

Turbulence et analyse en paquets d'ondelettes

Patrick FISCHER

June 30, 2005

Abstract

Le problème de la turbulence, et en particulier celui de la modélisation de la traînée d'un objet à travers un fluide (liquide ou gazeux) a occupé et fasciné des générations de scientifiques, de Léonard De Vinci au 16^{ème} siècle (voir Figure 1) à nos jours. Des enjeux scientifiques, tels que la prédiction météorologique ou les changements climatiques par exemple, ainsi qu'économiques comme la conception de profils de voitures, d'avions ou de navires, reposent sur une meilleure compréhension des phénomènes turbulents. Malgré des années de recherche, aucune théorie complète de la turbulence n'a pu être développée.

L'application des ondelettes à la dynamique des fluides a fait l'objet de nombreuses publications depuis 1992 [11, 12, 13, 14]. L'idée principale développée dans ces publications est que le champ de vorticité d'un flot turbulent peut facilement être décomposé en parties cohérentes et incohérentes grâce à une décomposition en ondelettes orthogonales. La partie cohérente, correspondant aux coefficients en ondelettes les plus grands, est en fait composée des tourbillons, et la partie "incohérente", correspondant aux coefficients en ondelettes les plus petits, représente le reste de l'écoulement. Il n'existe cependant pas de définition bien établie de ce qui est cohérent et incohérent. Ainsi, pour certains auteurs, la séparation repose sur le caractère gaussien ou non de la PDF (fonction de densité de probabilités): partie cohérente non gaussienne, et partie incohérente gaussienne. Cependant, dans une telle séparation, les filaments de vorticité, bien visibles dans le champ du même nom, se retrouvent partiellement dans la partie cohérente, et dans la partie incohérente. Pour d'autres, dont l'auteur du présent article, les tourbillons et les filaments de vorticité possèdent une certaine cohérence.

Cet article propose de donner au lecteur les connaissances de base sur la théorie de la turbulence, ainsi que sur celle des ondelettes, lui permettant ainsi d'appréhender la complexité des phénomènes turbulents et d'utiliser les derniers outils mathématiques développés pour comprendre ces phénomènes.

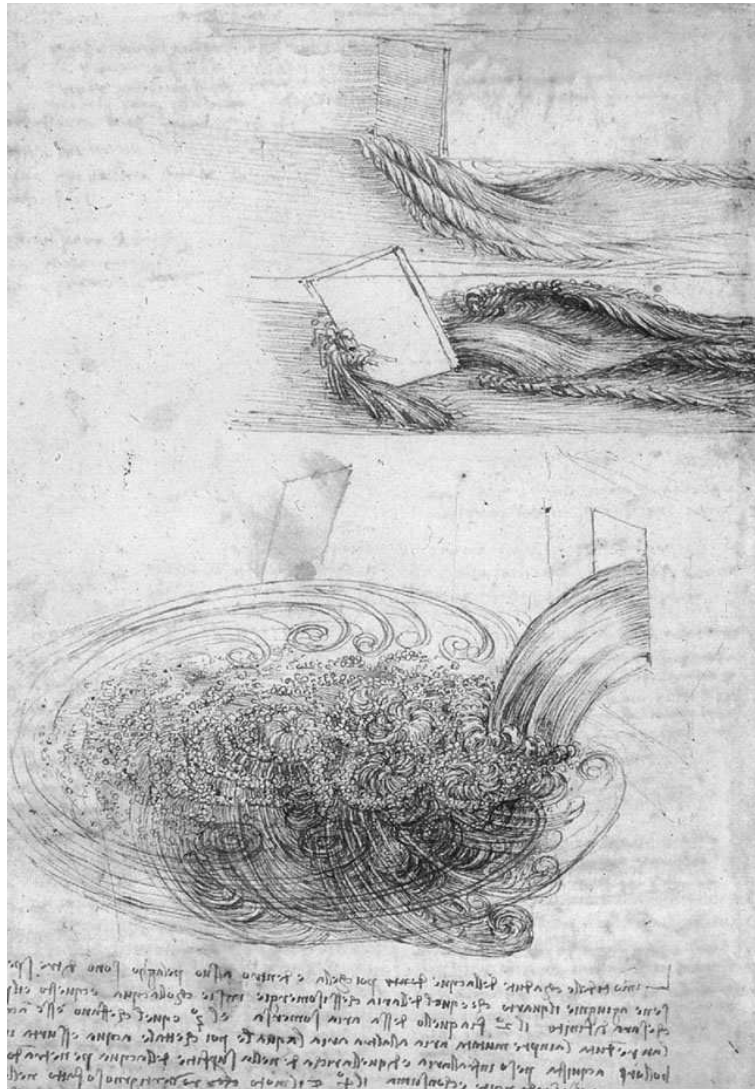


Figure 1: Léonard de Vinci, *Etude de la formation des eaux*, Royal Library, Windsor Castle, Royaume Uni.

1 Un modèle de la turbulence

Le niveau de turbulence d'un fluide peut se définir à l'aide du nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{LU}{\nu} \quad (1)$$

où L désigne une échelle caractéristique (le diamètre d'un obstacle par exemple), U une vitesse caractéristique (souvent la vitesse moyenne du fluide) et ν la viscosité cinématique. Plus ce nombre est grand, et plus le fluide est turbulent. Pour une géométrie fixée, un fluide peut être rendu turbulent soit en augmentant sa vitesse (et en gardant sa viscosité constante), soit en diminuant sa viscosité (à vitesse constante). Le cas idéal d'un fluide homogène (invariance par translation), isotrope (invariance par rotation) incompressible mais avec un grand nombre de Reynolds n'est pas complètement compris. Notamment, la détermination des transferts d'énergie à travers les différentes échelles du fluide à partir des équations du mouvement, les équations de Navier-Stokes, reste un défi actuel.

1.1 Les équations de Navier-Stokes

L'homogénéité d'un fluide implique que ses propriétés statistiques sont indépendantes de la variable d'espace x : il ne peut donc pas y avoir de "murs" et le domaine spatial doit être infini. Nous devrions supposer que le fluide remplit tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Cependant pour des raisons de simplifications mathématiques, nous pouvons tout aussi bien considérer un domaine borné muni de conditions spatiales périodiques.

1.1.1 Equations sur la vitesse

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de vitesse du fluide, $\rho(\mathbf{x}, t)$ sa densité, $P(\mathbf{x}, t)$ sa pression, ν sa viscosité cinématique supposée constante, et $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ une force extérieure homogène. L'évolution du fluide est gouvernée par l'équation de Navier-Stokes qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement d'une particule fluide, et s'écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \rho(\mathbf{x}, 0) = 0, \forall \mathbf{x}. \quad (5)$$

La première équation est l'équation de Navier-Stokes. Les deux termes du membre de gauche correspondent au transport de particules fluides par l'écoulement, et le deuxième

terme du membre de droite correspond à la dissipation, c'est-à-dire à la conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique par frottement visqueux. L'équation de continuité (3) peut être utilisée pour réécrire l'équation d'incompressibilité (4) sous une forme plus habituelle,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Un champ de vitesse $\mathbf{u}$ de classe C^1 , vérifiant l'équation (6) sur un domaine simplement connexe dérive d'un potentiel B de classe C^2 ,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \nabla \times B. \quad (7)$$

Ce potentiel ne peut être défini qu'au gradient d'une fonction scalaire b près,

$$B' = B + \nabla b, \quad (8)$$

où b vérifie l'équation de Poisson suivante:

$$\nabla^2 b = -\nabla \cdot B. \quad (9)$$

Cela implique donc que B' vérifiera,

$$\nabla \cdot B' = \nabla \cdot B + \nabla^2 b = 0. \quad (10)$$

On peut donc reformuler l'équation (7) par

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \nabla \times B \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (11)$$

où B est maintenant défini de façon unique.

Les équations (4) et (5) impliquent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \rho = 0$. La densité doit donc être constante et peut être prise égale à 1, par un choix judicieux des unités de masse.

Le nombre de Reynolds peut être évalué en écrivant le rapport entre le terme non linéaire de transport $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, et le terme linéaire de dissipation $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$:

$$Re = \frac{LU}{\nu} = \frac{U \frac{U}{L}}{\nu \frac{U}{L^2}} \approx \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}. \quad (12)$$

Il mesure donc le niveau de non linéarité de l'écoulement. Lorsque ν tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, le terme de dissipation de degré 2 disparaît de l'équation: le terme de plus haut degré devient alors le terme de transport $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (13)$$

L'équation s'appelle alors équation d'Euler; elle conserve l'énergie cinétique puisqu'il n'y a plus de terme de dissipation d'énergie, et sa solution est donc réversible en temps. Contrairement à l'équation de Navier-Stokes dont les solutions sont irréversibles.

1.1.2 Equations sur la vorticité

Le terme lié à la pression P peut être éliminé de l'équation (2) afin de simplifier les calculs. En prenant la divergence de l'équation (2), on obtient une équation sur la pression:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \nabla^2 P. \quad (14)$$

Avec des conditions aux bords convenables (périodicité par exemple), cette équation de Poisson sur la pression peut être facilement résolue.

Nous pouvons également éliminer la pression du problème en calculant le rotationnel de l'équation (2). En utilisant alors la propriété d'incompressibilité, et l'égalité suivante,

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (15)$$

on obtient,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{F}, \quad (16)$$

où $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ est la vorticité. Cette variable permet de décrire les rotations qui se trouvent dans le flot.

Ces équations sont surtout utilisées dans le cas bidimensionnel car le champ de vorticité devient alors un champ scalaire.

1.2 Symétries et lois de conservation

Les physiciens ont pris l'habitude d'appeler "symétrie" toute invariance de groupe d'un système dynamique. Le terme de symétrie sera donc aussi utilisé ici pour désigner une transformation qui préserve les solutions de l'équation de Navier-Stokes.

1.2.1 Symétries

Soit G un groupe de transformations agissant sur des fonctions $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ périodiques (ou définies sur tout $\mathbb{R}^3$)   divergence nulle. G sera appelé groupe de symétrie pour une équation donnée si toute solution $\mathbf{u}$ de l'équation reste solution après application d'une transformation de G . Les symétries connues pour l'équation de Navier-Stokes sont les suivantes:

- Translation en espace: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$
- Translation en temps: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (t + \tau, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$
- Rotation: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (t, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{A} \in SO(\mathbb{R}^3),$
- Parité: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (t, -\mathbf{x}, -\mathbf{u}),$

- Transformation galiléenne: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{U}t, \mathbf{u} + \mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^3,$
- Reynolds: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \nu) \mapsto (\gamma t, \lambda \mathbf{x}, \frac{\lambda}{\gamma} \mathbf{u}, \frac{\lambda^2}{\gamma} \nu), \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$

Cette dernière symétrie conserve la valeur du nombre de Reynolds, et contient le principe de similarité de la dynamique des fluides. En fait, pour $\gamma \neq \lambda^2$, il s'agit d'une symétrie du fluide lui-même plutôt que de l'équation correspondante puisque cette transformation agit sur la viscosité ν en plus des variables $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$. Lorsque la viscosité est nulle, une symétrie d'échelle plus générale existe:

- $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (\lambda^{1-h}t, \lambda \mathbf{x}, \lambda^h \mathbf{u}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, h \in \mathbb{R}.$

1.2.2 Lois de conservation

En l'absence de force extérieure et de viscosité, l'équation d'Euler (13), conserve l'énergie,

$$E = \frac{1}{2} \int \|\mathbf{u}\|^2 d\mathbf{x}, \quad (17)$$

en supposant la vitesse nulle à l'infini (ou sur un domaine borné avec des conditions périodiques). L'énergie est conservée dans le cas des fluides non visqueux en dimension deux et trois. Nous allons voir maintenant deux quantités qui ne pourront être conservées que dans un cadre dimensionnel bien précis: l'énstrophie qui ne sera conservée qu'en dimension deux, et l'hélicité qui ne sera conservée qu'en dimension trois.

L'énstrophie est à la vortacité ce que l'énergie est à la vitesse:

$$Z = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}^2 d\mathbf{x}. \quad (18)$$

Dans le cas de la dimension deux, la vitesse est un vecteur dans le plan xOy indépendant de la troisième variable z . Le champ de vortacité $\boldsymbol{\omega}$ est alors un champ scalaire ω orienté le long du troisième vecteur de base $\vec{k}$, et donc orthogonal au champ de vitesse. Le terme de déformation de la vortacité $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ s'annule et l'équation sur la vortacité s'écrit alors:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (19)$$

Par une simple intégration par parties, on peut alors montrer que,

$$\frac{dZ}{dt} = 0. \quad (20)$$

On peut en fait montrer qu'en dimension deux, toute fonction dérivable de la vortacité est conservée au cours du temps.

Nous pouvons également définir une troisième quantité, l'hélicité, obtenue par produit scalaire entre la vitesse et la vorticité:

$$H = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x}. \quad (21)$$

L'hélicité, toujours nulle en dimension deux (due à l'orthogonalité entre la vitesse et la vorticité), peut être nulle ou négative en dimension trois, contrairement à l'énergie et à l'enstrophie qui sont toujours positives. L'hélicité mesure la capacité des tourbillons à former des tubes tourbillonnaires.

Dans le cas d'un fluide visqueux ($\nu \neq 0$), les lois de conservation décrivent les variations de ces quantités au cours du temps. Elles se réécrivent alors de la façon suivante:

$$\frac{dE}{dt} = -2\nu Z \quad \text{cas 2D et 3D} \quad (22)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -2\nu P \quad \text{seulement 2D} \quad (23)$$

$$\frac{dH}{dt} = -2\nu H_\omega \quad \text{seulement 3D} \quad (24)$$

E , Z et H précédemment définis désignent donc respectivement l'énergie, l'enstrophie, et l'hélicité moyennes, et les quantités P et H_ω , définies par,

$$P = \frac{1}{2} \int \|\nabla \boldsymbol{\omega}\|^2 d\mathbf{x},$$

$$H_\omega = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x},$$

désignent respectivement la palinstrophie et l'hélicité tourbillonnaire moyennes. Elles mesurent donc les variations de l'enstrophie et de l'hélicité dues à la viscosité.

Si l'on considère l'équation (22), on s'aperçoit que le terme non linéaire de l'équation de Navier Stokes n'intervient pas. En effet, ce terme ne modifie pas la quantité globale d'énergie du système, et son rôle, très important, consiste à transférer l'énergie à travers les échelles. Pour cela, nous allons préciser la notion d'échelle au moyen de la définition des spectres d'énergie et d'enstrophie dans le paragraphe suivant.

1.3 Le calcul des spectres et l'hypothèse de Taylor

La description de la répartition d'énergie (ou d'enstrophie) à travers les différentes échelles du système est réalisée à l'aide de la transformée de Fourier spatiale du champ de vitesse (ou de vorticité). Cependant, pour de nombreuses simulations numériques, ou expérimentations réelles, il n'est pas possible de connaître les valeurs de ces champs en tous les points de l'espace. Sous certaines hypothèses, il est alors possible de se satisfaire de la

connaissance, en un point donné de l'espace, des valeurs du champ considéré pour différentes valeurs du temps. On peut alors déduire le spectre spatial à partir de ces données temporelles. Pour cela, le fluide doit vérifier l'hypothèse dite de Taylor décrite dans le second paragraphe de cette partie.

1.3.1 Les spectres d'énergie et d'entrophie

La transformée de Fourier du champ de vitesse $\mathbf{u}$ est définie par:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (25)$$

Le champ initial $\mathbf{u}$ peut alors être reconstruit à l'aide la transformée de Fourier inverse:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (26)$$

où n est la dimension de l'espace.

Le théorème de Parseval permet alors de calculer l'énergie d'un système à partir de sa transformée de Fourier:

$$E = \frac{1}{2} \int \|\mathbf{u}\|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 d\mathbf{k} = \int_0^{+\infty} E(k) dk, \quad (27)$$

où le spectre d'énergie $E(k)$ est obtenu par intégration angulaire. Dans le cas tridimensionnel par exemple, on obtient alors:

$$E(k) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 k^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (28)$$

Le spectre d'énergie $E(k)$ donne la répartition de l'énergie à travers les différentes échelles. Le nombre d'onde k est inversement homogène à une échelle. Ainsi, les grandes échelles se trouvent décrites pour les faibles nombres d'onde et les petites échelles pour les grandes valeurs de k . Quelle que soit la dimension, l'énergie totale est alors simplement la surface située entre le graphe de $E(k)$ et l'axe des abscisses dans la représentation graphique du spectre d'énergie.

Nous pouvons de la même façon définir l'entrophie totale Z et le spectre d'entrophie $Z(k)$ à l'aide de la transformée de Fourier du champ de vortacité ω :

$$Z = \frac{1}{2} \int \|\omega\|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|\hat{\omega}\|^2 d\mathbf{k} = \int_0^{+\infty} Z(k) dk. \quad (29)$$

La vortacité étant définie à partir de la vitesse, on peut alors réexprimer l'entrophie en fonction de l'énergie:

$$Z(k) = k^2 E(k). \quad (30)$$

1.3.2 L'hypothèse de Taylor

Dans son article publié en 1938 [29], Taylor introduit une hypothèse qui lui permet de déduire le comportement spatial d'un fluide à partir des fluctuations temporelles mesurées en un point. Cette hypothèse, connue sous le nom d'hypothèse de Taylor ou de la turbulence gelée, repose sur l'existence d'un flot moyen qui transporte les structures. Pour cela, la moyenne des fluctuations de la vitesse autour de la vitesse moyenne doit être relativement petite comparée à cette vitesse moyenne.

Notons, $\mathbf{u}'(t, x)$ la vitesse qui pourrait être mesurée dans un repère dont le référentiel serait le flot moyen. La coordonnée x étant choisie le long du champ de vitesse moyen. Dans un référentiel extérieur (le laboratoire par exemple), la vitesse mesurée sera alors:

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}'(t, x - Ut) + U, \quad (31)$$

où U est le flot moyen. Si on suppose que l'intensité I de la turbulence,

$$I = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}}{U}, \quad (32)$$

où $\langle . \rangle$ dénote la moyenne spatiale, est suffisamment faible ($\ll 1$), on peut alors vérifier que l'essentiel des variations temporelles de $\mathbf{u}(t, x)$ viennent du terme spatial $x - Ut$ de $\mathbf{u}'$. L'hypothèse de Taylor permet donc de traduire les variations temporelles de $\mathbf{u}$ mesurées en un point donné comme des variations spatiales de $\mathbf{u}'$.

La relation entre une unité d'espace l pour $\mathbf{u}'$ et une unité de temps τ pour $\mathbf{u}$ est alors donnée par:

$$l = U\tau. \quad (33)$$

De nombreuses données expérimentales sur la turbulence sont en fait obtenues dans le domaine temporel, et sont ensuite traduites dans le domaine spatial grâce à l'hypothèse de Taylor. Dans les représentations graphiques, l'axe du temps (ou de fréquence) est alors souvent renommé comme un axe d'échelle (ou de nombre d'onde).

1.4 Cascades d'énergie et d'ensrophie

Il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie complète permettant de décrire les phénomènes turbulents observés dans la nature à partir de l'équation de Navier-Stokes (2). Il est cependant possible de formuler des hypothèses supplémentaires compatibles avec les observations et conduisant à de bonnes prédictions. Ces hypothèses ont été avancées par Kolmogorov en 1941, et sont connues sous le nom de théorie de Kolmogorov K41 [18, 19].

1.4.1 Le modèle statistique de Kolmogorov (K41)

Dans la première partie de cet article, un certain nombre de symétries pour les solutions de l'équation de Navier-Stokes ont été décrites. On peut alors se demander quelles sont

leurs implications dans la description de la turbulence ?

Considérons, par exemple, l'invariance par rapport à une translation en temps. Si le nombre de Reynolds est faible, et si les conditions aux bords du domaine ainsi que le forçage éventuel extérieur sont indépendants du temps, alors la solution est stationnaire et ne change pas lors d'une translation de l'origine des temps. Quand le nombre de Reynolds augmente beaucoup, cette propriété n'est plus observée pour des solutions individuelles, mais se retrouve pour des mesures globales du système dynamique. Ce sont alors les propriétés statistiques des solutions qui deviennent invariantes par translation en temps.

Cette constatation est l'hypothèse principale à la base de la théorie de Kolmogorov:

Pour un nombre de Reynolds infini, toutes les symétries de l'équation de Navier-Stokes, détruites par les mécanismes de création de la turbulence, sont restaurées dans un sens statistique à une certaine gamme d'échelles et loin des bords du domaine.

En effet, un écoulement turbulent est un système thermodynamique non isolé de l'extérieur soumis à des forces à grandes échelles (forces extérieures) et à petites échelles (frottement visqueux). Les prédictions statistiques de la turbulence sont donc restreintes à une gamme d'échelles intermédiaires, appelée zone inertielle. En considérant les composantes de la vitesse comme des variables aléatoires au sens de la théorie des probabilités, et en calculant des moyennes d'ensemble, Kolmogorov en est arrivé aux conclusions suivantes:

- la turbulence est statistiquement homogène (invariante par translation spatiale, loin des bords), isotrope (invariante par rotation), autosimilaire (invariante par dilatation des échelles), et stationnaire (invariante par translation temporelle),
- les propriétés statistiques ne dépendent que de l'énergie dissipée,
- l'énergie est transférée, sans dissipation, à travers les échelles, dans la zone inertielle.

Toutes ces propriétés trouvent une traduction mathématique sur les fonctions de structures d'ordre 1, 2 ou 3,

$$S_n(\mathbf{l}) = \langle (\delta \mathbf{u}(\mathbf{l}))^n \rangle, \quad n = 1, 2, 3 \quad (34)$$

définies à partir des corrélations de la vitesse en deux points:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (35)$$

La propriété d'autosimilarité se traduit alors par l'existence d'un facteur d'échelle $h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{l}) = \lambda^h \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{l}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (36)$$

La théorie repose aussi sur l’hypothèse que le fluide turbulent a un taux moyen de dissipation de l’énergie par unité de masse, ϵ , constant.

En utilisant des arguments d’analyse dimensionnelle, on peut alors montrer que la fonction de structure d’ordre 2 $S_2(\mathbf{l})$ doit vérifier:

$$S_2(\mathbf{l}) = \langle (\delta \mathbf{u}(\mathbf{l}))^2 \rangle = C \epsilon^{2/3} l^{2/3} \quad (37)$$

où C est une constante adimensionnée et $l = |\mathbf{l}|$. Par ailleurs, on peut établir une relation entre le spectre d’énergie $E(k)$ et la fonction de structure d’ordre 2. En effet, quand le spectre d’énergie vérifie une loi de puissance,

$$E(k) \approx k^{-n} \quad (38)$$

alors la fonction de structure d’ordre 2 vérifie aussi une loi de puissance du type:

$$S_2(\mathbf{l}) \approx l^{n-1} \quad (39)$$

On en déduit alors:

$$E(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (40)$$

La zone inertielle qui permet le transfert de l’énergie des grandes échelles vers les petites, à un taux constant, présente donc un spectre d’énergie en loi de puissance avec un exposant de $-5/3$. D’un point de vue physique, ce transfert s’effectue par division de gros tourbillons en tourbillons de plus en plus petits. Ce phénomène a été décrit par le météorologue anglais Richardson dans une paraphrase d’un poème de Swift: “*Les gros tourbillons ont de petits tourbillons, qui se nourrissent de leur vitesse, et les petits tourbillons en ont de plus petits, et ainsi de suite jusqu’à la viscosité moléculaire*”

1.4.2 Turbulence 2D: le modèle KLB

L’étude des fluides incompressibles turbulents en dimension 2 est motivée par ses nombreuses applications liées à la simulation d’écoulements géophysiques à grande échelle, en météorologie ou en océanographie par exemple. Il est de plus possible de réaliser des simulations numériques avec de grands nombres de Reynolds impossibles à réaliser pour la turbulence tridimensionnelle. D’un point de vue théorique, l’existence, l’unicité et la stabilité des solutions de l’équation de Navier-Stokes sont assurées en turbulence bidimensionnelle.

En turbulence tridimensionnelle, la loi de conservation de l’énergie conduit à l’existence d’une cascade d’énergie précédemment décrite. En turbulence bidimensionnelle, la présence d’une deuxième loi de conservation, celle de l’énstrophie, va modifier les transferts d’énergie du fluide. En effet, selon la théorie classique développée par Kraichnan [20, 21, 22], Leith [23] et Batchelor [3], si un système est forcé autour d’une échelle donnée, une double cascade devrait avoir lieu: une cascade inverse d’énergie de l’échelle de

forçage, appelée aussi échelle d'injection, vers les grandes échelles, et une cascade directe d'ensrophie de cette même échelle de forçage vers les petites échelles où elle sera dissipée. Les analyses dimensionnelles montrent alors que le spectre d'énergie suivra une loi de puissance en $k^{-5/3}$ dans la zone de la cascade inverse d'énergie, et une loi de puissance en k^{-3} dans la zone de la cascade directe d'ensrophie. Le spectre d'énergie est schématisé sur la figure 2.

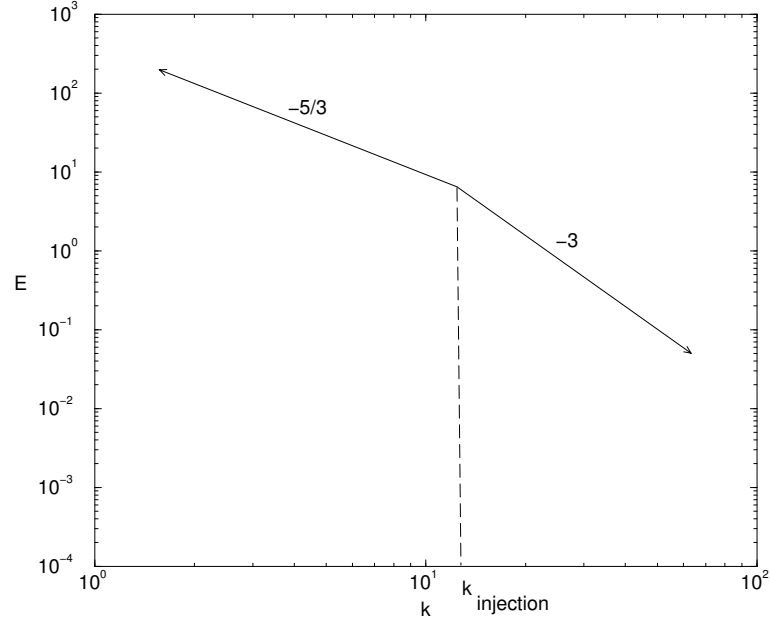


Figure 2: Spectre d'énergie théorique en turbulence bidimensionnelle.

Cependant, selon Saffman [27], la contribution dominante dans le spectre d'énergie vient des effets dus aux discontinuités dans le champ de vortacité. Il prévoit alors une cascade d'ensrophie avec une loi de puissance en k^{-4} . La valeur qui est couramment observée dans les simulations numériques ou expérimentales se situe en général entre ces deux valeurs. Tung, Gkioulekas et Orlando [15, 16, 30] proposent une théorie plus générale basée sur une double cascade d'énergie et d'ensrophie en amont et en aval de l'échelle d'injection. D'après leur théorie, un flot bidimensionnel peut s'écrire comme la combinaison linéaire de deux solutions de l'équation de Navier-Stokes homogène correspondant aux deux lois de conservations, et d'une solution particulière générée par le terme de forçage extérieur et les conditions éventuelles au bord du domaine. Le spectre d'énergie s'écrirait alors:

$$E(k) = E^{(\epsilon)}(k) + E^{(\eta)}(k) + E^{(p)}(k) \quad (41)$$

où $E^{(\epsilon)}(k)$ suivrait une loi de puissance en $k^{-5/3}$, $E^{(\eta)}(k)$ en k^{-3} et $E^{(p)}(k)$ serait la contribution due à la solution particulière.

Comme nous venons de le voir, plusieurs théories existent, et il n'est actuellement pas possible de définir une théorie unique de la turbulence qui puisse décrire parfaitement tous les phénomènes observés dans la nature. La théorie prédisant la loi de puissance suivie par le spectre d'énergie d'un écoulement bidimensionnel est loin de faire l'unanimité parmi les scientifiques. Les lecteurs intéressés pourront consulter [28] pour une étude théorique plus détaillée de la turbulence bidimensionnelle.

En complément de l'étude statistique de la turbulence basée sur des moyennes d'ensemble, il est aussi fort utile d'étudier de façon qualitative chaque réalisation d'un écoulement. Une telle étude fera alors apparaître l'existence dans le champ de vorticité de structures dites cohérentes, et dont la formation et la persistance ne sont pas encore complètement comprises.

1.5 Tourbillons et filaments de vorticité

Lors de l'observation d'un écoulement turbulent, on peut distinguer deux types de structures de natures très différentes: des tourbillons correspondant à des condensations du champ de vorticité, et des filaments entrelaçant ces tourbillons. Pour certains scientifiques spécialistes du sujet, la création de ces filaments intervient lors de la concaténation de deux tourbillons, conduisant à la formation d'une spirale de vorticité au coeur des tourbillons. D'après Vassilicos et Hunt [31], ces accumulations de vorticité en forme de spirale rendent le champ plus singulier, et seraient à l'origine de la loi de puissance en $k^{-5/3}$ du spectre d'énergie. Ce processus de concaténation est à l'origine du transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes échelles, et serait donc responsable de la cascade inverse d'énergie.

Les tourbillons sont souvent qualifiés dans la littérature de structures cohérentes. Il n'existe cependant pas de définition exacte de la notion de "structure cohérente". Mais on peut quand même observer dans la pratique un certain nombre de caractéristiques: elles se forment spontanément quand le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, elles peuvent avoir différentes tailles couvrant une large gamme d'échelles, elles ont une forme relativement circulaire où la rotation est l'effet dominant, elles concentrent l'énergie et l'enstrophie et elles ont une durée de vie assez longue.

Les filaments de vorticité quant à eux ne reçoivent généralement pas le label de "cohérence" bien que pouvant avoir un certain rôle à jouer dans les transferts d'énergie et d'enstrophie.

Cette séparation de l'écoulement bidimensionnel en deux types de régions a déjà été réalisée numériquement à l'aide d'un seuillage direct sur les valeurs mêmes du champ de vorticité [4]. Les spectres des deux composantes obtenues présentaient alors des comportements en loi de puissance différents. De plus cette séparation a reçu une description plus mathématique en 1981. Cette description a été proposée par Weiss [32]. Il distingue dans un écoulement turbulent des régions elliptiques où la rotation domine la déformation,

et des régions hyperboliques où c'est la déformation qui l'emporte sur la rotation. Dans le premier cas, deux particules proches à un moment donné le restent encore pendant un certain temps alors que dans la deuxième région deux particules initialement proches s'écartent très rapidement l'une de l'autre au cours du temps le long de la direction de la déformation.

Des exemples de champs de vorticité permettant la visualisation des tourbillons et des filaments seront présentés dans la dernière partie de l'article traitant plus particulièrement des simulations numériques.

2 Ondelettes et paquets d'ondelettes

2.1 Rappels sur les ondelettes

L'intérêt de l'analyse de Fourier, largement utilisée pour étudier les composantes spectrales d'un phénomène, est de pouvoir décrire un système par ses caractéristiques fréquentielles plutôt que temporelles, venant ainsi compléter la représentation classique. Cependant, une mauvaise description dans une des deux représentations peut entraîner une mauvaise compréhension générale d'un phénomène. La représentation idéale est celle qui donne la meilleure description possible pour un système donné. Pour cela, l'utilisation d'une méthode qui puisse réaliser simultanément une analyse avec des paramètres de temps et de fréquence, comme une partition de musique où sont indiquées la fréquence et la durée des notes, est donc nécessaire. Nous présentons dans cette partie quelques exemples d'analyses temps-fréquence qui ont toutes en commun le principe de projection sur une famille de fonctions dépendant de deux variables respectivement reliées à la fréquence et au temps [9, 25, 2]:

$$C_f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt, \quad (42)$$

où $\psi_{a,b}(t)$ joue le même rôle que l'exponentielle complexe dans la transformée de Fourier.

2.1.1 L'analyse temps-fréquence

Une possibilité pour le choix de $\psi_{a,b}(t)$ est d'utiliser une fonction $g(t)$ qui soit translatée et modul e:

$$\psi_{a,b}(t) = g(t - b)e^{iat}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (43)$$

où $g(t)$ est une fonction fenêtre, gaussienne en général. Avec cette construction, on dispose de fonctions analysantes bien localisées en temps et en fréquence. Malgré les avantages apportés par cette représentation, elle n'est cependant pas parfaite et en particulier n'est pas adaptée pour décrire précisément des fonctions très irrégulières. En effet, la description de hautes fréquences très localisées nécessite une fenêtre avec un petit support alors que la description de basses fréquences diffuses est meilleure avec une fenêtre plus large.

Pour pallier à ce problème, des fonctions analysantes dont la taille du support est reliée à leur fréquence peuvent être définies.

L'idée de base dans la théorie des ondelettes est d'appliquer des dilatations en plus des translations précédemment introduites. Partant d'une fonction bien localisée en temps et en fréquence, une famille de fonctions analysantes se construit par la formule suivante,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

à partir d'une fonction initiale $\psi(t)$ appelée l'ondelette *mère*. Dans cette écriture t est le paramètre de temps et $1/a$ est homogène à une fréquence. On peut alors définir la transformée en ondelettes correspondante à l'aide de la relation (42). Selon le type d'application considérée, différentes familles d'ondelettes peuvent être choisies: on peut choisir de laisser les paramètres a et b varier de façon continue dans leur domaine $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, ou de restreindre leurs valeurs à une grille discrète. Ce choix génère deux sortes d'ondelettes, respectivement appelées ondelettes continues et ondelettes discrètes [9, 10].

Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'aux ondelettes discrètes et en particulier aux bases d'ondelettes orthogonales dont la construction sera détaillée dans la section suivante.

2.1.2 L'analyse multirésolution

Les ondelettes discrètes, comme leur nom l'indique, correspondent à un choix particulier de discrétisation de a et b , $a = a_0^m$, $b = nb_0 a_0^m$, indiquant que le paramètre de translation b dépend du coefficient de dilatation choisi. La famille d'ondelettes devient alors, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0). \quad (45)$$

Cet ensemble définit une base d'ondelettes discrète, a priori non orthogonale, donc redondante; ce qui entraîne que la reconstruction d'une fonction $f(t)$ de façon numérique à partir de ses coefficients $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ n'est pas immédiate. Un tel algorithme de reconstruction est possible pour les $\psi_{m,n}$ s'il existe deux constantes $A > 0$ et $B < +\infty$ telles que,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (46)$$

Si A et B sont égaux à 1 alors la famille $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale. La construction théorique de familles d'ondelettes orthonormales est liée à la notion d'analyse multirésolution introduite par Mallat en 1989 [24]. Une analyse multirésolution est une décomposition de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ en une suite de sous-espaces emboîtés,

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

telle que

- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ soit dense dans $L^2(\mathbb{R})$
- $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}$
- $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0$
- Il existe une fonction $\varphi \in V_0$, appelée l'ondelette *père*, telle que $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de V_0

Soit W_j le sous-espace orthogonal complémentaire de V_j dans V_{j-1} :

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1} \quad (47)$$

Cet espace contient la différence d'information entre V_j et V_{j-1} , et permet la décomposition de $L^2(\mathbb{R})$ en une somme directe:

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (48)$$

Il existe alors une fonction $\psi \in W_0$, l'ondelette mère, telle que $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormale de W_0 . Les bases d'ondelettes correspondantes sont alors définies par:

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k), \quad k, j \in \mathbb{Z}, \quad (49)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad k, j \in \mathbb{Z}. \quad (50)$$

L'ondelette mère possède ses M premiers moments nuls:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi(x) x^m = 0, \quad m = 0 \dots M - 1, \quad (51)$$

Puisque l'ondelette père, aussi appelée fonction d'échelle, $\varphi(x)$, et l'ondelette mère $\psi(x)$ appartiennent à V_{-1} , nous pouvons écrire leurs développements respectifs sur la base de V_{-1} :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \varphi(2x - k), \quad h_k = \langle \varphi, \varphi_{-1,k} \rangle, \quad (52)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{L-k-1}, \quad (53)$$

où le nombre L de coefficients est relié au nombre M de moments nuls et à certaines propriétés (régularité, symétrie, décroissance à l'infini...) qui peuvent être imposées à $\varphi(x)$. Les familles $\{h_k\}$ et $\{g_k\}$ forment en fait une paire de filtres miroirs en quadrature

H et G . Les fonctions vérifiant (52) ou (53) ont leur support inclus dans $[0 \dots L - 1]$. De plus, s'il existe une échelle la plus "grossière", $j = n$, et une échelle la plus "fine", $j = 0$, les fonctions de base peuvent se réécrire:

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \varphi_{j-1,2k+l}(x), \quad j = 1 \dots n, \quad (54)$$

et

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l \varphi_{j-1,2k+l}(x), \quad j = 1 \dots n. \quad (55)$$

Le calcul de la transformée en ondelettes d'une fonction $f(x)$ s'effectue alors par la détermination de deux ensembles de coefficients d_k^j et r_k^j définis par

$$d_k^j = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \psi_{j,k}(x), \quad (56)$$

et

$$r_k^j = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \varphi_{j,k}(x). \quad (57)$$

A partir d'un ensemble initial de coefficients r_k^0 , et en utilisant (54) et (55), il est alors possible de déterminer les coefficients d_k^j et r_k^j par les formules de récurrence suivantes:

$$d_k^j = \sum_{l=0}^{L-1} g_l r_{2k+l}^{j-1}, \quad (58)$$

et

$$r_k^j = \sum_{l=0}^{L-1} h_l r_{2k+l}^{j-1}. \quad (59)$$

Les coefficients d_k^j , et r_k^j sont considérés dans (58) et (59) comme des suites périodiques de période 2^{n-j} . L'ensemble d_k^j est composé par les coefficients correspondant à la décomposition de $f(x)$ sur la base $\psi_{j,k}$ et r_k^j peut être interprété comme l'ensemble des approximations entre les différentes échelles.

2.2 Définition des paquets d'ondelettes

2.2.1 Paquets d'ondelettes 1D

Soient H et G une paire de filtres miroirs en quadrature dont les coefficients sont respectivement notés h_j et g_j . On note par ψ_0 et ψ_1 l'ondelette père et l'ondelette mère

correspondantes. En utilisant les filtres H et G , on peut alors définir la suite de fonctions suivante:

$$\begin{aligned}\psi_{2n}(x) &= \sqrt{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \psi_n(2x - j), \\ \psi_{2n+1}(x) &= \sqrt{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \psi_n(2x - j).\end{aligned}\tag{60}$$

L'ensemble des fonctions $\{\psi_n\}_n$ définit alors les paquets d'ondelettes associés aux filtres H et G . Une base de paquets d'ondelettes orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ pourra alors être constituée en choisissant n'importe quel système libre et générateur parmi les fonctions $2^{s/2} \psi_n(2^s x - j)$. La procédure de sélection des fonctions, appelée aussi algorithme du choix de la meilleure base, sera décrite dans la suite. Chaque élément de la base est alors défini par trois paramètres: l'échelle s , le nombre d'onde (lié à la fréquence) n et le temps j . Les coefficients de paquets d'ondelettes peuvent être représentés de façon concise à l'aide de rectangles dyadiques. Par exemple, la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal composé de 8 points $\{x_1, \dots, x_8\}$ pourra avoir la représentation en arbre donnée dans le Tableau 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
r_1	r_2	r_3	r_4	d_1	d_2	d_3	d_4
rr_1	rr_2	dr_1	dr_2	rd_1	rd_2	dd_1	dd_2
rrr_1	drr_1	rdr_1	ddr_1	rrd_1	$drrd_1$	rdd_1	ddd_1

Table 1: Représentation dyadique des coefficients de paquets d'ondelettes

Chaque ligne est obtenue à partir de la ligne précédente par application des filtres H ou G . L'application du filtre H est notée r comme “résumé” et l'application du filtre G est notée d comme “différence”. Par exemple, l'ensemble $\{rd_1 \quad rd_2\}$ est obtenu par application du filtre H à $\{d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4\}$, et $\{dd_1 \quad dd_2\}$ est obtenu par application du filtre G .

2.2.2 Paquets d'ondelettes 2D

Les paquets d'ondelettes bidimensionnelles peuvent être obtenus par produits tensoriels $\psi_{snk}(x) \cdot \psi_{s'n'k'}(y)$ des paquets à une dimension. Le support de ces fonctions est alors exactement le produit cartésien des supports de $\psi_{snk}(x)$ et $\psi_{s'n'k'}(y)$. La même échelle $s = s'$ sera utilisée dans la suite pour les deux directions d'espace. Ces ensembles de fonctions peuvent être représentés par des carrés dyadiques correspondant à l'application de l'un des filtres suivants $H \otimes H = H_x H_y$, $H \otimes G = H_x G_y$, $G \otimes H = G_x H_y$, ou

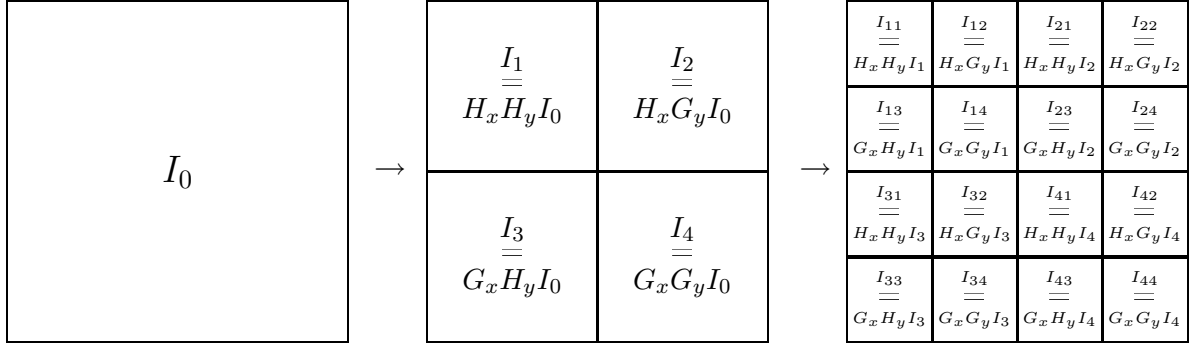


Figure 3: Deux niveaux d'une décomposition en paquets d'ondelettes bidimensionnels

$G \otimes G = G_x G_y$. Une décomposition en paquets d'ondelettes bidimensionnelles peut être représentée graphiquement par le schéma de la Figure 3.

2.3 Le critère entropique et l'algorithme du choix de la meilleure base

Les paquets d'ondelettes constituent un large ensemble de fonctions à partir duquel une base peut être sélectionnée. Le principal critère de choix consiste à chercher une base sur laquelle les coefficients, rangés par ordre décroissant, décroissent le plus rapidement possible.

Différents critères peuvent être définis à partir de fonctions *coûts* préalablement choisies [33].

2.3.1 L'entropie

La fonction coût la plus largement utilisée est l'*entropie*. Pour un vecteur $u = \{u_k\}$ donné, elle est définie par:

$$E(u) = \sum_k p(k) \log\left(\frac{1}{p(k)}\right), \quad (61)$$

où $p(k) = \frac{|u_k|^2}{\|u\|_2^2}$ est l'énergie normalisée du $k^{\text{ième}}$ élément du vecteur considéré. Si $p(k) = 0$, alors on pose $p(k) \log\left(\frac{1}{p(k)}\right) = 0$. Tous les termes de la somme sont positifs. En

fait, l'entropie mesure le logarithme du nombre de coefficients significatifs dans le signal original. Le vecteur $p = \{p(k)\}_k$ peut être interprété comme étant une fonction de distribution de probabilité discrète car $0 \leq p(k) \leq 1, \forall k$ et $\sum_k p(k) = 1$. On peut facilement montrer que si le nombre de valeurs $p(k)$ non nulles est égal N , alors $E(u) \leq \log N$. Une telle fonction de distribution de probabilité est dite concentrée en au plus N valeurs. Une faible valeur pour $E(u)$ indique une forte concentration de l'énergie de u sur peu de composantes u_k . D'autres choix sont possibles pour la fonction coût, dont par exemple:

- Concentration en norme l^p :

$$E(u) = \sum_k \frac{|u_k|^p}{\|u\|_p^p}. \quad (62)$$

- Nombre de coefficients au-dessus d'un seuil donné ϵ :

$$E(u) = \#\{|u_k| \text{ t.q. } |u_k| > \epsilon\}. \quad (63)$$

2.3.2 La meilleure base ?

Une fois la fonction coût choisie, il reste à définir un algorithme permettant d'extraire la meilleure base (au sens de la minimisation de la fonction coût) de l'ensemble des paquets d'ondelettes. La première étape du processus consiste à calculer les fonctions coûts de chacun des éléments de l'arbre. Si l'on considère par exemple un vecteur à 8 composantes, et si l'on choisit le *nombre de coefficients au-dessus d'un seuil donné* pour la fonction coût, la première étape conduit à un tableau du type du Tableau 2.

8							
4				3			
2		1		1		2	
1	0	1	1	1	0	1	0

Table 2: Arbre d'entropie, première étape

La deuxième étape consiste à parcourir l'arbre en partant du bas, et à comparer la somme de l'entropie obtenue par les enfants à celle obtenue par le parent. Par exemple, si l'on considère les deux premiers enfants de la dernière ligne, ils obtiennent respectivement 1 et 0. Alors que le parent obtient 2. Il est donc plus avantageux de représenter la même information à l'aide des deux enfants (qui conduisent à une entropie totale de $1 = 1 + 0$) qu'avec le parent. Les enfants seront donc choisis à la place du parent. Le parent se voit

alors attribué l'entropie induite par les enfants pour continuer l'algorithme en itérant la même comparaison avec les parents de la ligne supérieure suivante.

4 (8)							
2 (4)				2 (3)			
1 (2)		1		1		1 (2)	
1	0	1	1	1	0	1	0

Table 3: Arbre d'entropie, deuxième étape

A la fin du processus, la base possédant l'entropie la plus faible aura été sélectionnée parmi toutes les bases possibles. Dans notre exemple, on s'aperçoit qu'un signal avec une entropie initiale de 8 peut être représenté dans une base avec une entropie de 4. Les éléments qui ont été sélectionnés sont indiqués en gras dans le Tableau 3. Avec cet algorithme, la base est choisie automatiquement de façon à fournir la meilleure représentation du vecteur initial au sens de la minimisation de la fonction coût choisie.

2.4 Le seuillage simple et double

Grâce à l'algorithme du choix de la meilleure base, nous obtenons une représentation optimale, liée à la fonction coût choisie, de l'écoulement étudié. La décomposition en paquets d'ondelettes des champs de vitesse ou de vorticit   fournit alors une r  partition dans l'espace et dans les diff  rentes   chelles de l'  nergie ou de l'enstrophie. On peut alors d  terminer en   tudiant la d  composition en paquets d'ondelettes les zones de l'  coulement (ou les structures) qui concentrent l'  nergie et/ou l'enstrophie.

Pour cela, un seuillage sur les coefficients d'ondelettes peut   tre introduit. Les champs s'  crivent alors comme la combinaison lin  aire de deux champs orthogonaux. Le premier champ est obtenu    partir des coefficients d'ondelettes dont le module est sup  rieur au seuil ϵ pr  alablement choisi, et le second    partir des coefficients dont le module est inf  rieur    ce seuil. Il n'existe pas de crit  re reconnu pour le choix de ce seuil, et cela d  pend beaucoup de ce que l'on cherche      tudier. Certains scientifiques choisissent ce seuil de fa  on    pouvoir   crire le champ initial comme la superposition d'un champ gaussien et d'un champ non-gaussien [14]. D'autres d  terminent ce seuil empiriquement de fa  on    s  parer des objets qui semblent de nature diff  rente: tourbillons et filaments de vorticit   par exemple. Nous pr  senterons ce type de seuillage dans le prochain paragraphe. Il n'y a cependant aucune raison th  orique de penser qu'il existe un seuil particulier permettant cette s  paration des structures du champ de vorticit  , et on pourrait tr  s

bien imaginer qu'il existe un intervalle de valeurs de coefficients en ondelettes où les deux types de structures coexistent. L'introduction d'un deuxième seuil devient alors nécessaire pour effectuer cette séparation. L'hypothèse émise est alors la suivante: les coefficients d'ondelettes dont le module est supérieur à ϵ_1 représentent les tourbillons, les coefficients dont le module est compris entre ϵ_1 et ϵ_2 correspondent à un mélange de tourbillons et de filaments de vorticité, et les coefficients dont le module est inférieur à ϵ_2 décrivent les filaments de vorticité. Expérimentalement, on constate que les spectres d'énergie correspondant à ces différentes composantes présentent des lois de puissance de pentes différentes et prouvent que ces composantes ont des r les différents dans le processus de transfert d'énergie.

Les résultats obtenus dans le cadre de simulations numériques dans un canal bidimensionnel sont présentés dans le paragraphe suivant. On pourra alors vérifier la capacité des ondelettes à séparer des contributions de nature différente dans l'écoulement.

3 Application:  coulements bidimensionnels dans un canal

Deux simulations numériques ont été réalisées. Chacune d'elles consiste à simuler un écoulement dans un canal perturbé par une rangée horizontale d'obstacles circulaires. C'est une très bonne approximation d'un écoulement d'eau autour de piliers, supposés cylindriques (un pont par exemple). Ces expérimentations sont représentées sur la Figure 4. La longueur du canal, noté Ω , est quatre fois plus grande que sa largeur L . Le nombre de Reynolds pour les deux simulations, basé sur le diamètre des obstacles ( gale à $0.1 \times L$) est $Re = 50000$. La première simulation repose sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes dont le domaine rectangulaire Ω est composé de Ω_s pour les obstacles (5 disques), et Ω_f pour le fluide. Cette simulation sera notée *Simulation I* dans la suite. Dans la deuxième simulation, notée *Simulation II*, deux rangées verticales de 9 petits disques, dont le diamètre est égal à $0.05 \times L$, sont rajoutées le long du canal. Ces rangées d'obstacles supplémentaires ont été rajoutées afin d'accroître la production de petits tourbillons et donc de favoriser le processus de concaténation à l'origine de la cascade inverse d'énergie.

Pour les deux simulations, les évolutions au cours du temps des deux composantes de la vitesse, de la vorticité et de la pression ont été relevées en six points différents situés sur une ligne verticale $x_1 = 3L/8$ entre $x_2 = 5L/16$ et $x_2 = 15L/16$. Une analyse, basée sur l'hypothèse de Taylor, de ces signaux temporels 1D a été réalisée en utilisant différents outils statistiques traditionnels. Les résultats, ainsi qu'une comparaison des différents outils utilisés, sont donnés dans [7, 8].

Les résultats numériques présentés dans cet article peuvent être comparés à ceux

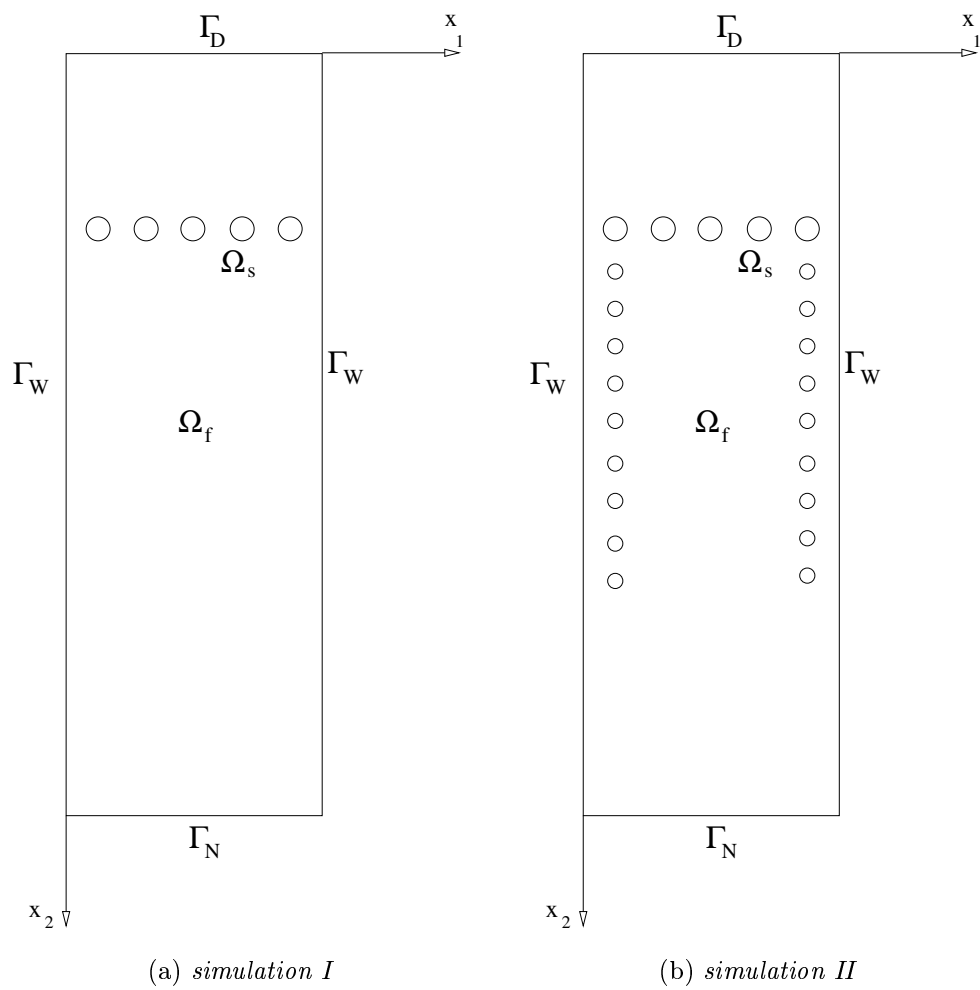


Figure 4: Géométrie des deux simulations

obtenus expérimentalement par H. Kellay ou par M. Rutgers et qui sont détaillés dans [5] et [26]: un film de savon dans un canal vertical et dont l'écoulement est perturbé par des rangées de cylindres.

3.1 Présentation du problème

Soit Ω un domaine rectangulaire borné de $\mathbb{R}^2$. La réunion des 5 grands disques et des 18 petits disques constituant les obstacles est notée Ω_s . On note $\Omega_f = \Omega \setminus \overline{\Omega_s}$ la région où se produit l'écoulement du fluide incompressible et où les équations de Navier-Stokes sont appliquées. Le bord du domaine Ω_f est défini par $\partial\Omega_f = \partial\Omega_s \cup \Gamma_D \cup \Gamma_W \cup \Gamma_N$. Des conditions de Dirichlet non homogènes sont imposées sur Γ_D modélisant un écoulement fluide de type Poiseuille. Les parois Γ_D du canal sont supposées non glissantes conduisant à imposer une vitesse nulle le long des parois. Les obstacles sont pris en compte dans les équations grâce à une méthode de pénalisation: un terme de masse est rajouté, et les équations peuvent être alors résolues sur tout Ω . Les lecteurs intéressés par les méthodes de pénalisation peuvent consulter [1].

Le problème obtenu, incluant la pénalisation et les conditions sur le bord du domaine, a été étudié théoriquement dans [6].

La résolution numérique repose sur des méthodes de différences finies: un schéma explicite d'ordre 2 en temps, implicite d'ordre 2 pour la pression et les termes de diffusion, et explicite d'ordre 3 pour les termes de convection. La simulation est réalisée sur une grille rectangulaire 1280×320 avec des décompositions de type multigrille. Les transformées en paquets d'ondelettes ont été réalisées sur des grilles carrées de taille 1024×1024 .

3.2 Résultats numériques

Les champs de vorticité obtenus par les calculs précédemment décrits pour les deux simulations sont représentés sur les Figures 5 et 6. Une représentation en noir et blanc à l'aide de 256 niveaux de gris a été utilisée. Les tourbillons qui tournent dans le sens direct, et dont la vorticité est positive, sont en blanc et les tourbillons qui tournent dans le sens inverse sont en noir. Un premier commentaire peut être fait concernant le nombre et la taille des tourbillons. On remarque plus de tourbillons, en particulier à la fin du canal, dans la *Simulation II* que dans la *Simulation I*. Cela s'explique par la présence des 18 petits disques sur les cotés du canal. Dans la *Simulation I*, les tourbillons sont un peu plus gros et localisés dans la première moitié du canal.

Les spectres d'énergie correspondant aux simulations *I* et *II* ont été calculés sur une partie de l'écoulement. Un carré contenant beaucoup de tourbillons a été sélectionné dans le canal pour chacune des simulations: dans la première moitié pour la *Simulation I* et dans la seconde moitié pour la *Simulation II*. Ces carrés sont matérialisés par des pointillés sur les Figures 5 et 6. Les spectres d'énergie correspondant ont été calculés

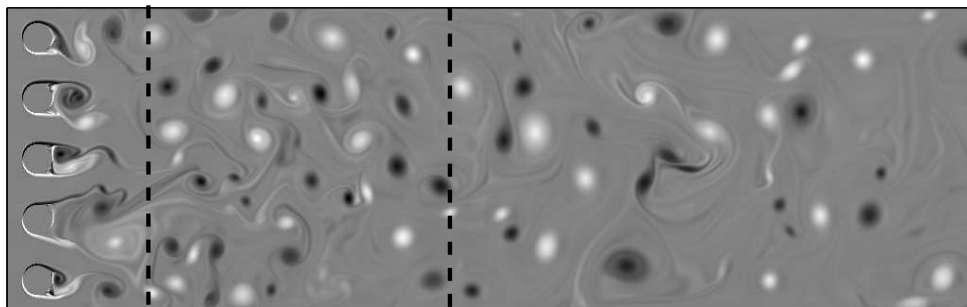


Figure 5: Champ de vorticité pour la *Simulation I*

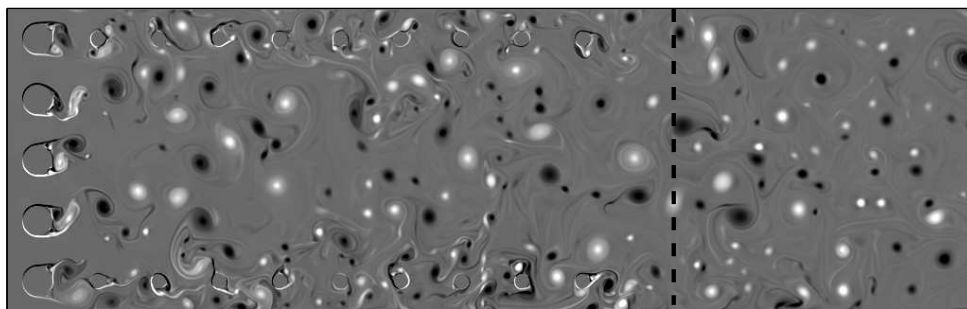


Figure 6: Champ de vorticité pour la *Simulation II*

directement à partir d'un "instantané" de l'écoulement à un instant donné et n'ont été ni lissés, ni moyennés en temps. Ils sont représentés sur la Figure 7. On peut remarquer que la seconde pente, correspondant à la cascade d'enstrophie, est plus raide (-4.5) que la pente théorique attendue (-3). Ce phénomène a été observé dans de nombreux résultats numériques ou expérimentaux.

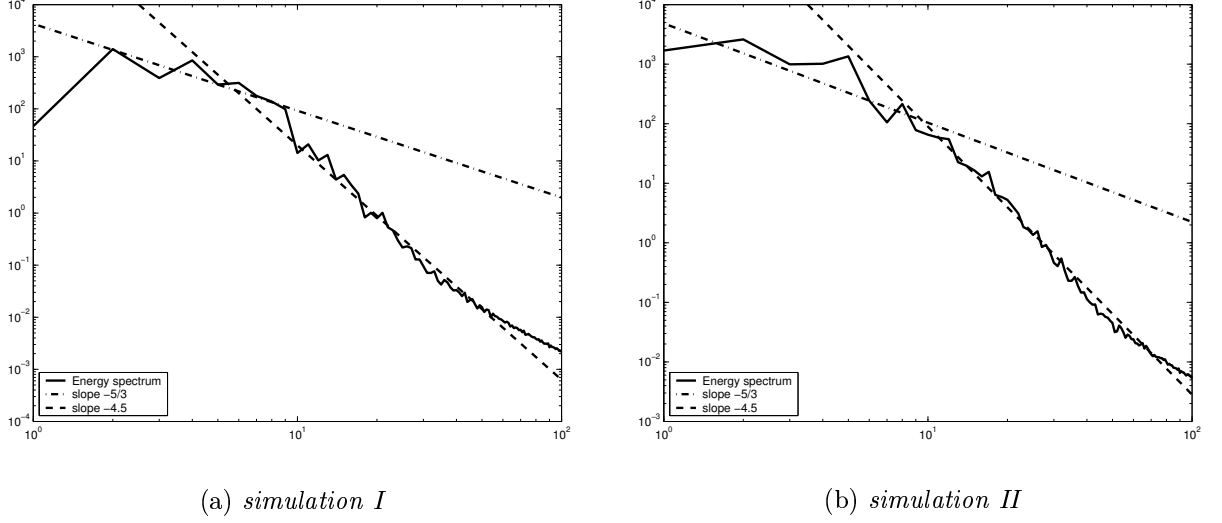


Figure 7: Spectres d'énergie

3.2.1 Décomposition en paquets d'ondelettes

Des ondelettes de type Daubechies [10] ont été utilisées pour calculer les tableaux de paquets d'ondelettes, et le critère *entropique* a été choisi dans la procédure du choix de la meilleure base. Plusieurs tests ont également été réalisés afin de déterminer la meilleure ondelette mère, et le nombre d'échelles nécessaires pour obtenir une bonne représentation de l'écoulement. Les résultats obtenus pour quelques bases de type Daubechies et des décompositions sur 1, 2, 3, 4 ou 5 niveaux sont donnés dans les Tableaux 4 et 5.

La première remarque concerne la différence entre la *Simulation I* et la *Simulation II*: les valeurs de l'entropie sont plus grandes pour la seconde simulation. Cela peut s'expliquer par la présence de nombreux petits tourbillons créant des irrégularités dans le champ de vorticité. Plus de coefficients en ondelettes sont alors nécessaires pour bien représenter le champ. Dans les résultats concernant la *Simulation I*, nous pouvons remarquer que le gain d'entropie à l'échelle 2 par rapport au premier niveau de décomposition est d'environ 15%. Nous avons le même ordre de grandeur de gain entre l'échelle 2 et 3. Par contre, les gains obtenus en augmentant la décomposition sont relativement faibles,

	1	2	3	4	5
D 4	57.07	48.32 (-15.33%)	41.69 (-13.72%)	39.72 (-4.43%)	39.72 (-)
D 6	57.06	48.16 (-15.60%)	41.18 (-14.49%)	39.58 (-3.89%)	39.58 (-)
D 8	57.09	48.18 (-15.61%)	41.07 (-14.76%)	40.33 (-1.80%)	40.31 (-0.05%)
D 10	57.12	48.21 (-15.60%)	41.00 (-14.96%)	40.64 (-0.88%)	40.63 (-0.02%)
D 12	57.17	48.26 (-15.59%)	41.20 (-14.63%)	40.45 (-1.82%)	40.44 (-0.02%)
D 14	57.22	48.43 (-15.36%)	41.38 (-14.56%)	40.67 (-1.72%)	40.67 (-)
D 16	57.27	48.54 (-15.24%)	41.54 (-14.42%)	41.16 (-0.91%)	41.13 (-0.07%)

Table 4: *Simulation I*: Valeurs de l'entropie pour des échelles allant de 1 à 5 et pour quelques bases de type Daubechies (*gain par rapport à l'échelle précédente*).

et il n'est donc pas judicieux d'effectuer des décompositions allant au delà du niveau 3 (du moins avec ce choix de fonction coût). Pour la *Simulation II*, la décomposition peut même être arrêtée après 2 niveaux. Nous rappelons que la décomposition s'effectue des échelles les plus fines aux échelles les plus grossières. Ainsi, dans le cas de la *Simulation II* où les tourbillons sont plutôt de petite taille, il n'est pas nécessaire de calculer des approximations aux grandes échelles pour obtenir une bonne description du champ.

En résumé, une décomposition sur 3 niveaux est nécessaire pour la *Simulation I* et suffisante pour la *Simulation II*. Les calculs ultérieurs seront donc réalisés sur 3 niveaux de décomposition.

Concernant le choix de la base d'ondelettes, nous pouvons constater que les différentes bases testées conduisent à peu près aux mêmes résultats. La base Daubechies avec une décomposition sur 3 niveaux fournit sur ces tests les meilleurs résultats. Elle sera donc choisie pour effectuer les calculs suivants. Il est intéressant de noter que la taille du support des fonctions de base de Daubechies 10 au niveau 3 correspond grossièrement au diamètre des plus gros tourbillons dans le champ de vorticité.

Les champs de vorticité ont été ensuite séparés en deux sous-champs par la procédure de seuillage simple telle qu'elle est décrite dans le paragraphe sur les ondelettes. Le seuil unique a été déterminé empiriquement et est égal à 3.10^{-2} pour un champ de vorticité normalisé. Les deux sous-champs correspondant à la *Simulation I* sont représentés sur les Figures 8 et 9. On note clairement que cette procédure de seuillage permet de séparer les tourbillons des filaments de vorticité. Comme il peut être constaté sur les Figures 10 et 11, les résultats obtenus pour la *Simulation II* sont essentiellement les mêmes.

	1	2	3	4	5
D 4	95.76	83.08 (-13.24%)	78.22 (-5.85%)	78.22 (-)	78.22 (-)
D 6	95.43	82.33 (-13.73%)	78.21 (-5.00%)	78.21 (-)	78.21 (-)
D 8	95.40	82.10 (-13.94%)	78.32 (-4.60%)	78.32 (-)	78.32 (-)
D 10	95.49	82.00 (-14.13%)	77.88 (-5.02%)	77.88 (-)	77.88 (-)
D 12	95.59	82.20 (-14.01%)	78.24 (-4.82%)	78.24 (-)	78.24 (-)
D 14	95.65	82.64 (-13.60%)	79.42 (-3.90%)	79.40 (-0.03%)	79.40 (-)
D 16	95.75	82.93 (-13.39%)	80.38 (-3.07%)	80.35 (-0.04%)	80.35 (-)

Table 5: *Simulation II*: Valeurs de l'entropie pour des échelles allant de 1 à 5 et pour quelques bases de type Daubechies (*gain par rapport à l'échelle précédente*).

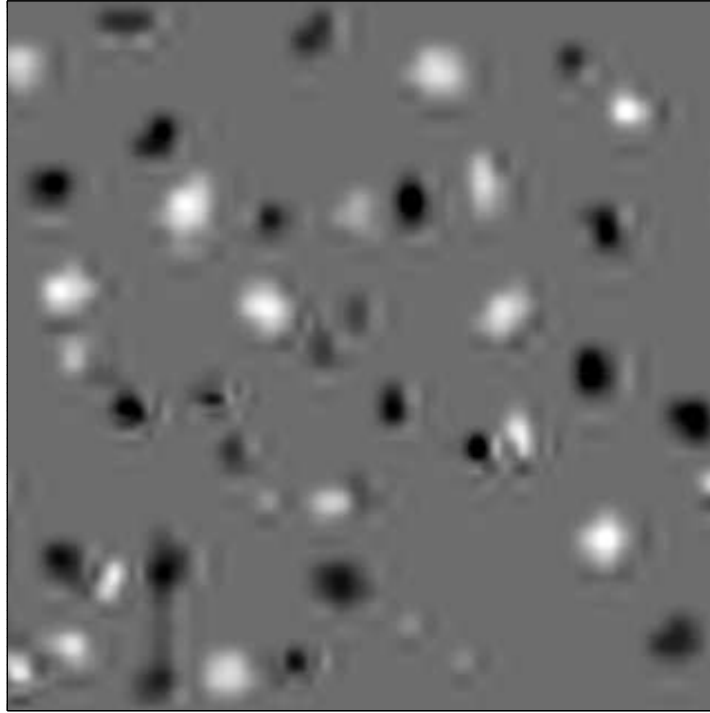


Figure 8: Tourbillons obtenus par seuillage pour la *Simulation I*

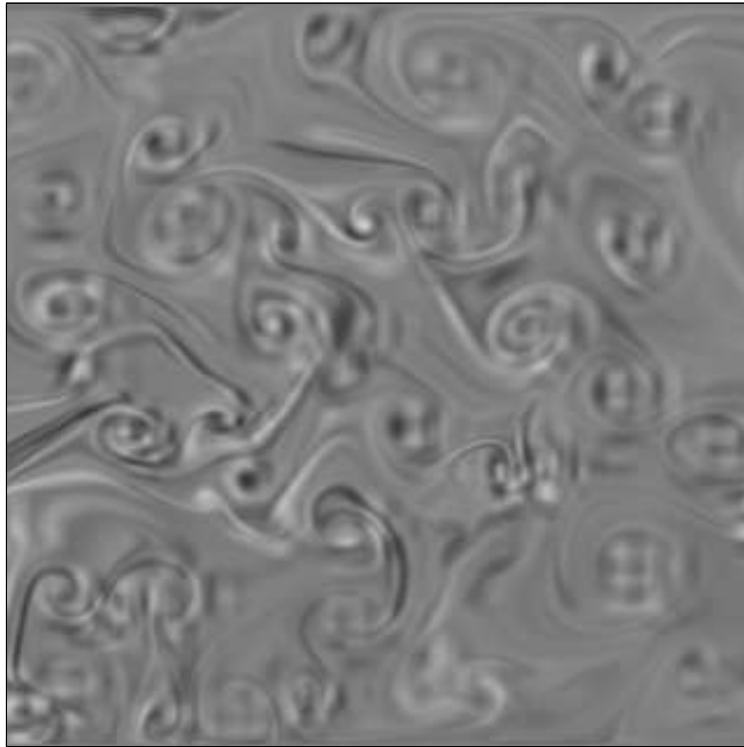


Figure 9: Filaments de vorticité obtenus par seuillage pour la *Simulation I*

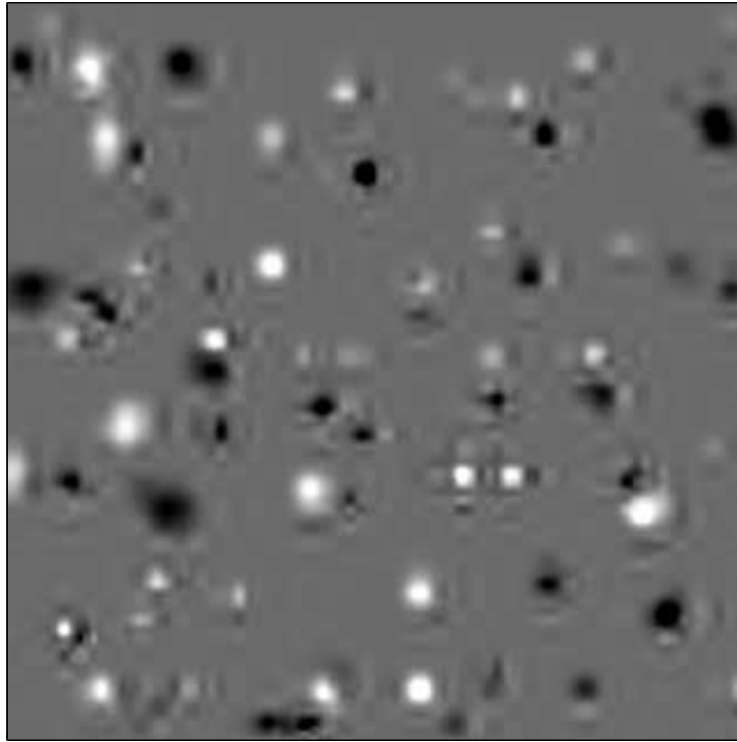


Figure 10: Tourbillons obtenus par seuillage pour la *Simulation II*

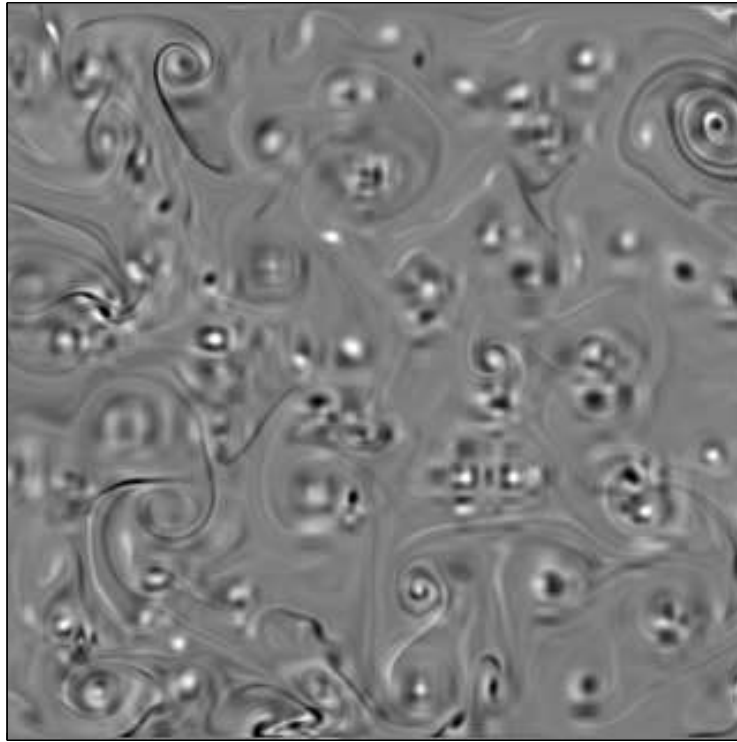


Figure 11: Filaments de vorticité obtenus par seuillage pour la *Simulation II*

3.2.2 Analyse des spectres d'énergie

Les deux sous-champs obtenus par seuillage, comme cela l'a déjà été constaté dans [17], doivent conduire à des spectres d'énergie de nature différente. Les spectres ont donc été calculés dans les mêmes zones carrées précédemment décrites. Ils sont représentés sur la Figure 12 pour la *Simulation I* et sur la Figure 13 pour la *Simulation II*.

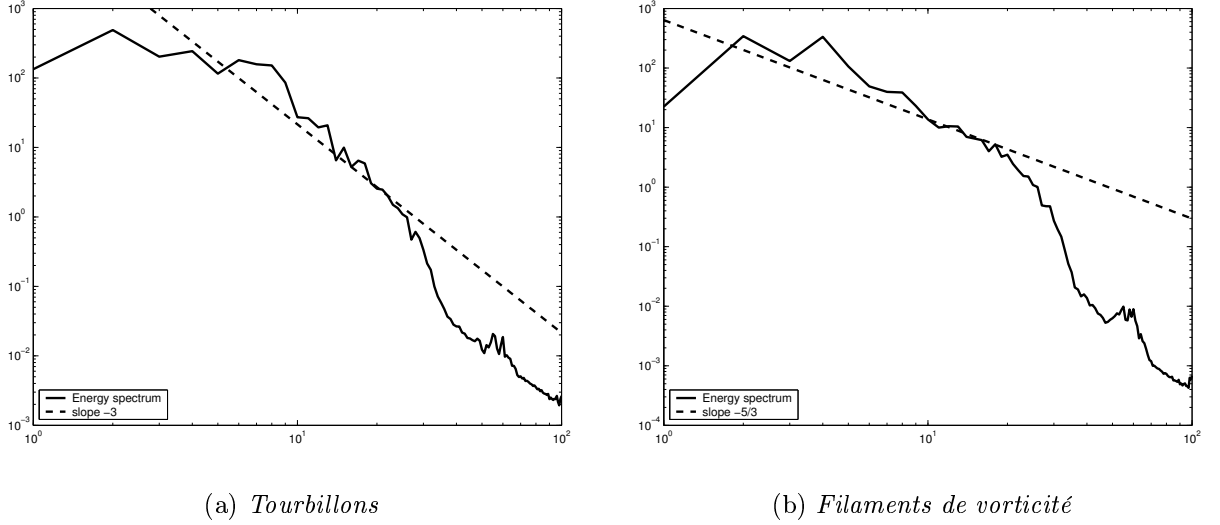
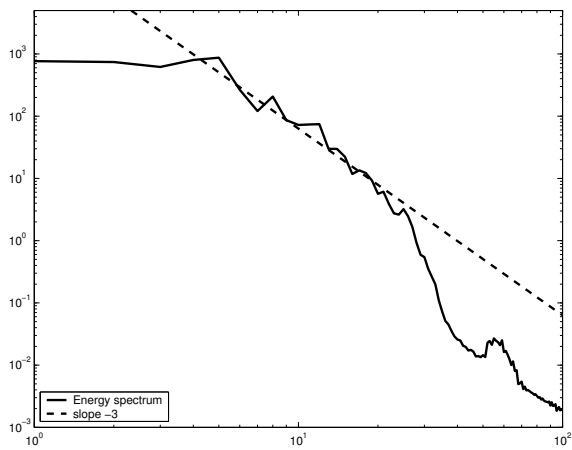


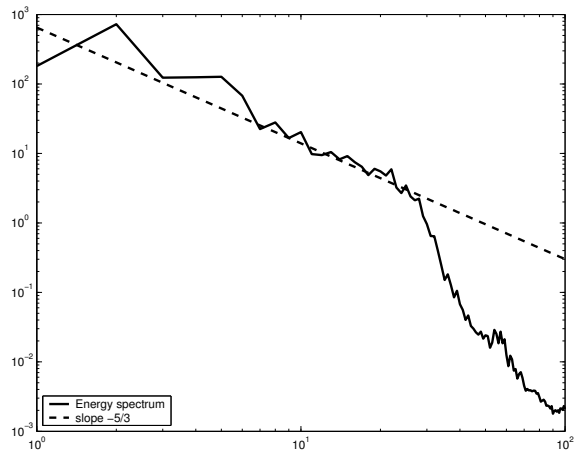
Figure 12: Spectres d'énergie pour la *Simulation I*

Comme nous pouvions nous y attendre, les champs reconstruits à partir des coefficients en paquets d'ondelettes les plus grands, et isolant les tourbillons ne présentent pas la même loi de puissance que les champs reconstruits à partir des coefficients en paquets d'ondelettes les plus faibles et conduisant aux filaments de vorticité. Des lois de puissance en k^{-3} sont observées pour les tourbillons et en $k^{-5/3}$ pour les filaments. La principale différence entre les spectres des deux simulations peut s'observer au niveau des filaments de vorticité. En effet, on peut observer la loi de puissance en $k^{-5/3}$ jusqu'aux nombres d'onde 25-30 pour la *Simulation II* alors qu'elle s'arrête autour de 20 pour la *Simulation I*. Cela peut s'expliquer par le fait que les petits disques de la *Simulation II* créent plus de petits tourbillons à leur échelle. La bosse d'énergie située autour de $k \approx 60$ est un artefact numérique lié à la base d'ondelettes utilisée. Elle peut être éliminée en utilisant une ondelette mère possédant plus de moments nuls.

L'existence de spirales de vorticité prédites par Vassilicos et Hunt peut se vérifier en examinant de près le sous-champ composé des filaments à l'emplacement théorique d'un tourbillon (Figure 14).



(a) *Tourbillons*



(b) *Filaments de vorticité*

Figure 13: Spectres d'énergie pour la *Simulation II*

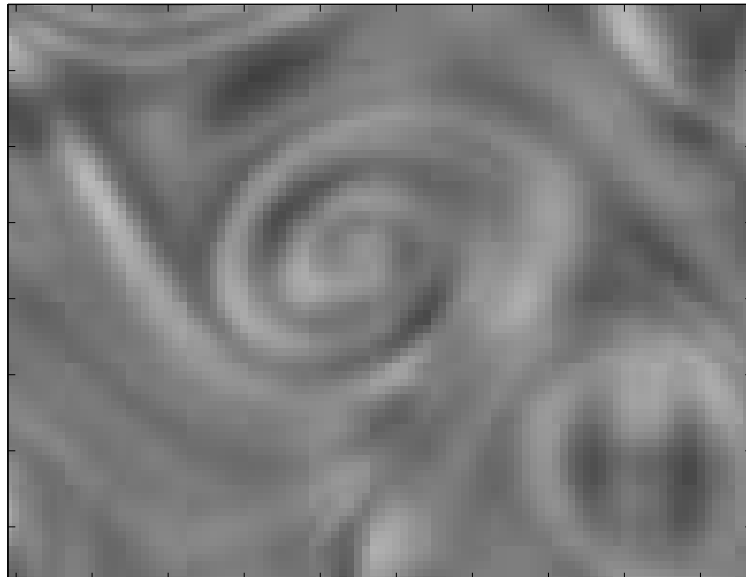


Figure 14: Spirale de vorticité extraite d'un tourbillon(*Simulation I*)

Ces premiers résultats numériques montrent que la décomposition en paquets d'ondelettes est un outil adapté à l'étude de la turbulence bidimensionnelle. Elle permet de séparer deux types de structures, les tourbillons des filaments de vortacité. Les tourbillons possèdent un spectre d'énergie avec une loi de puissance d'environ k^{-3} et les filaments d'environ $k^{-5/3}$.

Cependant, nous allons justifier la validité de ces décompositions en montrant les résultats obtenus avec des simulations effectuées sur une grille plus fine, et en réalisant des moyennes temporelles des spectres.

3.3 Validation de la méthode

Afin de valider la méthode de séparation des structures basée sur la décomposition en paquets d'ondelettes, nous présentons sur la Figure 15 les moyennes temporelles des spectres d'énergie pour la *Simulation II*. Nous pouvons constater que les courbes sont plus régulières et un peu plus proches des pentes théoriques. Nous pouvons donc conclure que les résultats obtenus avec ce type de séparation en deux sous-champs sont stables au cours du temps.

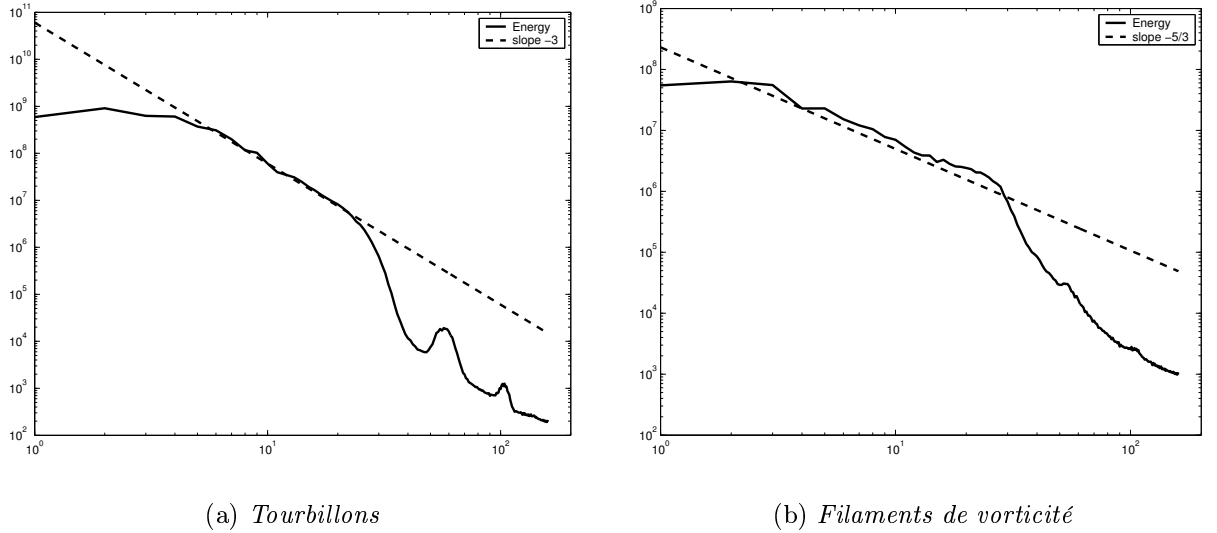


Figure 15: Moyenne temporelle des spectres d'énergie pour la *Simulation II*

De même, nous pouvons évaluer la dépendance des résultats vis-à-vis de la grille de discrétisation initiale sur laquelle est effectuée la résolution des équations de Navier-Stokes. Nous avons refait les mêmes calculs sur une grille plus fine, 2560×640 au lieu de 1280×320

précédemment. La valeur du seuil conduisant à la séparation en deux sous-champs a du être légèrement modifiée, et est maintenant égale à 2.10^{-2} . Les spectres obtenus pour les deux sous-champs sont représentés sur la Figure 16.

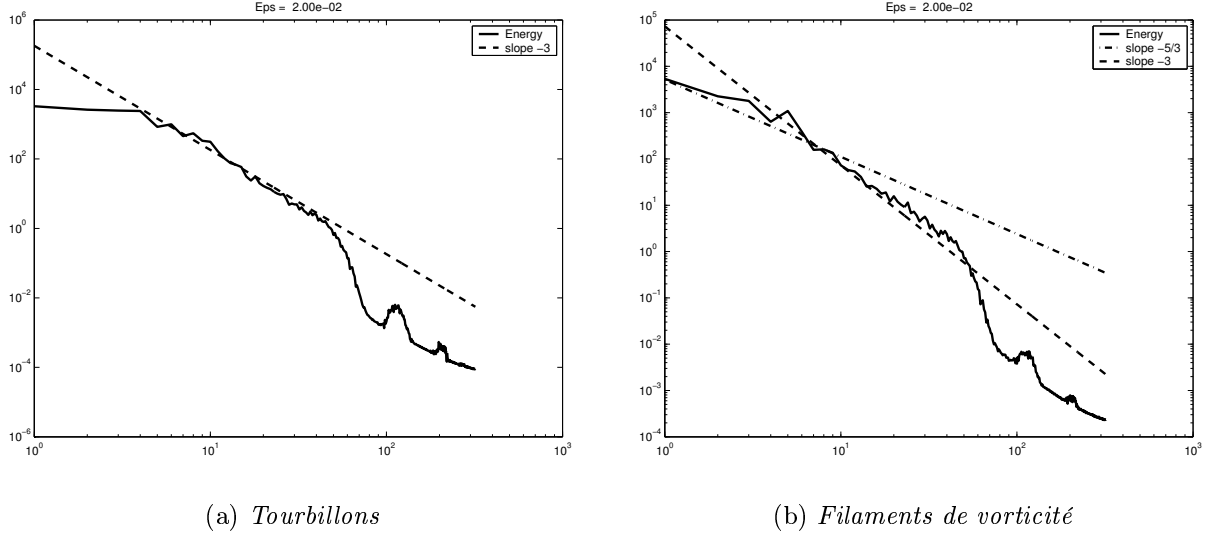


Figure 16: Spectres d'énergie pour la *Simulation II* sur une grille fine

Nous pouvons remarquer sur le spectre des filaments de vorticité la présence des deux lois de puissance. On peut alors penser que nous avons gardé quelques coefficients en ondelettes liés aux tourbillons dans le champ des filaments. En effet, comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, il n'y a aucune raison de penser qu'il existe un seuil "miracle" permettant la séparation des deux types de structures. Sous cette hypothèse, il existerait une zone intermédiaire composée à la fois de tourbillons et de filaments. Un deuxième seuil devient alors nécessaire pour mieux séparer les structures. Ce deuxième seuil a été fixé à 5.10^{-3} , nous pouvons alors constater sur la Figure 17 que nous avons retrouvé la loi de puissance en $k^{-5/3}$.

4 Conclusion

La modélisation mathématique d'un phénomène physique consiste à essayer de "mimer", d'imiter le comportement d'un système réel. Plus ce système est complexe, comme la turbulence, plus cette "imitation" est difficile. Le rapide développement de l'informatique permet de réaliser des calculs et des simulations numériques de plus en plus performants, mais le niveau de complexité est tel que nous n'avons toujours pas une bonne compréhension de la turbulence. Malgré une description statistique à peu près correcte sous cer-

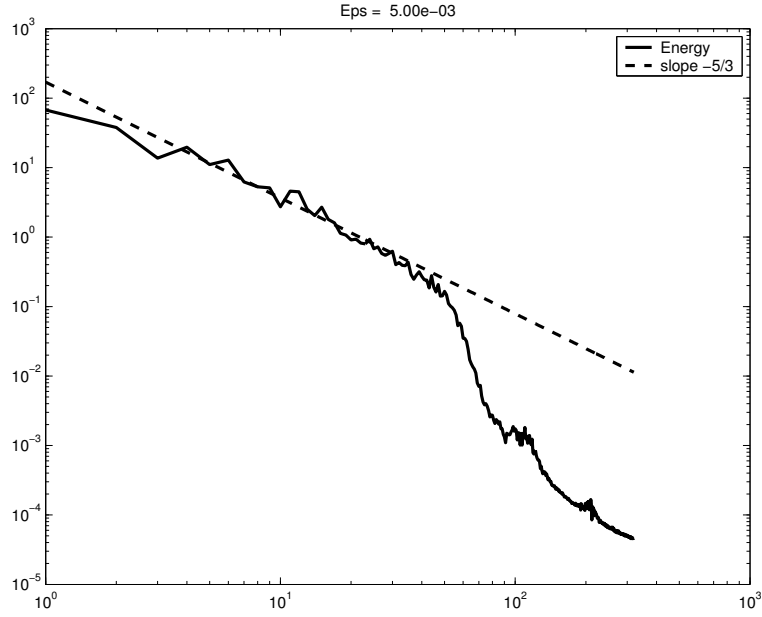


Figure 17: Spectre d'énergie pour le champ composé des filaments avec un seuil de séparation plus petit

taines hypothèses, le rôle des structures observées dans les écoulements turbulents n'est toujours pas bien déterminé. Les décompositions basées sur des analyses temps-échelles, et en particulier sur des paquets d'ondelettes, permettent de séparer des structures ayant des comportements différents dans l'écoulement: les tourbillons et les filaments de vorticité. Cette séparation révèle que ces structures ont des spectres d'énergie vérifiant des lois de puissance, indiquant des cascades d'énergie et/ou d'énstrophie à travers les différentes échelles de l'écoulement. De plus, ces lois de puissance étant différentes, nous pouvons légitimement supposer que ces structures ont des r les énergétiques différents dans l'écoulement. La confrontation des résultats numériques avec les expérimentations physiques, lorsque cela est possible, permet de valider ou non ces modèles mathématiques théoriques.

Remerciements

L'auteur remercie Ch-H. Bruneau pour ses commentaires et pour avoir fourni les champs de vitesse et de vorticité sur lesquels les décompositions en paquets d'ondelettes ont été réalisées.

References

- [1] Angot, Ph., Bruneau, C.H., Fabrie, P., *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flow*, Numer. Math., **81** (1999), no. 4, 497-520
- [2] Arques, P., Thirion-Moreau, N., Moreau, E., *Les représentations temps-fréquences en traitement du signal*, Techniques de l'Ingénieur, R 308 (2000).
- [3] Batchelor, G.K., *Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence*, Phys.Fluids, **12** (1969), II-233-II-239.
- [4] Borue, V., *Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence*, Phys. Rev. Lett., **72** (1994), 1475-1478.
- [5] Bruneau, C.-H., Greffier, O., Kellay, K., *Numerical study of grid turbulence in two dimensions and comparison with experiments on turbulent soap films*, Phys. Rev. E, **60** (1999), p: R1162.
- [6] Bruneau, C.-H., Fabrie, P., *New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations: a well-posedness result*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **30** (1996), no. 7, 815-840.
- [7] Bruneau, C.-H., Fischer, P., Peter, Z., Yger, A., *Comparison of numerical methods for the computation of energy spectra in 2D turbulence. Part I: Direct methods*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, **4** (2005), 169-192.
- [8] Bruneau, C.-H., Fischer, P., Peter, Z., Yger, A., *Comparison of numerical methods for the computation of energy spectra in 2D turbulence. Part II: Adaptive algorithms*, Accepted par Sampling Theory in Signal and Image Processing.
- [9] Cohen, A., *Les bases d'ondelettes*, Techniques de l'Ingénieur, AF 210 (2002).
- [10] Daubechies, I. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure and Appl. Math., **61** (1988), 909-996.
- [11] Farge, M., Goirand, E., Meyer, Y., Pascal, F., Wickerhauser, M., *Improved predictability of two-dimensional turbulent flows using wavelet packet compression* Fluid Dynamics Research, **10** (1992), 229-250.
- [12] Farge, M., Holschneider, M., Colonna, J.-F., *Wavelet analysis of coherent structures in two-dimensional turbulent flows* in TOPOLOGICAL FLUID MECHANICS (ed. Moffatt H.K. & Tsinober A.), Cambridge University Press.
- [13] Farge, M., Pellegrino, G., Schneider, K., *Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal wavelets*, Phys. Rev. Lett., **87** (2001), no. 5, 45011-45014.

- [14] Farge, M., Schneider, K., Kevlahan, N., *Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using adaptive orthogonal wavelet basis*, Phys. Fluids, **11** (1999), 2187-2201.
- [15] Gkioulekas E., Tung K. K., *On the double cascades of energy and enstrophy in two dimensional turbulence. Part 1. Theoretical formulation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, **5** (2005), 79-102.
- [16] Gkioulekas E., Tung K. K., *On the double cascades of energy and enstrophy in two dimensional turbulence. Part 2. Approach to the KLB limit and interpretation of experimental evidence*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, **5** (2005), 103-124.
- [17] Kevlahan N.K.-R, Farge, M., *Vorticity filaments in two-dimensional turbulence: creation, stability and effect*, J. Fluid Mech., **346** (1997), 49-76.
- [18] Kolmogorov, A.N., *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk. USSR, **30** (1941), 301-305.
- [19] Kolmogorov, A.N., *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk. USSR, **32** (1941), 16-18.
- [20] Kraichnan, R.H., *Inertial ranges transfer in two-dimensional turbulence*, Phys. Fluids, **10** (1967), 1417-1423.
- [21] Kraichnan, R.H., *Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence*, J. Fluid Mech., **47** (1971), 525-535.
- [22] Kraichnan, R.H. Montgomery, D., *Two-dimensional turbulence*, Rep. Prog. Phys., **43** (1980), 547-619.
- [23] Leith, C.E., *Diffusion approximation for two dimensional turbulence*, Phys. Fluids, **11** (1968), 671-673.
- [24] Mallat, S., *Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 69-87.
- [25] Pesquet-Popescu, B., Pesquet, J., *Ondelettes et applications*, Techniques de l'Ingénieur, TE 5215 (2001).
- [26] Rutgers, M.A., *Forced 2D turbulence: experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades* Phys. Rev. Lett., **81** (1998), 2244-2247.
- [27] Saffman, P.J., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [28] Tabeling, P., *Two-dimensional turbulence: a physicist approach* Phys. Rep., **362** (2002), 1-62.
- [29] Taylor, G., *The spectrum of turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. A **164** (1938), 476-490.
- [30] Tung, K. K., Orlando, W. W., *The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence: Quasigeostrophic two-level model simulation*, J. Atmos. Sci., **60** (2003), 824-835.
- [31] Vassilicos, J. C., Hunt, J. C., *Fractal dimensions and spectra of interfaces with application to turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. A, **435** (1991), 505-534.
- [32] Weiss, J., *The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics*, Physica D, **48** (1991), 273-294.
- [33] Wickerhauser, M. V., *Adapted wavelet analysis from theory to software*, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1994.