Dimensions de Hausdorff et exemples

Encadrant : Philippe Jaming
Philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr

Les notions de dimension de l'algèbre linéaire et de la géométrie (dimension d'une variété) sont trop restrictives pour certains objets de l'analyse. Par exemple, l'ensemble de Cantor (triadique) est de mesure de Lebesgue nulle, mais n'est pas discret. En algèbre, un ensemble de mesure positive serait de dimension 1 et Un ensemble discret serait plutôt de dimension 0.

Cela conduit à l'introduction d'une mesure (de Hausrdorff) dans $\mathbb{R}\hat{}d$ dépend d'un paramètre α compris entre 0 et d. Pour un ensemble E, il existe un nombre D tel que sa mesure de Hausdorff sera inifini pour les $\alpha < D$ et nulle pour les $\alpha > D$. Ce D sera la dimension de E et on vérifiera que les ensembles de mesure positive sont bien de dimension d et les ensembles discrets de dimension 0. On calculera ensuite quelques dimensions d'ensembles usuels.

D'autres notions de dimension peuvent ensuite être étudiées en les comparant à la notion pré'edente. Enfin on pourra explorer certaines conjectures (Flulede ou le lien entre la dimension de $E - E$ et celle de E, les ensembles de Kakeya qui contiennent un intervalle dans toutes les directions mais sont de mesure nulle...)

Références :

P. Mattila *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces : fractals and rectifiability* Cambridge university press

P. Mattila *Fourier analysis and Hausdorff dimension* Cambridge university press