

Suites et séries numériques Suites et séries de fonctions

1. SUITES

Exercice 1.

- (1) Étudiez la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par récurrence par $u_0 > 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 16}{u_n - 3}$.
- (2) Déterminez la limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.
- (3) Étudiez la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2}.$$

On pourra introduire $f(t) = (1+t)^{-2}$ et $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ et montrer que

$$u_n = f(0) - f(1) + n \sum_{k=1}^n \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - nF'\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et, pour $n \geq 1$, $\alpha \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n \log \left(1 + \frac{f(t)^\alpha}{n^\alpha} \right) dt.$$

Étudier la limite de I_n .

Exercice 3. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $v_n := v_n(x)$ la suite définie par $v_0 = x$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$, $n \geq 1$.

- 1) Montrer que la suite v_n est décroissante et positive. Calculer sa limite.
- 2) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quand $n \rightarrow +\infty$

$$v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha \sim -\frac{\alpha}{6} v_n^{\alpha+2}.$$

- 3) En déduire que $v_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$.
- 4) Que peut-on dire de la série $\sum_n v_n$?
- 5) Montrer que la série $\sum (-1)^n v_n(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 4. Méthode de Laplace.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

- (1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ fixé,

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

- (2) Soit f une fonction continue en 0 (et mesurable et bornée pour que les intégrales aient un sens). Montrer

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} f(x) dx \sim f(0) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

- (3) Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant $\psi'(0) = 0$ et $\psi'(x) > 0$ pour $x > 0$, et $\psi''(0) > 0$. Montrer que

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda\psi(x)}{2}} f(x) dx \sim f(0) e^{-\frac{\lambda\psi(0)}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\psi''(0)}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Application à la fonction Gamma et la formule de Stirling.

Montrer que

$$N! = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^N dx = N^{N+1} \int_0^{+\infty} e^{-N(y-\ln(y))} dy.$$

En déduire la formule de Stirling (attention on applique ce qui précède deux fois en 1 et pas en 0):

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

Exercice 5. Suites équiréparties.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $[0; 1]$ est *équirépartie* si pour tout intervalle $[a; b] \subset [0; 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card} \{i \in \{1; \dots; n\}; u_i \in [a; b]\} = b - a.$$

- (1) Montrer en utilisant la définition que la suite $\{\sqrt{n}\}$ est équirépartie dans $[0, 1]$ avec $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire ($\{x\} = x - E(x)$ avec E la partie entière.)
- (2) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $[0; 1]$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Soit maintenant $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Montrer que dans chacun des cas suivants, on peut conclure que $f \in \mathcal{E}$.

a f est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

b f est limite simple d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ et d'une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$.

- (3) Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $(\{u_n\}) \subset [0, 1]$ est équirépartie (avec $\{u_n\}$, la partie fractionnaire de u_n).
- (ii) Pour toute fonction continue par morceaux 1-périodique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

- (ii') Pour toute fonction continue 1-périodique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

- (iii) Pour tout entier $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi m u_k} = 0.$$

Indication: On montrera que: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (ii') $\Rightarrow$ (i) puis que (ii') $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) par limite uniforme de fonction en escaliers.

(ii) $\Rightarrow$ (ii') clair.

(ii') $\Rightarrow$ (i) On considère $0 \leq a < b \leq 1$ et $\phi_{a,b}$ la fonction 1-périodique coïncidant avec $1_{[a,b]}$ sur $[0, 1]$. Pour $\varepsilon > 0$, on encadre $f_- \leq \phi_{a,b} \leq f_+$ avec f_- et f_+ linéaire par morceaux 1-périodiques de telle sorte que $\int_0^1 f_+(x) - f_-(x) dx \leq \varepsilon$.

(ii') $\Rightarrow$ (iii) clair.

- (iii) $\Rightarrow$ (ii') On utilise la densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques pour la norme uniforme (Fejer, Weierstrass).
 (4) Soit $\theta \in [0; 1]$. Montrer que la suite $(\{n\theta\})_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

2. SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 6. [Majorations et équivalents] Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) & u_n = \frac{n}{n^3+1}. & 2) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}. \quad 3) \quad u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right). \\ 4) & u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right). & 5) \quad u_n = \frac{(-1)^{n+n}}{n^2+1}. \quad 6) u_n = \frac{1}{n!}. \\ 7) & u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}. & 8) \quad u_n = \frac{n+1}{2^n+8}. \quad 9) \quad u_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)}. \end{array}$$

Exercice 7. Étude de quelques séries numériques.

- (1) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres *positifs* tels que $0 < A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Quelles sont les

valeurs possibles de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

- (2) On rappelle que $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Soit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sigma_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$. En déduire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On considère maintenant la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ obtenue de la façon suivante $b_1 = a_1 = 1$, $b_2 = a_3 = \frac{1}{3}$, $b_3 = a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = a_5 = \frac{1}{5} \dots$ i.e. on prend deux termes positifs puis un

terme négatif. $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Montrer que $S_{3n} = s_{4n} - \frac{1}{2}(s_n + s_{2n})$ et en déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge et déterminer sa valeur.

- (3) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, alors $|a_n - a_m| \geq 1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^3}$.

Exercice 8. Transformation d'Abel

On considère deux suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$. On s'intéresse à la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n v_n.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = s_n v_n - s_0 v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

- (2) Montrer que si la suite (s_n) est bornée et si la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et de limite nulle, alors la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n v_n$$

est convergente.

(3) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$$

converge.

Exercice 9. (1) Soit $a \in \mathbb{N}$, et soit $f : [a; \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que pour tout entier $n > a$, on a

$$\sum_{k=a+1}^n f(k) = \int_a^n f(t) dt + \int_a^n \{t\} f'(t) dt,$$

où $\{t\}$ est la partie décimale de t , i.e. $\{t\} = t - E(t)$.

(b) Montrer que si $\int_a^\infty |f'(t)| dt < \infty$, alors la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^\infty f(t) dt$.

(2) Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$, $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^{1+i\theta}}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Exercice 10. Formule d'Euler Mac-Laurin (Demailly p 85-88, Gourdon p 301)

(1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes (appelés polynômes de Bernoulli) vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B'_n = nB_{n-1}, n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(x) dx = 0. \end{cases}$$

On a $B_1 = x - 1/2$. Montrer que pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$. On pose $b_n = B_n(0)$ (nombre de Bernoulli).

On pose $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. Montrer que C_n vérifie les 3 conditions précédentes. En déduire que $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

On note $\tilde{B}_n(x)$ la fonction 1 périodique égale à B_n pour $x \in [0, 1[$.

(2) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en faisant des intégrations par parties successives montrer que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &= \frac{f(k)}{2} + \frac{f(k+1)}{2} + \sum_{j=2}^r (-1)^{j-1} \frac{b_j}{j!} \left(f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k) \right) \\ &\quad + (-1)^r \int_k^{k+1} f^{(r)}(x) \frac{\tilde{B}_r(x)}{r!} dx \end{aligned}$$

(3) Soit $m \leq n$ 2 entiers. Montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f(k) &= \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m)}{2} + \frac{f(n)}{2} + \sum_{j=2}^r \frac{b_{2j}}{2j!} \left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m) \right) \\ &\quad + \int_m^n f^{(2r+1)}(x) \frac{\tilde{B}_{2r+1}(x)}{(2r+1)!} dx \end{aligned}$$

(4) En déduire la valeur de la série $\sum_{k=1}^n k^3$.

(5) En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 11. Dans cet exercice $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite à termes positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

On note

$$S = \sup \left\{ \sum_{k \in F} u_k : F \subset \mathbb{N} \text{ fini} \right\}.$$

Notez qu'on peut avoir $S = +\infty$.

- (1) Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $S < +\infty$ et, dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S.$$

En déduire que si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.

(N.B. On dit que $\sum u_n$ est inconditionnellement convergente.

- (2) Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si une sous-suite des sommes partielles $(S_{n_\ell})_\ell$ a une limite.
- (3) On suppose maintenant que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite positive et *décroissante*. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.
- (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2}v_{n+1} \leq S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \leq v_n.$$

- (b) En déduire que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

- (c) Soit $\alpha > 0$. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- (d) Soit $\alpha > 0$. En déduire que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 12. (1) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}.$$

- (2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$g_n(x) = \frac{n}{1 + n(x + 1)}.$$

- (3) Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions définie, pour tout $n \geq 0$ et tout $\alpha \geq 0$, par

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}.$$

- (4) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & \text{si } x \in [0, n], \\ 0, & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Exercice 13. (1) On considère la suite de fonctions définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f dérivable, et constater que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Montrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 14. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

- (1) Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0, 1]$.
- (2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt,$$

puis déterminer la limite de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- (3) En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Exercice 15. Lemme de Cantor.

Soient $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

- (1) On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Montrer que $\lim a_n = \lim b_n = 0$.
- (2) On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ vers la fonction nulle. Montrer qu'on a encore $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Indication: on pourra considérer $\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)^2 dx$.