IUT HSE
Introduction aux probabilités et statistiques
Variables aléatoires

Philippe Jaming

Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@gmail.com
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ pjaming/

Variables aléatoires

Definition

- *Variable aléatoire discrète* fonction X qui prend un ensemble discret de valeurs $(x_i)_{i\in I}$
- *Loi de probabilité ou distribution de probabilité de X* $\{\mathbb{P}[X=x_i], i\in I\}$
- *Fonction de répartition de X* si les $x_i\in\mathbb{R}$,
$$F_X(x)=\mathbb{P}[X\leq x]=\sum_{x_i\leq x}\mathbb{P}[X=x_i].$$

— Pour $a\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X>a]=1-\mathbb{P}[X\leq a]=1-F_X(a)$.
— Pour $a<b\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big[X\in]a,b]\big)=F_X(b)-F_X(a)$.
— F_X est *croissante* avec un saut p_i en chaque x_i.

Definition

X variable aléatoire discrète.
Son *espérance* est $\mathbb{E}[X]=\sum_{i\in I}x_i\mathbb{P}[X=x_i]$.

Propriétés :

1. $\mathbb{E}[aX+bY]=a\mathbb{E}[X]+b\mathbb{E}[Y]$,
2. $\mathbb{E}[1]=1$ donc $\mathbb{E}[aX+b]=a\mathbb{E}[X]+b$,
3. si X et Y sont indépendants, $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Definition

X variable aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}[X]$.
Sa *variance* est
$$Var[X]=\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=\sum_{i\in I}(x_i-\mathbb{E}[X])^2\mathbb{P}[X=x_i].$$

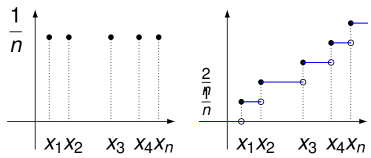
Son *écart type* $\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$.

Propriétés :

1. $Var(1)=0$, $Var(cX+b)=c^2Var(X)$
2. si X et Y sont indépendants, $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.
3. $\mathbb{P}[|X-\mathbb{E}[X]|>\varepsilon]\leq\dfrac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$.

Definition

X variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$.
X suit la *loi uniforme* si $\mathbb{P}[X = x_i] = \dfrac{1}{n}$.



$$\mathbb{E}[X] = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definition

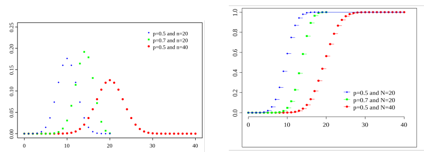
X variable aléatoire qui prend les valeurs 0 (échec) et 1 (réussite).
$p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$, X suit la *loi de Bernouilli p, $\mathcal{B}(p)$* si
$\mathbb{P}[X = 0] = q = 1 - p$, $\mathbb{P}[X = 1] = p$.

$$\mathbb{E}[X] = p \qquad Var(X) = p(1 - p) = pq.$$

Definition

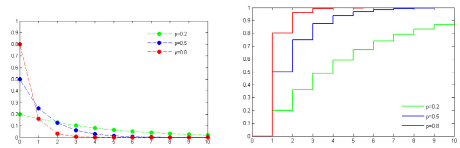
X variable aléatoire qui prend les valeurs $0, \dots, n$.
$p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$ X suit la *loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$* si

$$\mathbb{P}[X = k] = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. $\mathbb{E}[X] = np$ et $Var(X) = np(1 - p) = npq$.
2. $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec les X_i indépendants qui suivent $\mathcal{B}(p)$.
3. 

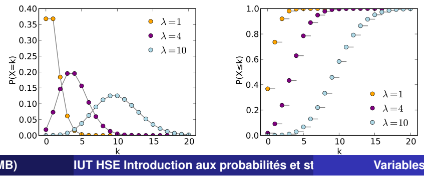
Definition

X variable aléatoire qui prend les valeurs $0, 1, 2 \dots$.
$p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$ X suit la *loi géométrique $\mathcal{G}(p)$* si
$\mathbb{P}[X = k] = p(1 - p)^k = pq^k$.

1. $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$ et $Var(X) = \dfrac{1 - p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.
2. X = rang du premier succès d'une suite de X_i indépendants qui suivent $\mathcal{B}(p)$.
3. 

Definition

X variable aléatoire qui prend les valeurs $0, 1, 2 \dots$.
$\lambda > 0$, X suit la *loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$* si
$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

1. $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$.
2. Si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, Y suit $\mathcal{P}(\mu)$ et X, Y indépendantes, alors $X + Y$ suit $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$
3. *Paradigme de Poisson :* La somme S_n d'un grand nombre de variables de Bernoulli indépendantes de petit paramètre suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $\mathbb{E}[S_n]$.
4. 

Definition

- *Variable aléatoire continue* fonction X qui prend ses valeurs dans I intervalle de $\mathbb{R}$
- X a une *densité f* si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ est t.q. pour $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X \in A]) = \displaystyle\int_A f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Fonction de répartition de X*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et, pour $a \in \mathbb{R}$,
$\mathbb{P}[X > a] = 1 - \mathbb{P}[X \leq a] = 1 - F_X(a)$.
— Pour $a < b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big[X \in]a, b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$.
— F_X est *croissante*, si f continue, $F_X' = f$.

Definition

X variable aléatoire à densité f.
Son *espérance* est $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriétés :

1. $\mathbb{E}[X]$ peut ne pas exister ! ! !
2. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$,
3. si X et Y sont indépendants, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Definition

X variable aléatoire de densité f d'espérance $\mathbb{E}[X]$.
Sa *variance* est

$$Var[X] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Son *écart type* $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

Propriétés :

1. si X et Y sont indépendants, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.
2. $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \dfrac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$.

Definition

Soient $a < b$. On dit que X suit une *loi uniforme sur $[a, b]$, $\mathcal{U}(a, b)$* si sa densité est

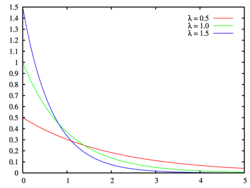
$$f(t) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

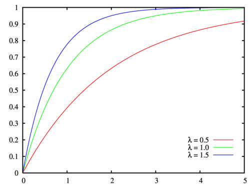
1. $\mathbb{P}[X \in A] = \frac{|A \cap [a,b]|}{|[a,b]|}$
2. $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ et $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Definition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une *loi exponentielle de paramètre λ* si sa densité est

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
2. Absence de méoire : $\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s]$.
3. 



Definition

Soient $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. On dit que X suit une *loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$* si sa densité est

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

1. si X suit $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sigma X + \mu$ suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.
3. Si X suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et X, Y indépendants, alors $X + Y$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
4.