LICENCE ANNÉE 1 **Année 2016-2017**

Math pour la biologie

Feuille de TP n^o 4.

Fonctions.

```
--> function z=g(t), z=exp(-t/2).*sin(10*t), endfunction
--> g(1)
--> t=0:0.02:4;
--> y=g(t);
--> plot(t,y)
```

Résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

Résolution de l'équation $y' = y(1 - y/10000)$ avec $y(0) = 1000$ sur l'intervalle $[0, 6]$.

```
--> function z=f(t,y), z=y.*(1-y/10000), endfunction
--> t0=0; y0=1000;          \\ conditions initiales
--> t=0:0.1:6;
--> y=ode(y0,t0,t,f);
--> plot(t,y)
```

Faites la résolution de l'équation $y' = y(1 - y/10000)$ avec $y(0) = 20000$ sur l'intervalle $[0, 6]$, en utilisant le même graphique. Même question avec $y(0) = 10000$.

Si $y(t)$ représente le nombre de rats à l'instant t dans la ville, le modèle présenté ici est celui de *Verhulst*. On voit que la population se stabilise autour de 10000 rats, quelque soit le nombre initial de rats. Ce modèle vous parait-il raisonnable?

Exercice 1 a) Représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& \big(\sin(t) - 0.1\big)y \\ y(0) &=& 1 \end{array}\right. \qquad \text{sur l'intervalle } [0, 40].$$

b) Résoudre cette équation différentielle, puis tracer la courbe de la fonction obtenue (vous devez retrouver le même graphique).

Exercice 2 **Des requins et des sardines.** Dans cet exercice, y_1 désigne le nombre de sardines et y_2 désigne le nombre de requins. Résoudre le système d'équations différentielles $\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& 5y_1(100 - y_2) \\ y_2' &=& y_2(y_1 - 1000) \\ y_1(0) &=& 2000 \\ y_2(0) &=& 200 \end{array}\right.$

```
--> clear; clf            \\ efface les affectations, efface les graphiques
--> function z=f(t,y),  z=[5*y(1).*(100-y(2));y(2).*(y(1)-1000)], endfunction
--> y0=[2000;200]; t=0:0.05:2; t0=0;
--> y=ode(y0,t0,t,f);          \\ y est une matrice 2 lignes et 41 colonnes
--> y1=[1,0]*y;                \\ On extrait la première ligne de y.
--> y2=[0,1]*y;                \\ On extrait la deuxième ligne de y.
--> plot(y1,y2)                \\ On observe une évolution périodique.
--> plot(2000,200,'r.')        \\ On place les données à l'instant 0.
```

Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2.

Résolution de $y'' + 0.5y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ sur l'intervalle [0,25].

Cette équation équivaut à $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, avec $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. On a donc $Y' = AY$ avec $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

```
--> function z=f(t,Y), z=[0,1;-3,-0.5]*Y, endfunction
--> Y0=[1;0] ; t=0:0.1:25  \\ t0 est déja défini.
--> Y=ode(Y0,t0,t,f);      \\ Y est une matrice 2 lignes et 251 colonnes
--> plot(t,Y)              \\ Executer pour voir le résultat.
--> clf
--> y=[1,0]*Y             \\ On extrait la première ligne de Y.
--> plot(t,y)             \\ On observe un mouvement oscillatoire amorti.
```

Exercice 3 Représenter sur le même graphique que précédemment, avec une couleur différente, la solution de l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{rcl} y'' + 0.5y' + 3y & = & 0,5\sin(5t) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$ sur l'intervalle [0,25]. Ici, on remplace le système différentiel $Y' = AY$ par $Y' = AY + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5\sin(5t) \end{pmatrix}$. Il suffit pour cela de refaire les lignes 1,3,6,7 du script ci-dessus en modifiant la fonction de la façon suivante :

```
z=[0,1;-3,-0.5]*Y+[0;0.5*sin(5*t)]
```

On observe un mouvement oscillatoire amorti suivi d'un mouvement périodique (dit stationnaire) de période différente.

Remarque : On peut résoudre cette équation différentielle (cependant les constantes ne sont pas simples à calculer). La solution de l'équation homogène est de la forme $y_h(t) = e^{-0,25t}\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\big)$ avec $\omega = \sqrt{11,75}$ (mouvement oscillatoire amorti). La solution particulière est de la forme $y_p(t) = \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t)$ (mouvement périodique stationnaire).

Exercice 4 Représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle

$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + y' + 100,25y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 10 \end{array}\right.$ sur l'intervalle [0,4]. Comparer la courbe obtenue à celle de la fonction g donnée par $g(t) = \exp(-t/2)\sin(10t)$ étudiée au début.