Contrôle optimal pour l'administration de chimiothérapies

Sébastien Benzekry

sebastien.benzekry@inria.fr

Le cancer est à l'heure actuelle un problème de santé majeur, représentant la première cause de décès en France [1] et la seconde à l'échelle mondiale. Les traitements les plus standards (et toujours majoritairement employés) sont la chirurgie, la radiothérapie et la chimiothérapie cytotoxique. A la fin des années 1990, JC Panetta proposa un modèle relativement simple composé d'équations différentielles ordinaires pour l'effet d'une chimiothérapie dans le cadre du traitement des cancers du sein et de l'ovaire [Panetta, 1997], qui prend en compte la spécificité de la chimiothérapie (dans ce cas, le paclitaxel) à n'agir que sur les cellules dans une certaine phase du cycle cellulaire. Après une étude de ce modèle, le sujet de ce TER propose de poursuivre avec l'étude d'un problème de contrôle optimal pour l'administration de la chimiothérapie, décrit dans [Panetta and Fister, 2000].

References

[Panetta, 1997] Panetta, J. C. (1997). A mathematical model of breast and ovarian cancer treated with paclitaxel. *Math Biosc*, 146(2):89–113.

[Panetta and Fister, 2000] Panetta, J. C. and Fister, K. R. (2000). Optimal control applied to cell-cycle-specific cancer chemotherapy. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(3):1059–1072.

[1] http://www.unicancer.fr/le-groupe-unicancer/les-chiffres-cles/les-chiffres-du-cancer-en-france
http://www.inserm.fr/thematiques/cancer/enjeux/enjeux-medicaux

Aux origines du modèle de Gompertz pour la croissance tumorale

Sébastien Benzekry

sebastien.benzekry@inria.fr

Le modèle de Gompertz est une équation différentielle ordinaire très largement employée en modélisation du cancer pour décrire la croissance non perturbée d'une tumeur [Benzekry et al., 2014]. Elle s'écrit

$$\frac{dV}{dt} = aV \ln\left(\frac{K}{V}\right)$$

La solution est une courbe sigmoïdale d'une efficacité étonnante qui s'ajuste presque parfaitement à une large majorité de courbes de croissance tumorale expérimentales [Laird, 1964] et cliniques [Norton, 1988], beaucoup mieux qu'une de ses consoeurs largement employée en modélisation en biologie, le modèle logistique [Benzekry et al., 2014]. Sa première apparition pour la croissance tumorale remonte à 1934 pour la croissance tumorale [Casey, 1934], et à 1932 pour des processus de croissance en général [Winsor, 1932]. Cependant, ce modèle, introduit par Benjamin Gompertz en 1825 [Gompertz, 1825], ne le fut nullement pour décrire un phénomène de croissance mais au contraire pour décrire la probabilité de survie en fonction de l'âge. D'ailleurs, la formule, certes équivalente, n'est pas la même. Ce TER propose d'aller explorer la littérature ancienne pour retracer le lien entre l'apparition du modèle dans l'article original et son utilisation comme courbe de croissance plus de 100 ans plus tard.

Par ailleurs, l'étiologie du modèle (c'est à dire son fondement physiologique) reste très largement inexpliquée, et le modèle reste à l'heure actuelle phénoménologique, sans base biologique concrète (mesurable) pour la valeur de ses paramètres par exemple. Si l'étudiant cherche à aller encore plus loin, il pourra s'intéresser à deux articles qui proposent des interprétations du modèle de Gompertz [Bajzer and Vuk-Pavlović, 2000, Frenzen and Murray, 1986].

References

[Bajzer and Vuk-Pavlović, 2000] Bajzer, Ž. and Vuk-Pavlović, S. (2000). New Dimensions in Gompertzian Growth. *Journal of Theoretical Medicine*, 2(4):307–315.

[Benzekry et al., 2014] Benzekry, S., Lamont, C., Beheshti, A., Tracz, A., Ebos, J. M. L., Hlatky, L., and Hahnfeldt, P. (2014). Classical mathematical models for description and prediction of experimental tumor growth. *PLoS Comput Biol*, 10(8):e1003800.

[Casey, 1934] Casey, A. E. (1934). The Experimental Alteration of Malignancy with an Homologous Mammalian Tumor Material : I . Results with Intratesticular Inoculation. *Am J Cancer*, 21:760–775.

[Frenzen and Murray, 1986] Frenzen, C. L. and Murray, J. D. (1986). A cell kinetics justification for Gompertz'equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 46(4):614–629.

[Gompertz, 1825] Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Phil Trans R Soc B*, 115:513–583.

[Laird, 1964] Laird, A. K. (1964). Dynamics of tumor growth. *Br J Cancer*, 13:490–502.

[Norton, 1988] Norton, L. (1988). A Gompertzian model of human breast cancer growth. *Cancer Res*, 48(24):7067–7071.

[Winsor, 1932] Winsor, C. P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 18(1):1–8.

Modélisation des interactions tumeur-système immunitaire et de certaines immunothérapies

Sébastien Benzekry

sebastien.benzekry@inria.fr

Le cancer est à l'heure actuelle un problème de santé majeur, représentant la première cause de décès en France [1] et la seconde à l'échelle mondiale. Depuis très récemment (2010), de nouvelles thérapies faisant appel au renforcement du système immunitaire viennent donner un nouvel espoir d'avancées contre la maladie, permettant de guérir certains patients atteints de cancers auparavant incurables comme le mélanome métastatique ou bien le cancer du poumon avancé [Couzin-Frankel, 2013]. En parallèle, la modélisation des interactions entre croissance tumorale et système immunitaire a déjà une certaine histoire, et permet d'apporter des informations quantitatives pouvant améliorer les modes d'administration des immunothérapies ou bien déterminer quels patients vont répondre au mieux à un type de thérapie donné. Le but de ce TER est d'étudier un modèle classique de la littérature pour un certain type d'immunothérapie [Kirschner and Panetta, 1998] (ainsi que les références contenues en introduction), composé d'équations différentielles ordinaires, et de déterminer l'applicabilité de ce modèle dans le contexte des immunothérapies modernes (checkpoint inhibiteurs). Selon le temps, le modèle pourra aussi être comparé à un modèle plus récent [de Pillis et al., 2005].

References

[Couzin-Frankel, 2013] Couzin-Frankel, J. (2013). Breakthrough of the year 2013. Cancer immunotherapy. *Science*, 342(6165):1432–1433.

[de Pillis et al., 2005] de Pillis, L. G., Radunskaya, A. E., and Wiseman, C. L. (2005). A validated mathematical model of cell-mediated immune response to tumor growth. *Cancer Res*, 65(17):7950–7958.

[Kirschner and Panetta, 1998] Kirschner, D. and Panetta, J. C. (1998). Modeling immunotherapy of the tumor – immune interaction. *J. Math. Biol.*, 37(3):235–252.

[1] http://www.unicancer.fr/le-groupe-unicancer/les-chiffres-cles/les-chiffres-du-cancer-en-france
http://www.inserm.fr/thematiques/cancer/enjeux/enjeux-medicaux

Rudiments d'algèbre non commutative Encadrant : Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Il s'agit de comprendre la preuve du théorème de structure de Wedderburn sur les anneaux semi-simples. Cela correspond au chapître 1 de l'ouvrage suivant :

Dennis, Farb, *Noncommutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 144, Springer

Sujet Projets tuteuré
M1 Mathématiques Fondamentales
(Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr)

Théorie de la percolation

Considérez le graphe infini $\mathbb{Z}^2$ (les sommets sont les points à coordonnées entières, avec arêtes entre plus proche voisin) et imaginez que vous faites disparaître chaque arête avec probabilité $1 - p$, de façon indépendantes. Le problème de la percolation est par exemple de savoir si l'origine $(0, 0)$ est toujours reliée à un nombre infini de sommets, et avec quelle probabilité. Evidemment la réponse dépend de p. Le but du TER sera de répondre au moins en partie à cette question ; on pourra aussi examiner une variante où le graphe n'est pas le réseau carré mais un arbre.

Bibliographie : *: Jeffrey E. Steif. A mini course in percolation theory*
http ://www.math.chalmers.se/ steif/perc.pdf
http ://culturemath.ens.fr/maths/pdf/proba/percolation.pdf

Prérequis : un goût pour les probabilités (mais le cours de probabilités de M1 n'est pas un prérequis).

Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

Stabilité et convergence des méthodes de discrétisation de l'équation monodomaine de l'électrocardiologie

Yves Coudière
yves.coudiere@u-bordeaux.fr

Contexte. Ce TER sera réalisé dans le cadre de l'équipe-projet Inria Carmen et de l'Institut Hospitalo Universitaire Liryc (http://ihu-liryc.fr), dont le travail est dédié à la modélisation et à la simulation des dysfonctionnements électriques du coeur.

Description scientifique. Chez l'homme ou l'animal, le comportement électrique du tissu cardiaque est modélisé, à l'échelle macroscopique, comme un milieu continu dans lequel on s'intéresse à différence de potentiel notée v. L'évolution de cette variable est donnée par une équation de réaction-diffusion pour la variable $v(t,x) \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\partial_t v = d\Delta v + f(v,w), \tag{1}$$

écrite dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), et où $d > 0$ est une constante. Cette équation est couplée en chaque point du domaine Ω à un système de m équations différentielles pour l'inconnue $w(t,x) \in \mathbb{R}^m$, de la forme

$$\partial_t w = g(v,w). \tag{2}$$

Les fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sont données et appelées *modèle ionique*.

Les équations (1) et (2) constitue le *modèle monodomaine* pour la propagation des potentiels d'action cardiaques. Il est completé par les conditions aux limites $d\nabla u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, et initiale $v(0,x) = v_0(x)$, $w(0,x) = w_0(x)$ dans Ω. Dans ce TER, on s'intéressera en particulier au modèle décrit dans l'article [1].

Lorsque l'on discrétise ce système, par exemple par une méthode de différences finies en espace, on obtient un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} &V' + AV = F(V,W) \\ &W' = G(V,W), \end{aligned}$$

où $V \in \mathbb{R}^N$ et $W \in \mathbb{R}^{mN}$ sont les inconnues discrètes. On peut alors utiliser un schéma de discrétisation en des équations différentielles pour obtenir une suite temporelle d'approximations des fonctions u et w, par exemple la méthode d'Euler semi-implicite :

$$V^n - V^{n-1} + hAV^n = hF(V^{n-1}, W^{n-1}) \tag{3}$$
$$W^n - W^{n-1} = hG(V^{n-1}, W^{n-1}), \tag{4}$$

pour $n \geq 1$, où $h > 0$ est un pas de temps fixé.

Objectif. L'objectif du TER est d'étudier la stabilité numérique des solutions discrètes $(V^n, W^n)_{n\geq 0}$, et si possible la convergence des ces solutions vers des fonctions (v, w) solutions du système d'équations (1) et (2). Pour cela, on utilisera une technique de description de régions invariantes comme dans [2].

Mission. L'étudiant devra étudier les articles fournis et produire une démonstration de la stabilité du schéma semi-implicite (3) et (4) pour le modèle de [1] et une discrétisation par différences finies centrées. Celle-ci aura lieu en particulier sous une condition reliant les pas de temps et d'espace, qu'il faudra étudier. Si il reste du temps, il sera possible d'étudier d'autres schémas en temps, ou d'autres modèles ioniques.

Références

[1] Alfonso Bueno-Orovio, Elizabeth M. Cherry, and Flavio H. Fenton. Minimal model for human ventricular action potentials in tissue. *Journal of Theoretical Biology*, 253(3) :544 – 560, 2008.

[2] Y. Coudière and C. Pierre. Stability and convergence of a finite volume method for two systems of reaction-diffusion equations in electro-cardiology. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 7(4) :916–935, 2006.

LE THÉORÈME SPECTRAL, LE CAS AUTO-ADJOINT

SUJET PROPOSÉ PAR SYLVAIN GOLÉNIA

En Physique quantique, un système est souvent décrit par un opérateur auto-adjoint. Afin de localiser un phénomème de nature spectrale, il est important de pouvoir isoler qu'une partie de l'opérateur (par exemple, que les valeurs propres, ou tout sauf les valeurs propres, ou un interval inclus dans le spectre...). Pour cela il faut donner un sens à $f(A)$, pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un opérateur auto-adjoint A. On parle de calcul fonctionnel associé à A.

Quand A est une matrice auto-adjoint, si on note par $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ ses valeurs propres et par $(P_i)_{i=1,\dots,n}$ les projections orthogonales sur les sous-espaces propres associés alors

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) P_i.$$

Quand l'espace est de dimension infinie et que A a par exemple du spectre continu, alors cette somme n'a plus de sens et il faut donner un sens à $f(A)$ (est-ce formellement une intégrale ?).

En utilisant le théorème de Stone Weirstrass il ne prend que quelques lignes pour définir $f(A)$ pour f une fonction continue. Cette construction permet d'obtenir beaucoup de propriétés facilement. Cependant cette construction n'est pas explicite et dans la pratique il faut souvent pouvoir mieux controler $f(A)$.

Le but de ce TER est de construire $f(A)$ pour différentes classes de fonctions f et d'explorer la formule d'Helffer-Sjostrand. On se limitera au cas où A est borné et auto-adjoint. On cherchera à appliquer ces résultats à différents Laplacien discrets qui agissent sur des graphes.

References

[D] E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[G] S. Golénia, *On the absolute continuous spectrum of discrete operators*, cours de master donné à l'école CIMPA http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/cimpa16kairouan/sur-le-spectre-absolument-continu-dopérateurs-discrets

[RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of mathematical physics. Functionnal analysis*, Academic Press, Inc., New York, 1980. xv+400 pp. ISBN: 0-12-585050-6

Interpolation et extrapolation en espaces L_p

Sujet de TER, proposé par Bernhard Haak

Il n'est qu'un exercice de voir que $f \in L_p \cap L_q$ impliques $f \in L_r$ pour tout $p \leq r \leq q$. Le théorème de Riesz-Thorin généralise cette idée comme suit : pour un opérateur linéaire qui est continu $T : L_p \to L_p$ et continu $L_q \to L_q$ il donne une estimation de la norme de $T : L_r \to L_r$ en fonction des normes d'opérateurs de T sur L_p et L_q (on recupère l'exerice mentionné ci-dessus avec l'opérateur identité). De façon surprenante, la preuve classique de Riesz-Thorin fait usage de fonctions holomorphes, pour établir un théorème d'analyse réelle [(1)] . Par la suite, on introduit des espaces L_p-faibles pour démontrer un deuxième résultat d'interpolation, celui de Marcinkiewicz. Il est un outil indispensable pour la deuxième partie du TER, dans laquelle on se tourne vers des résultats dites d'extrapolation. On supposera désormais que $T : L_p \to L_p$ est linéaire et continu pour un certain p et essaie de démontrer la continuité sur L_q pour $q \neq p$. L'outil indispensable pour ceci est la composition de Calderon-Zygmund et des 'fonctions maximales'. Ce TER ouvre la porte vers une branche de l'analyse moderne, celle de l'analyse harmonique réelle.

Livres :

E.M. Stein : "Harmonic analysis", Princeton university press, 1993.
L. Grafakos : "Classical and modern Fourier analysis", Pearson Education, 2004.

1. Le mathématicien anglais J. E. Littlewood a fait référence avec enthousiasme à la démonstration de Thorin comme «l'idée la plus impudente en mathématiques».

Séries de Dirichlet et fonction de Riemann

Encadrant : Philippe Jaming
Philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr

Un aspect central de la théorie des fonctions holomorphes est que celles-ci sont développables en série entières. Dans certains cas, d'autres expressions sont possibles et nous nous intéresserons ici à l'une d'entre elle qui est particulièrement intéressante en théorie des nombres :

Une série de Dirichlet est une série de la forme

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}.$$

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux propriétés génériques de telles fonctions (convergence, convergence absolue, croissance....) Nous nous intéresseroms ensuite à la plus célèbre d'entre elle, la fonction ζ de Riemann. L'objectif est alors d'ennoncer l'hypothèse de Riemann et de démontrer quelques unes de ses implications en théorie des nombres

Références :

G.H. Hardy et M. Riesz *The general theory of Dirichlet's series* Cambridge university press
E.C. Titchmarsh *The theory of functions* Cambridge university press
E.C. Titchmarsh *The zeta-function of Riemann* Cambridge university press

Dimensions de Hausdorff et exemples

Encadrant : Philippe Jaming
Philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr

Les notions de dimension de l'algèbre linéaire et de la géométrie (dimension d'une variété) sont trop restrictives pour certains objets de l'analyse. Par exemple, l'ensemble de Cantor (triadique) est de mesure de Lebesgue nulle, mais n'est pas discret. En algèbre, un ensemble de mesure positive serait de dimension 1 et Un ensemble discret serait plutôt de dimension 0.

Cela conduit à l'introduction d'une mesure (de Hausrdorff) dans $\mathbb{R}\hat{}d$ dépend d'un paramètre α compris entre 0 et d. Pour un ensemble E, il existe un nombre D tel que sa mesure de Hausdorff sera inifini pour les $\alpha < D$ et nulle pour les $\alpha > D$. Ce D sera la dimension de E et on vérifiera que les ensembles de mesure positive sont bien de dimension d et les ensembles discrets de dimension 0. On calculera ensuite quelques dimensions d'ensembles usuels.

D'autres notions de dimension peuvent ensuite être étudiées en les comparant à la notion pré'edente. Enfin on pourra explorer certaines conjectures (Flulede ou le lien entre la dimension de $E - E$ et celle de E, les ensembles de Kakeya qui contiennent un intervalle dans toutes les directions mais sont de mesure nulle...)

Références :

P. Mattila *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces : fractals and rectifiability* Cambridge university press

P. Mattila *Fourier analysis and Hausdorff dimension* Cambridge university press

Les arbres de Galton Watson

Encadrant : Philippe Jaming
Philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr

Les arbres de Gatson-Watson sont des arbres générés aléatoirement, c'est-à-dire qu'une fois un arbre (fini) donné, on construit un nouvel arbre en attachant à chaque feuille (noeud de la dernière génération) on nombre aléatoire de décendants. Lorsqu'on construit ainsi un arbre récursivement en choisissant un nombre de noeud de façon indépendante et identiquement distribué, on obtient un arbre de Gatson Watson et sont apparus en lien avec la dynamique des populations.

L'objet de ce mémoire est d'étudier les arbres ainsi obtenus (fini, infini, limite...).

Références :

Romain Abraham and Jean-François Delmas *An introduction to Galton-Watson trees and their local limits* https://arxiv.org/pdf/1506.05571v1.pdf

Zhan Shi *Random Walks and Trees* http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/zhan/pdffile/guanajuato.pdf

Détermination pratique de groupes de Galois de polynômes

Encadrant : Florent Jouve
florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

L'objectif du travail est de comprendre la méthode classique de determination de classes de conjugaisons dans le groupe de Galois d'un polynôme f de $\mathbb{Z}[X]$ par factorisation de $f \, (mod \, p)$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ pour diverses valeurs du nombre premier p. Le temps permettant, on verra comment appiquer cette méthode pour montrer que le groupe de Galois générique d'un polynôme unitaire de degre n de $\mathbb{Z}[X]$ est le groupe symétrique S_n.

Références :

D. Katz "Galois groups and reduction modulo a prime"
P. Gallagher "Probabilistic Galois theory"

Problème de Schur-Nevanlinna-Pick pour des fonctions holomorphes.

Encadrant : Stanislas Kupin
Stanislas.Kupin@math.u-bordeaux.fr

Notons par $\mathbb{D}$ le disque unité dans la plan complexe. Soient $(z_j)_{j=1,\dots,n}$ n points du disque et $(W_j)_{j=1,\dots,n}$ des valeurs complexes fixées. Le problème est de savoir quant on peut trouver une fonction $w \in Hol(\mathbb{D})$ satisfaisainte une contrainte spéciale plus les conditions d'interpolation $w(z_j) = w_j$.

La solution de ce problème a été donnée par R. Nevanlinna et I. Pick au début du 20-ième siècle et on se propose de comprendre leur démonstration et d'étudier quelques sujets connexes (i.e., le théorème de Nehari, etc.) à cette thématique.

Polynômes orthogonaux sur le cercle unité et le théorème de Verblunsky (Favard).

Encadrant : Stanislas Kupin
Stanislas.Kupin@math.u-bordeaux.fr

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle important dans plusieurs domaines d'analyse moderne (i.e., l'analyse complexe, analyse harmonique, la théorie d'approximation, la théorie spectrale, etc. etc.). Le point d'entrée dans cette thématique est l'étude des propriétés élémentaires des polynôômes orthogonaux sur le cercle unité du plan complexe. Etant naturellement paramétrés par des mesures boréliennes positives sur le cercle, il se trouve que ces polynômes se décrivent complètement en termes de leur coefficients de récurrence. On se propose d'étudier quelques démonstrations de ce résultat, connu sous le nom du théorème de Verblunsky (ou Favard).

Sujet de TER 2016-2017 (P. Mounoud)

Groupes cristallographiques et théorèmes de Bieberbach.

La donneée d'une action d'un groupe Γ sur un ensemble X est la donnée d'un morphisme de groupes Φ de Γ dans le groupe des permutations de X. Lorsque X est un espace topologique, on dira que Γ agit sur X *par homéomorphismes* si Φ est à valeurs dans le groupe des homéomorphismes de X. Dans ce cas, on peut équiper l'ensemble quotientX/Γ d'une topologie naturelle : la topologie quotient.

On dira qu'une action par homéomorphismes est *co-compacte* si l'espace quotient est compact. Par exemple l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation (ie définie par $\Phi(n)(x) = x+n$) est bien une action par homéomorphismes et elle est co-compacte ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle).

Dans ce TER, on s'interesse aux groupes critallographiques, c'est-à-dire au cas où $X = (\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)$ et où Φ est injective co-compacte et à valeurs dans le groupe des isométries affines de X c'est-à-dire $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Le terme critallographiques vient du fait qu'en dimension 3 l'orbite d'un point par une telle action correspond aux positions des atomes d'un cristal.

L'exemple de base, qui généralise directement le cas du cercle, est celui où Γ est engendré par n translations linéairement indépendantes. Dans ce cas le quotient est un tore, il est difféomorphe au produit de n cercles.

En 1911, Bieberbach a donné trois théorèmes décrivant cette situation. Le premier affirme que le groupe Γ contient un sous-groupe (distingué) d'indice fini Γ_0 isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et dont l'image est constitué uniquement de translations. Du point de vue des espaces quotient cela signifie que $\mathbb{R}^n/\Gamma$ peut etre vu comme $(\mathbb{R}^n/\Gamma_0)/(\Gamma/\Gamma_0)$ c.-à-d. comme le quotient d'un tore par un groupe fini. Le deuxième théorème affirme que deux sous-groupes cristallographiques sont isomorphes si et seulement si ils sont conjugués par un élément du groupe affine (qui est plus gros que le groupe des isométries). Et le troisième dit que pour n fixé il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de sous-groupes cristallographiques. Ce dernier résultat sera l'occasion de s'intéresser aux extensions de groupes et à leurs classes d'isomorphismes.Il n'y en a qu'un nombre fini mais celui-ci grossit vite avec n. Ces groupes ne sont connus que pour $n \leq 6$.

Références :

— L.S. Charlap, *Bieberbach groups and flat manifolds*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1986.

— Cid, Carlos et Schulz, Tilman, *Computation of five- and six-dimensional Bieberbach groups.* Experiment. Math. 10 (2001), no. 1, 109–115.

— A. Guilloux et N. Bergeron, *Géométrie hyperbolique et représentation des groupes de surface*, poly. cours de M2 (chap. 3), disponible en ligne sur la page de N.Bergeron

— J.P. Serre, *Groupes finis*, poly disponible en ligne.

— Wolf, *Spaces of constant curvature*, Sixth edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011.424 pp

Proposition de sujet de TER M1

Formes modulaires et invariant J des courbes elliptiques

Enseignant : Duc-Manh NGUYEN

Chaque courbe elliptique (surface de Riemann de genre 1) correspond à un réseau de $\mathbb{C}$ auquel on peut associer des séries d'Eisenstein. Ces séries sont liées à la fonction zêta de Riemann, et donnent des exemples de formes modulaires. A partir de ces formes modulaires, on pourra calculer les invariants de la courbe elliptique et retrouver l'équation algébrique qui la définit. En particulier, on peut calculer son invariant J. Le but de ce TER est d'étudier en détail tous ces objets, et d'arriver à montrer que l'invariant J réalise un isomorphisme de l'espace de modules des courbes elliptiques (la courbe modulaire) vers $\mathbb{C}$.

Références

[1] J.-P. Serre : *Cours d'arithmétique.* (1970)

[2] J.H. Silverman : *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves.* Graduate Texts in Mathematics **151**.

Proposition de stage M1

Introduction au modèle d'Ising et à la
théorie de Pirogov-Sinai

Lieu du stage :

Université de Bordeaux
UMR CNRS 5252 IMB
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351 Cours de la Libération
33405 Talence cedex

Direction du stage :

Philippe Thieullen
05 40 00 61 17
philippe.thieullen@u-bordeaux.fr

Projet :

Les modèles de spins sont des modèles mathématiques simplifiés permettant de décrire un système en équilibre à une température donnée T et en interaction sous un potentiel hamiltonien H. Le modèle d'Ising est un exemple de tel modèle. La théorie de Pirogov-Sinai permet de décrire le diagramme de phase du système lorsque la température est très basse (mais pas forcément à la limite $T \to 0$). Une phase est une mesure de probabilité, invariante par translation, définie sur l'espace des configurations infinies. De telles mesures sont appelées mesure de Gibbs est prennent la forme générale $\exp(-H/T)/Z(T)$ où $Z(T)$ est la fonction de partition. La théorie de Pirogov-Sinai permet de décomposer

Prérequis :

Un cours d'introduction sur les probabilités.

Etapes du stage :

1. Lire les 4 premiers chapitres de [B-06] permettant ainsi de se familiariser avec les notoins de base sur les mesures de Gibbs. On s'aidera aussi du cours en ligne [V-09].

2. Lire les articles [F-05], [F-98] et [Z-96] qui décrivent de manière simples la méthode des contours de Pirogov-Sinai. On pourra bien sûr consulter les articles originaux [PS-75] et [PS-76] plus difficiles à lire.

3. Si le temps le permet, on appliquera ce modèle à des systèmes plus complexes

Bibliographie :

Les articles ou notes de lecture autour du mémoire :

[F-98] R. Fernandez, Contour ensembles and the description of Gibbsian probability distributions at low temperature, preprint (1998).

[F-05] S. Friedly, Pirogov-Sinai theory and singularity of the Ising model on Z2, preprint (2005), minicourse.

[K-05] A. Kerimov, On the uniqueness of Gibbs states in the Prirogov-Sinai theory, International Journal of Modern Physics B, Vol. 20, No. 15 (2006), 2137 – 2146.

[PS-75] S.A. Pirogov, Ya.G. Sinai, Teor. Mat. Fiz. Vol. 25 (1975), 358 - 369, in Russian, English translation: Phase diagrams of classical lattice systems. Theor. Math. Phys. Vol. 25 (1975), 1185 - 1192 and

[PS-76] S.A. Pirogov, Ya.G. Sinai, Teor. Mat. Fiz. Vol. 26 (1976), 61 - 76, in Russian, English ranslation: Phase diagrams of classical lattice systems. Continuation. Theor. Math. Phys. Vol. 26 (1976), 39 - 49.

[Z-96] M. Zahradnik, A short course on the Pirogov-Sinai theory, preprint (1996), voir le site http://www.ma.utexas.edu, minicourse.

[Z-84] M. Zahradnik, An alternate version of Pirogov-Sinai theory, Commun. Math. Phys. Vol. 93 (1984), 559 – 581.

Les grands classiques sur la théorie générale :

[B-06] A Bovier, Statistical Machanics of Disordered Systems, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press (2006).

[G-98] H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, vol. 9, Studies in Mathematics, Walter de Gruyter (1998).

[V-09] Y. Velenik, Le modèle d'Ising, Notes de cours de l'Université de Genève, (2009), voir le site web de l'auteur : http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html