Mathématiques et Représentation des Phénomènes Physiques

Partie Mathématiques

Cours et exercices

Code UE : Q1 MI2M21

L'équipe enseignante

Table des matières

1 Dérivées (Révision) **6**
A - Dérivée en un point . . . 6
B - Opérations sur les dérivées . . . 7
C - Dérivées des fonctions usuelles . . . 8
D - Dérivées successives . . . 9
E - Exercices . . . 10
F - Solution de l'exercice D - . . . 11

2 Extrema - Accroissements finis - Formules de taylor **12**
A - Révision : Fonctions continues sur un intervalle . . . 12
B - Le théorème des accroissements finis . . . 12
C - Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones. . . . 14
D - Les formules de Taylor . . . 14
E - Exercices . . . 17
E - 1 Exercice corrigé . . . 17
E - 2 Théorème des accroissements finis . . . 17
E - 3 Formules de Taylor . . . 18
E - 4 Solution des exercices . . . 19

3 Développements limités **20**
A - Notion de développement limité . . . 20
B - Propriétés . . . 20
C - Développements limités des fonctions usuelles en 0. . . . 22
D - Opérations sur les développements limités . . . 22
E - Exercices . . . 24
E - 1 Exercices corrigés . . . 24
E - 2 Calcul de développements limités . . . 24
E - 3 Applications . . . 25
E - 4 Exercices avec des équations différentielles . . . 26
E - 5 Solutions des exercices . . . 27

4 Fonctions vectorielles **28**
A - L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ . . . 28
A - 1 Espace vectoriel . . . 28
A - 2 Bases . . . 28
A - 3 Norme, Produit scalaire, Produit vectoriel . . . 29
A - 4 Plan et repère . . . 29
B - Fonctions vectorielles . . . 29
B - 1 Définitions . . . 29
B - 2 Définitions équivalentes . . . 30
C - La formule de Taylor-Young. . . . 31
D - Exercices . . . 32
D - 1 Solution de l'exercice . . . 33

5 Arcs plans paramétrés **34**
A - Arcs plans paramétrés . . . 34
B - Paramétrage de courbes usuelles . . . 34
C - Etude locale en un point . . . 34
D - Etude des branches infinies . . . 36
E - Plan d'étude d'un arc paramétré . . . 37
E - 1 Intervalle d'étude . . . 37
E - 2 Etude des fonctions coordonnées . . . 38

E - 3 Etude de la courbe C. . . . 38
F - Exemple 39
G - Exercices 40

6 Notions sur les formes différentielles de degré 1 **42**
A - Révision : Dérivées partielles 42
A - 1 Dérivées partielles premières 42
A - 2 Dérivées partielles d'ordre supérieur 43
B - Formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ 44
C - Formes différentielles de degré 1 44
D - Intégrale curviligne d'une forme différentielle 45
E - Circulation d'un champ de vecteurs 46
F - Exercices 47
F - 1 Formes différentielles de degré 1 47
F - 2 Intégrales curvilignes 47

7 Formulaires **50**

8 Annales **52**
A - Juin 2013 - sujet corrigé 52
B - Mars 2008 53
C - Juin 2008 54
D - Deuxième session 2008 55
E - Juin 2009 56
F - Juin 2009 57
G - Mars 2012 58
H - Juin 2012 59
I - Correction du DS de juin 2013 60

1 Dérivées (Révision)

A - Dérivée en un point

Dans ce paragraphe $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une application d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et a est un point de $\mathcal{D}$ tel qu'il existe un intervalle I non réduit au point a avec $a \in I \subset \mathcal{D}$.

Définition 1.1. On dit que f est dérivable en a si la fonction τ_a définie sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ par $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée *dérivée* de f en a.

Remarque. Il est équivalent de dire que la fonction Δ définie sur $\{h \mid h \neq 0, (a+h) \in \mathcal{D}\}$ par $\Delta(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Interprétation graphique

Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan. Si f est dérivable en a alors C admet une tangente en a d'équation $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

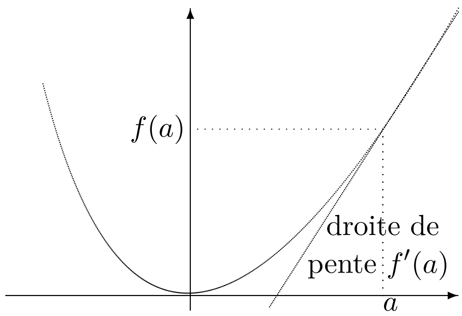


FIGURE 1.1 – Représentation graphique d'une dérivée

Propriété 1.2. *f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D$:*

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad avec \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Ou, de façon équivalente, il existe une fonction ε_1 telle que pour tout $(a + h) \in \mathcal{D}$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \quad avec \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

Cette écriture est appelée développement limité à l'ordre 1 de f en a.

Cette formule s'interprète de la façon suivante, si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors autour de a, f s'approche par une fonction affine

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + reste$$

On peut utiliser cette formule pour calculer des valeurs approchées de f. Par exemple si f est la fonction “racine carrée” $f(a) = \sqrt{a}$ alors, pour $a > 0$, $f'(a) = 1/2\sqrt{a}$. En particulier, pour $a = 1$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1/2$ donc

$$\sqrt{1 + h} = 1 + \frac{h}{2} + reste \simeq 1 + \frac{h}{2}.$$

Par exemple $\sqrt{1.1} = \sqrt{1 + 0.1} \simeq 1 + 0.1/2 = 1.05$ ce qui fait une erreur < 0.002.

Propriété 1.3. *Une fonction numérique dérivable en a est continue en a.*

La réciproque de cette proposition est fausse.

Définition 1.4.

1. f est dérivable à droite en a si $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et appelée dérivée de f à droite en a.
2. f est dérivable à gauche en a si $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et appelée dérivée de f à gauche en a.
3. La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
4. La fonction f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a,b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b

Exemple. $x \to |x|$ est dérivable sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

B - Opérations sur les dérivées

Propriété 1.5.

1. *Si f et g sont dérivables en x_0 alors $f+g$ est dérivable en x_0 et :*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *Si f et g sont dérivables en x_0 alors fg est dérivable en x_0 et :*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
3. *Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et :*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$
4. *Si f et g sont dérivables en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
5. *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

En utilisant les développements limités, ces formules sont faciles à établir, du moins si on abandonne un peu de rigueur mathématique :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + reste \quad \text{et} \quad g(x_0+h) = g(x_0) + hg'(x_0) + reste$$

donc, en additionnant les deux :

$$\begin{aligned}(f+g)(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + reste + g(x_0) + hg'(x_0) + reste \\ &= f(x_0) + g(x_0) + h(f'(x_0) + g'(x_0)) + reste\end{aligned}$$

en utilisant le fait que la somme de deux restes est un reste. On a donc écrit le développement limité à l'ordre 1 de $f+g$, le coefficient de h est, par définition, la dérivée de $f+g$ en x_0 : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

En faisant le produit des deux développements limités :

$$\begin{aligned}(f \times g)(x_0+h) &= f(x_0+h) \times g(x_0+h) = (f(x_0) + hf'(x_0) + reste)(g(x_0) + hg'(x_0) + reste) \\ &= f(x_0)g(x_0) + h(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)) + h^2 f'(x_0)g'(x_0) + reste\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait qu'un reste fois une fonction bornée – $f(x_0+h)$ ou $g(x_0+h)$– est un reste et que la somme de ces deux restes est un reste. Il suffit d'écrire

$$h^2 f'(x_0)g'(x_0) = h\,\underbrace{h f'(x_0)g'(x_0)}_{\to 0} = h\varepsilon(h)$$

pour voir qu ce terme aussi est un reste.

Théorème 1.6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue, strictement monotone, dérivable en x_0 et telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors l'application réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{1.1}$$

Cette dernière formule est facile à retrouver : par définition, $f^{-1} \circ f(x) = x$. On dérive la fonction $x \to f^{-1} \circ f(x)$. En utilisant la propriété 5, on trouve $\left(f^{-1}\right)'(f(x))\,f'(x)$ alors qu'en utilisant le fait que c'est la fonction $x \to x$, on trouve 1. Par suite, $\left(f^{-1}\right)'(f(x))\,f'(x) = 1$ qui conduit directement à (1.1).

C - Dérivées des fonctions usuelles

Fonctions	*Dérivées*	*Intervalles*
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ *si* $n \geqslant 0$; $\mathbb{R}^*$ *sinon*
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[,\ ]-\infty, 0[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arcsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arccosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{Arctanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$

D - Dérivées successives

Définition 1.7. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une application.

1. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}$ on appelle fonction dérivée (d'ordre 1) de f sur $\mathcal{D}$ l'application, notée f', définie sur $\mathcal{D}$ par
$$\begin{aligned} f' : \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la dérivée d'ordre $n+1$ de f sur $\mathcal{D}$, que l'on note $f^{(n+1)}$, comme la dérivée, si elle existe, de $f^{(n)}$ sur D : $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$. Par convention $f^{(0)} = f$.
3. Si f admet une dérivée d'ordre n continue sur $\mathcal{D}$, ont dit que f est de classe C ^{n} sur $\mathcal{D}$. Si f admet une dérivée à tous les ordres sur $\mathcal{D}$ on dit que f est de classe C $^\infty$ sur $\mathcal{D}$. On écrit $f \in C^n(\mathcal{D})$ (respectivement $f \in C^\infty(\mathcal{D})$).

Remarque : f est de classe C^0 signifie que f est continue , f est de classe C^1 signifie que f est dérivable et f' est continue.

$f : x \to x \cos x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f : x \to x|x|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Propriété 1.8. (Règle de Leibniz)

Si f et g sont deux fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f et g admettent une dérivée d'ordre n en x_0, alors la fonction $f \times g$ admet une dérivée d'ordre n en x_0 et

$$(f\,g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

Cette formule est à rapprocher de celle du binôme de Newton :

$$(a+b)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Rappelons que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ se calcule à l'aide du triangle de Pascal (cette formule étant inutilisable dès que n est grand). On a,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \dots$$

On retrouve en particulier $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

E - Exercices

$\boxed{1}$ **Exercice corrigé (page suivante)**

1. Calculer la dérivée de $x \to f(x) = |x| \sin x$.
2. Calculer la dérivée de $x \to \varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.
3. Calculez les dérivées n-ième de $\varphi(x) = x^2 e^x$

$\boxed{2}$ **Calcul de dérivée**

1. Soient n, p deux entiers. Calculer la dérivée de $f(x) = \sin^n x \,.\, \cos^p x$

2. Calculer la dérivée de $x \to f(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$.

3. En appliquant le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, montrer que pour tout réel x, $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Que peut-on en conclure.

$\boxed{3}$ **Calcul de dérivées successives**

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer la dérivée d'ordre k de $f : x \to x^n$.

2. Déterminer la dérivée d'ordre n de $f : x \to e^{2x}$

3. Déterminer la dérivée d'ordre n de $f : x \to \dfrac{1}{1 + x}$ et de $f : x \to \dfrac{1}{1 - x}$

4. Déterminer la dérivée d'ordre n de $f : x \to \ln(1 + x)$.

5. Montrer que la dérivée d'ordre n de $x \to \sin x$ est $x \to \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

$\boxed{4}$ **Formule de Leibniz**

1. Calculer la dérivée d'ordre $n \geqslant 3$ de $f : x \to x^3 \sin x$.

2. Calculer la dérivée d'ordre $n \geqslant 2$ de $f : x \to (x^2 + 1)e^{2x}$.

3. On note P un polynôme. Calculer $\Big(P(x)e^{2x}\Big)^{(4)}$.

F - Solution de l'exercice D -

1) On remarque que $f(x) = \begin{cases} x\sin x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x\sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Ainsi, pour $x > 0$ et pour $x < 0$, il suffit d'utiliser la formule de dérivation du produit, $f'(x) = \begin{cases} \sin x - x\cos x & \text{si } x > 0 \\ -\sin x + x\cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Pour $x = 0$, il faut revenir à la définition :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ -\sin x & \text{si } x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \to 0^+ \\ 0 & \text{si } x \to 0^- \end{cases}.$$

La limite à droite et à gauche en 0 existent et coïncident, donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En résumé

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x - x\cos x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\sin x + x\cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On peut remarquer que f' est continue, donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) $\varphi = f \circ g$ avec $f(t) = \ln(1 + t)$ et $g(x) = e^x$. Donc $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et $g'(x) = e^x$ et enfin $\varphi'(x) = f'(g(x))g'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

3) $\varphi = f \times g$ avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^{-x}$.

— $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geqslant 3$.

— On note que $g'(x) = -e^{-x}$ et $g''(x) = e^{-x} = g(x)$ donc $g^{(2p)}(x) = g(x) = e^{-x}$ et $g^{(2p+1)}(x) = -g(x) = -e^{-x}$ et ainsi $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient donc

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)(-1)^{n-k} g^{(n-k)}(x) \qquad \text{puisque } f^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geqslant 3 \\ &= \binom{n}{0} x^2 (-1)^n e^{-x} + \binom{n}{1} 2x(-1)^{n-1} e^{-x} + \binom{n}{2} 2(-1)^{n-2} e^{-x} \\ &= (-1)^n \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right) e^{-x}. \end{aligned}$$

2 Extrema - Accroissements finis - Formules de taylor

La notation $[a, b]$ *sous-entend* $a < b$.
Dans les exemples de ce chapitre nous considérerons $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *qui appartient à* $C^{\infty}(]-1, +\infty[)$.

A - Révision : Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* x_1, x_2 *deux éléments de* I*. Alors pour tout réel* y *compris entre* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$ *il existe un réel* x_0 *compris entre* x_1 *et* x_2 *tel que* $f(x_0) = y$.

Note que y n'est pas nécessairement unique.

Corollaire 2.2. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 2.3 (Image d'un segment)**.** *L'image d'un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$ *(segment) par une application continue est un intervalle fermé borné.*

Corollaire 2.4. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$*. Alors il existe deux réels* m, M *tels que* $f([a, b]) = [m, M]$.

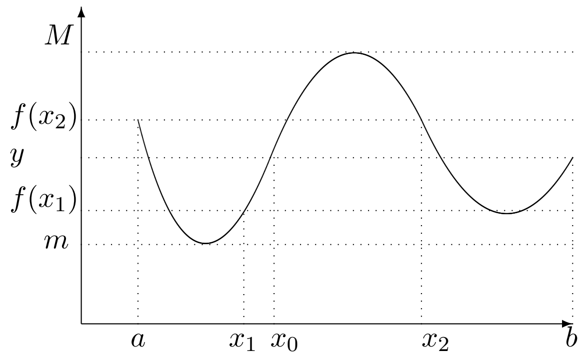


FIGURE 2.1 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires et du corollaire 2.4

Théorème 2.5. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement monotone sur l'intervalle* I.

1. f *réalise une bijection de* I *sur* $J = f(I)$ *et sa bijection réciproque,* $f^{-1} : J \to I$ *a le même sens de monotonie que celui de* f*. Dans un repère orthonormé du plan, les représentations graphiques de* f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*
2. *Si de plus* f *est continue sur* I *alors* J *est un intervalle dont les bornes sont les limites de* f *aux bornes de* I *et* f^{-1} *est continue sur* J.

B - Le théorème des accroissements finis

Définition 2.6. SSoit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\, I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. On dit que f a un *maximum local* en x_0 s'il existe un intevalle *ouvert* J contenant x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

2. On dit que f a un *maximum global* en x_0 si, pour tout $x \in I \cap J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
3. On dit que f a un *minimum local* en x_0 s'il existe un intevalle *ouvert* J contenant x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
4. On dit que f a un *minimum global* en x_0 si, pour tout $x \in I \cap J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
5. On dit que f a un extremum local (resp. global) en x_0 si f a un maximum ou un minimum local (resp. global) en x_0.

Le corollaire 2.4 montre qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son maximum global M et son minimum global : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, il existe x_m et x_M dans $[a,b]$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)$.

Théorème 2.7 (Théorème de Fermat)**.** *Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle* ouvert *I. Si f admet en $t_0 \in I$ un extremum relatif alors $f'(t_0) = 0$.*

Rappelons que $f'(t_0) = 0$ signifie que le graphe de f a une tangeante horizontale au point $(t_0, f(t_0))$. Ce théorème se comprend bien graphiquement : si la tangeante n'est pas horizontale, alors le graphe suit une pente autour de t_0 et f prend donc des valeurs inférieures et supérieures à $f(t_0)$ autour de t_0. (Faire un dessin).

Un point t_0 tel que $f'(t_0) = 0$ est appelé un *point critique* de f. Un point critique n'est pas forcément un extremum. Par exemple, si $f(t) = t^3$ alors $f'(t) = 3t^2$ donc $f'(0) = 0$. Mais f n'a pas d'extremum local en 0 puisque $f(t) < 0$ si $t < 0$ et $f(t) > 0$ si $t > 0$. L'hypothèse que l'intervalle est ouvert est elle aussi cruciale. Par exemple, si on considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^3$ alors f atteint son maximum (global) en 1 et son minimum (global) en -1.

Théorème 2.8 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$ et f présente un extremum en c.*

En général c n'est pas unique.

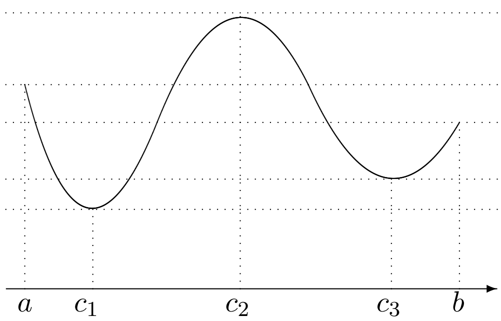


FIGURE 2.2 – Points critiques et extrema : c_1, c_2, c_3 sont des points critiques, a, c_2, b sont des maxima locaux, c_1, c_2 sont des minima locaux, c_2 est un maximum global et c_1 un minimum global

Théorème 2.9 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ ou, de façon équivalente*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

L'interprétation graphique est assez simple : le segment qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et la tangeante au graphe de f au point $(c, f(c))$ sont parallèles. C'est en fait une rotation (élongation) du théorème de Rolle.

Soit f une continue sur $[a,b]$ et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sa primitive qui s'annule en a. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis à F, on obtient :

1)

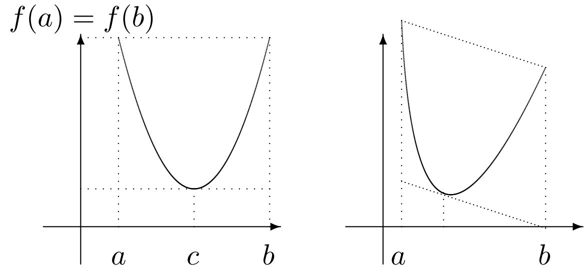


FIGURE 2.3 – 1) Théorème de Rolle e 2) Théorème des accroissements finis

Théorème 2.10 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit f une continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt = f(c).$$

La quantité $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la moyenne de f sur $[a, b]$. Ce théorème affirme donc qu'il existe une valeur c pour laquel $f(c)$ est la moyenne de f.

Dans la pratique on utilise souvent le théorème des accroissements finis sous la forme :

Soit f une application continue de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Soit $x_0 \in [a, b]$. Quel que soit $x \in [a, b]$, il existe un réel c_x strictement compris entre x et x_0, tel que $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c_x)$.

Exemple : On prend $f(x) = \ln(1+x)$ et $x_0 = 0$. Quel que soit $x \in]-1, +\infty[$ il existe c_x strictement compris entre x et 0 tel que : $\ln(1 + x) = \ln(1 + 0) + x\dfrac{1}{1 + c_x}$.

Corollaire 2.11. (Inégalités des accroissements finis) *Soit f une application continue de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et dont la dérivée est bornée. Si M est un réel tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leqslant M$, alors $|f(b) - f(b)| \leqslant M|(b - a)|$.*

C - Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones.

Théorème 2.12. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $J =]a, b[$ et une application $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur J.*

i. f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur J (resp. positive et les zéros de la dérivée sont isolés).

ii. f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si sa dérivée est négative sur J (resp. négative et les zéros de la dérivée sont isolés).

iii. f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur J.

D - Les formules de Taylor

Rappelons que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors, le “théorème fondamental de l'analyse” donne

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c). \tag{2.2}$$

On retrouve ainsi le théorème des accroissements finis.

Supposons maintenant que f soit de classe $\mathcal{C}^2$. Si on écrit $f'(t) = 1 \times f'(t)$ et qu'on fait une intégration par parties dans (2.1) en posant $u(t) = f'(t)$ $v(t) = t - b$ donc $u'(t) = f''(t)$ et $v'(t) = 1$ on trouve

$$f(b) = f(a) + \Big[(t-b)f'(t)\Big]_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant une version plus élaborée du théorème de la moyenne, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c). \tag{2.3}$$

Pour comprendre l'intérêt de cette formule, prenons $b = a + h$ avec h petit. Dans (2.3), comme $c \in [a, a+h]$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' continue, $f'(c) = f'(a) + \varepsilon_1$ donc $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1$. ($\varepsilon_1$ dépend de h et $\varepsilon_1(h) \to 0$ quand $h \to 0$). Le même raisonnement pour (**??**) donne $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + h^2\varepsilon_2$. Comme h^2 est négligeable devant h quand $h \to 0$, cette formule est plus précise que la précédente. Prenons à nouveau l'exemple du calcul de $\sqrt{1.1}$ donc $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^{-1/2}}{2}$ et $f''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4}$ donc pour $a = 1$ et $h = 0.1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1/2$ et $f''(1) = -1/4$. On trouve donc

$$\sqrt{1.1} \simeq 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 - \frac{1}{4}\frac{(0.1)^2}{2} = 1.04875$$

et on commet une erreur $< 6.10^{-5}$ contre 2.10^{-3} précédemment.

On peut continuer le raisonnement en poursuivant les intégrations par parties et on trouve :

Théorème 2.13 (Formule de Taylor à l'odre $n-1$ avec reste intégral)**.** *Soient $n \geqslant 1$ un entier, f une fonction de classe C^n sur I et a, b deux points de I. Alors :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \tag{2.4}$$

ou, de façon équivalente

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \\ + \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a + (b-a)t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

On en déduit

Corollaire 2.14 (Formule de Taylor-Lagrange à l'odre $n-1$)**.** *Soient $n \geqslant 1$ un entier, f une fonction de classe C^n sur I et a, b deux points de I. Alors il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \tag{2.6}$$

Example 2.15. Taylor-Lagrange à l'ordre 2 avec $a = 0$. Quel que soit $b \in]-1, +\infty[$, il existe c_b strictement compris entre b et 0 tel que :

$$\ln(1+b) = \ln(1+0) + b\frac{1}{1+0} + \frac{b^2}{2!}\frac{-1}{(1+0)^2} + \frac{b^3}{3!}\frac{2}{(1+c_b)^3} = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3!}\frac{2}{(1+c_b)^3}.$$

Corollaire 2.16 (Inégalité de Taylor)**.** *On reprend les hypothèses de la Formule de Taylor. Si $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$ pour tout réel t compris entre a et b alors*

$$\left| f(b) - \left(f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^n}{n!} \tag{2.7}$$

Un certain nombre de re-formulations de la formule de Taylor-Lagrange sont utiles

Corollaire 2.17.

1. *on écrit* $b = a + h$ *alors si* $c \in (a, b)$, *il existe un réel* $\theta \in]0, 1[$ *tel que* $c = a + \theta h$. *La formule de Taylor Lagrange à l'odre* $n - 1$ (2.6) *s'écrit :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \tag{2.8}$$

2. *Pour* $a = 0$ *et* $h = x$, *on obtient la formule de* Mac-Laurin *à l'odre* $n - 1$ *:*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \tag{2.9}$$

   où $\theta \in]0, 1[$.

3. *En remarquant que* $f^{(n)}(a + \theta h) = f^{(n)}(a) + \varepsilon(h)$ *on obtien la Formule de* Taylor-Young *à l'ordre* n

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h) \tag{2.10}$$

   où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ces formules permettent donc d'approcher une fonction par un polynôme + reste. L'ordre de la formule est le degré du polynôme.

Example 2.18. Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 avec $a = 0$. Pour tout $b \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \int_0^b \frac{(b-t)^2}{2!}\frac{2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Taylor-Young à l'ordre 2 avec $a = 0$. Il existe une fonction ε telle que :
$\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

E - Exercices

E - 1 Exercice corrigé

1. Déterminez les extrema de la fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}e^{4x^2-5x}$.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrez que por tout $x > 0$, $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Montrez à l'aide de la formule de Taylor que pour $x > 0$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{12}(1+x)^{-5/2} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

$\boxed{5}$

Soit f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x - 2\sin(x)$. Déterminer les extrema de f sur $[0, 2\pi]$.

$\boxed{6}$

On tire un objet de poids P sur un plan horizontal à l'aide d'une corde à laquelle est appliquée une force. Si θ désigne l'angle que fait la corde avec le plan, alors, à la limite de glissement, l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

où μ est une constante positive appelée *cœfficient de friction* et où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Démontrer que F est minimale lorsque $\tan\theta = \mu$.

E - 2 Théorème des accroissements finis

$\boxed{7}$

Le compteur d'une voiture indique à 14h, 30 km/h. Dix minutes plus tard il indique 50 km/h. Démontrer qu'à un certain moment entre ces deux mesures l'accélération est exactement de 120 km/h^2.

$\boxed{8}$ Montrer que pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$

$\boxed{9}$

Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant 1 + x$

$\boxed{10}$

Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\sin(x) \leqslant x$

$\boxed{11}$

Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$

$\boxed{12}$

Encadrer $\sqrt{105}$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

E - 3 Formules de Taylor

$\boxed{13}$

Montrer que pour tout réel x :

$$|\cos x - 1| \leqslant \frac{x^2}{2!} \qquad , \qquad \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)\right| \leqslant \frac{x^4}{4!} \qquad , \qquad \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leqslant \frac{x^6}{6!}$$

$\boxed{14}$

1. Ecrire la formule de Taylor au point 0 et à l'ordre 9 pour la fonction sinus.

2. Soit $P(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$.

Montrer que si l'on a $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $P(x) \leqslant \sin x \leqslant P(x) + \dfrac{x^9}{9!}$.

3. Trouver un nombre $a > 0$ tel que $|\sin x - P(x)| \leqslant 10^{-5}$ pour tout réel $x \in [0, a]$.

4. Soit θ un angle dans $[0, 5°]$. Quelle est l'erreur maximale commise quand on dit : $\sin\theta \sim \theta$?

$\boxed{15}$

Soit un réel $x \in [0, 1]$. Estimer l'erreur de l'approximation de $\sqrt{1+x}$ par : $1 + \dfrac{x}{2}$.

$\boxed{16}$

1. Approximer la fonction $x^{1/3}$ par un polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 8$.
2. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $7 \leqslant x \leqslant 9$

$\boxed{17}$

Ecrire $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ sous la forme d'une somme de puissances de $(x + 1)$.

$\boxed{18}$

Etablir les inégalitées suivantes :

1. $\forall x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

2. $\forall x \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

$\boxed{19}$

Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$ tel que :

$$P(2) = P'(2) = \cdots = P^{(n)}(2) = 5.$$

Montrer que ce polynôme n'a pas de racine dans $[2, +\infty[$.

$\boxed{20}$

1. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1+x)$, montrer que u_n converge vers $\ln 2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

E - 4 Solution des exercices

1) f est dérivable sur $(0, +\infty)$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{4x^2-5x} + \sqrt{x}(8x-5)e^{4x^2-5x} = \frac{16x^2-10x+1}{2\sqrt{x}}e^{4x^2-5x}.$$

Les racines de $16x^2 - 10x + 1$ sont $1/8$ et $1/2$ donc $f'(x) = \dfrac{16(x-1/8)(x-1/2)}{2\sqrt{x}}e^{4x^2-5x}$ donc

x	0		$1/8$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{-9/16}}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\dfrac{e^{-3/2}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

donc f a un minimum global en 0, un minimum local non global en $1/2$, un maximum local non global en $1/8$.

2) Définissons f sur $[0, +\infty$ par $f(x) = \arctan x$ de sorte que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $c \in (0, x)$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(c)$ donc $\arctan x = \dfrac{x}{1+c^2}$. Comme $0 < c < x$, $1 + c^2 < 1 + x^2$ et on obtient bien $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

3) On pose $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ et $f^{(3)}(x) = \dfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$. D'après Mc Laurin à l'ordre 2, il existe $0 < c < x$ tel que

$$\sqrt{1+x} = 1^{1/2} + \frac{1}{2}1^{-1/2}x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{4}1^{-3/2} + \frac{x^3}{3!}\frac{3}{8}(1+c)^{-5/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{12}(1+c)^{-5/2}.$$

Mais, comme $0 < c < x$, $\dfrac{x^3}{12}(1+x)^{-5/2} < \dfrac{x^3}{12}(1+c)^{-5/2} < \dfrac{x^3}{12}$.

3 Développements limités

A - Notion de développement limité

Définition 3.1. Soient $n \geqslant 0$ un entier, I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I . On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en x_0** si il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.1}$$

Remarques :

1. Le polynòme $P(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ s'appelle la partie régulière du développement limité.

2. On dit que la fonction $h \to h^n \varepsilon(h)$ est négligeable devant h^n et on écrit parfois à la place de $h^n \varepsilon(h)$, $o(h^n)$ (lire : petit o de h^n).

3. Lorsque $x_0 = 0$ et $h = x$ le développement limité à l'ordre n en 0 de f s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \tag{3.2}$$

4. Si f admet une dérivée d'ordre n en x_0 la formule de Taylor Young :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{3.3}$$

fournit le développement limité de f en x_0. On a $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour $k = 0, \dots, n$.

Exemple : En appliquant la formule de Taylor Young en $x_0 = 0$ à $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

B - Propriétés

Théorème 3.2. *Si la fonction f possède un développement limité à l'ordre n au point x_0, ce développement est unique.*

Corollaire : Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \tag{3.4}$$

alors sa partie régulière $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est un polynôme pair (impair) si f est une fonction paire (respectivement impaire).

Propriété 3.3. *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.*

1. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle possède un développement limité à l'ordre 0 en ce point. Dans ce cas le développement limité est*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.5}$$

Application : Prolongement par continuité d'une application non définie en x_0. Voir Exercice 35.

2. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle possède un développement limité à l'ordre 1 en ce point. Dans ce cas le développement limité est*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.6}$$

Théorème 3.4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I. Si f admet au point x_0 le développement limité*

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.7}$$

alors F admet au point x_0 le développement limité

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + a_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + h^{n+1}\varepsilon_1(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0 \tag{3.8}$$

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $I =]-1, 1[$ et $F : x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de f sur I. On déduit du développement limité de f en 0 à l'ordre n celui de F en 0 à l'ordre $n+1$:

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Théorème 3.5. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur I. Si f admet au point x_0 le développement limité*

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.9}$$

alors f' admet au point x_0 le développement limité

$$f'(x_0 + h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + \cdots + n a_n h^{n-1} + h^{n-1}\varepsilon_1(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0 \tag{3.10}$$

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est de classe C^n sur $I =]-1, 1[$. On déduit du développement limité de f en 0 à l'ordre n celui de f' en 0 à l'ordre $n-1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

C - Développements limités des fonctions usuelles en 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

D - Opérations sur les développements limités

Soient f, g deux fonctions qui admettent en 0 les développements limités à l'ordre n suivants

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \end{cases}$$

On note $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$

• $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n donné par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

• fg admet en 0 un développement limité à l'ordre n donné par :

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = R(x) + o(x^n)$$

où $R(x)$ s'obtient en développant le produit des polynômes $P(x).Q(x)$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à n.

• Si $b_0 \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n que l'on obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes de x jusqu'à l'ordre n de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ par $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$.

• Si $b_0 = 0$ alors $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n. On a :

$$(f \circ g)(x) = a_0 + a_1[Q(x)] + a_2[Q^2(x)] + \cdots + a_n[Q^n(x)] + o(x^n)$$

où $[Q^k(x)]$ désigne le polynôme obtenu en développant le produit $Q^k(x)$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à n.

Exemple : Développements limités en 0 à l'ordre 5 :

$$\begin{cases} f(x) = e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ g(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5) \end{cases}$$

On note $P(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$ et $Q(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

• $e^x + \sin x = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + 2\dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$$\begin{aligned} \bullet e^x \sin x &= \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right]\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + o(x^5) \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + x\left[x - \frac{x^3}{3!}\right] + \frac{x^2}{2!}\left[x - \frac{x^3}{3!}\right] + \frac{x^3}{3!}[x] + \frac{x^4}{4!}[x] + o(x^5) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet(\exp \circ \sin)x &= e^{\sin x} \\ &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\ &= 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^4 + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^5 + o(x^5) \\ &= 1 + \left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{1}{3}x^4\right] + \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{1}{2}x^5\right] + \frac{1}{24}\left[x^4\right] + \frac{1}{120}\left[x^5\right] + o(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Exemple : Obtention du développement limité à l'ordre 5 de $\tan x$ par division suivant les puissances croissantes de x jusqu'à l'ordre 5 de $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ par $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + 0$.

$$\begin{array}{ll|l} & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \hline - & \left[x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24}\right] & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} \\ \hline = & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} & \\ - & \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6}\right] & \\ \hline = & \dfrac{2x^5}{15} & \end{array}$$

D'où : $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$

E - Exercices

E - 1 Exercices corrigés

1. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$.
2. $DL_6(0)$ de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
3. $DL_4(0)$ de $1/\cos x$.
4. $DL_n(0)$ de $\arctan x$.
5. Déterminez $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1-x^2+\sin x\arctan x)^{1/x^4}$.

E - 2 Calcul de développements limités

$\boxed{21}$

a. Ecrire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au point 0

b. Ecrire le développement limité de $\ln(x)$ à l'ordre 3 au point 1 puis au point 5.

$\boxed{22}$

Ecrire le développement limité de $exp(x-1)$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le développement limité de $exp(x)$ à l'ordre 3 au point -1.

$\boxed{23}$

Ecrire le dévelopement limité de $\dfrac{1}{1+(x/2)}$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le développement limité de $1/x$ à l'ordre 3 au point 2.

$\boxed{24}$

Ecrire le dévelopement limité de $\ln(1+(x/e))$ à l'ordre 2 au point 0. En déduire le développement limité de $\ln x$ à l'ordre 2 au point e.

$\boxed{25}$

Pour tout réel x on pose $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Calculer $f'(x)$. En déduire le développement limité de la fonction f à l'ordre 5 au point 0.

$\boxed{26}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{s}i \quad x\geqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{s}i \quad x>0\end{cases}$

a. Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour $x>0$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\,e^{-1/x}$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout n, $f^{(n)}(0)=0$.

c. Ecrire la formule de Mac-Laurin de f à l'ordre n en 0. Que peut-on dire du développement limité de f en 0 ?

$\boxed{27}$

Déterminer le développement limité en x_0 à l'ordre n des fonctions :

$$x \to e^x \quad (x_0 = 1)\,; \qquad x \to \cos(x) \quad (x_0 = \pi/4).$$

$\boxed{28}$

Montrer que la partie régulière d'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

$\boxed{29}$

Ecrire le développement limité en 0 à l'ordre indiqué entre parenthèses des fonctions suivantes :

$$x \to e^x + \cos x \ \ (4); \qquad x \to (2x+1)\,\mathrm{sh}(x) \ \ (6); \qquad x \to e^x \ln(1+x) \ \ (3);$$

$$x \to \tan x \ \ (5); \qquad x \to \frac{\ln(1-x)}{1-x} \ \ (4); \qquad x \to \frac{1}{1+x+x^2} \ \ (5);$$

$$x \to \ln(\cos(x)) \ \ (4); \qquad x \to e^{\sin x} \ \ (4); \qquad x \to \sqrt{\cos x} \ \ (4)$$

$$x \to \frac{1}{(1+x)^4} \ \ (n); \qquad x \to \arctan(x) \ \ (n); \qquad x \to \ln(-x^2+x+6) \ \ (6)$$

$\boxed{30}$

Déterminer le développement asymptotique en 0 à l'ordre 3 de :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad ; \qquad f_2(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

$\boxed{31}$

Déterminer le développement limité en $+\infty$ jusqu'au terme en $\dfrac{1}{x^3}$ de :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2}\ ; \qquad f_2(x) = \frac{x^3+2}{x-1}\ ; \qquad f_3(x) = \frac{x^3-2x^2+2x+2}{x-1}$$

E - 3 Applications

$\boxed{32}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$; **2**. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - x^2 \ln(1+1/x))$; **3**. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - e^{-x^2}}{(sinx)^2}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\mathrm{ch}\,x)\cos x - 2}{x^4}$; **5**. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\frac{e^x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})$.

$\boxed{33}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$.

Etudier la fonction f au voisinage de 0 en précisant bien la tangente à la courbe en ce point, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

$\boxed{34}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en 0 par continuité.

2. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

$\boxed{35}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$.

Montrer que la courbe de f admet au point d'abscisse 1 une tangente que l'on déterminera. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

$\boxed{36}$

Etudier les branches infinies des courbes d'équation :

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}\ ; \qquad y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}\ ; \qquad y = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}\ ;$$

$\boxed{37}$ **DS 2007**

On se propose de trouver un développement asymptotique à deux termes en 0^+ de

$$f(x) := \frac{1}{(\tan(x))^2 \sin(x)}.$$

1. Trouver la limite de $f(x)$ et de $x^3 f(x)$ en 0^+.
2. Trouver le développement limité de $x^3 f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire le développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ en 0^+.

E - 4 Exercices avec des équations différentielles

$\boxed{38}$ **DS 2007**

On se propose de trouver le développement limité à l'ordre 9 en 0 de la fonction dérivable tangente hyperbolique $\tanh(x)$ exclusivement par la méthode de l'équation différentielle.

1. Montrer que tanh vérifie l'équation différentielle

$$y' = 1 - y^2.$$

2. Donner les raisons pour lesquelles tanh admet un développement limité de la forme

$$\tanh(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + x^{10}\varepsilon_1(x)$$

où a, b c et d sont des constantes réelles et ε_1 est une fonction nulle et continue en 0.

3. Donner les raisons pour lesquelles $(\tanh)'$ admet un développement limité de la forme

$$\tanh'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + x^9\varepsilon_2(x)$$

où ε_2 est une fonction nulle et continue en 0.

4. Trouver le développement limité à l'ordre 9 en 0 de $\tanh(x)$.

$\boxed{39}$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

1. Montrer que f satisfait l'équation différentielle

$$\left(x^2 + 1\right) y'(x) + xy(x) = 1\,.$$

2. En déduire le développement limité à l'ordre 7 de f en 0.

E - 5 Solutions des exercices

1) On écrite $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3t^4}{8} + o(t^5)$ donc $\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$ et

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{3x^5}{40} + \frac{3x^6}{40} + o(x^6).$$

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$, $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$. On pose $t = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ et on trouve

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

4) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ donc $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

5) $(1 - x^2 + \sin x \arctan x)^{1/x^4} = \exp \dfrac{\ln(1 - x^2 + \sin x \arctan x)}{x^4}$. Mais $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ et $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ donc

$$-x^2 + \sin x \arctan x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - x^2 + o(x^4) = -\frac{x^4}{2}$$

puis $\ln(1+t) = t + o(t)$ donc $\dfrac{\ln(1 - x^2 + \sin x \arctan x)}{x^4} = \dfrac{1}{2} + o(1) \to \dfrac{1}{2}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} (1 - x^2 + \sin x \arctan x)^{1/x^4} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

4 Fonctions vectorielles

A - L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$

A - 1 Espace vectoriel

Soit $n \geqslant 2$, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$ (n facteurs).
On définit sur $\mathbb{R}^n$ deux opérations : une addition et une multiplication par un scalaire.
• L'addition :
Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

On vérifie que cette addition est commutative et associative, admet l'élément neutre $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ et que chaque élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admet un opposé $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.
• La multiplication par un scalaire :
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

qu'on note aussi $\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
On vérifie que si λ, μ sont des réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, alors

a. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
b. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
c. $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$
d. $1.\vec{u} = \vec{u}$.

• $\mathbb{R}^n$ muni de ces deux lois s'appelle un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ des scalaires.

A - 2 Bases

Définition 4.1. Soient m vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$,..., $\vec{e_m}$ de $\mathbb{R}^n$. $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_m})$ est :

i. un *système libre* si pour $x_1, \ldots, x_m$ des réels, $\sum_{i=1}^{m} x_i\vec{e_i} = \vec{0}$ implique $x_1 = \ldots = x_m$.
ii. un *système générateur* si pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, il existe $x_1, \ldots, x_m$ des réels, tels que $\sum_{i=1}^{m} x_i\vec{e_i} = \vec{u}$.
iii. une *base* de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}$ où les x_i sont des réels.

On peut vérifier que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_m})$ est libre si tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}$ s'écrit de façon unique sous cette forme. Ainsi, une base est un système libre et générateur

Proposition 4.2.

i. Un système libre de $\mathbb{R}^n$ a au plus *n vecteurs et s'il a exactement n vecteur, c'est une base.*
ii. Un système générateur de $\mathbb{R}^n$ a au moins *n vecteurs et s'il a exactement n vecteur, c'est une base.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on a de façon équivalente : Soient $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

A - 3 Norme, Produit scalaire, Produit vectoriel

Quelques rappels de définitions :
• Pour $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

L'application $\vec{u} \to \|\vec{u}\|$ s'appelle la *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$.

• Pour $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{v} = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ le *produit scalaire* usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{1}^{n} x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n$$

Il vérifie : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

• le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par le vecteur :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}.$$

A - 4 Plan et repère

Un repère du plan est la donnée d'un point O (origine), et d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de $\mathbb{R}^2$. Etant donné un point M quelconque du plan, on appelle coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les coordonnées du vecteur $O\vec{M}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

Un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ peut donc être vu, soit comme les coordonnées d'un point du plan, soit comme les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

B - Fonctions vectorielles

Définition 4.3. On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle une application $\vec{F}$ d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \vec{F} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \end{aligned}$$

Les fonctions numériques $f_1, f_2, \ldots, f_n$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$, s'appellent les fonctions coordonnées de $\vec{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Dans les exercices I sera un intervalle non réduit à un point ou une réunion finie d'intervalles non réduits à un point et $n = 2$ ou $n = 3$.

On peut aussi définir les fonctions coordonnées de $\vec{F}$ dans une autre base de $\mathbb{R}^n$ que la base canonique.

Exemple : $\vec{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (e^t, \sin t) \end{array}$ On a alors $f_1 : \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow e^t \end{array}$, et $f_2 : \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow \sin t \end{array}$

$\vec{F}$ peut s'interpréter comme une fonction qui associe à tout temps t un point M_t du plan d'abscisse e^t et d'ordonnée $\sin t$.

$\vec{F}$ peut aussi s'interpréter comme une fonction qui représente au cours du temps les variations du vent à Bordeaux.

B - 1 Définitions

On peut définir les notions de limite, continuité et dérivabilité comme cela a peut-être été fait au semestre 1 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.4. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 sauf, peut-être, en t_0 et $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{F}$ a pour limite $\vec{L}$ en t_0 et on écrit $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{L}$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \forall t \in I\ \Big(|t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|\vec{F}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon \Big)$$

Définition 4.5. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 On dit que $\vec{F}$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$.

Autrement dit $\vec{F}$ est continue en t_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \forall t \in I\ \Big(|t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)\| < \varepsilon \Big)$$

Définition 4.6. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 et $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{F}$ est dérivable en t_0, de dérivée $\vec{L}$ si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0} = \vec{L}$$

Le vecteur $\vec{L}$ se note $\vec{F}'(t_0)$.

Définition 4.7. Soit $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que $\vec{F}$ est dérivable sur I si $\vec{F}$ admet une dérivée en tout point de $t_0 \in I$. La fonction $\vec{F}' : t \to \vec{F}'(t)$ s'appelle la fonction dérivée de $\vec{F}$.

B - 2 Définitions équivalentes

Théorème 4.8. *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 sauf, peut-être, en t_0. On note $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\vec{F}$ dans une base de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $(l_1, \ldots, l_n)$ dans cette base.*

Alors $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{L}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = l_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Théorème 4.9. *Soient $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\vec{F}$. La fonction vectorielle $\vec{F}$ est continue en t_0 si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est continue en t_0.*

Théorème 4.10. *Soient $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage de t_0 et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\vec{F}$. La fonction vectorielle $\vec{F}$ est dérivable en t_0 si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est dérivable en t_0.*
Si $\vec{F}$ est dérivable en t_0 alors, $\vec{F}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$.

Exemple : f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\vec{F}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{F}'(t) = (e^t, \cos t)$

Théorème 4.11. *Soient $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\vec{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.*

- *$\vec{F} + \vec{G}$ est dérivable et $\Big(\vec{F} + \vec{G}\Big)' = \vec{F}' + \vec{G}'$*
- *$\lambda \vec{F}$ est dérivable et $\Big(\lambda \vec{F}\Big)' = \lambda \vec{F}'$*
- *$\vec{F}.\vec{G}$ est dérivable et $\Big(\vec{F}.\vec{G}\Big)' = \vec{F}'.\vec{G} + \vec{F}.\vec{G}'$*
- *$\vec{F} \wedge \vec{G}$ est dérivable et $\Big(\vec{F} \wedge \vec{G}\Big)' = \vec{F}' \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \vec{G}'$*

Théorème 4.12. *Soient $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.*
$\varphi \vec{F}$ est dérivable et $\Big(\varphi \vec{F}\Big)' = \varphi' \vec{F} + \varphi \vec{F}'$

C - La formule de Taylor-Young.

Définition 4.13. Soit $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable sur I. Si la fonction vectorielle $\vec{F}'$ est dérivable sa dérivée se note $\vec{F}''$ ou encore $\vec{F}^{(2)}$et on l'appelle la dérivée seconde de $\vec{F}$. Si $\vec{F}$ admet une dérivée d'ordre n, $\vec{F}^{(n)}$, qui est dérivable on note sa dérivée $\vec{F}^{(n+1)}$.
Si $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ admet une dérivée d'ordre n, alors $\vec{F}^{(n)} = (f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)})$
$\vec{F}$ est de classe C^n sur I si elle admet une dérivée d'ordre n sur I et que celle-ci est continue sur I.

Théorème 4.14. *Soient a un réel et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert I contenant a et qui admet une dérivée d'ordre n en a alors*

$$\vec{F}(a+h) = \vec{F}(a) + h\vec{F}'(a) + \frac{h^2}{2!}\vec{F}^{(2)}(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\vec{F}^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}\vec{F}^{(n)}(a) + h^n\vec{\varepsilon}(h)$$

$$\text{où } \lim_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Exemple : f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R})$, et on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{F^{(n)}}(t) = (e^t, \sin(t + \dfrac{n\pi}{2}))$

D'où la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 :

$$\begin{aligned} \vec{F}(h) &= \vec{F}(0) \quad +h\vec{F}'(0) \quad +\frac{h^2}{2!}\vec{F}^{(2)}(0) \quad +h^2\vec{\varepsilon}(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}. \\ &= \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad +h \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad +\frac{h^2}{2!} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad +h^2\vec{\varepsilon}(h) \end{aligned}$$

On obtient la même formule en utilisant les développements limités en 0 à l'ordre 2 de f_1 et f_2.

D - Exercices

Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$\boxed{40}$ **(Exercice corrigé)** Donnez le $DL_3(0)$ de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $F(x) = \left(\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right), \dfrac{1}{\cos x}, \arctan x\right)$.

$\boxed{41}$

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (2,3)$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner un exemple de point M tel que, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, son abscisse soit positive, et son ordonnée négative.

3. On note A le point de coordonnées $(3, -1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dessiner un exemple de point M tel que, dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, son abscisse et son ordonnée soient positives.

$\boxed{42}$

Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux fonctions vectorielles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\vec{F}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k} \qquad , \qquad \vec{G}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} - \sin t\,\overrightarrow{j} - 2t\,\overrightarrow{k}$$

Déterminer $\vec{F} + \vec{G}$, $\quad 3\vec{F}$, $\quad \vec{F}.\vec{G}$, $\quad \|\vec{F} + \vec{G}\|$, $\quad \vec{F} \wedge \vec{G}$.

$\boxed{43}$

Soit $\vec{F} : t \to (\cos t, \dfrac{\sin t}{t}, te^{2t})$.

1. Montrer que $\vec{F}$ admet une limite en 0.

2. Montrer que $\vec{F}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\vec{F}'$.

3. Exprimer les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base $(\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (0,1,1), \vec{w} = (1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{44}$

Déterminer la limite de la fonction vectorielle

$$\vec{F}(t) = \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sh} t}, \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}, \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right)$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

$\boxed{45}$

Soient t_0 un réel et $\vec{F}$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{F}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$$

1. Démontrer que $\vec{F}'(t_0)$ est un vecteur de norme 1, orthogonal à $\vec{F}(t_0)$.

2. Déterminer les dérivées successives de $\vec{F}$.

$\boxed{46}$

Soient $\vec{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} - t^2\,\overrightarrow{j}$, $\qquad \vec{G}(t) = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{j}$.

Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées des fonctions $\vec{F} + \vec{G}$, $\quad \vec{F}.\vec{G}$, $\quad \|\vec{F}\|$.

$\boxed{47}$

Soient $\vec{F}(t) = \dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{t^3}\overrightarrow{j}, \qquad k(t) = t^2.$

Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées des fonctions $k\vec{F}$ et $\vec{F} \circ k$.

$\boxed{48}$

Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$ de la fonction vectorielle

$$\vec{F}(t) = \Big(\sin t, t\sin t, t^2 \sin t\Big)$$

Déterminer $\vec{F}(0), \vec{F}'(0), \vec{F}''(0), \vec{F}^{(3)}(0)$.

$\boxed{49}$

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\begin{array}{rcl}\vec{F} : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (f_1(t), f_2(t))\end{array}$ une fonction vectorielle dérivable sur I.

Pour $t \in I$ on note $g(t) = \|\vec{F}(t)\|^2$.

1. Montrer que $g'(t) = 2\vec{F}'(t).\vec{F}(t)$.

2. Si le module du vecteur $\vec{F}(t)$ est constant que peut-on dire du vecteur $\vec{F}'(t)$?

D - 1 Solution de l'exercice

On a calculé dans le chapitre précédent

— $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = -x + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

— $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

— $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Il en résulte que

$$F(x) = (1, 0, 0) + x(-1, 0, 1) + x^2(3/2, 1/2, 0) + x^3(-1/3, 0, -1/3) + o(x^3).$$

5 Arcs plans paramétrés

A - Arcs plans paramétrés

Définition 5.1. On appelle arc paramétré du plan $\mathbb{R}^2$ tout couple $(I, \vec{F})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{F}$ une fonction vectorielle continue de I dans $\mathbb{R}^2$.

• L'image $\vec{F}(I) \subset \mathbb{R}^2$, s'appelle le support de l'arc. Ce support s'appelle aussi une courbe paramétrée du plan.

Le système d'équations : $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ est appelé une représentation paramétrique de cette courbe.

• Lorsque $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné, on dit que l'arc $(I, \vec{F})$ est un arc paramétré compact, ou encore chemin ; Les points $\vec{F}(a)$ et $\vec{F}(b)$ de $\mathbb{R}^2$ s'appellent l'origine et l'extrémité du chemin.

• Lorsque $\vec{F}$ est de classe C^k, on dit que l'arc paramétré $(I, \vec{F})$ est de classe C^k.

Définition 5.2. Soient $(I, \vec{F})$ un arc paramétré et $M \in \mathbb{R}^2$ un point de son support $S = \vec{F}(I)$. M est un point multiple s'il existe au moins 2 éléments distincts t et t' de I tels que $\vec{F}(t) = \vec{F}(t')$.
Par exemple un point géométrique $M(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ est un point double s'il existe une valeur $t_2 \neq t_1$ telle que $M(t_1) = M(t_2)$.

On cherche donc un point double en résolvant le système $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$

B - Paramétrage de courbes usuelles

La droite passant par $A = (x_0, y_0)$ et dirignée par $\vec{u} = (a, b)$. On peut la paramétrer de la façon suivante

$$M = (x(t), y(t)) = A + t\vec{u} = \begin{cases} x(t) &= x_0 + at \\ y(t) &= y_0 + bt \end{cases}$$

Le cercle de centre $C = (x_0, y_0)$ de rayon r. On peut la paramétrer de la façon suivante

$$M = (x(t), y(t)) = C + r(\cos t, \sin t) = \begin{cases} x(t) &= x_0 + r\cos t \\ y(t) &= y_0 + r\sin t \end{cases}$$

Plus généralement, l'ellipse $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par $\begin{cases} x(t) &= x_0 + r\cos t \\ y(t) &= y_0 + r\sin t \end{cases}$.

L'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Elle se découpe en deux branches : $x > 0$ et $x < 0$ qui peuvent se paramétrer respectivement par $\begin{cases} x(t) &= \cosh t \\ y(t) &= \sinh t \end{cases}$ et $\begin{cases} x(t) &= -\cosh t \\ y(t) &= \sinh t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

C - Etude locale en un point

Commençons par tracer l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) &= t^p \\ y(t) &= t^q \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

où p, q sont des entiers avec $p < q$. Remarquons que x (resp. y) a même parité que p (resp. q) et qu'il suffit donc de tracer l'arc pour $t \in [0, 1]$. Mais, quand $t > 0$, $x = t^p$ équivaut à $t = x^{1/p}$ et donc $y = t^q = x^{q/p}$. Cette partie de l'arc est donc le graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{q/p} \end{array}$. Comme $q > p$,

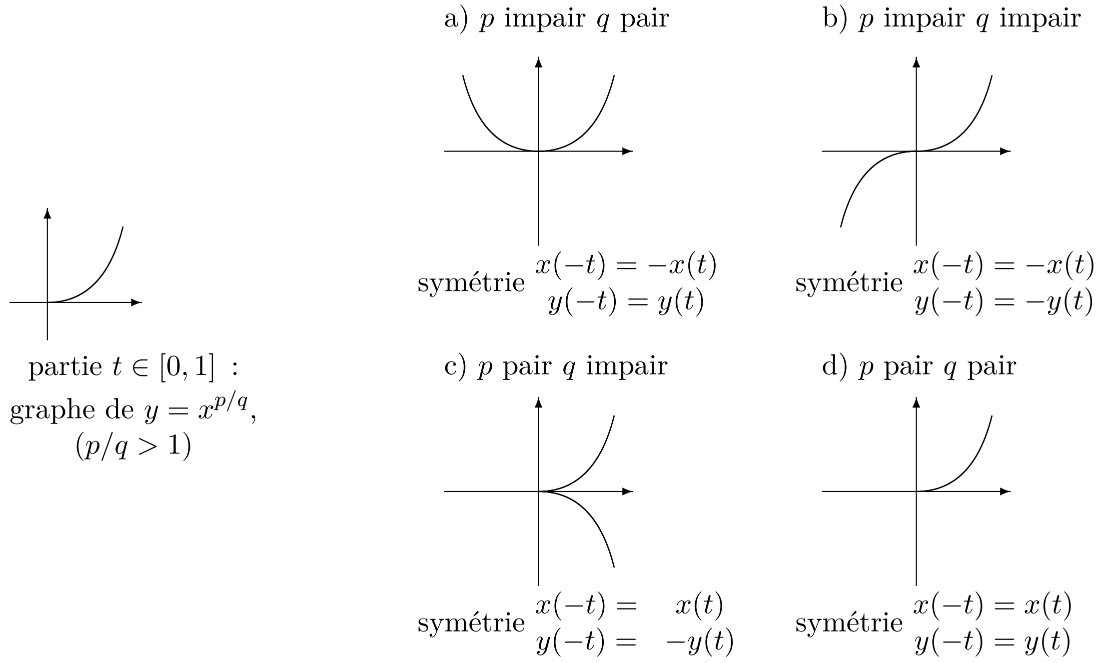


FIGURE 5.1 – Les principales symétries usuelles d'une courbe

$q/p > 1$ on obtient une courbe “d'aspect parabolique”. La partie $t \in [-1, 0)$ s'obtient à l'aide des symétries :

Définition 5.3. Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré du plan, $t_0 \in I$ et C sa courbe paramétrée. Pour $t \in I$ on note $M(t)$ le point $\vec{F}(t)$. On suppose que pour t proche de t_0 et distinct de t_0, $M(t) \neq M(t_0)$.

• Si le vecteur unitaire $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$ admet une limite lorque t tend vers t_0^+ (respectivement t_0^-), on dit que C admet en $M(t_0^+)$ (resp. $M(t_0^-)$) une demi- tangente qui est la demi-droite d'origine $M(t_0)$ et de vecteur directeur cette limite.

• Si ces limites sont égales ou opposées, on dit que C admet en $M(t_0)$ une tangente qui est la droite portant les deux demi-tangentes.

Théorème 5.4. *Si $\vec{F}$ est dérivable en t_0 et $\vec{F}'(t_0) \neq 0$ alors la courbe admet en t_0 une tangente de vecteur directeur $\vec{F}'(t_0) \left| \begin{array}{l} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{array} \right.$. L'équation de la tangente à la courbe en $M(t_0)$ est*

$$(y - y(t_0))x'(t_0) = (x - x(t_0))y'(t_0)$$

Lorsque $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit *régulier*. Lorsque $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit *singulier* ou *stationnaire*.

Propriété 5.5. *Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré du plan de classe C^k, $t_0 \in I$ et C sa courbe paramétrée. Si l'un au moins des vecteurs dérivés successifs $\vec{F}'(t_0), \vec{F}''(t_0), \ldots, \vec{F}^{(k)}(t_0)$ est non nul alors C admet en $M(t_0)$ une tangente dirigée par* **le premier vecteur dérivé successif qui soit non nul**.
En notant p le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$ l'équation de la tangente à la courbe en $M(t_0)$ est donc

$$(y - y(t_0))x^{(p)}(t_0) = (x - x(t_0))y^{(p)}(t_0)$$

Théorème 5.6. *Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré du plan de classe suffisante, $t_0 \in I$ et C sa courbe paramétrée ; soit*

• *p le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$*

• *q le plus petit entier $> p$ tel que $\left(\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0)\right)$ soit une famille libre.*

Si on note $(X(t), Y(t))$ *les coordonnées du point* $M(t)$ *dans le repère* $\left(M(t_0), \vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(p)}(t_0)\right)$ *olors*

$$X(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!} \qquad Y(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Ceci permet de tracer localement (au voisinage de $M(t_0)$) la courbe dans ce repère :

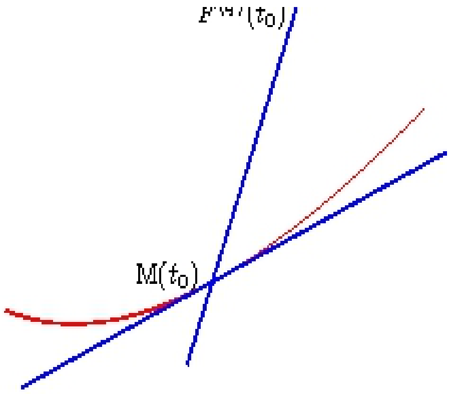


FIGURE 5.2 – Si p est impair et q est pair $M(t_0)$ est un point ordinaire

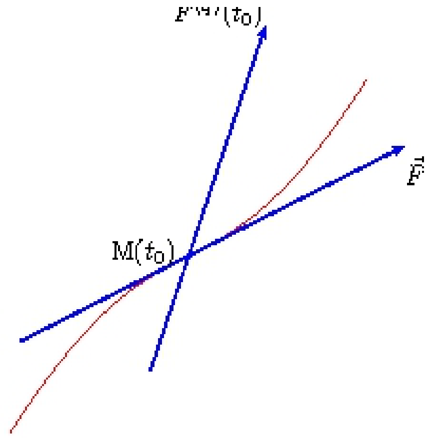


FIGURE 5.3 – Si p est impair et q est impair $M(t_0)$ est un point d'inflexion

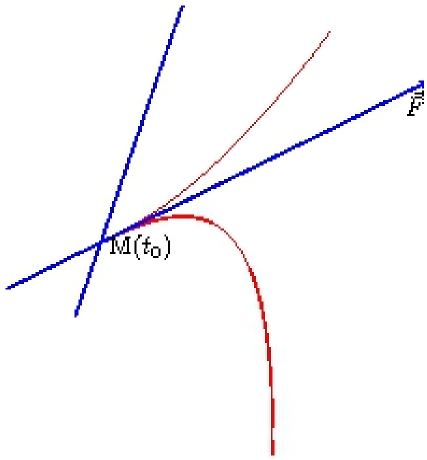


FIGURE 5.4 – Si p est pair et q est impair $M(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce

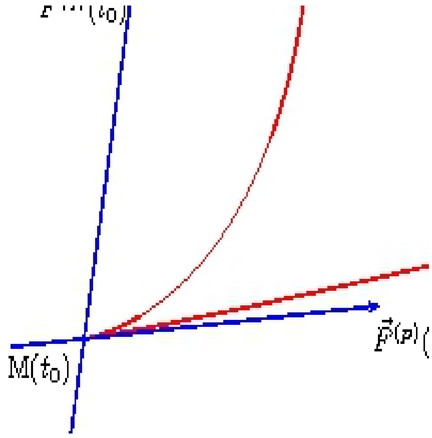


FIGURE 5.5 – Si p est pair et q est pair $M(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce

On peut comparer cette figure à la figure 5.1.

D - Etude des branches infinies

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré du plan de fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, C sa courbe paramétrée et t_0 un nombre appartenant à I ou une extrémité de I (dans ce cas on peut avoir $t_0 = \pm\infty$).

1. Si l'une au moins des fonctions coordonnées $x(t)$ ou $y(t)$ ne reste pas bornée lorsque t tend vers t_0, on dit que C présente une branche infinie quand t tend t_0.

2. Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = a$ ou $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, on dit que C admet pour asymptote la droite verticale d'équation $x = a$. De même si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = b$ ou $b \in \mathbb{R}$, alors C admet pour asymptote la droite horizontale d'équation $y = b$.
3. Si les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini lorsque t tend vers t_0 on étudie la limite du rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ lorsque $t \to t_0$
   (a) Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ on dit que C admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
   (b) Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ on dit que C admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
   (c) Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ où a est un réel non nul on dit que C admet une direction asymptotique de direction la droite d'équation $y = ax$. On étudie alors $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t)$.
   — $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, on dit que C admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
   — $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$, on dit que C admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$.Dans ce cas la position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée par l'étude du signe de $y(t) - ax(t) - b$ lorsque t tend vers t_0.

E - Plan d'étude d'un arc paramétré

On considère C une courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$

E - 1 Intervalle d'étude

1. On détermine les domaines de définition qui sont en pratique des intervalles ou des réunions d'intervalles, et l'ensemble de définition D est l'intersection des domaines de définitions de x et de y.
2. On recherche si des considérations de parité ou de périodicité permettent de réduire le domaine d'étude. Par exemple :

— S'il existe une période commune $T \in \mathbb{R}^{+*}$ à x et à y, la courbe est entièrement décrite par l'étude sur un intervalle de longueur T.

— On cherche ensuite des changements de paramètre φ qui induisent des transformations géométriques simples. Par exemple : $\varphi : t \mapsto -t$, ou $\varphi : t \mapsto \pi - t$, ou $\varphi : t \mapsto \pi + t$, etc......

$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ sym / axe Ox,	$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ sym/ axe Oy,
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ symétrie centrale	$\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$ symétrie par rapport à la diagonale $y = x$

E - 2 Etude des fonctions coordonnées

On étudie les variations des deux fonctions numériques x et y.
Les résultats sont consignés dans un tableau de variation comportant :

— Les valeurs intéressantes de t,
— Le signe de $x'(t)$, et ses valeurs aux points intéressants (pour la tangente)
— Le signe de $y'(t)$, et ses valeurs aux points intéressants (pour la tangente)
— Le sens de variations de $x(t)$, ses limites et ses valeurs aux points intéressants,
— Le sens de variations de $y(t)$, ses limites et ses valeurs aux points intéressants
— Il est parfois utile de considérer $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, qui est le coefficient directeur de la tangente à la courbe dans le cas d'un point régulier.

E - 3 Etude de la courbe C.

1. Détermination des branches infinies et de leur nature.
2. Détermination des points singuliers, de leur nature, et de l'allure de la courbe au voisinage de ces points.
3. On peut être conduit à rechercher des points d'inflexions ou des points multiples.
4. Allure de la courbe.

F - Exemple

Soit Γ la courbe plane définie par la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = t + \dfrac{4}{t} \end{cases}$. Γ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

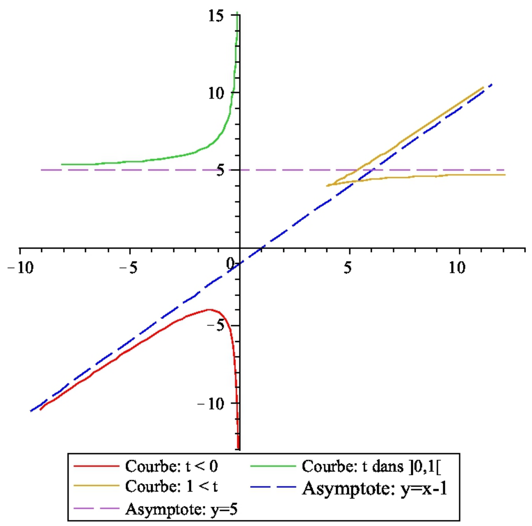
t	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\frac{8}{9}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	-3	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

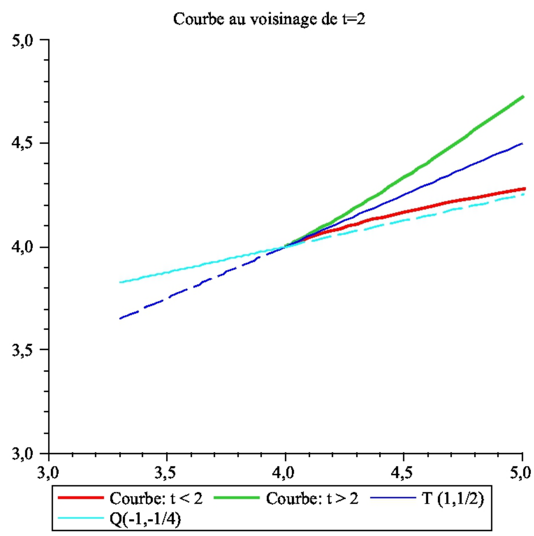
- $x'(2) = y'(2) = 0$, donc $M_2 = M(x(2), y(2))$ est un point stationnaire.
  $\overrightarrow{M_2M_t} = (t-2)^2(1, \frac{1}{2}) + (t-2)^3(-1, -\frac{1}{4}) + (o((t-2)^3), o((t-2)^3))$

Un vecteur directeur de la tangente à Γ au point $M(x(2), y(2))$ est donc $\vec{T} = (1, \frac{1}{2})$: $p = 2$. Le vecteur $\vec{Q}(-1, -\frac{1}{4})$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{T}$: $q = 3$.
M_2 est un point de rebroussement de première espèce.

- $x = 0$ est une asymptote.
- $y = 5$ est une asymptote.
- $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$; $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) - x(t) = -1$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote. $y(t) - [x(t) - 1] = \dfrac{3t-4}{t}\dfrac{1}{t-1} = \dfrac{3}{t} + o(\dfrac{1}{t})$. Quand $t \to -\infty$ le terme $\dfrac{3}{t}$ est négatif, dans un voisinage de $-\infty$ la courbe est donc en dessous de cette asymptote.

Quand $t \to +\infty$ le terme $\dfrac{3}{t}$ est positif, dans un voisinage de $+\infty$ la courbe est donc au dessus de cette asymptote.





G - Exercices

$\boxed{50}$

1. Soient a, b, c, d des réels. Quelle est la nature des courbes définies paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at + b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = t \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = ct + b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin t + 1 \end{cases} ;$$

2. Donner une représentation paramétrique du segment d'extrémités les points $A(1, 2)$ et $B(-2, 3)$.

3. Donner une représentation paramétrique du cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R.

$\boxed{51}$

Montrer que la courbe définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^3 + 2t^2 - t + 1 \\ y(t) &= 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

possède un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

$\boxed{52}$

Donner l'allure de la courbe au voisinage du point de paramètre $t = 0$ de la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{\cos t} \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

Indication : on peut utiliser les développements limités pour déterminer les dérivées successives.

$\boxed{53}$ Construire les courbes des arcs suivants au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = t^6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^5 + t^6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = t^6 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2 + t^5 + t^6 \end{cases}$$

$\boxed{54}$ Déterminer les points singuliers et l'allure de la courbe au voisinage de ces points des arcs paramétrés suivants :

$$\begin{cases} x(t) = t^4 + 1 \\ y(t) = t^4 - 2t^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

$\boxed{55}$

On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = (t + 2)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t - 2)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$

1. Donner le tableau de variation.
2. Etudier les branches infinies.
3. Montrer qu'au point $O(0, 0)$ on a une demi tangente.
4. Tracer la courbe.

$\boxed{56}$

On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - cost \end{cases}$

1. Que peut-on dire des points $M(t)$ et $M(-t)$? $M(t)$ et $M(t+2\pi)$?

2. Construire la courbe lorsque $t \in [0, \pi]$ puis pour $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{57}$

On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

1. Que peut-on dire des points $M(t+2\pi)$, $M(-t)$, $M(\pi - t)$, $M(\frac{\pi}{2} - t)$ par rapport au point $M(t)$.

2. Construire la courbe lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ puis pour $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{58}$

On considère la courbe C définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2} - 2t \\ y(t) = t^2 - \dfrac{2}{t} \end{cases}$

1. Calculer $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$. En déduire que C admet un axe de symétrie.

2. Construire C.

6 Notions sur les formes différentielles de degré 1

A - Révision : Dérivées partielles

On ne définit ci-dessous que les dérivées partielles des fonctions de deux variables. On peut étendre ces définitions aux fonctions de trois variables (ou plus).

Une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $(a,b) \in U$ il existe un disque de centre (a,b) et de rayon $r > 0$ inclus dans U

Dans ce paragraphe U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) \end{aligned}$$

La notion de continuité vue pour les fonctions d'une variable s'étend aux fonctions de plusieurs variables. L'application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en $(a,b) \in \mathbb{U}$ si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $f(a,b)$ contient toutes les valeurs de $f(x,y)$ pour (x,y) assez voisin de (a,b). On peut exprimer cette notion de continuité avec des quantificateurs comme on l'a fait pour les fonctions d'une variable.

A - 1 Dérivées partielles premières

Ce paragraphe a été vu en semestre 1 (MIS 101).

Définition 6.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{U}$. Pour $(x,b) \in U$ on pose $g(x) = f(x,b)$. Si g admet une dérivée en a cette dérivée s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x en (a,b) et se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou parfois $f'_x(a,b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) \qquad \text{où} \qquad g(x) = f(x,b) \tag{6.1}$$

Remarque : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \tag{6.2}$$

Définition 6.2. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{D}$. Pour $(a,y) \in D$ on pose $G(y) = f(a,y)$. Si G admet une dérivée en b cette dérivée s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à y en (a,b) et se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ou parfois $f'_y(a,b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = G'(b) \qquad \text{où} \qquad G(y) = f(a,y) \tag{6.3}$$

Remarque : On a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \tag{6.4}$$

Exemple : Soit $f(x,y) = \cos(x^2 - xy)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -(2x-y)\sin(x^2 - xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin(x^2 - xy)$

Remarque : L'existence de dérivées partielles en (a,b) ne garantit pas la continuité de f en (a,b).

A - 2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles sur U alors ces dérivées partielles sont des fonctions de deux variables :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} : U \longrightarrow \mathbb{R} & , & \dfrac{\partial f}{\partial x} : U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow f'_x(x,y) & , & (x,y) \longrightarrow f'_y(x,y) \end{array}$$

Définition 6.3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet des dérivées partielles sur U.

Les dérivées partielles des fonctions f'_x et f'_y s'appellent, si elles existent, les dérivées partielles secondes de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Définition 6.4. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 (resp. C^k) sur U si les dérivées partielles d'ordre 1 (resp. k) existent et sont continues sur U. On écrit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ (resp. $f \in C^k(U, \mathbb{R})$).

Propriété 6.5. Théorème de Schwarz

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur U et $(a,b) \in D$. Si les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au point (a,b) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \tag{6.5}$$

Définition-proposition 6.6. •*Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Il existe une fonction ε tel que pour tout réel h, k suffisamment petit :*

$$\begin{cases} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \\ \hfill \textit{avec} \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \end{cases}$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0).
• *L'application*

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) \longrightarrow h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array}$$

est appelée différentielle de f en (x_0, y_0) et est notée $d_{(x_0,y_0)}f$ ou $df_{(x_0,y_0)}$.

Application au calcul d'erreurs : En physique $df_{(x_0,y_0)}$ est utilisée pour estimer la variation de f au voisinage de (x_0, y_0) en fonction des variations des variables.
Par exemple considérons l'équation d'état d'un gaz parfait $PV = nRT$. On en déduit :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial T} dT + \frac{\partial V}{\partial P} dP = \frac{nR}{P} dT - \frac{nRT}{P^2} dP$$

On a :

$$V(T_C, P_C) - V(T_A, P_A) \sim \frac{nR}{P_A}(T_C - T_A) - \frac{nRT_A}{P_A^2}(P_C - P_A)$$

B - Formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$

Définition 6.7. On appelle forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ toute application

$$\begin{aligned} f_{a,b} \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow ax+by \end{aligned}$$

où a, b sont deux réels.

• L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ s'appelle le dual de $\mathbb{R}^2$ et se note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ou $(\mathbb{R}^2)^*$.

• L'ensemble $(\mathbb{R}^2)^*$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

• on note dx et dy les formes linéaires :

$$\begin{aligned} dx \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad & dy \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow x \quad , \quad & (x,y) &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Exemple : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U et $(x_0, y_0) \in U$, la différentielle de f en (x_0, y_0) est une forme linéaire : $d_{(x_0,y_0)}f \in (\mathbb{R}^2)^*$. Avec les notations ci dessus on a

$$d_{(x_0,y_0)}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

Remarque : Si au lieu de (x, y) on note (x_1, x_2) les formes linéaires se notent dx_1 et dx_2.

Si on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, (e_1, e_2) s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on note alors dx_1 et dx_2 par e_1^* et e_2^*. (e_1^*, e_2^*) est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$ que l'on appelle la base duale de (e_1, e_2).

C - Formes différentielles de degré 1

Exemple : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U. L'application

$$\begin{aligned} df \ : \ U &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* \\ (x_0,y_0) &\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy \end{aligned}$$

s'appelle une forme différentielle de degré 1 sur U : c'est une application de U dans $(\mathbb{R}^2)^*$ (le dual de $\mathbb{R}^2$).

Définition 6.8. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle forme différentielle sur U toute application

$$\begin{aligned} \omega : U &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* \\ (x,y) &\longrightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy \end{aligned}$$

où P et Q sont deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

• On dit que la forme différentielle ω est de classe C^k $(k \geqslant 0)$, si les fonctions P et Q sont de classe C^k. On note $C^k(U, (\mathbb{R}^2)^*)$ l'ensemble des formes différentielles de classe C^k sur U.

• Si il existe une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\omega = df$$

on dit que la forme différentielle est exacte.

Exemple : Soit ω_0 la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\omega_0(x, y) = 2y\,dx + (2x + e^y)\,dy$. On introduit les fonctions P et Q définies sur $\mathbb{R}^2$ par $P(x, y) = 2y$ et $Q(x, y) = 2x + e^y$.

S'il existe f telle que $\omega_0 = df$ sur $\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 2y$. D'où $f(x,y) = 2yx + g(y)$, g étant une fonction dérivable de y. On en déduit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + g'(y)$.
On cherche f telle que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, soit $2x + e^y = 2x + g'(y)$. Donc $g(y) = e^y + cte$.
La fonction $f: \ (x,y) \mapsto 2yx + e^y + cte$ est telle que $\omega_0 = df$. ω_0 est exacte.

Propriété 6.9. *Si la forme différentielle de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} \omega : U &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* \\ (x,y) &\longrightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy \end{aligned}$$

est exacte alors pour tout $(x,y) \in U$: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$

Preuve : c'est une conséquence du théorème de Schwarz.

Définition 6.10. Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que ω est fermée si $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Exemple : Sur $\mathbb{R}^2$ on a $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2$. Donc ω_0 est fermée sur $\mathbb{R}^2$.

D'après la proposition précédente, toute forme différentielle exacte $\omega \in C^1(U, (\mathbb{R}^2)^*)$ est fermée.

La réciproque est fausse en général :
Il existe des formes différentielles fermées qui ne sont pas exactes : il faut des conditions supplémentaires sur la topologie de U pour que la réciproque soit vraie.

Nous avons besoin de la notion suivante :
Une partie $X \in \mathbb{R}^2$ est étoilée si il existe un point $A \in U$ tel que pour tout point $M \in U$ le segment $[AM]$ est inclus dans U.
Un disque est une partie étoilée : il suffit de prendre pour point A le centre du disque.
Un demi-plan est une partie étoilée : il suffit de prendre pour point A l'origine.
Une couronne n'est pas une partie étoilée : quel que soit le point A de la couronne, le point M diamétralement opposé à A est tel que l'origine appartient au segment $[AM]$: ce segment n'est donc pas inclus dans la couronne.

Théorème 6.11. Théorème de Poincaré
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur U. Pour que ω soit exacte il faut et il suffit que ω soit fermée sur U.

D - Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Définition 6.12. Soit $\gamma = ([a,b], \vec{F})$ un arc paramétré compact de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \vec{F} : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

et $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 et de classe C^0 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant le support de l'arc paramétré γ. L'intégrale

$$\int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right) dt$$

est appelée intégrale curviligne de ω le long de l'arc $([a,b], \vec{F})$, on la note $\displaystyle\int_\gamma \omega$

Théorème 6.13. *Si ω est une forme différentielle exacte et $f : U \to \mathbb{R}$ vérifie $\omega = df$ alors*

$$\int_\gamma \omega = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(B) - f(A)$$

où $A = (x(a), y(a))$ et $B = (x(b), y(b))$ sont les extrémités de l'arc γ.

E - Circulation d'un champ de vecteurs

- Soient un champ de vecteur

$$\begin{aligned} \vec{V} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

et une courbe paramétrée régulière γ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

On associe au champ de vecteurs $\vec{V}$ la forme différentielle

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

qui peut s'interpréter comme le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$ et (dx, dy, dz), on lui donne le nom de travail ou de circulation élémentaire.

- L'intégrale curviligne

$$\int_\gamma \vec{V}.d\vec{M} = \int_\gamma \omega$$

s'appelle la circulation du champ de vecteurs $M \longrightarrow \vec{V}(M)$ le long de γ. Elle est indépendante du paramétrage, elle ne dépend que de la courbe.

Lorsque le champ de vecteurs représente un champ de forces, la circulation représente le travail total de la force lors de son déplacement le long de γ.

- Un champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\ f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$

Si $\vec{V}$ dérive d' un potentiel scalaire f, alors le travail de $\vec{V}$ le long d'une courbe continue ne dépend que de l'origine A et de l'extrémité B de cette courbe :

$$\int_\gamma \vec{V}.d\vec{M} = \int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$$

F - Exercices

F - 1 Formes différentielles de degré 1

$\boxed{59}$

1. Déterminer la différentielle en $A(1,1)$ de f définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Comparer $f(1.02, 1.01) - f(1,1)$ et $d_{(1,1)}f(0.02, 0.01)$.

2. Soit g l'application définie sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $g(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$.
Déterminer la différentielle de g en $M(x,y) \in U$.

$\boxed{60}$

1. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = ydx + xdy$ est fermée.
Vérifier qu'il existe une fonction f définie sur U dont la différentielle est ω.

2. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = xdx + ydy$ est fermée.
Vérifier qu'il existe une fonction f définie sur U dont la différentielle est ω.

3. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = ydx - xdy$ n'est pas exacte.

4. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par $\omega(x,y) = \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ est fermée.
Montrer qu'elle est exacte.

5. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}$ par

$$\omega(x,y) = \frac{1}{y^3}\left[(3x^2+y^2)ydx - 2x^3dy\right]$$

est fermée. Montrer qu'il existe f telle que $\omega = df$.

6. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par

$$\omega(x,y) = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

est fermée mais qu' **elle n'est pas exacte sur** U .

F - 2 Intégrales curvilignes

$\boxed{61}$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$3ydx - 4x^2ydy$$

sur γ, où γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points $(-1,0)$ à $(0,3)$, $(0,3)$ à $(3,-3)$ et $(3,-3)$ à $(3,-5)$.

$\boxed{62}$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$2xydx + (x^2 + 3)dy$$

1. sur γ, où γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points $A(-1, 0)$ à $B(0, 3)$, B à $C(3, -3)$.

2. sur γ, où γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points A à B, B à C et C à A.

$\boxed{63}$

1. Calculer $I = \int_C (2x - y)dx + (x + y)dy$ où C est le cercle de centre $O(0, 0)$ de rayon R décrit dans le sens direct à partir du point $A(R, 0)$.

2. Calculer $I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ où C est la courbe constituée des deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct. On calculera l'intégrale curviligne le long de ces deux arcs d'extrémités $O(0, 0)$ et $A(1, 1)$.

3. Calculer $I = \int_C \ln(x + 1)dx + y^2dy$ où C est la courbe d'origine $A(0, 0)$, d'extrémité $B((1, 0)$ et d'équation $y = (x - 1)\ln(x + 1)$.

$\boxed{64}$

Calculer l'intégrale curviligne (la circulation) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $\overrightarrow{V}(x, y) = (y, -x)$ sur le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

7 Formulaires

Fonctions	*Dérivées*	*Intervalles*
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ *si* $n \geqslant 0$; $\mathbb{R}^*$ *sinon*
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{Arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$

Fonction	*Développement limité au voisinage de* 0
e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\mathrm{ch}(x)$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\mathrm{sh}(x)$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})$
$\cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

8 Annales

Pour tous les sujets : Durée : 1h20 –Documents : Non autorisés. Les exercices d'un même sujet sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A - Juin 2013 - sujet corrigé

Exercice 1.

1. Donner le développement limité de $\cos(x + x^2)$ au point 0 à l'ordre 4.
2. Donner le développement limité de $(x - 1)(2 + \ln(1 + 2x))$ au point 0 à l'ordre 4.

   On considère maintenant la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t + t^2) \\ y(t) = (t - 1)(2 + \ln(1 + 2 * t)) \end{cases}$$

3. Montrer que 0 est un point stationnaire de la courbe paramétrée.
4. Utiliser ce qui précède pour effectuer le tracé de la courbe au voisinage du point $t = 0$.

Exercice 2.
On considère la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) - \cos(t)^2 \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

1. *Question préliminaire :* Pour $t \in [0, \pi]$, résoudre l'inégalité $2\cos(t) - 1 > 0$.
2. Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
3. Donner le tableau de variations de $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, \pi]$.
4. Déterminer les points de la courbe admettant une tangente horizontale et ceux admettant une tangent verticale.
5. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 3. On considère γ la courbe correspondant au quart de cercle de centre 0 et de rayon 2 joignant le point $A = (2, 0)$ au point $B = (0, 2)$.

Soient w_1 et w_2 les formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$w_1(x, y) = (2xy + 1)dx + (x^2 + 2y)dy,$$

$$w_2(x, y) = x^2dx + 2xydy.$$

1. Les formes différentielles w_1 et w_2 sont-elles fermées sur $\mathbb{R}^2$? sont-elles exactes sur $\mathbb{R}^2$? Dans le cas où la forme considérée est exacte, donner la fonction dont elle est la différentielle.
2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma w_2$.
3. Que vaut $\displaystyle\int_\gamma w_1$?

B - Mars 2008

Barème indicatif : 5+8+7=20

Exercice 1 On se propose de trouver le développement limité à l'ordre 10 en 0 de la fonction f définie par $\dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ exclusivement par la méthode de l'équation différentielle.

1. Montrer que sur $]-1,1[$, f vérifie l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'(x) = 1 + xy(x).$$
2. Donner les raisons pour lesquelles f admet un développement limité à l'ordre 10 en 0 de la forme
$$f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + x^{10}\varepsilon_1(x)$$
où a, b c et d sont des constantes réelles et ε_1 est une fonction nulle et continue en 0.
3. Donner les raisons pour lesquelles f' admet un développement limité à l'ordre 9 au voisinage de 0 de la forme
$$f'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + x^9\varepsilon_2(x)$$
où ε_2 est une fonction nulle et continue en 0.
4. Trouver le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $f(x)$.

Exercice 2 Trouver par la méthode de votre choix le développement limité à l'ordre 12 en 0 de
$$g(x) := \sqrt{1+\sin(x^2)}$$

Exercice 3 On considère la fonction h définie par
$$h(x) := x\, e^{\frac{2}{x}} - 1.$$

1. Montrer que h admet un développement asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$ de la forme :
$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$$
où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$. Les valeurs numériques des constantes réelles a, b, c doivent être données.
2. En déduire que la courbe représentative de h possède des droites asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner leurs équations.
3. Déterminer la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

FIN

C - Juin 2008

Exercice 1. 1) Donner les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\tan x$.

2) Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(1+\cos x)\; - \;2\tan x}{2x - \sin x\; - \;\tan x}.$$

Exercice 2. On considère la forme différentielle $\omega(x,y) = \dfrac{2x}{y}\,dx \, - \, \left(\dfrac{x^2}{y^2} \, + \, 2y\right)\,dy$ définie sur $U = \{(x,y) \,|\, y > 0\,\}$.

1) Montrer que ω est fermée sur U.

2) La forme ω est-elle exacte sur U ? Justifier la reponse.

3) Trouver une fonction F telle que $d\,F = \omega$ (primitive de ω).

4) Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ où Γ est une courbe d'origine $(1,1)$ et d'extremité $(6,3)$.

Exercice 3. On propose ici d'étudier la courbe Γ définie par l'équation paramétrique $f(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t}$ et $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

1) Donner le tableau de variations de $x(t)$ et $y(t)$. Précisez bien le domaine de définition de la courbe.

2) Etudier Γ au voisinage de $t = 1$ et $t = -2$. Déterminer la nature des points $f(1)$ et $f(-2)$.

3) Déterminer les points de la courbe admettant une tangente horizontale.

4) Montrer que les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires si et seulement si $t = 1$ ou $t = -2$. (Indication : utiliser le fait que deux vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont colinéaires si et seulement si $x_1 y_2 = x_2 y_1$, puis résoudre une équation en t.) En déduire que Γ est régulière en t si $t \neq 1, -2$.

5) Etudier la concavité de Γ.

6) Etudier les branches infinies de Γ (présence d'asymptotes).

7) Tracer la courbe Γ.

FIN

D - Deuxième session 2008

Exercice 1

1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction numérique f définie sur un intervalle $[a, b]$.

2. Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Montrer que : $0 \leqslant \frac{1-\cos x}{x} \leqslant \sin x$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\sqrt{1+u}$.

2. Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$$

3. En déduire que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une droite asymptote dont on donnera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette droite au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3

Soit Γ la courbe plane définie par la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ et les points $M_0 = (x(0), y(0))$, $M_{\frac{\pi}{4}} = (x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4}))$.

1. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point M_0. Même question pour le point $M_{\frac{\pi}{4}}$.

2. Donner l'équation de la tangente à la courbe Γ au point M_0 et au point $M_{\frac{\pi}{4}}$.

3. Quelle est la nature du point M_0 ? Et celle de $M_{\frac{\pi}{4}}$?

Exercice 4

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\omega(x, y) = (x^2 - 2y)dx + (y^2 - 2x)dy$

1. La forme ω est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$?

2. Trouvez une fonction F telle que $dF = \omega$.

FIN

E - Juin 2009

Exercice 1.

1. Calculer : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$

2. Faire un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de : $e^{\sin x}$

Exercice 2.

Soit Γ la courbe plane définie par la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ \\ y(t) = t + \dfrac{4}{t} \end{cases}$

3. Donner le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$. Précisez le domaine de définition de la courbe.

4. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $M(x(-1), y(-1))$.

5. Déterminer la nature du point $M(x(2), y(2))$. Préciser un vecteur directeur de la tangente à Γ en ce point. Donner l'allure de la courbe au voisinage de $M(x(2), y(2))$ dans un repère approprié à définir.

6. Déterminer les points de la courbe admettant une tangente horizontale.

7. Etudier les branches infinies de Γ. En présence d'asymptote précisez la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

8. Tracer la courbe Γ.

Exercice 3.

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x,y) = 2y\,dx + (2x + e^y)\,dy$$

9. La forme ω est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2$?

10. La forme ω est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$?

11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 2xy + e^y$.

a. Montrer que $\omega = df$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. En déduire l'intégrale curviligne de ω sur le segment d'extrémités $A(0,1)$ et $B(1,0)$.

FIN

F - Juin 2009

Exercice 1
1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie pour $|x| \leqslant 1$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction g définie pour $|x| \leqslant 1$ par $g(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$.

3. En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1-x^2}} - e}{x^2}$$

Exercice 2
On considère la forme différentielle

$$\omega = 3(x^2 - y)dx + 3(y^2 - x)dy.$$

1. Montrer que ω est fermée sur R^2.

2. La forme ω est-elle exacte sur R^2 ? Justifier la réponse.

3. Trouver une primitive F de ω, c'est à dire $\omega = dF$.

4. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$ où γ est une courbe d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$

Exercice 3 Soit Γ la courbe plane définie par la paramétrisation

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

1. Préciser le domaine de définition de la courbe et donner le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$.

2. Déterminer la nature du point $M(x(1),\ y(1))$. Donner l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

3. Quels sont les points de la courbe admettant une tangente horisontale ?

4. Montrer que la courbe admet une asymptote quand $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. Préciser son équation. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

FIN

G - Mars 2012 -corrigé

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty)$ par $f(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{2+x}$.

1. Donnez le tableau de variation de f.
2. En déduire les extrema locaux et globaux de f sur $[0, +\infty)$. (On précisera leur nature)

Exercice 2.

1. Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

2. Soit $x \geqslant 0$, montrer l'inégalité

$$1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+x)^5} \leqslant f(x) \leqslant 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange à un ordre bien choisi.

3. A partir de l'inégalité précédente, trouver un réel a (le plus grand possible) tel que l'inégalité

$$\left| f(x) - \left(1 - x + x^2 - x^3\right) \right| \leqslant 10^{-6}$$

soit satisfaite pour tout $x \in [0, a]$.

$\boxed{65}$

1. Donner le développement limité de $\exp(x)$ au point 0 à l'ordre n.
2. Donner le développement limité de la fonction

$$f(x) = \exp(2 + 2x - x^2)$$

au point 0 à l'ordre 3.

3. Donner l'équation de la tangente et la position de la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$ et représenter sommairement la courbe de f au voisinage de 0.

Exercice 3.

1. Calculer la limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln(1 + x^2)}.$$

2. *Bonus :* Calculer la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2.$$

FIN

H - Juin 2012

Exercice 1.

1. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au point 0 à l'ordre n. En déduire le développement limité de $\ln(2+x)$ au point 0 et à l'ordre n.
2. Donner le développement limité au point 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

3. Donner l'équation de la tangente et la position de la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$ et représenter sommairement la courbe de f au voisinage de 0.

Exercice 2.
On considère la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1. Donner le tableau de variations de $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminer les points stationnaires de la courbe.
3. Réaliser l'étude locale de la courbe en $t = 1$.
4. Déterminer les points de la courbe admettant une tangente horizontale.
5. Montrer que quand t tend vers 0^+ et 0^-, la courbe admet une asymptote que l'on précisera. Préciser aussi la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
6. Etudier les branches infinies quand $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$..
7. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 3.
On considère γ la courbe fermée du plan constituée de l'arc parabole $y = x^2$ et de la portion de droite d'équation $y = x$ joignant les points $O(0, 0)$ et $A(1, 1)$ et parcourue dans le sens direct.
Soient w_1 et w_2 les formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$w_1(x, y) = 2xydx + (2x + y^2)dy,$$

$$w_2(x, y) = 2xydx + (x^2 + 2y)dy.$$

1. Les formes différentielles w_1 et w_2 sont-elles fermées sur $\mathbb{R}^2$? exactes sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma w_1$.
3. Que vaut $\displaystyle\int_\gamma w_2$?

FIN

I - Correction du DS de mars 2012

Solution de l'exercice 1
1. On calcule la dérivée de $x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-1}$ (dérivée d'un produit) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} \times (2+x)^{-1} - 2x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-1} - x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-2} \\ &= \frac{(1-2x)(2+x)-x}{(2+x)^2} e^{-2x} \\ &= 2\frac{1-2x-x^2}{(2+x)^2} e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, f' est du signe de $1-2x-x^2$ dont les racines sont $-1+\sqrt{2} > 0$ et $-1-\sqrt{2} < 0$ donc $1-2x-x^2 = -(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$. Comme on n'étudie f que sur $[0,+\infty)$, seul le deuxième facteur change de signe, donc

x	0		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{2}-1)$	$\searrow$	0

2. Ainsi f a un maximum global en $\sqrt{2}-1$ et un minimum global en 0.

Solution de l'exercice 2
1. f est définie tant que $1+x \neq 0$ donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. De plus $f(x) = (1+x)^{-1}$ donc $f'(x) = -(1+x)^{-2}$ puis $f''(x) = +2(1+x)^{-3}$, $f^{(3)}(x) = -2\times 3(1+x)^{-4}$, et $f^{(n)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.
2. On en déduit que $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4, pour tout $x \geqslant 0$, il existe $c \in [0,x]$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + (1+c)^{-5}x^4. \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant c \leqslant x$ et $x^4 \geqslant 0$, $(1+x)^{-5}x^4 \leqslant (1+c)^{-5}x^4 \leqslant x^4$. On en déduit bien que

$$1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+x)^5} \leqslant f(x) \leqslant 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

3. On déduit de cette inégalité que $|f(x) - (1-x+x^2-x^3)| \leqslant x^4$, donc $|f(x)-(1-x+x^2-x^3)| \leqslant 10^{-6}$ sur $[0,a]$ si $a^4 \leqslant 10^{-6}$ soit $a \leqslant 10^{-6/4} = 10^{-3/2}$.

Solution de l'exercice 3
1. D'après le cours

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
2. On a $\exp(2+2x-x^2) = e^2\exp(2x-x^2) = e^2e^t$ avec $t = 2x - x^2 \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(2+2x-x^2) &= e^2\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) + o(t^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x - x^2 + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!}\right) + o(x^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x - x^2 + \frac{4x^2-4x^3}{2} + \frac{2^3x^3}{{}^2\times 3}\right) + o(x^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) + o(x^3). \end{aligned}$$

3. Ainsi, la tangeante à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$ est la droite d'équation $y = e^2(1 + 2x)$ (termes d'ordre $\leqslant 1$ dans le DL) et la courbe est au-dessus de la tangeante (terme suivant dans le DL : $e^2x^2 \geqslant 0$).

Solution de l'exercice 4
1. On a une forme indéterminée $0/0$, on fait donc des DL au premier ordre non nul :

$$\begin{array}{rcllll}
\sin x & = & & x & & -\frac{x^3}{3!} & +o(x^3) \\
\cos x & = & 1 & & -\frac{x^2}{2!} & & +o(x^3) \\
x\cos x & = & & x & & -\frac{x^3}{2!} & +o(x^3) \\
\hline
\sin x - x\cos x & = & & & & \frac{x^3}{3} & +o(x^3) \\
\ln(1+x) & = & & x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} & +o(x^3) \\
\ln(1+x^2) & = & & & x^2 & & +o(x^3) \\
x\ln(1+x^2) & = & & & & x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

Ainsi

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x\ln(1+x^2)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)}{x^3 + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{1/3 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)} \to \frac{1}{3}$$

puisque $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
2. En posant $t = 1/x$, on voit qu'on veut la limite quand $t \to 0^+$ de

$$\frac{1}{t^3}\sin t - \frac{1}{t^2} = \frac{\sin t - t}{t^3}.$$

Mais, le développement limité à l'ordre 3 de $\sin t - t = t - \frac{t^3}{3!} - t + t^3\varepsilon(t) = -\frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ donc

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!} + \varepsilon(t) \to -\frac{1}{3!}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 = -\frac{1}{3!}.$$

J - Correction du DS de juin 2013

Solution de l'exercice 1
1. D'après le théorème de composition des développements limités

$$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{1}{2!}(x+x^2)^2 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3).$$

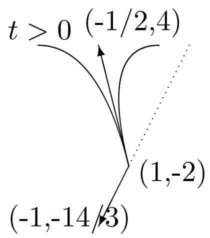
2. D'après le théorème de produit des développements limités

$$\begin{aligned}(x-1)(2+\ln(1+2x)) &= (x-1)(2+2x-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3}(2x)^3)+o(x^3)\\ &= 2x+2x^2-2x^3-2-2x+2x^2-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\\ &= -2+4x^2-\frac{14}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

3. D'après les calculs précédents

$$(x(t),y(t)) = (1,-2)+(-1/2,4)t^2+(-1,-14/3)t^3+o(t^3). \tag{8.1}$$

En particulier, $x'(0) = y'(0) = 0$ donc 0 est bien un point stationnaire.
4. D'après la question 3, on a un point de rebroussement de première espèce ($p = 2$, $q = 3$ dans les notations du poly).

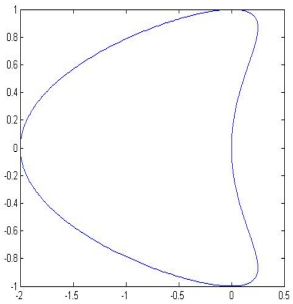


Solution de l'exercice 21. $2\cos(t) > 1$ si et seulement si $\cos(t) > 1/2 = \cos(\pi/3)$. Comme cos est décroissante sur $[0,\pi]$ ceci équivaut à $0 \leqslant t < \pi/3$.**2.** Comme $x(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) - \cos(t+2\pi)^2 = \cos(t) - \cos(t)^2 = x(t)$ et $y(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin(t) = y(t)$, x et y sont 2π-périodiques . On peut donc restreindre l'étude à n'importe quel intervale de longueur 2π, disons $]-\pi,\pi]$.

Comme $x(-t) = \cos(-t)-\cos(-t)^2 = \cos(t)-\cos(t)^2 = x(t)$ et $y(-t) = \sin(-t) = -\sin(t) = -y(t)$ on peut restreindre l'étude à $[0,\pi]$, le restant de la courbe s'en déduit par une symétrie d'axe Ox.
3. $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t)\sin(t) = \sin(t)(2\cos(t)-1)$ et sur $]0,\pi[$, $\sin(t) > 0$, on déduit le signe de x' de la question 1. Par ailleurs, $y'(t) = \cos(t)$. Le tableau de variation est donc donné par

t	0		$\pi/3$		$\pi/2$		π
$x'(t)$	0	+	0	-	-1	-	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2
$y'(t)$	1	+	$\frac{1}{2}$	+	0	-	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. La courbe admet une tangente horizontale si $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ donc pour $t = \pi/2$ *i.e.* au point $(0,1)$. La courbe admet une tangente verticale si $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ donc pour $t = 0$, $t = \pi/3$ et $t = \pi$ soit aux points $(0,0)$, $(1/4,\sqrt{3}/2)$ et $(-2,0)$.
5. On en déduit la courbe



Solution de l'exercice 3
1. Écrivons pour $i = 1, 2$ $\omega_i(x, y) = P_i(x, y)\,\mathrm{d}x + Q_i(x, y)\,\mathrm{d}x$ avec

$$P_1(x, y) = 2xy + 1, \quad Q_1(x, y) = x^2 + 2y, \quad P_2(x, y) = x^2 \quad \text{et} \quad Q_2(x, y) = 2xy.$$

Comme $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$ ω_1 est fermée. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, d'après le théorème de Poincaré, ω_1 est exacte sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions cela directement. On cherche $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2xy + 1$. On en déduit qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f_1(x, y) = x^2y + x + g(y)$. On veut de plus que $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2y$ soit $x^2 + g'(y) = x^2 + 2y$. Ainsi $g'(y) = 2y$ et $g'(y) = y^2$ convient. On vérifie qu'on a bien $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$ avec $f_1(x, y) = x^2y + x + y^2$.

Par ailleurs, $\dfrac{\partial P_2}{\partial y} = 0 \neq 2y = \dfrac{\partial Q_2}{\partial x}$ donc ω_2 n'est pas fermée. A fortiori, elle n'est pas exacte.

2. La courbe γ est paramétrée par $\big(x(t), y(t)\big) = (2\cos t, 2\sin t)$, t allant de 0 à $\pi/2$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega_2 &= \int_0^{\pi/2} (2\cos^2(t) \times \underbrace{(-2\sin(t))}_{x'(t)} + 8\cos(t)\sin(t) \times \underbrace{2\cos(t)}_{y'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 8\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{8}{3}[\cos(t)^3]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

3. Comme ω_1 est exacte, $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$, $\displaystyle\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \mathrm{d}f_1 = f_1(0, 2) - f_1(2, 0) = 4 - 2 = 2.$