

Proposition de stage M1

Introduction au modèle d'Ising et à la théorie de Pirogov-Sinai

Lieu du stage :

Université de Bordeaux
UMR CNRS 5252 IMB
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351 Cours de la Libération
33405 Talence cedex

Direction du stage :

Philippe Thieullen
05 40 00 61 17
philippe.thieullen@u-bordeaux.fr

Projet :

Les modèles de spins sont des modèles mathématiques simplifiés permettant de décrire un système en équilibre à une température donnée T et en interaction sous un potentiel hamiltonien H . Le modèle d'Ising est un exemple de tel modèle. La théorie de Pirogov-Sinai permet de décrire le diagramme de phase du système lorsque la température est très basse (mais pas forcément à la limite $T \rightarrow 0$). Une phase est une mesure de probabilité, invariante par translation, définie sur l'espace des configurations infinies. De telles mesures sont appelées mesure de Gibbs et prennent la forme générale $\exp(-H/T)/Z(T)$ où $Z(T)$ est la fonction de partition. La théorie de Pirogov-Sinai permet de décomposer

Prérequis :

Un cours d'introduction sur les probabilités.

Étapes du stage :

1. Lire les 4 premiers chapitres de [B-06] permettant ainsi de se familiariser avec les notations de base sur les mesures de Gibbs. On s'aidera aussi du cours en ligne [V-09].
2. Lire les articles [F-05], [F-98] et [Z-96] qui décrivent de manière simples la méthode des contours de Pirogov-Sinai. On pourra bien sûr consulter les articles originaux [PS-75] et [PS-76] plus difficiles à lire.
3. Si le temps le permet, on appliquera ce modèle à des systèmes plus complexes

Bibliographie :

Les articles ou notes de lecture autour du mémoire :

[F-98] R. Fernandez, Contour ensembles and the description of Gibbsian probability distributions at low temperature, preprint (1998).

[F-05] S. Friedly, Pirogov-Sinai theory and singularity of the Ising model on \mathbb{Z}^2 , preprint (2005), minicourse.

[K-05] A. Kerimov, On the uniqueness of Gibbs states in the Pirogov-Sinai theory, International Journal of Modern Physics B, Vol. 20, No. 15 (2006), 2137 – 2146.

[PS-75] S.A. Pirogov, Ya.G. Sinai, Teor. Mat. Fiz. Vol. 25 (1975), 358 - 369, in Russian, English translation: Phase diagrams of classical lattice systems. Theor. Math. Phys. Vol. 25 (1975), 1185 - 1192 and

[PS-76] S.A. Pirogov, Ya.G. Sinai, Teor. Mat. Fiz. Vol. 26 (1976), 61 - 76, in Russian, English translation: Phase diagrams of classical lattice systems. Continuation. Theor. Math. Phys. Vol. 26 (1976), 39 - 49.

[Z-96] M. Zahradnik, A short course on the Pirogov-Sinai theory, preprint (1996), voir le site <http://www.ma.utexas.edu>, minicourse.

[Z-84] M. Zahradnik, An alternate version of Pirogov-Sinai theory, Commun. Math. Phys. Vol. 93 (1984), 559 – 581.

Les grands classiques sur la théorie générale :

[B-06] A Bovier, Statistical Mechanics of Disordered Systems, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press (2006).

[G-98] H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, vol. 9, Studies in Mathematics, Walter de Gruyter (1998).

[V-09] Y. Velenik, Le modèle d'Ising, Notes de cours de l'Université de Genève, (2009), voir le site web de l'auteur : <http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html>