Interpolation et extrapolation en espaces L_p

Sujet de TER, proposé par Bernhard Haak

Il n'est qu'un exercice de voir que $f \in L_p \cap L_q$ impliques $f \in L_r$ pour tout $p \leq r \leq q$. Le théorème de Riesz-Thorin généralise cette idée comme suit : pour un opérateur linéaire qui est continu $T : L_p \to L_p$ et continu $L_q \to L_q$ il donne une estimation de la norme de $T : L_r \to L_r$ en fonction des normes d'opérateurs de T sur L_p et L_q (on recupère l'exerice mentionné ci-dessus avec l'opérateur identité). De façon surprenante, la preuve classique de Riesz-Thorin fait usage de fonctions holomorphes, pour établir un théorème d'analyse réelle (1) . Par la suite, on introduit des espaces L_p-faibles pour démontrer un deuxième résultat d'interpolation, celui de Marcinkiewicz. Il est un outil indispensable pour la deuxième partie du TER, dans laquelle on se tourne vers des résultats dites d'extrapolation. On supposera désormais que $T : L_p \to L_p$ est linéaire et continu pour un certain p et essaie de démontrer la continuité sur L_q pour $q \neq p$. L'outil indispensable pour ceci est la composition de Calderon-Zygmund et des 'fonctions maximales'. Ce TER ouvre la porte vers une branche de l'analyse moderne, celle de l'analyse harmonique réelle.

Livres :

E.M. Stein : "Harmonic analysis", Princeton university press, 1993.
L. Grafakos : "Classical and modern Fourier analysis", Pearson Education, 2004.

1. Le mathématicien anglais J. E. Littlewood a fait référence avec enthousiasme à la démonstration de Thorin comme ≪l'idée la plus impudente en mathématiques≫.