

**Feuille 3.**

**Exercice 1.** Un joueur paie 15 euros pour jeter au hasard un dé équilibré. Il gagnera :

- (1) 15 euros s'il obtient le 1;
- (2) 5 euros s'il obtient le 2 ou le 3 ;
- (3) 60 euros s'il obtient le 6 ;
- (4) 0 dans les autres cas.

Calculer le gain moyen du joueur.

**Exercice 2.**

- (1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(X_k)_{k \geq 1, \dots, n}$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués, telles que  $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .  
Quelle est la loi de  $S_n$ , son espérance et sa variance ?
- (2) Bordeaux est interdit à la circulation pour laisser le champ libre à la voiture officielle du maire. Entre Mérignac et l'hôtel de ville, il y a treize feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante. Chacun est rouge un tiers du temps. Soit  $X$  le nombre de feux rouges qu'une escorte de motards ignore sur son passage. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

**Exercice 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle continue ayant pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

- (1) Calculez  $k$ .
- (2) Calculez  $P(1 \leq X \leq 2)$ .

**Exercice 4.** On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 90% de chances de réussir. On s'apprête à réaliser l'opération sur 5 patients. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réussites de l'opération sur les 5 tentatives.

- (1) Quel modèle proposez-vous pour  $X$  ?
- (2) Quelle est la probabilité que l'opération rate les 5 fois ?
- (3) Quelle est la probabilité que l'opération rate exactement 3 fois ?
- (4) Quelle est la probabilité que l'opération réussisse au moins 3 fois ?

**Exercice 5.** Dans une boîte, il y a  $n$  cartes numérotées de 1 à  $n$ . On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte  $n$ . Soit  $Z$  le nombre de tirages effectués.

- (1) Déterminez la loi de  $Z$ . Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à  $r$ , pour  $r \geq 1$ .
- (2) Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50 ? Application :  $n = 100$ .

**Exercice 6.** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si sa densité est donnée par  $c_\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$ .

- (1) Déterminez  $c_\lambda$  en fonction de  $\lambda$  pour que cette densité soit une densité de probabilité.
- (2) Déterminez la moyenne et la variance de  $X$ .
- (3) On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $1/100$ .
  - (a) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?
  - (b) Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son  $n$ -ième jour, elle marche encore ?