IUT HSE Probabilités et Statistiques

Feuille 2 : variables aléatoires discrètes

1 Exercices

Dénombrements

Exercice 1. On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

i. si les livres doivent être groupés par matières.

ii. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés

Exercice 2. Soient n et p deux entiers non nuls.

i. Montrez qu'il y a C_{p+n-1}^{n-1} possibilités façons de répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?

ii. Supposons $p > n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?

iii. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

Indication : Si vous n'arrivez pas à voir ce qui se passe, essayez avec $n = 3$ et $p = 5$ pour lister les possibilités.

Probabilités de base

Exercice 3. Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 4. En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires. Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

i. Quel est le taux global de personnes soulagées ?

ii. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 5. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard de façon équiprobable. On considère les deux évènements suivants

— A on tire une boule paire

— B on tire un multiple de 3.

Calculez les probabilités $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Même question avec une urne contenant 13 boules.

Lois discrètes usuelles

Exercice 6. A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez- vous ? (on discutera en fonction de p)

Exercice 7. On sait que la peste touche une personne sur cinq. Un vaccin est testé sur 10 personnes (inépendantes) : aucune n'est touchée.

i. Calculer la probabilité de ce résultat si on suppose que le vaccin n'a aucun effet.
ii. Comparer le résultat avec celui d'une autre expérience où 20 personnes ont pris le vaccin, dont une seule a été touchée.

Exercice 8. Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

i. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
ii. Calculer la probabilité de l'évènement : "Le client a au moins subi un retard"

Exercice 9. Dans une boîte, il y a 52 cartes numérotées de 1 à 52. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués.

i. Quelle est la loi de Z. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à k, pour $k \geq 1$.
ii. Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 30 ?

Exercice 10. La surface extérieure d'un ballon de foot est composée de 20 hexagones réguliers numérotés de 1 à 20 et de 12 pentagones réguliers numérotés de 1 à 6, chaque numéro apparaissant sur deux pentagones.

Après lancer, la probabilité que le ballon tombe sur un pentagone particulier est p alors que la probabilité qu'il tombe sur un hexagone particulier est p'. On lance le ballon de manière indépendante jusqu'à ce qu'il tombe sur un pentagone. On note X le numéro du pentagone concerné, N le nombre de lancers et S la somme des numéros des polygones sur lesquels le ballon est tombé au cours de ces lancers.

Notez que, la faces n'étant pas toutes parreilles, on n'a pas la même probabilité de tomber sur un hexagone que sur un pentagone (donc $p \neq p' \neq 1/32$)

i. Exprimer la relation qui existe entre p et p'.
ii. Quelle est la loi de X ?
iii. Déterminer la loi de N en fonction du paramètre p.
iv. Calculer $\mathbb{E}[S|N = n]$.

2 Corrigés

Exercice 1

1) Il y a 3! façons de choisir l'ordre des matières. Pour chaqu'un de ces choix, il y a 4! façons de ranger les 4 livres de math, 6! façons de ranger les 6 livres de physique et 3! façons de ranger les 3 livres de chimie. Cela fait donc $(3!)^2 \times 4! \times 6!$ possibilités.

2) On décide d'abord combien de livres on place avant ceux de math : on peut en placer de 0 à 9, ce qui fait 10 choix. Ce choix fait, il y a 4! façons de placer les 4 livres de math et 9! façon de placer les 9 autres livres autour ce deux de math (en respectant le choix du nombre de livres qu'on place avant).

Au total, il y a $10 \times 4! \times 9!$ choix.

Exercice 2

i. Répartir ces enveloppes revient à faire la chose suivante : On place une première boite au lettre, puis il faut mettre des enveloppes, puis une boite puis des enveloppes...
Un tel choix peut donc se coder $BE \cdots EBE \cdots EBE \cdots$. (Notons qu'une boite peut éventuellement être vide ce qui revient à répeter les B). Il faut donc commencer par B puis placer les $n-1$ B restant parmi $p+n-1$ places possibles. Il y a donc C_{p+n-1}^{n-1} possibilités.

ii. On commence à mettre une enveloppe dans chaque boite. Il reste alors $p-n$ enveloppes à répartir dans n boited. D'après la première question, il y a C_{p-1}^{n-1} possibilités.

iii. Il s'agît d'attribuer une boite aux lettre à chaque enveloppe. Il y a n possibilités pour chaque enveloppe donc $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p fois} = n^p$ façons de répartir ces enveloppes.

Exercice 3

Notons les différents événements : F "être une femme", H "être un homme" et L "porter des lunettes". Alors on a d'après l'ennoncé

$$\mathbb{P}(F) = 0.6, \quad \mathbb{P}(L|F) = 1/3 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(L|H) = 1/2$$

(la probabilité de porter des lunettes sachant qu'on est une femme ou un homme). Notons que $\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(F) = 0.4$.

La quantité qu'on cherche est $\mathbb{P}(F|L)$ la probabilité d'être une femme sachant qu'on a des lunettes. Mais, par définition

$$\mathbb{P}(F|L) = \frac{\mathbb{P}(F \cap L)}{\mathbb{P}(L)}.$$

Il faut donc déterminer $\mathbb{P}(F \cap L)$ et $\mathbb{P}(L)$. En utilisant la définition de $\mathbb{P}(L|F) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap L)}{\mathbb{P}(F)}$ on trouve

$$\mathbb{P}(F \cap L) = \mathbb{P}(L|F)\mathbb{P}(F) = \frac{1}{3} \times 0.6 = 0.2$$

et une formule similaire est valable pour $\mathbb{P}(H|L)$. Mais alors

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(F \cap L) + \mathbb{P}(H \cap L) = \mathbb{P}(L|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(L|H)\mathbb{P}(H) = \frac{1}{3} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.4 = 0.4$$

Par suite $\mathbb{P}(F|L) = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$.

Exercice 4

1) Le taux global de personnes soulagées :

$$\mathbb{P}(S) = \frac{3}{5} \times 0.75 + \frac{2}{5} \times 0.9 = 0.81.$$

2) Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé

$$\mathbb{P}(A|S) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0.75 \times \frac{3}{5}}{0.81} = 55.6\%$$

Exercice 5

Notons que $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ et $A \cap B = \{6, 12\}$. Donc $\mathbb{P}(A) = |A|/12 = 6/12 = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 4/12 = 1/3$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/12 = 1/6 = 1/2 \times 1/3 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ces deux événements sont donc indépendants.

Dans une urne à 13 boules, $A, B, A \cap B$ sont inchangés mais cette fois-ci $\mathbb{P}(A) = |A|/13 = 6/13$, $\mathbb{P}(B) = 4/13$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/13 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, ces deux événements ne sont donc *pas* indépendants.

Exercice 6

On note X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne.

La panne du moteur i est une variable aléatoire X_i qui suit une loi de Bernouilli p. Si un avion est équipé des moteurs $1, \ldots, n$, le nombre de moteurs en panne est la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$. D'après le cours elle suit une loi binomiale $B(n, p)$.

Ainsi X suit $B(4, p)$ donc la probabilité qu'il reste 3 ou 4 moteurs est

$$\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p(1-p)^3 = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = (1+3p)(1-p)^3$$

De même, X suit $B(2, p)$ donc la probabilité qu'il reste 2 moteurs est

$$\mathbb{P}(Y = 0 = C_2^0 p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2.$$

On choisit l'avion A si $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) > \mathbb{P}(Y = 0)$ et B sinon. La condition s'écrit

$$(1+3p)(1-p)^3 > (1-p)^2 \Leftrightarrow \big((1+3p)(1-p) - 1\big)(1-p)^2 > 0 \Leftrightarrow 2p - 3p^2 > 0$$

soit $p < 2/3$. On préfère donc l'avion A si la probabilité de panne est $< 2/3$, et B si elle est $> 2/3$.

Exercice 7

Pour une personne, de deux choses l'une : ou bien elle contracte la peste, probabilité p , ou bien elle ne contracte pas la peste, probabilité $q = 1–p$.

Le fait de regarder si la personne a, ou non, contracté la peste constitue une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour n personnes testées, le nombre X de personnes atteintes est le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli ; X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

1) $n = 10, k = 0$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0.1074$

2) $n = 20, k = 1$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0,0691$.

Remarque : Si on observe k malades dans un échantillon de n personnes traitées, $\mathbb{P}(X = k)$ s'appelle la probabilité critique du test de l'hypothèse $(H0)$: "Le vaccin n'a pas d'effet", contre l'hypothèse $(H1)$: "Le vaccin diminue le nombre de malades". Ce n'est que si cette probabilité est inférieure au seuil de 5% que l'on dira que le vaccin a un effet significatif.

Dans les deux cas, on ne peut pas reeter l'hypothèse que le vaccin n'a pas d'effet.

Exercice 8

Soit R l'événement "le client a subi un retard". Alors X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante 1/4 au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $B(4, 1/4)$. En particulier, on a :

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \frac{1}{4} \quad Var(X) = 4 \times \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

On cherche ensuite $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4$.

Exercice 9

On répète, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli (tirage d'une carte) dans laquelle la probabilité du succès (tirer la carte numéro n) est $p = 1/52$, jusqu'à l'obtention d'un succès. Le nombre de répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, nécessaire à l'obtention d'un succès suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.

Donc le nombre Z de tirages effectués suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p.

$$\mathbb{P}[Z = k] = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{52}\left(\frac{51}{52}\right)^{k-1}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z \leq 30] &= \sum_{k=1}^{k=30} \mathbb{P}[Z = k] = \frac{1}{52}\sum_{k=1}^{k=30}\left(\frac{51}{52}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{52}\sum_{k=0}^{k=29}\left(\frac{51}{52}\right)^{k} = \frac{1}{52}\frac{1-\left(\frac{51}{52}\right)^{30}}{1-\frac{51}{52}} \\
&= 1 - \left(\frac{51}{52}\right)^{30}.
\end{aligned}$$

Exercice 10

1) On a 20 hexagones et on tombe sur un hexagone donné avec probabilité p, on tombe donc sur un des hexagones avec probabilité $20p$. De même, on tombe sur un des pentagones avec probabilité $12p'$. Comme on tombe soit sur un pentagone, soit sur un hexagone,

$$20p + 12p' = 1$$

2) Les valeurs possibles de X sont les entiers de 1 à 6, numéros inscrits sur les pentagones. Lorsqu'on sait que le ballon tombe sur un pentagone, la probabilité qu'il tombe sur le pentagone numéroté k est de $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, puisqu'il y a deux pentagones qui portent le numéro k, sur les 12 pentagones équiprobables.

Donc $\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{6}$, *i.e.* X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

Notons que si on inverse les roles des pentagones et des hexagones et si on appelle L le numéro de l'hexagone sur lequel on tombe, alors L suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 20\}$.

3) Le fait de regarder si le ballon tombe sur un pentagone est une épreuve de Bernoulli, dont le succès a une probabilité $12p$. Le nombre N de répétitions de l'épreuve de Bernoulli qu'il faut pour arriver à un succès suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $12p$:

$$\mathbb{P}[N = k] = 12p(1 - 12p)^{k-1}.$$

4) Lorsque $N = n$, on sait que le ballon est tombé sur un hexagone au cours des n–1 premiers lancers, et sur un pentagone au n-ième lancer. Ainsi $S = L_1 + \cdots + L_k + X$ et

$$\mathbb{E}[S|N = n] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[L_k] + \mathbb{E}[X]$$

où L_k est le numéro de l'hexagone sur lequel on tombe au k-ième lancer. On a déjà vu que L_k suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 20\}$ donc $\mathbb{E}[L_k] = \frac{20+1}{2}$ et $\mathbb{E}[X] = \frac{6+1}{2}$.

En résumé : $[\mathbb{E}[S|N = n] = \frac{21}{2}(n - 1) + 7 = \frac{21}{2}n - 7$.

Notons qu'on a le théorème de la moyenne conditionnelle

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S|N]\big]$$

qui nous dit que

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\frac{21}{2}N - 7] = \frac{21}{2}\mathbb{E}[N] - 7$$

et comme N suit une loi géométrique de paramètre $12p$ sur $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[N] = 1/12p$ et $\mathbb{E}[S] = \frac{21}{2}\frac{1}{12p} + 7 = \frac{7}{8p} - 7$.