi que des différences en fonction de l'échelle de temps considérée. Nous avons trouvé pour la stratosphère des corrélations à court terme sur des périodes allant de quelques jours à quelques mois. Dans la troposphère, et pour les mêmes échelles, nous

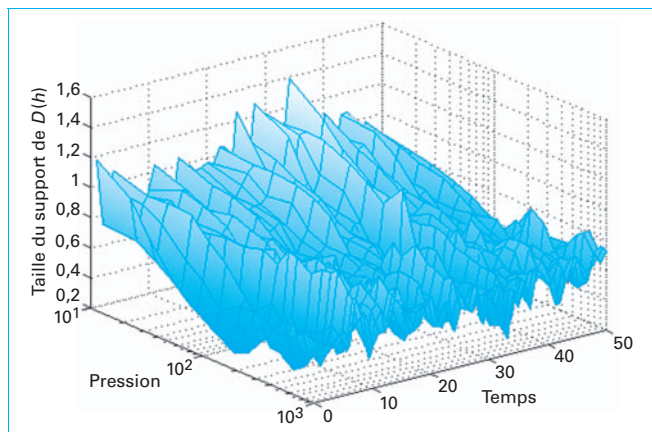


Figure 20 – Taille du spectre de singularités pour des échelles de temps allant de 1 an à quelques jours

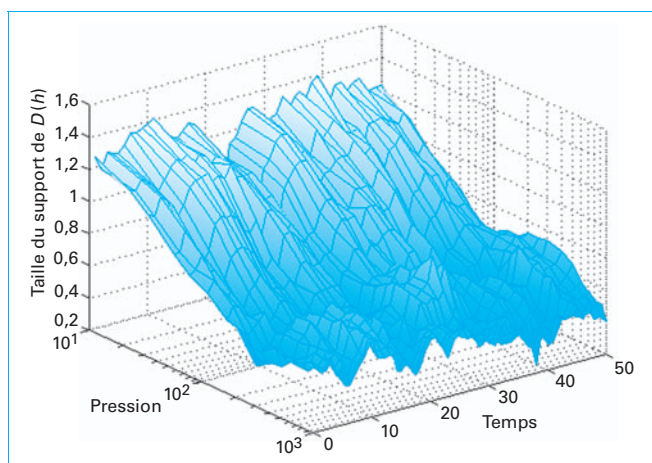


Figure 21 – Taille du spectre de singularités pour des échelles de temps allant de 5 ans à quelques semaines

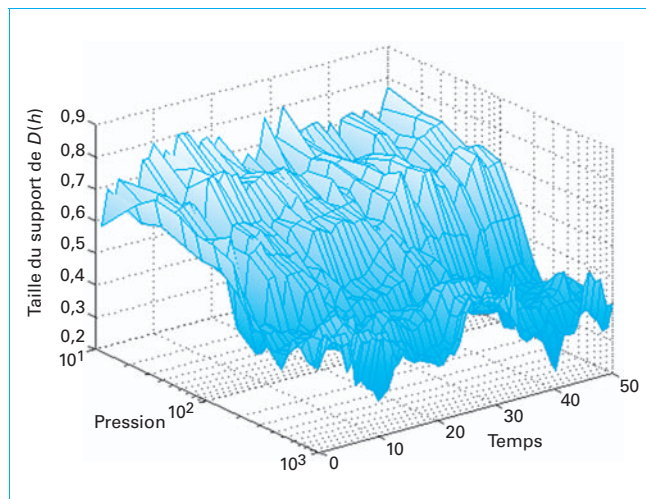


Figure 22 – Taille du spectre de singularités pour des échelles de temps allant de 25 ans à quelques mois

avons trouvé des corrélations beaucoup plus faibles. Dans les deux cas, les corrélations disparaissent si l'on considère des périodes de temps plus longues. Ces résultats ne sont que la première étape de travaux en cours, mais montrent déjà l'intérêt de ces méthodes pour l'étude de données atmosphériques. Une méthode également basée sur des décompositions en ondelettes et appelée *wavelet leaders* sera prochainement utilisée pour réaliser le même type d'analyse ([18]). Cette nouvelle méthode possède de meilleurs fondements mathématiques et se révèle plus simple à utiliser.

Remerciements :

Ces travaux ont été réalisés lors d'un séjour à l'université de Washington à Seattle. L'auteur remercie K.-K. Tung, directeur du département de mathématiques appliquées pour son accueil, son soutien et ses commentaires.

Analyse multifractale en ondelettes pour l'analyse de données atmosphériques

par **Patrick FISCHER**

Docteur en mathématiques, Maître de conférences

Université de Bordeaux I, Laboratoire de mathématiques appliquées de Bordeaux

Références

- [1] ARNEODO (A.), GRASSEAU (G.) et HOLSCHNEIDER (M.). – *Wavelet transform of multifractals*. Phys. Rev. Lett., **61**, 2281-2284 (1988).
- [2] ARNEODO (A.), BACRY (E.) et MUZY (J.F.). – *The thermodynamics of fractals revisited with wavelets*. Physica A, **213**, 232-275 (1995).
- [3] ARNEODO (A.), ARGOU (F.), BACRY (E.), ELEZGARAY (J.) et MUZY (J.F.). – *Ondelettes, multifractales et turbulence*. Diderot Editeur, Paris, France (1995).
- [4] BACRY (E.), MUZY (J.F.) et ARNEODO (A.). – *Singularity spectrum of fractals signal from wavelet analysis : Exact results*. J. Stat. Phys., **70**, 635-674 (1993).
- [5] BALDWIN (M.P.) et DUNKERTON (T.J.). – *Stratospheric harbingers of anomalous weather regimes*. Science, **294**, 581-584 (2001).
- [6] JULIAN (P.R.) et LABITZKE (K.). – *A study of atmospheric energetics during the January-February 1963 stratospheric warming*. J. Atmos. Sci., **22**, N° 6, 597-610 (1965).
- [7] QUIROZ (R.S.). – *Tropospheric-stratospheric polar vortex breakdown of January 1977*. Geophys. Res. Lett., **4**, 151-154 (1977).
- [8] MANDELBROT (B.B.). – *Fractals : Form, chance and dimension*. Freeman, San Francisco (1977).
- [9] MANDELBROT (B.B.). – *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York (1982).
- [10] PARISI (G.) et FRISCH (U.). – *On the singularity structure of fully developed turbulence, in Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamic*, edited by Ghil M., Benzi R. and Parisi G., North-Holland, Amsterdam (1985).
- [11] FRISCH (U.). – *Turbulence*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
- [12] MALLAT (S.) et ZHONG (S.). – *Wavelet transform maxima and multiscale edges*. Wavelets and their Applications, Jones and Bartlett, Boston (1991).
- [13] MALLAT (S.). – *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, New York (1998).
- [14] MUZY (J.F.), BACRY (E.) et ARNEODO (A.). – *Wavelets and multifractal formalism for singular signals : application to turbulence data*. Phys. Rev. Lett., **67**, 3515-3518 (1991).
- [15] ANTOINE (J.P.), BARACHE (D.), CESAR Jr (R. M.) et da F. COSTA (L.). – *Multiscale shape analysis using the continuous wavelet transform*. IEEE Proc. Intern. Conf. Image Proc., **1**, 291-294 (1996).
- [16] JAFFARD (S.). – *Multifractal formalism for functions Part I : Results valid for all functions*. SIAM J. Math. Anal., **28**, 944-970 (1997).
- [17] JAFFARD (S.). – *Multifractal formalism for functions Part II : Self-similar functions*. SIAM J. Math. Anal., **28**, 971-998 (1997).
- [18] JAFFARD (S.), LASHERMES (B.) et ABRY (P.). – *Wavelet Leaders in Multifractal Analysis*. Wavelet Analysis and Applications, Birkhäuser Verlag Basel (2007).

Site Internet

Données NAM couvrant la période janvier 1958 - juillet 2006. Site de Mark Baldwin

<http://www.nwra.com/resumes/baldwin/nam.php>

GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE
SUR TOUS SUPPORTS
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- ☐ Automatique - Robotique
- ☐ Biomédical - Pharma
- ☐ Construction et travaux publics
- ☐ Électronique - Photonique
- ☐ Énergies
- ☐ Environnement - Sécurité
- ☐ Génie industriel
- ☐ Ingénierie des transports
- ☐ Innovation
- ☐ Matériaux
- ☐ Mécanique
- ☐ Mesures - Analyses
- ☐ Procédés chimie - Bio - Agro
- ☐ Sciences fondamentales
- ☐ Technologies de l'information

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com

LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS



Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE



www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com