LE THÉORÈME SPECTRAL, LE CAS AUTO-ADJOINT

SUJET PROPOSÉ PAR SYLVAIN GOLÉNIA

En Physique quantique, un système est souvent décrit par un opérateur auto-adjoint. Afin de localiser un phénomème de nature spectrale, il est important de pouvoir isoler qu'une partie de l'opérateur (par exemple, que les valeurs propres, ou tout sauf les valeurs propres, ou un interval inclus dans le spectre...). Pour cela il faut donner un sens à $f(A)$, pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un opérateur auto-adjoint A. On parle de calcul fonctionnel associé à A.

Quand A est une matrice auto-adjoint, si on note par $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ ses valeurs propres et par $(P_i)_{i=1,\dots,n}$ les projections orthogonales sur les sous-espaces propres associés alors

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) P_i.$$

Quand l'espace est de dimension infinie et que A a par exemple du spectre continu, alors cette somme n'a plus de sens et il faut donner un sens à $f(A)$ (est-ce formellement une intégrale ?).

En utilisant le théorème de Stone Weirstrass il ne prend que quelques lignes pour définir $f(A)$ pour f une fonction continue. Cette construction permet d'obtenir beaucoup de propriétés facilement. Cependant cette construction n'est pas explicite et dans la pratique il faut souvent pouvoir mieux controler $f(A)$.

Le but de ce TER est de construire $f(A)$ pour différentes classes de fonctions f et d'explorer la formule d'Helffer-Sjostrand. On se limitera au cas où A est borné et auto-adjoint. On cherchera à appliquer ces résultats à différents Laplacien discrets qui agissent sur des graphes.

References

[D] E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[G] S. Golénia, *On the absolute continuous spectrum of discrete operators*, cours de master donné à l'école CIMPA http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/cimpa16kairouan/sur-le-spectre-absolument-continu-dopérateurs-discrets

[RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of mathematical physics. Functionnal analysis*, Academic Press, Inc., New York, 1980. xv+400 pp. ISBN: 0-12-585050-6