Stabilité et convergence des méthodes de discrétisation de l'équation mono-domaine de l'électrocardiologie

---

Yves Coudière

yves.coudiere@u-bordeaux.fr

Contexte. Ce TER sera réalisé dans le cadre de l'équipe-projet Inria Carmen et de l'Institut Hospitalo Universitaire Liryc (http://ihu-liryc.fr), dont le travail est dédié à la modélisation et à la simulation des dysfonctionnements électriques du coeur.

Description scientifique. Chez l'homme ou l'animal, le comportement électrique du tissu cardiaque est modélisé, à l'échelle macroscopique, comme un milieu continu dans lequel on s'intéresse à différence de potentiel notée v. L'évolution de cette variable est donnée par une équation de réaction-diffusion pour la variable $v(t,x) \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\partial_t v = d\Delta v + f(v,w), \tag{1}$$

écrite dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), et où $d > 0$ est une constante. Cette équation est couplée en chaque point du domaine Ω à un système de m équations différentielles pour l'inconnue $w(t,x) \in \mathbb{R}^m$, de la forme

$$\partial_t w = g(v,w). \tag{2}$$

Les fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sont données et appelées *modèle ionique*.

Les équations (1) et (2) constitue le *modèle monodomaine* pour la propagation des potentiels d'action cardiaques. Il est completé par les conditions aux limites $d\nabla u{\cdot}n = 0$ sur $\partial\Omega$, et initiale $v(0,x) = v_0(x)$, $w(0,x) = w_0(x)$ dans Ω. Dans ce TER, on s'intéressera en particulier au modèle décrit dans l'article [1].

Lorsque l'on discrétise ce système, par exemple par une méthode de différences finies en espace, on obtient un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} &V' + AV = F(V,W) \\ &W' = G(V,W), \end{aligned}$$

où $V \in \mathbb{R}^N$ et $W \in \mathbb{R}^{mN}$ sont les inconnues discrètes. On peut alors utiliser un schéma de discrétisation en des équations différentielles pour obtenir une suite temporelle d'approximations des fonctions u et w, par exemple la méthode d'Euler semi-implicite :

$$V^n - V^{n-1} + hAV^n = hF(V^{n-1}, W^{n-1}) \tag{3}$$

$$W^n - W^{n-1} = hG(V^{n-1}, W^{n-1}), \tag{4}$$

pour $n \geq 1$, où $h > 0$ est un pas de temps fixé.

Objectif. L'objectif du TER est d'étudier la stabilité numérique des solutions discrètes $(V^n, W^n)_{n\geq 0}$, et si possible la convergence des ces solutions vers des fonctions (v,w) solutions du système d'équations (1) et (2). Pour cela, on utilisera une technique de description de régions invariantes comme dans [2].

Mission. L'étudiant devra étudier les articles fournis et produire une démonstration de la stabilité du schéma semi-implicite (3) et (4) pour le modèle de [1] et une discrétisation par différences finies centrées. Celle-ci aura lieu en particulier sous une condition reliant les pas de temps et d'espace, qu'il faudra étudier. Si il reste du temps, il sera possible d'étudier d'autres schémas en temps, ou d'autres modèles ioniques.

Références

[1] Alfonso Bueno-Orovio, Elizabeth M. Cherry, and Flavio H. Fenton. Minimal model for human ventricular action potentials in tissue. *Journal of Theoretical Biology*, 253(3) :544 – 560, 2008.

[2] Y. Coudière and C. Pierre. Stability and convergence of a finite volume method for two systems of reaction-diffusion equations in electro-cardiology. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 7(4) :916–935, 2006.