Proposition pour le cours intégré MOSE 2014.

R. Deville

20 mars 2017

Programme.

S1 :
- Dérivation
- Intégration, développements limités
- calcul de limites, croissances comparées
- équations différentielles du premier ordre linéaire, équations différentielles du second ordre à coefficients constants, introduction de méthodes numériques (Euler explicite et implicite)
- calcul vectoriel (pour la physique)
- 4 TPs sur scilab : introduction à scilab, approximation numérique d'intégrale, approximation numérique de solutions d'équations différentielles

S2 :
- présentation introductive sur la modélisation mathématique en biologie

- calcul matriciel, diagonalisation
- Résolution de systèmes linéaires

- systèmes différentiels
- fonctions de plusieurs variables

- statistiques descriptives
- Régression linéaire (Éventuellement, s'il reste du temps)

- 4 TPs sur scilab autour des équations différentielles, des systèmes différentiels et des stats descriptives.

Planning du semestre

– **Séance introduction :** présentation par un enseignant de biologie de la modélisation mathématique en biologie
– **Séance 1,2 :** Systèmes linéaires
– **Séance 3 et 4 :** Matrices
– **Séance 5,6 :** Diagonalisation et ses applications
– **Séance 7 :** Révisions.
– **Séance 8,9 :** Fonctions en plusieurs variables, intégration
– **Séance 7 :** Révision
– **Séance 8** Rappels sur la résolution d'équations différentielles linéaires.
– **DS** semaine 41 (sem 5 du semestre) portant sur les scéances 1-6.
– **Séance 9, 10 :** Systèmes d'équations différentielles linéaires de 1er ordre.
– **Séance 11,12,13 :** Statistiques descriptives.
– **Séance 14 :** Regression linéaire.
– **Séance 15 :** Révisions.
– **Examen**

Chapitre 1

Systèmes linéaires et matrices

1.1 Séances 1,2 : systèmes linéaires.

Problématique.

On a p inconnues $x_1 \dots x_p$ et n équations linéaires dans ces inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Un tel système d'équations est appelé un système linéaire $n \times p$ (lignes $\times$ colonnes). Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Et si on définit le produit AX par :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

On réécrit ce système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système s'écrit simplement $AX = B$. Le tableau A s'appelle une matrice à n lignes et p colonnes, B et X s'appellent des vecteurs colonnes. A et B sont les données, X est l'inconnue.

Systèmes linéaires 2×2

• Résolution d'un système triangulaire sur un exemple :

$$\begin{cases} 3x & = & 2 \\ -6x + 5y & = & 1 \end{cases}$$

On résout la première équation, càd, $x = \frac{2}{3}$, on reporte cette valeur dans la deuxième équation $-6(\frac{2}{3}) + 5y = 1$, donc $y = 1$.

• Résolution d'un système quelconque sur exemple : on se ramène à un système triangulaire.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 10x + 12y & = & 38 \\ 3x + 4y & = & 13 \end{array} \right.$$

rien ne change si on multiplie la deuxième ligne avec 3 (des deux cotés !).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 10x + 12y & = & 38 \\ 9x + 12y & = & 39 \end{array} \right.$$

On remplace la deuxième ligne (L2) par L1-L2 et on est ramené à un système triangulaire.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 10x + 12y & = & 38 \\ x & = & -1 \end{array} \right.$$

Avec $x = -1$ en mains, $y = 4$ est vite trouvé. On réécrit la même chose différemment :

colonne de x	colonne de y		colonne du second membre	explications
10	12	|	38	
3	4	|	13	
10	12	|	38	
9	12	|	39	$L2 \leftarrow L2 * 3$
10	12	|	38	
1	0	|	-1	$L2 \leftarrow L1 - L2$

Structure des solutions. On remarque qu'une ligne estt l'équation d'une droite du plan $\mathbb{R}^2$. Résoudre un système de deux équationsà deux inconnus revient à chercher les coordonnées du *point d'intersection* des deux droites. Il y a exactement trois cas :

1. Une solution unique si les deux droites ont des pentes différentes.
2. Pas de solution si les deux droites sont parallèles mais non-identiques.
3. Une infinité de solutions si les deux droites sont identiques.

En effet, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, les deux droites d'équations

$$ax + by = u \quad \text{et} \quad cx + dy = v$$

ont même pente si et seulement si les vecteurs (a, b) et (c, d) sont proportionnels, ce qui équivaut à $ad - bc = 0$. La quantité $ad - bc$ *détermine* donc l'existence d'une solution unique ! On appelle

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

le **déterminant** du système. Encore plus, grâce au déterminant on peut directement noter la solution ! En effet,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + by & = & u \\ cx + dy & = & v \end{array} \right. \quad \text{a pour solution} \quad x = \frac{\det \begin{pmatrix} u & b \\ v & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & u \\ b & v \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Ceci est la **règle de Cramer**.

Une parenthèse *hors programme*

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la droite $D : \quad ax + by = c$.

$(x, y) \neq (0, 0)$ est vecteur directeur de D si $ax+by = 0$: les vecteurs (x, y) et (a, b) sont orthogonaux. Le vecteur (a, b) est donc orthogonal à la droite D.

En généralisant ceci en 3 dimensions, deux vecteurs (a, b, c) et (x, y, z) sont orthogonales si $ax + by + cz = 0$. Si P est d'équation $ax + by + cz = d$, p est un plan affine de $\mathbb{R}^3$, perpendiculaire au vecteur (a, b, c). Fin de Parenthèse

Systèmes linéaires 3×3

Structure des solutions : Une équation de la forme $ax + by + cz = u$ pour trois inconnus admet une infinité de solutions. En effet (si $a \neq 0$) on peut choisir y, z comme on veut, puis on ajuste la valeur de x par

$$x = \frac{u - by - cz}{a} = \frac{u}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$$

ou bien, en coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y, z \in \mathbb{R}$$

On voit un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $(\frac{u}{a}, 0, 0)$ engendré par les deux vecteurs $(\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $(\frac{c}{a}, 0, 1)$.

Résumé : L'ensemble des solutions (x, y, z) satisfaisant l'équation $ax + by + cz = u$ forme un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Si deux plans affines ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite affine. Ainsi, un système de deux équations pour trois inconnus admet soit aucune, soit une infinité de solutions (une droite affine, voire un plan affine).
Pour un système de 3 équations pour trois inconnus il y a donc trois cas :

1. Si l'intersection de deux plans est une droite affine, celle-ci peut être parallèle au troisième plan - dans ce cas il n'y a pas de solution.
2. Si l'intersection de deux plans est une droite affine non parallèle, il y a une et une seule solution du système.
3. Si deux (ou tous les trois) plans sont identiques, il y a une infinité de solutions.

Méthode du pivot de Gauss

On dit que deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions (vide ou non, fini ou non)
Étant donné un système linéaire (S)

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccl} L_1 & : & a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots & : & \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\ L_i & : & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \vdots & : & \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\ L_n & : & a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

Les opérations suivantes transforment (S) en un système équivalent :

1. Échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$)
2. Modification de l'ordre des inconnues ***(attention à bien conserver leurs coefficients respectifs)***
3. Multiplication des deux membres d'une équation par un réel ***non-nul*** $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$
4. Ajout à une équation d'une homothétique d'une ***autre*** équation $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j)$

Ces opérations sont appelées ***transformations élémentaires***. Soit (S) un système linéaire de n équations linéaires à p inconnues, non trivial.
Théorème

1. Il existe un entier r vérifiant $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq r \leq p$, tel que, par une suite finie de transformations élémentaires, on obtienne un système équivalent à (S), de n équations linéaires à p

inconnues de la forme :

$$n \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccccc}
\alpha_1 x_1 & + & * \, x_2 & + & \dots & + & * \, x_r & + & * \, x_{r+1} & + & \dots & + & * \, x_p & = & \beta_1 \\
0 & + & \alpha_2 x_2 & + & \dots & + & * \, x_r & + & * \, x_{r+1} & + & \dots & + & * \, x_p & = & \beta_2 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & 0 & & & & \alpha_r x_r & + & * \, x_{r+1} & + & \dots & + & * \, x_p & = & \beta_r \\
0 & & 0 & & & & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & \beta_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & & 0 & & & & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & \beta_n
\end{array} \right.$$

avec $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \neq 0$. L'entier r est appelé le rang du système.

2. Si $r < n$ et s'il existe i_0 avec $r+1 \leq i_0 \leq n$ et $\beta_{i_0} \neq 0$ le système n'a pas de solution. Sinon il y a des solutions, on les obtient toutes en choisissant de façon arbitraires les $p-r$ inconnues $x_{r+1}, \dots, x_p$ et en calculant successivement dans cet ordre, $x_r, \dots, x_1$ grâce aux r premières équations.

En pratique : un exemple

$$\begin{array}{ccc|cc}
\boxed{1} & 2 & 2 & 2 & \\
1 & 3 & -2 & -1 & \\
3 & 5 & 8 & 8 & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 2 & \\
0 & \boxed{\text{-1}} & 4 & 3 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\
0 & 1 & -2 & -2 & L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 2 & \\
0 & -1 & 4 & 3 & \\
0 & 0 & 2 & 1 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \\
\hline
\end{array}$$

Arrivé à cette structure "triangulaire", on peut donner la solution facilement : L_3 : $\quad z = \dfrac{1}{2}$.
Connaissant z, L_2 : $\quad -y = 3 - \dfrac{4}{2} = -1$. Connaissant z et y, on trouve $x = 3$.
Et voici commet résoudre un système 2×3 :

$$\begin{array}{ccc|cc}
\boxed{3} & -6 & 9 & 36 & \\
-2 & 1 & -3 & 6 & \\
\hline
\boxed{1} & -2 & 3 & 12 & L_1 \leftarrow L_1/3 \\
-2 & 1 & -3 & 6 & \\
\hline
1 & -2 & 3 & 12 & \\
0 & -9 & 9 & 90 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\
\hline
1 & -2 & 3 & 12 & \\
0 & \boxed{1} & -1 & -10 & L_2 \leftarrow L_1/(-9) \\
\hline
\end{array}$$

La variable z (par exemple) peut être choisi librement. On a $y = z - 10$ et donc $x = 12 + 2(z - 10) - 3z = 12 - z$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit bien la structure des solutions de former une droite affine : point plus un multiple d'un vecteur directionnel.

MOSE 2014 : Feuille d'exercices numero 1.

Exercice 1 Résoudre

$$\begin{cases} 3x+5y &= 11 \\ 2x+3y &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+5y &= 10 \\ 2x+3y &= 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+12y &= 30 \\ 3x+3y &= 9 \end{cases}$$

Exercice 2 Un groupe de pirates fête ses dix ans d'existence avec quelques vikings de la région. Chaque pirate mange pendant la soirée 4 poulets et boit 5 litres de bière. Les vikings ne mangent que 3 poulets, mais boivent 7 litres de bière. En totalité, 65 poulets et 117 bières ont été consommés. Combien de pirates et de vikings étaient présents ?

Exercice 3 Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a en totalité 27 animaux, et 72 pattes d'animaux. Combien de lapins et combien de poulets sont dans la ferme ?

Exercice 4 La course de montagne dure 6h. A l'aller on monte à 3 km/h. Puis au retour on descend à 5 km/h. La course commence à 8h du matin. A quelle heure est on au sommet ?

Exercice 5 Discuter l'existence de solutions de

$$\begin{cases} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +y & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +y & = & 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +3y & = & 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x & +3y & = & 0 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +3y & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 6 Résoudre

$$\begin{cases} x & -2y & +z & = & 1 \\ 3x & -4y & +z & = & 5 \\ 2x & -3y & +4z & = & 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9x & +9y & +6z & = & 114 \\ 4x & & -7z & = & -91 \\ -x & & -2z & = & -26 \end{cases}$$

Exercice 7 Résoudre

$$\begin{cases} x & -3y & +2z & = & 8 \\ -x & +3y & -4z & = & -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x & +3y & +1 & = & 10 \\ 6x & +3y & +3 & = & 12 \end{cases}$$

Exercice 8 Résoudre le système $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-7y=5 \end{cases}$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ et si $\begin{cases} x-3y=a \\ 2x-7y=b \end{cases}$,
exprimer a et b en fonction de x et y.

Exercice 9 Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x-3y+2z=2 \\ 2x-5y+3z=5 \\ 3x-7y+5z=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=2 \\ 2x-5y+3z=5 \\ 3x-7y+4z=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=2 \\ 2x-5y+3z=5 \\ 3x-7y+4z=8 \end{cases}$$

Exercice 10* Résoudre en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -\lambda x & - & 2y & = & 0 \\ x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} & 9y & = & \lambda x \\ 4x & & = & \lambda y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} x & -(\lambda-1)y & = & 1 \\ (\lambda+2)x & +(2-\lambda)y & = & \lambda+3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & +y & -z & = & 3 \\ 2x & -3y & +2z & = & 3 \\ x & +4y & +\lambda z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} -\lambda x & +y & +z & = & 0 \\ x & -\lambda y & +z & = & 0 \\ x & +y & -\lambda z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 2\lambda \\ -x & +2y & +z & = & 4 \\ 4x & +y & -z & = & 2 \end{array}\right.$$

Séances 3,4 : matrices.

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls. On désigne par $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{R}$. On dit aussi matrice de type (n,p) ou encore matrice $n \times p$.
Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on écrit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et on représente A sous forme de tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où classiquement, le premier indice désigne le numéro de la ligne et le second celui de la colonne.
Cette représentation sous forme de tableau rectangulaire explique les définitions suivantes :
Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.

1. On appelle :
   - $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A, le vecteur $(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ de $\mathbb{R}^n$.
   - $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A, le vecteur $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,p})$ de $\mathbb{R}^p$.
2. Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée et on la note aussi : $\quad A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$
3. Si $p = 1$, on dit que A est une matrice (ou vecteur) colonne. On identifie une matrice colonne
   $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec l'élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$
4. Si $n = 1$, on dit que A est une matrice (ou un vecteur de) ligne.
5. Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est diagonale si $\forall (i,j),\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si A est de la forme

   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Cette matrice se note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. On appelle matrice scalaire une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux. La matrice scalaire $\mathrm{Diag}(1,1,\ldots,1)$ est appelé l'identité et notée I_n.

Opérations sur les matrices

Addition Si deux matrices A et B on les mêmes dimensions, on définit la matrice $A + B$ par

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,j}+b_{1,j} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,j}+b_{2,j} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & a_{i,2}+b_{i,2} & \cdots & a_{i,j}+b_{i,j} & \cdots & a_{i,p}+b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,j}+b_{n,j} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

élément neutre additif est la matrice dont tous les coefficients sont nuls ; elle se note 0.

Multiplication par un scalaire Pour une matrice A donné et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice λA par

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,j} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,j} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,j} & \cdots & \lambda a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,j} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Produit de matrices La multiplication de deux matrices est plus compliquée (la multiplication terme à terme $A \odot B = (a_{i,j}b_{i,j})$ n'a que très peu d'intérêt).
Nous avons déjà défini la multiplication d'une matrice à p colonnes par un vecteur à p lignes. On définit de même le produit de deux matrices. On ne pourra définir le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de taille (n,p) par une matrice $B = (b_{i,j})$ taille (q,r) que si $p = q$ et dans ce cas la matrice $AB = (c_{i,j})$ est de taille (n,r) et définie par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on ne peut pas calculer AB -taille $(2,3) \times (2,2)$, mais on peut calculer BA qui sera de taille $(2,2) \times (2,3) \to (2,3)$. On a

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \left[\begin{array}{ccc} 1\times 1 + 0 \times 4 & 1 \times 2 + 0 \times 5 & 1 \times 3 + 0 \times 6 \\ 2 \times 1 + 1 \times 4 & 2 \times 2 + 1 \times 5 & 2 \times 3 + 1 \times 6 \end{array}\right] \end{array}$$

d'où

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

On n'a pas changé la première ligne de B, et on a rajouté 2 fois la première ligne de B à la seconde...
Même si A et B sont toutes deux carrées –de taille (n,n)– dans ce cas AB et BA sont calculables, on peut avoir $AB \neq BA$, par exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la même façon qu'on résout l'équation $ax = b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, c'est à dire en posant $x = a^{-1}b$, on peut procéder de même pour résoudre $AX = B$, il faut remplacer la condition $a \neq 0$ par A inversible.

Définition 1.1. *Une matrice A de dimensions $n \times n$ est inversible s'il existe une matrice B vérifiant :*

$$AB = BA = I_n,$$

Une matrice B vérifiant la relation ci-dessus est nécessairement unique ; elle s'appelle inverse de A et se note A^{-1}.

Proposition : 1) Lorsque A est inversible, le système $AX = B$ se résout en $X = A^{-1}B$.
2) Une matrice A de dimension (n,n) est inversible si et seulement si elle vérifie :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \; AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

Matrices 2×2 Une matrice $A = (a_{i,j})$ est inversible si et seulement si son déterminant $\det A$ est non-nul. Dans ce cas,

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

On échange les éléments sur la diagonale et on multiplie la contre-diagonale par -1. Pour la preuve, calculons

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,2} \\ a_{2,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,2} & -a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2$$

Matrices 3×3

Pour des matrices 3×3, le plus simple est de faire une opération de pivot de Gauss. L'explication est le plus simple avec un exemple. Essayons d'inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On installe deux matrices A et I_n de la façon suivante et procède par la méthode de Gauss (uniquement des opérations de lignes ! ! !) pour obtenir I_n sur la gauche et une nouvelle matrice sur la droite. Cette nouvelle matrice est A^{-1}.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{5} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cccl}
5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -5 & 4 & 2 & 0 & -5 & L_3 \leftarrow 2L_1 - 5L_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cccl}
5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & \boxed{\text{-11}} & 2 & 5 & -5 & L_3 \leftarrow 5L_2 + L_3
\end{array}$$

à ce stade on voit que la diagonale est non-nulle, A est donc inversible. On continue à "nettoyer" sur la gauche :

$$\begin{array}{ccc|cccl}
55 & 0 & 0 & 15 & 10 & -10 & L_1 \leftarrow 11L_1 + 2L_3 \\
0 & 11 & 0 & -6 & -4 & 15 & L_2 \leftarrow 11L_2 - 3L_3 \\
0 & 0 & -11 & 2 & 5 & -5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cccl}
1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & L_1 \leftarrow L_1/55 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{15}{11} & L_2 \leftarrow L_2/11 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} &
\end{array}$$

et on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 15 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Il est très vivement de multiplier le résultat avec A pour vérifier s'il y a des erreurs de calcul !
Justification de la procédure : On cherche une (la !) matrice X qui satisfait $AX = I_n$. Les opérations de lignes (homothétie, permutation, addition) correspondent à une multiplication par la gauche de cette équation avec des matrices inversibles. Si on arrive après un certain nombre (disons k) d'étapes à la forme $I_n|B$ dans le schéma ci-dessus, on a trouvé des matrices inversibles de transformation $T_1 \dots T_k$ tels que $I_n = (T_k T_{k-1} \dots T_1)A$ et $T_k T_{k-1} \dots T_1 I_n = B$. Ainsi, $B = A^{-1}$.

MOSE 2014 : Feuille d'exercices numero 2.

Exercice 11 Écrire comme problème matriciel $Ax = b$ en précisant les dimensions de A, x, b.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+5y & = & 11 \\ 2x+3y & = & 7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 3x+5y+4z & = & 11 \\ 2x+3y-z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -9x & +9y & +6z & = & 114 \\ 4x & & -7z & = & -91 \\ -x & & -2z & = & -26 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +3y & = & 0 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +3y & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 12 Calculer $A+B$, $2A+C$ et $3A+B+C$ et pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Calculer AB, BA, AE, CA, AD, CD, DC lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que pensez-vous des produits AD, CA, et C^2 ?

Exercice 14 Parmi les matrices suivantes, quelles multiplications peut on effectuer, quelle est la taille des matrices obtenues, calculer ces matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 Calculer le carré et l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Chercher les matrices inverses de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution de

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +y & +z & = & 3 \\ -x & +y & +z & = & 6 \\ -x & -y & +2z & = & 9 \end{array}\right.$$

et calculer a, b en fonction de x, y lorsque

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+5y & = & a \\ x+2y & = & b \end{array}\right.$$

1.2 Séances 5,6 : Diagonalisation et ses applications.

1.2.1 Motivation.

Quand Leonardo da Pisa, “Fibonacci”, publia le *Liber Abaci* où il pose le problème *Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en dix ans si chaque couple engendre tous les ans un nouveau couple ?*. Des suites récursives (dont celle dite de Fibonacci) sont connues en Inde depuis presque 1500 ans. La suite est définie par la relation de récurrence

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \qquad \text{et} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

On observe que

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

ce qui permet de retrouver d'un coup f_n : il suffit de calculer A^n, et de l'appliquer au vecteur ${}^t(1,0)$. Mais comment trouver A^n ? Soit $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. En observant que ce sont les deux racines de $p(x) = x^2 - x - 1$, on a

$$\frac{\psi + 1}{\psi} = \psi \qquad \frac{\phi + 1}{\phi} = \phi$$

donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi + 1 \\ \psi \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi + 1 \\ \phi \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé deux vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui sont transformés par la matrice A sur une homothétie d'eux mêmes. Cette observation peut être exploitée : posons $P = \begin{pmatrix} \psi & \phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ On calcule facilement que $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\psi, \phi)$ ou bien $A = PDP^{-1}$. Pour déterminer A^n on a ainsi

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

et $D^n = \text{Diag}(\psi^n, \phi^n)$. En utilisant $f_n = A^n e_1$ on obtient ainsi la formule

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

1.2.2 Vecteurs propres et valeurs propres.

Définition 1.2. *On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de la matrice carré A de dimensions $n \times n$ s'il existe un élément $X \in \mathbb{R}^n$* **non nul** *tel que $AX = \lambda X$. X est appelé vecteur propre de A.*

Si on réécrit $AX = \lambda X$ comme $AX = \lambda \cdot I_n X$ ou bien $(A - \lambda I_n)X = 0$, on voit que les valeurs/vecteurs propres n'existent que si la matrice $A - \lambda I_n$ est non-inversible.
Pour des matrices 2×2 cela peut être exprimé par le déterminant, c'est à dire, λ est valeur propre à A si et seulement si

$$0 = \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{22} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$$

Le polynôme $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$ est donc appelé le *polynôme caracteristique* de A. Ses racines (il y a au moins une racine complexe!) sont forcément des valeur propres de A.

Exemple 1 : SI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caracteristique est $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ aet ses racines sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +3$. Les vecteurs propres associés se trouvent maintenant par le système linéaire $(A - \lambda_i I)X = 0$, pour $\lambda_1 = -1$ donc par

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = 0$$

et on voit que tout multiple (non-nul) de $(1, -1)$ est une solution. Pour $\lambda_2 = 3$ on a

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

avec tout multiple (non-nul) de $(1, 1)$ pour solution.

Exemple 2 : pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ on a le polynôme caracteristique $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ avec une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Le système linéaire $(A - 2I)X = 0$ donne

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0$$

qui admet tout multiple de $(1, 1)$ pour solution. Ceci ne donne pas un repère complet de $\mathbb{R}^2$, la matrice n'est donc pas diagonalisable.

1.2.3 Diagonalisation.

Certaines matrices A permettent, comme dans l'exemple de Fibonacci, de s'écrire de la forme

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale formé des valeurs propres et P est la matrice des vecteurs propres associés, appelée matrice de passage.

La raison est, que dans ces cas, les matrices P et P^{-1} effectuent un *changement de repère* :
Si la matrice A a pour valeurs propres λ et μ avec vecteurs propres $X_\lambda, X_\mu \in \mathbb{R}^2$ qui forment un repère de $\mathbb{R}^2$ on forme la matrice $P = [X_\lambda | X_\mu]$ par ces deux vecteurs colonnes. Avec la notation $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on a alors $Pe_1 = X_\lambda$ et $Pe_2 = X_\mu$. Ainsi, on a pour un quelconque $Y = (\eta_1, \eta_2) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ nécessairement $PY = \eta_1 X_\lambda + \eta_2 X_\mu$ et donc

$$APY = A(\eta_1 X_\lambda + \eta_2 X_\mu) = \eta_1 \lambda X_\lambda + \eta_2 \mu X_\mu$$

Puisque $Pe_1 = X_\lambda$ et $Pe_2 = X_\mu$, en appliquant P^{-1} sur les deux cotés,

$$e_1 = P^{-1} X_\lambda \quad \text{et} \quad e_2 = P^{-1} X_\mu$$

ce qui donne

$$P^{-1}APY = P^{-1}(\eta_1 \lambda X_\lambda + \eta_2 \mu X_\mu) = \eta_1 \lambda e_1 + \eta_2 \mu e_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \lambda \\ \eta_2 \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = DY$$

On a donc bien $P^{-1}AP = D$, ce qui donne, en multipliant par la gauche avec P et par la droite avec P^{-1} le résultat équivalent

$$PDP^{-1} = A$$

Proposition : *Pour des matrices 2×2 on a :*

1. *si on a deux valeurs propres différentes, la matrice est diagonalisable.*
2. *si on a deux valeurs propres identiques (double racine), la matrice est diagonalisable si et seulement si elle est de la forme λI_2 — dans ce cas elle est déjà diagonale et rien n'est à faire.*

Exemple d'application. On a un modèle qui donne deux équations récurrentes pour deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + y_n \end{cases}$$

On cherche une formule pour x_n et y_n en termes de x_0 et y_0. Avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer A^n on diagonalise A : par Exemple 1, on a les valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$ avec vecteurs propres $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associés. On forme la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule son inverse $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et obtient $A = TDT^{-1}$ donc

$$A^n = TD^nT^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$x_n = \tfrac{3^n+(-1)^n}{2}x_0 + \tfrac{3^n-(-1)^n}{2}y_0 \quad \text{et} \quad y_n = \tfrac{3^n-(-1)^n}{2}x_0 + \tfrac{3^n+(-1)^n}{2}y_0.$$

Matrices de Leslie.
Ce sont des matrices qui permettent d'ètudier l'évolution d'une population par tranche d'âges. Ce sont des matrices $n \times n$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

F_i est le taux de fécondité de la tranche d'âge i, $0 < P_i < 1$ est le taux de survie de la de la tranche d'âge i (qui passent donc à l'âge $i+1$). Si $X = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ est l'effectif de la population à l'instant 0, $X_n = A^n X_0$ est l'effectif de la population à l'instant n, et la somme des coefficients de X_n est l'effectif total de la population à l'instant n.

MOSE 2014 : Feuille d'exercices numero 3.

Exercice 17 a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Identifier les deux vecteurs colonne de cette matrice. Calculer P^{-1}.

c) Faire le produit PDP^{-1}, où $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis montrer que, pour tout $n \geq 2$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer explicitement A^n.

Exercice 19 On souhaite étudier l'évolution d'une population avec deux tranches d'âges (jeune et adulte).La matrice de Lesslie est

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 3 \\ 0,33 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle que f_1 (resp. f_2) est le taux de fécondité des individus jeunes (resp. adultes), et que p_1 est le taux de survie des individus jeunes qui passent à l'âge adulte.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b) Si l'effectif initial est $X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$, quelle est l'effectif de la population à l'instant n (c'est à dire après n générations).

c) Donner une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

d) Calculer A^n.

Exercice 20 Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 22 Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Fonctions en plusieurs variables

Séance 5,6 : Dérivation et intégration

2.0.4 Dérivés partielles d'une fonction de 2 ou 3 variables réelles.

On considère dans la suite une fonction f définie sur (une partie de) $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs réelles qui fait correspondre à tout $X = (x, y)$ (respectivement tout $X = (x, y, z) \in R^3$) un réel unique noté $f(X)$ ou $f(x, y)$ (respectivement $f(x, y, z)$).

– La *dérivée partielle de* f (ou encore *la dérivée partielle première de* f) par rapport à x (ou encore *par rapport à la première variable*) en (x_0, y_0) est la dérivée en x_0 de la fonction :

$$f\ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :

$$f_x(x_0, y_0) \overset{\text{notation}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} ,$$

– De même : La *dérivée partielle de* f (ou encore *la dérivée partielle première de* f) par rapport à y (ou encore *par rapport à la seconde variable*) en (x_0, y_0) est la dérivée en y_0 de la fonction :

$$f\ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :

$$f_y(x_0, y_0) \overset{\text{notation}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Insister qu'en pratique ceci revient à simplement traiter une (deux) variable(s) "comme paramètre fixés", et de dériver par rapport à la variable libre. Faire des exemples : polynômes, jouer avec les fonctions usuelles, produits, compositions.
Des dérivées partielles supérieures sont effectués de façon itérative. A priori, on pourrait avoir $(f_x)_y \neq (f_y)_x$. Mentionner que si f est suffisamment lisse (les dérivés partielles itérées sont toutes continues), l'ordre de dérivation est sans importance - ceci est le lemme de (Hermann Amandus) Schwarz.

Définition 2.1. *On appelle* **gradient** *de* f *en un point* (x_0, y_0) *le vecteur* $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$.

Si f est une fonction admettant 2 dérivés partielles en x en en y qui admet un extremum local en (x_0, y_0), alors les dérivées partielles $f_x(x_0, y_0)$ et $f_y(x_0, y_0)$ s'annuleront. On parle d'un *point critique*. Par contre il existe des points critiques non-provenants d'un extremum
Exemples : $f(x, y) = x^3$, tous les cas de $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^2$

Pour des fonctions suffisamment lisses, on a une formule de Taylor d'ordre 2, notemment

$$\begin{aligned} f(a+x, b+y) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot x + f_y(a,b)\cdot y \\ + \tfrac{1}{2}\left\{ f_{xx}(a,b)\cdot x^2 + 2 f_{xy}(a,b)\cdot xy + f_{yy}(a,b)\cdot y^2 \right\} + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Exemple d'utilisation : $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$. Les points critiques sont vites vus : $(1,0)$ et $(-1,0)$. On développe en $(1,0)$:

$$f(1+x, 0+y) = -2 + 3x^2 + y^2 + o(x^2+y^2) \quad \text{pour} \quad (x,y) \text{ petit}$$

puisque $3x^2 + y^2$ est posifif pour pout (x,y), il s'agit d'un minimum local. Pareil,

$$f(-1+x, 0+y) = 2 - 3x^2 + y^2 + o(x^2+y^2) \quad \text{pour} \quad (x,y) \;\; \text{petit}$$

mais ici, le terme $-3x^2 + y^2$ change signe dans tout voisinage de $(0,0)$, il s'agit donc d'un point selle.
Je vois qqc exos / exemples sur Taylor 2D plus importants que les deux applications suivantes. Mais chacun(e) comme il (elle) veut.

Exemple de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par $f(r,\theta) = (rcos(\theta), r\sin(\theta))$. La fonction f représente le changement de vaiables en coordonnées polaires. Si $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, le point $M(x,y)$ est à distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ de l'origine, et la demi-droite $[OM)$ fait un angle θ avec la demi droite $[Ox)$. L'image de $\{(r,\theta);\ r \in]0,+\infty[,\ \theta \in [0,2\pi[$ est $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, et à tout point de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ correspond un et un seul point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

2.0.5 Intégration de fonctions à plusieurs variables.

Les deux outils de calcul d'intégrales multiples sont le théorème de Fubini et le changement de variables en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.1 (Fubini allégé)**.** *Soit f une fonction continue de 2 (ou 3) variables réelles. Si $f(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ respectivement $f(x,y,z) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$ on a*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{[c,d]} \int_{[a,b]} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{[a,b]} \varphi_1(x)\, dx \int_{[c,d]} \varphi_2(y)\, dy$$

et la formule correspondante en trois variables.

Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ Si on note $x = r\cos(\varphi)$ et $y = r\sin(\varphi)$, l'image du rectangle $[r, r+dr] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$ est une portion de couronne.
L'aire d'un disque étant πr^2, on a une aire de

$$\frac{d\varphi}{2\pi} \times \pi((r+dr)^2 - r^2) = r\, dr\, d\varphi + (dr)^2 d\varphi$$

Par conséquent, en changeant en coordonnées (x,y) en (r,φ), la mesure de surface $dx\, dy$ est transformé en $r\, dr\, d\varphi$.
Exemple :

$$\int_{\{(x,y) \text{ tel que } x^2+y^2\le 1\}} e^{x^2+y^2}\, d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 re^{r^2}\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (e-1)\, d\varphi = 2\pi(e-1)$$

Application optionnelle(!) : le barycentre d'un corps

Le barycentre d'un corps C qui est une partie de volume fini $\mathbb{R}^2$ ou R^3 est donné par (x_0, y_0) où

$$x_0 = \frac{\int_C x\, d(x,y)}{\int_C\, d(x,y)} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\int_C y\, d(x,y)}{\int_C\, d(x,y)}$$

Exemple : si $C = [0,2] \times [-1,1]$, on a

$$x_0 = \frac{\int_{-1}^{1} \int_0^2 x \, dx \, dy}{\int_{-1}^{1} \int_0^2 \, dx \, dy} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\int_0^2 \overbrace{\int_{-1}^{1} y \, dy}^{=0} \, dx}{\int_{-1}^{1} \int_0^2 \, dx \, dy} = \frac{0}{4} = 0.$$

Le barycentre est donc $(1,0)$ ce qui correspond bien à l'intuition : c'est l'intersection des deux bissectrices ...

GRAPHES DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

FIGURE 1 – Graphe de $(x, y) \to x^2 + y^2$ avec un plan tangent et de $(x, y) \to x^2 - y^2$.

FIGURE 2 – Graphe de $(x, y) \to -x^2 - y^2$ et de $(x, y) \to x^3 + y^2$.

FIGURE 3 – Graphe de $(x, y) \to -x^4 + 2x^2 - y^2$ et de $(x, y) \to -x^3 + 3x^2 - y^2$.

MOSE 2014 : Feuille d'exercices numero 4.

Exercice 23 a) Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = e^{xy}$.
b) Déterminer le point critique de cette fonction et montrer que f n'a pas d'extremum en ce point (on calculera $f(t,t)$ et $f(t,-t)$).

Exercice 24 a) Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$.
b) Déterminer les points critiques A et B de cette fonction.
c) Faire un développement limité de f au voisinage de A et au voisinage de B.
d) Déterminer si f a un maximum, un minimum, ou un point selle en A et B.

Exercice 25
a) Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = 5x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 8y$.
b) Déterminer l'ensemble des points critiques de cette fonction.
c) Mêmes questions lorsque $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.
d) Mêmes questions lorsque $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$.

Exercice 26 Calculer

$$\iint_{[0,1]^2} x^2 e^{2y} dx\, dy \qquad \iint_{[0,1]^2} y e^{xy} dx\, dy \qquad \iint_{[0,1]^2} \sqrt{x+y}\, dx\, dy \qquad \iint_T e^{x^2}\, dx\, dy$$

où $T = \big\{(x,y);\, 0 \leq y \leq x \leq 1\big\}$.

Exercice 27 Le surface S d'une partie C de $\mathbb{R}^2$ est

$$S = \iint_C dx\ dy$$

Calculer S lorsque
a) $C = \big\{(x,y);\, 0 \leq y \leq 1 - x^2\big\}$, b) $C = \big\{(x,y);\, 0 \leq x \leq 1 - y^2\big\}$,
c) $C = \big\{(x,y);\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\big\}$ (faire le changement de variable $x = \cos(t)$),
d) $C = \big\{(x,y);\, 0 \leq y \leq \dfrac{1}{1+x^2}\big\}$.

Exercice 28 Le volume d'une partie C de $\mathbb{R}^3$ est

$$V = \iiint_C dx\, dy\, dz$$

Calculer V lorsque $C = \big\{(x,y,z);\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\big\}$.

Exercice 29 Le barycentre d'un corps C qui est une partie de volume fini $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est le point G de coordonnées (x_0, y_0), où

$$x_0 = \frac{\iint_C x\, dx\, dy}{\iint_C\ dx\, dy} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\iint_C y\, dx\, dy}{\iint_C\ dx\, dy}$$

a) Déterminer G lorsque $C = [0,2] \times [-1,1]$.
b) Déterminer G lorsque $C = \big\{(x,y);\, y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq 1\big\}$.

Exercice 30 Calculer $\displaystyle\iint_C xy\, dx\, dy$, où $C = \big\{(x,y);\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\big\}$.

Chapitre 3

Introduction aux équations différentielles

Séance 8, 9, 10 : Systèmes d'équations différentielles linéaires de 1er ordre.

x désigne une fonction d'une variable réelle notée t.
Définitions :
- On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre* n une relation liant une fonction dérivable n fois à ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n, de la forme :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = b(t) \tag{E}$$

- On appelle *solution* de (E) sur I une fonction x dérivable n fois sur I qui vérifie (E) sur I.
- On appelle *solution de l'équation homogène* (ou encore *solution de l'équation sans second membre*) (E_0) une solution de l'équation différentielle $x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t) = 0$
- Résoudre sur I l'équation différentielle (E) signifie chercher les solutions de E sur I.

Proposition : Si x_1 et x_2 sont solutions de (E_0) alors, pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ est solution de (E_0).

Principe de superposition des solutions : Toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation sans second membre associée.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Théorème 3.1. *L'ensemble des solutions de l'équation homogène $x'(t) = a(t)x(t)$ est l'ensemble des fonctions x de la forme : $x(t) = Ce^{A(t)}$, où A est une primitive de a.*

Une solution de l'équation $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation. Une solution particulière est soit évidente, soit obtenue par la méthode dite de la *variation de la constante*.
On suppose qu'il existe une solution particulière x_p sous la forme $c(t)x_h(t)$ où x_h est une solution homogène (non nulle). Alors, en dérivant $c(t)x_h(t)$ on retrouve

$$x_p'(t) = c'(t)x_h(t) + c(t)x_h'(t) = c'(t)x_h(t) + c(t)a(t)x_h(t)$$

puisque x_h est une solution homogène. Si x_p est une solution particulière,

$$x_p'(t) = a(t)x_p(t) + b(t) = a(t)\underbrace{c(t)x_h(t)}_{=x_p(t)} + b(t).$$

On devrait donc avoir égalité des deux expressions, c'est à dire

$$c'(t)x_h(t) + \cancel{c(t)a(t)x_h(t)} = \cancel{a(t)c(t)x_h(t)} + b(t)$$

ce qui donne une équation homogène pour la fonction inconnue $c(t)$:

$$c'(t)x_h(t) = b(t)$$

Si x_h est non-nul sur un intervalle, on cherche une primitive $c(t)$ de $c'(t) = \dfrac{b(t)}{x_h(t)}$. Elle est insérée dans la formule $x_p = c(t)x_h(t)$ et on a trouvé une solution particulière !
Faire un exemple : proposition $x' = tx + t$. On voit facilement $x_h(t) = et^2/2$. Finalement, $x_p(x) = e^{t^2/2} \int_0^t se^{-s^2/2}\, ds = -1 \ldots$ on aurait pu le voir tout de suite !

Raccourcis :

Si $b(t)$ est d'une forme particulière, il y a des raccourcis pour trouver une solution particulière. En effet, on a le tableau suivant

	$b(t)$ est de la forme	$x_p(t)$ est de la forme
	polynôme de degré n	polynôme de degré n $(n+1)$ coefficients à déterminer
Si e^{kt} **n'est pas** une solution homogène	ce^{kt}	Ae^{kt} avec A à déterminer
Si e^{kt} **est** une solution homogène	ce^{kt}	Ate^{kt} avec A à déterminer
	$a\sin(\omega t)$	$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ avec A, B à déterminer
	$b\cos(\omega t)$	$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ avec A, B à déterminer
	somme de termes ci-dessus	somme correspondante !

Faire des exemples ! Si on revient sur $x' = tx + t$: la solution particulière est forcément de la forme $x_p(t) = At + B$, donc $x_p'(t) = A$. On remplace ceci dans l'équa. diff :

$$A = t(At + B) + t = At^2 + (B + 1)t + 0 \times 1$$

d'où par comparaison des puissances : $A = 0$ et $B = -1$.
Astuce : si dans le cas des second membres de type exponentielle on tombe sur une équation du type $0 = 0$ qui ne permet pas de retrouver un coeff. il est très probable d'avoir ignoré que le second membre est une solution homogène ...

Le problème de Cauchy

Théorème 3.2 (Le problème de Cauchy)**.**

$$\begin{cases} x'(t) &= a(t)x(t) \quad \forall t \in I \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique : $x(t) = x_0 e^{A(t)}$ où A est la primitive de a qui s'annule en t_0, c'est-à-dire :

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

Faire un exemple concret, au mieux se baser sur le premier exemple de la var. de la constante :

$$\begin{cases} x' &= tx + t \\ x(0) &= 3 \end{cases}$$

On a déjà vu $x_h(t) = e^{t^2/2}$ et $x_p(t) = -1$. **La** solution est donc donné par

$$x(t) = -1 + ce^{t^2/2}$$

où la constante c est à déterminer : $x(0) = -1 + c \overset{!}{=} 3$ donc $c = 4$. Ainsi, $x(t) = 4e^{t^2/2} - 1$.

Systèmes d'équations différentielles à coefficients constants

Définitions : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in I$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, F une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^n$.

1. Chercher une fonction $X : I \mapsto \mathbb{R}^n$ n fois dérivable dans I telle que

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t) + F(t) \qquad (E)$$

   s'appelle *résoudre le système différentiel (à coefficients constants)* (E) *sur* I.

2. Soient t_0 un point de I et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Chercher les solutions X de (E) vérifiant

$$X(t_0) = X_0$$

   s'appelle *résoudre le problème de Cauchy.*

$$\begin{cases} X'(t) & = & AX(t) + F(t) & \forall t \in I \\ X(t_0) & = & X_0 & , \end{cases}$$

   au point t_0.
   La condition vectorielle $X(t_0) = X_0$ est appelée condition initiale.

Théorème de Cauchy pour les systèmes différentiels : Le problème de Cauchy précédent admet une et une seule solution $X \; : I \longmapsto \mathbb{R}$ définie sur I tout entier et deux fois dérivable sur I.

L'équation différentielle d'ordre 2 : $x'' + bx + cx = f(t)$ se ramène à un système différentiel : on pose $y = x'$ et on obtient

$$\begin{cases} x'(t) = & & & y(t) & \forall t \in I \\ y'(t) = & -cy(t) & - & by(t) + f(t) & , \end{cases}$$

ce qui donne, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}$ et $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$, le système $X'(t) = AX(t) + F(t)$.

Rappel : résolution de $ax'' + bx' + cx = 0$

Équation caractéristique : C'est l'équation du second degré : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Proposition : Les solutions de l'équation différentielle $ax'' + bx' + cx = 0$ se calculent à partir des racines de l'équation caractéristique :

1. Si elle a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, les solutions sont de la forme :
   $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ où α_1 et α_2 sont deux réels.
2. Si elle a une racine double λ, les solutions sont de la forme : $x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{\lambda t}$
3. Si elle a deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$, les solutions sont de la forme :
   $x(t) = (\alpha_1 \cos \mu t + \alpha_2 \sin \mu t)e^{\lambda t}$

(optionnel !) Résolution de $ax'' + bx' + cx = f$

Une solution de l'équation $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation.

On peut faire un tableau donnant la forme des solutions particulières lorsque le second membre est un polynôme, une exponentielle ou un polynôme trigonométrique.

Résolution de systèmes d'équations linéaires 2×2.

$$X' = AX$$

Si on trouve un changement de variables (en ecriture matricielle $X = PY$ avec P inversible), le problème s'écrit

$$PY' = APY \quad \text{ou bien} \quad Y' = (P^{-1}AP)\,Y.$$

Si P est tel que $P^{-1}AP = D$ est diagonale, on a découplé le problème en plusieurs problèmes de Cauchy simples. Dans ce cas, les vecteurs colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de A.

Exemple. L'équation différentielle $x'' + ax' + bx = 0$ se reécrit

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

Puisque A n'est pas un multiple de l'identité, A est diagonalisable ssi il y a deux vecteurs propores différents. Le polynôme $p(\lambda) = \det|A - \lambda I|$ est, quelle surprise, $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, c'est ce qu'on appellait déjà polynôme caracteristique dans le paragraphe précédent. ...

Exemple. On considère le système différentiel

$$X' = AX$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4 et les vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si $X = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Il existe donc des réels α, β tels que $y_1(t) = \alpha e^t$ et $y_2(t) = \beta e^{4t}$. On termine le calcul en utilisant la relation $X = PY$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{4t} \end{pmatrix}$$

D'où : $\begin{cases} x_1(t) = \alpha e^t + 2\beta e^{4t} \\ x_2(t) = -\alpha e^t + \beta e^{4t} \end{cases}$

MOSE 2014 : Feuille d'exercices numero 5.

Equations differentielles à coefficients constants.

Exercice 31 Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

$$y' + 5y = 0, \qquad y' + 5y = 10, \qquad \begin{cases} y' + 5y = 10 \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad y' + 5y = 4e^{-t}$$

Exercice 32 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
$y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$
$y' + y = xe^{-x} + 1$
$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$
$y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$
$y' = 3y + \sin(3x)$
$y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x)$

Exercice 33 Déterminer les solutions des équations différentielles

$$y'' - 3y' - 4y = 0, \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 34 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0,$

puis de $y'' - 2y' + 2y = 2\sin(2x) - 6\cos(2x)$

Exercice 35 a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Donner la solution générale $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ du système

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &+ 2y(t) \\ y'(t) &= x(t) &+ 2y(t) \end{cases}$$

Déterminer la solution de ce système qui vérifie $\begin{cases} x(0) &= 2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

Exercice 36 Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Identifier les deux vecteurs colonne de cette matrice. Calculer P^{-1}.

c) On considère l'équation différentielle (E) $y'' - y' - 6y = 0$ et on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A 2×2 telle que l'équation (E) soit équivalente au système $Y' = AY$.

d) Si $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, donner la solution de l'équation $Y' = AY$ vérifiant $Y(0) = Y_0$. En déduire la solution générale de $Y' = AY$, puis la solution générale de (E) $y'' - y' - 6y = 0$.

Exercice 37 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$y'' + 2y' - 3y = -t + 1$
$y'' + 2y' - 3y = e^t$
$y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t)$
$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$
$y'' - 3y' = 3 + t^2$
$y'' + y = t + \sin(t)$

Equations différentielles à coefficients variables.

Exercice 38 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$y'(x) = x\, y(x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\, y(x) \qquad y'(x) = x^2\, y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\, y(x) \qquad y'(x) = e^x y(x) \qquad y'(x) = \frac{x\, y(x)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'(x) = \log(x)\, y(x) \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)\, y(x)$$

Exercice 39 Déterminer les solutions (uniques !) des problèmes de l'exercice précédent à satisfaire

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = \pi \qquad y(1) = e$$

$$y(2) = 1 \qquad y(0) = e \qquad y(2) = 0$$

$$y(1) = 1 \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

Exercice 40 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$y'(x) = \frac{2}{x+1} y(x) \qquad y'(x) + \cos(x) y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

Exercice 41 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1} y(x) + (x+1)^2 \cos(x) \qquad y'(x) + \cos(x) y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy' + 3y = x^2$$

Exercice 42 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivantes

$$(1 + x^2)\, y'(x) - 2x\, y(x) = (1 + x^2)^2 \qquad y'(x) + 2x\, y(x) = 2xe^{-x^2} \qquad y'(x) = x^2(1 - y(x))$$

Problèmes concrets conduisant à des équations différentielles.

Exercice 43 On considère une population formé de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

1. Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.

   (a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\dfrac{N(t+h)-N(t)}{h} = kN(t)$ pour une certaine constante k. On suppose désormais que N est dérivable. Déduire que $N'(t) = kN(t)$.
   (b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
   (c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

2. Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale N^* et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).
   (a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Calculer N' en fonction de y et y'. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.
   (b) Remplacer N' et N par leurs expressions en fonctions de y' et y dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle

$$y' = r(1 - Ny).$$

   (c) Résoudre l'équation précédente.
   (d) En déduire que $N(t) = \dfrac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle K.
   (e) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 44 Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive.
(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant T et μ.
(b) Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans, que vaut approximativement μ ?
(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).
(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%

Exercice 45 Il existe des épidémies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (la tuberculose, par exemple). On considère deux groupes de personnes : des susceptibles $S(t)$ et des infectants $I(t)$. Si on suppose aucune phase latente (une phase latente est une période d'infection pendant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors $S(t) + I(t)$ est constant, d'où $S'(t)+I'(t) = 0$. Le changement des deux groupes est modélisé par une fonction f d'infection, on a donc $S' = -f(S, I)$ et par conséquent $I' = f(S, I)$. Il paraît logique d'avoir une proportionalité entre $f(S, I)$ et S et I d'où $f(S, I) = rSI$ avec un taux $r > 0$. La guérison se passe a un taux $a > 0$. On déduit comme modèle

$$\begin{cases} S'(t) &= -rS(t)\,I(t) + aI(t) \\ I'(t) &= rS(t)\,I(t) - aI(t) \end{cases}$$

avec des valeur initiales $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$.

1. On pose $N = S_0 + I_0$. Montrer que les fonctions u et v, définis par $u(t) = S(t/a)/N$ et $v(t) = I(t/a)/N$ satisfont

$$\begin{cases} u + v &\equiv 1 \\ u' &= -(Ru-1)v \\ v' &= (Ru-1)v \end{cases}$$

   avec des valeur initiales $u(0) = u_0 = S_0/N$ et $v(0) = v_0 = I_0/N$. Ici, $R = rN/a$ est en fait le nombre d'infections qu'un individu transmet pendant la phase d'infection en moyenne. Indication : dérivez les équations qui définissent u et v par rapport à t et utilisez les équations différentiels que satisfont S et I.

2. Montrer que v satisfait l'équation logistique $v' = ((R-1) - Rv)v, \qquad v(0) = v_0$.
3. Utiliser les techniques de l'exercice précédente pour trouver une solution à cette équation. Indication : on pose $v^* = 1 - \frac{1}{R}$. Démontrer que

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\exp((1-R)t)}$$

4. Discuter le comportement de la solution quand t tend vers infini en fonction de R.

Chapitre 4

Statistiques descriptives

Séance 11,12,13 : Statistiques descriptives, régression linéaire.

Échantillons.

La statistique est l'étude d'une **population** (constituée de personnes, d'animaux ou d'objets) de taille N en général très grand. Comme l'étude de tous les individus de la population est hors de portée, on fait l'étude sur un **échantillon** de la population, c'est à dire un sous ensemble de la population, de taille n. En général $1 << n << N$, et en pratique, et n est de l'ordre de 1000. Les éléments de l'échantillon sont appelés **unités statistiques**.

Variables.

Une variable est une caractéristique des éléments de la population à laquelle on s'interesse. La variable sera notée X et ses valeurs observées dans l'échantillon seront notées $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Les **variables quantitatives** expriment une quantité, elles sont **discrètes** (ex : nombre d'enfants de chaque individu de l'échantillon) ou **continues** (ex : poids, taille, âge). Les **variables qualitatives** expriment une qualité, (ex : couleur de peau, groupe sanguin). Les **variables binaires** ne prennent que deux valeurs (sexe, vivant/mort, etc...). On peut toujours coder un état par 1 et l'autre par 0.

Représentation des données.

Histogrammes de variables discrètes. Pour chaque valeur k (appelée état) de la variable X, on regarde l'effectif r_k des unités statistiques pour lequel $X = k$. $f_k = r_k/n$ est la fréquence des unités statistiques pour lequel $X = k$. L'histogramme est un diagramme, où, au dessus de chaque k, on dessine un rectangle de hauteur f_k. Exemple : nombre d'enfants par famille. Les données ont été récupérées dans un tableau :

0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	9	9	10																	

TAB. 1 – Nombre d'enfants par famille (variable X) observé dans un échantillon de 133 familles

On déduit facilement de ce tableau les effectifs r_k et les fréquences f_k de chaque état.

Nbre enfants/famille X_i	Répétitions r_i	Fréquences $f_i = \frac{r_i}{n}$ (en %)	Fréq. cumulées $c_i = \sum_j f_j$ (en %)
0	2	1.5	1.5
1	8	6.0	7.5
2	10	7.5	15.0
3	52	39.1	54.1
4	25	18.8	72.9
5	14	10.5	83.4
6	17	12.8	96.2
7	2	1.5	97.7
8	0	0	97.7
9	2	1.5	99.2
10	1	0.8	100.0
Total	$n = 133$	100	

TAB. 2 – Tableau recensé du nombre d'enfants par famille dans un échantillon de 133 familles

Ce qui donne l'histogramme suivant :

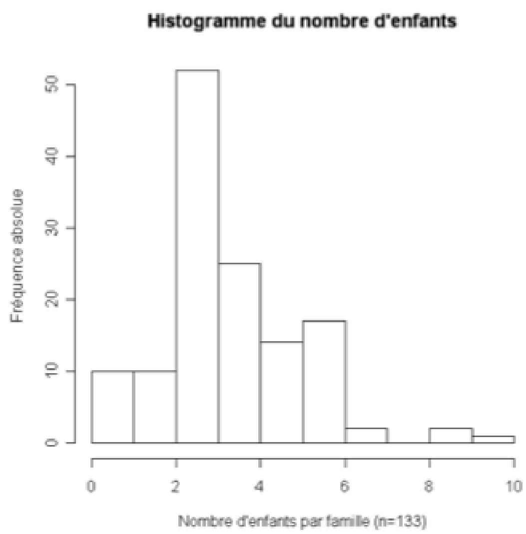


FIG. 1 – Histogramme des densités du nombre d'enfants par famille

Histogrammes de variables continues. Si X est à valeurs dans $[a, b]$, on divise $[a, b]$ en p sous intervalles (avec $p << n$) de longueur égale. Cela fournit une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ avec $a_i = a + i\dfrac{b-a}{p}$. au dessus de chaque sous intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ on dessine un rectangle de hauteur la fréquence f_k des unités statistiques tel que x_i appartient à ce sous-intervalle.

Exemple : Le tableau suivant donne les âges de 100 patients admis à l'hôptital.

10	22	24	42	37	77	89	85	28	63
9	10	7	51	2	1	52	7	48	54
32	29	2	15	46	48	39	6	72	14
36	69	40	61	12	21	54	53	58	32
27	33	1	25	22	6	81	11	56	5
63	53	88	48	52	87	71	51	52	33
46	33	85	22	5	87	28	2	85	61
16	42	69	7	10	53	33	3	85	8
51	60	58	9	14	74	24	87	7	81
30	76	7	6	27	18	17	53	70	49

TAB. 3 – Age à l'admission à l'hôpital (variable X) pour un échantillon de 100 patients

On a bien affaire à une variable continue, les âges pouvant prendre toutes les valeurs positives non entières. Nous allons faire un second tableau par **classes** d'âge : de 1 à 10 ans, de 11 à 20 ans ...

Classes d'âges (en années)	Centres C_i	Répétitions r_i	Fréquences f_i (en %)	Fréq. cumulées c_i (en %)
0-10	5	22	22	22
10-20	15	8	8	30
20-30	25	13	13	43
30-40	35	10	10	53
40-50	45	8	8	61
50-60	55	16	16	77
60-70	65	7	7	84
70-80	75	5	5	89
80-90	85	11	11	100
Total		$n = 100$	100	

TAB. 4 – Tableau de classes de l'âge à l'admission à l'hôpital chez 100 patients

On obtient ainsi l'histogramme suivant :

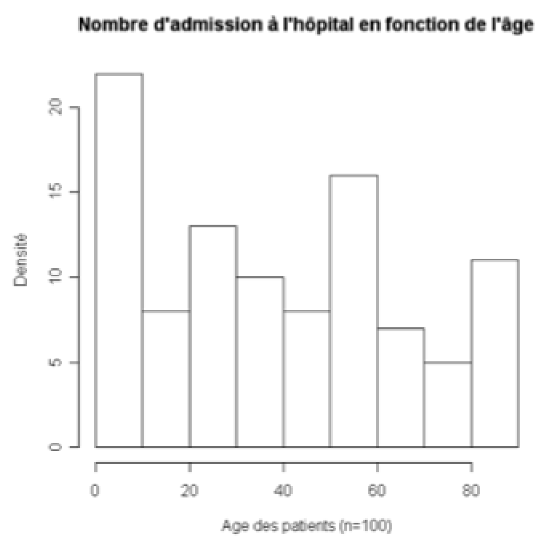


FIG. 3 – Histogramme des densités des âges d'admission à l'hôpital

Diagrammes des fréquences cumulées.
Cas d'une variable discrète : pour chaque valeur k de la variable X, on regarde l'effectif r_k des unités statistiques pour lequel $X = k$. Le diagramme des fréquences cumulées est un diagramme,

où, au dessus de chaque k, on dessine un rectangle de hauteur $c_k = \sum_{i \leq k} f_i$. Sur l'exemple du nombre d'enfants par familles, le diagramme des fréquences cumulées est le suivant :

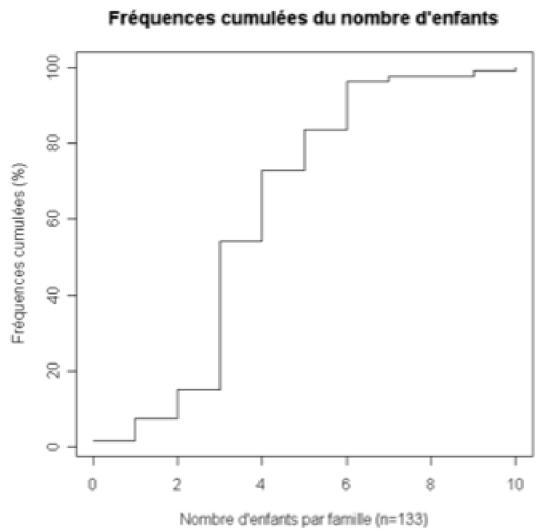


FIG. 2 – Diagramme des fréquences cumulées

Cas d'une variable continue : Comme dans le cas des variables discrètes, on notera $c_k = \sum_{i \leq k} f_i$ la fréquence cumlée (c'est à dire la fréquence des unités statistiques appartenant aux k premières classes). On fera ici plutôt un diagramme cumulatif approché où on tracera la fonction continue affine par morceaux obtenue en joignant les points de coordonnées (a_k, c_k). Les valeurs de cette fonction sont appelées densités cumulées empiriques.

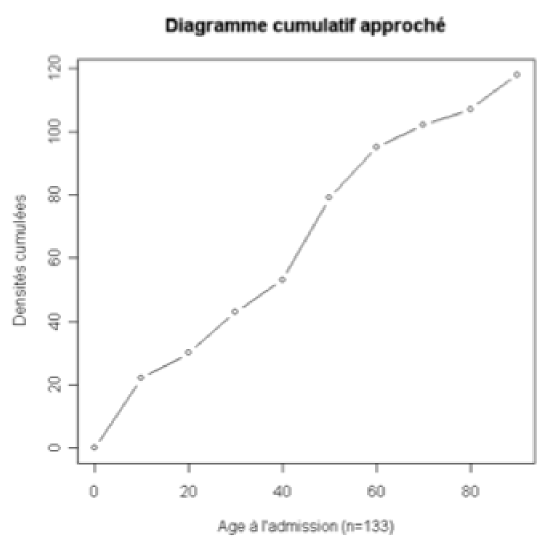


FIG. 4 – Diagramme cumulatif approché

4.0.6 Moyenne empirique, variance empirique.

Lorsque X est une variable quantitative, prenant les valeurs $x_1, \cdots, x_n$, la **moyenne empirique**, notée m ou $\overline{x}$, est définie par

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

La **variance empirique** est définie par

$$Var(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Le fait qu'on ait au dénominateur $n-1$ au lieu de n prvient du fait qu'on a n variables observées $x_1, \cdots, x_n$ on a donc n degrés de liberté), mais $\overline{x}$ est une combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_n$, on perd donc un degré de liberté. On peut aussi choisir $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ comme estimateur de la variance empirique, les deux quantités sont très proches.

Proposition :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Pour la démonstration, il suffit de développer.

Lorsqu'on connait la moyenne m de l'ensemble de la popolation (et pas seulement la moyenne de l'échantillon), on a un estimateur plus précis de la variance :

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

L'**écart type** est défini par

$$\sigma_X = \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

L'écart type mesure l'écart moyen entre les valeurs de la variable X et sa moyenne.

Autres paramètres liés à une variable aléatoire quantitative.

Soit X une variable quantitative. La **médiane** M_X de X est la valeur pour laquelle la moitié des valeurs observées sont en dessus et la moitié des valeurs observées sont en dessous. Plus précisément, si $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ **ordonnées par ordre croissant**,

$$M_X = x_{\frac{n+1}{2}} \text{ si } n \text{ est impair}$$

et

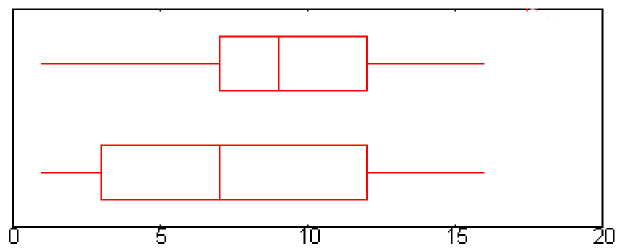
$$M_X = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \text{ si } n \text{ est pair}$$

Remarque : Si M_X est proche de m_X, c'est un indicateur de symétrie de la répartition des données. Si $m_X << M_X$, c'est un signe d'une distribution dissymétrique à droite. Si $m_X >> M_X$, c'est un signe d'une distribution dissym
'etrique à gauche.

Le quantile α est la valeur P_α qui laisse un pourcentage α des observations en dessous et un pourcentage $(1-\alpha)$ des observations au dessus d'elle. Les deux "quartiles" les plus importants sont P_{25} (qui laisse 25 pour cent des observations en dessous) et P_{75}. P_{50} est la médiane. La moitié des valeurs observées sont dans l'intervalle interquantile $[P_{25}, P_{75}]$, un quart au dessus, un quart en dessous.

L'**étendue** de X est l'intervalle $[x_1, x_n]$. A noter qu'il peut y avoir dans l'échantillon quelques valeurs aberrantes qu'on peut être amenés à ne pas prendre en compte.

Les paramètres ci-dessus (médiane, étendue, intervalle interquantile) peuvent être résumés dans un **boîte à moustache**. Il s'agit de tracer un rectangle allant du premier quartile au troisième quartile et coupé par la médiane. Ce rectangle suffit pour le diagramme en boîte. On ajoute alors des segments aux extrémités menant jusqu'aux valeurs extrêmes, ou jusqu'aux premier et neuvième déciles si on souhaite supprimer les valeurs extr êmes pouvant être aberrantes. Voici un exemple de deux boîtes à moustache, correspondant à deux variables X et Y sur un échantillon donné, permettant de comparer la répartition des deux variables X et Y.



Les paramètres de forme.
Soit X une variable quantitative, et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les valeurs observées de X. On note

$$z_i = \frac{x_i - m_X}{\sigma_X}$$

les valeurs centrées réduites correspondantes. Si Z est la variable $\dfrac{X - \overline{x}}{\sigma_X}$, alors $(z_1, \cdots, z_n)$ est un échantillon de la variable Z, $m_Z = 0$ et $\sigma_Z = 1$.

Le **coefficient de symétrie** est défini par :

$$g_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^3}{n}$$

- Si g_3 est proche de 0, c'est un indicateur de symétrie.
- Si $g_3 >> 0$, c'est un signe d'une distribution dissymétrique à droite.
- Si $g_3 << 0$, c'est un signe d'une distribution dissymétrique à gauche.

Le **coefficient d'applatissement** est défini par :

$$g_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^4}{n} - 3$$

- Si g_4 est proche de 0, c'est unsigne de distribution "standart".
- Si $g_4 >> 0$, c'est un signe d'une distribution plus pointue.
- Si $g_4 << 0$, c'est un signe d'une distribution plus plate.

Couples de variables aléatoires.

Dans le cas où on a deux variables$X$ et Y, associées à un même échantillon, la **covariance empirique** est définie par

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Si $Cov(X,Y) > 0$, les variables X et Y varient dans le même sens, si $Cov(X,Y) > 0$, les variables X et Y varient en sens contraire. Pour simplifier les calculs, nous allons travailler avec

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \quad \text{et} \quad C(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}$$

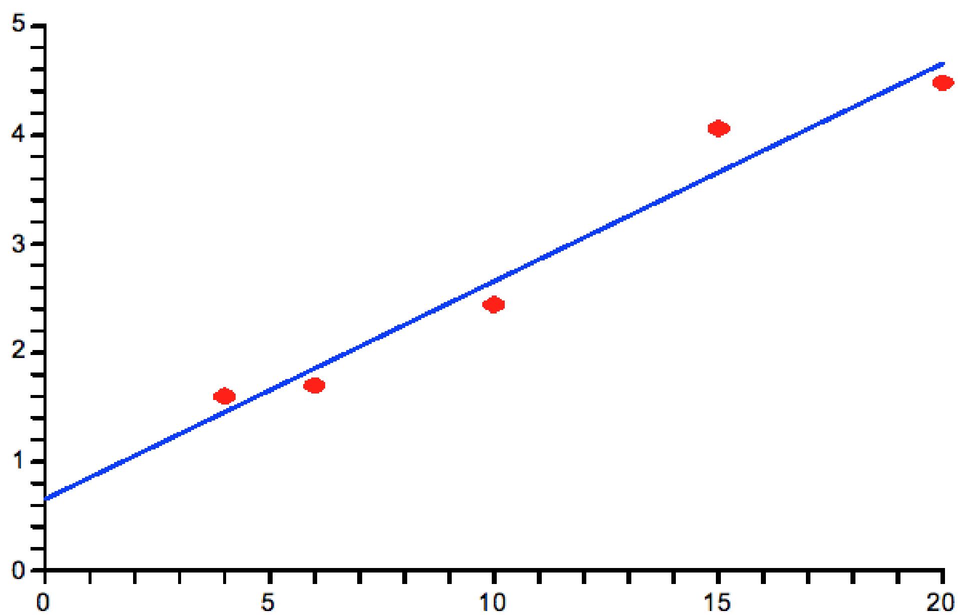
On définit le **coefficient de corrélation** par

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

(ici, $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ et $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$). On a toujours $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$. Si $\rho(X,Y) > 0$, X et Y sont corrélées de même sens, si $\rho(X,Y) < 0$, X et Y sont corrélées de sens contraire. Lorsque $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, on dit que les variables X et Y sont fortement corrélées, lorsque $|\rho(X,Y)|$ est proche de 0, on dit que X et Y ne sont pas corrélées.

Représentation graphique.

On peut représenter les points (x_i, y_i) dans le plan (X en abscisse, Y en ordonnée), on obtient ainsi un **nuage de points**, et on peut rechercher une droite qui approche au mieux ce nuage de points. La **droite de régression empirique de** Y **en** X, d'équation $y = ax + b$ qui permet d'expliquer au mieux Y (variable expliquée) en fonction de X (variable explicative) (intuitivement, c'est la droite qui approche le mieux le nuage de points).



Pour déterminer a et b, on minimise la fonction de deux variables

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Calculons

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - ax_i - b)$$

et

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 2n(\overline{y} - a\overline{x} - b)$$

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0$ nous donne $b = \overline{y} - a\overline{x}$. $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0$ nous donne $a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i$. En remplaçant b par sa valeur et en divisant par n,

$$V(X)a = C(X,Y)$$

d'où $a = \dfrac{C(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{y} - \dfrac{C(X,Y)}{V(X)}\overline{x}$. L'équation de la droite de régression de Y en X est $y = \dfrac{C(X,Y)}{V(X)}x + \overline{y} - \dfrac{C(X,Y)}{V(X)}\overline{x}$, ce qui se re-écrit, en multipliant par $\sqrt{\dfrac{V(X)}{V(Y)}} = \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$,

$$\textbf{Equation de la droite de régression empirique} \qquad \frac{y-\overline{y}}{\sigma_Y} = \rho(X,Y)\frac{x-\overline{x}}{\sigma_X}$$

A quoi sert la droite de régression empirique ? Si on a une valeur x de la variable X, on peut en déduire la valeur y de la variable Y. Par exemple, si X est la taille d'un individu et Y est son poids, si $x_1, \cdots, x_n$ sont les valeurs observées de tailles et $y_1, \cdots, y_n$ sont les valeurs observées des poids (correspondant au même échantillon !), on peut alors en déduire, pour une taille x donnée, le poids moyen correspondant y.

Séance 14 : Révision