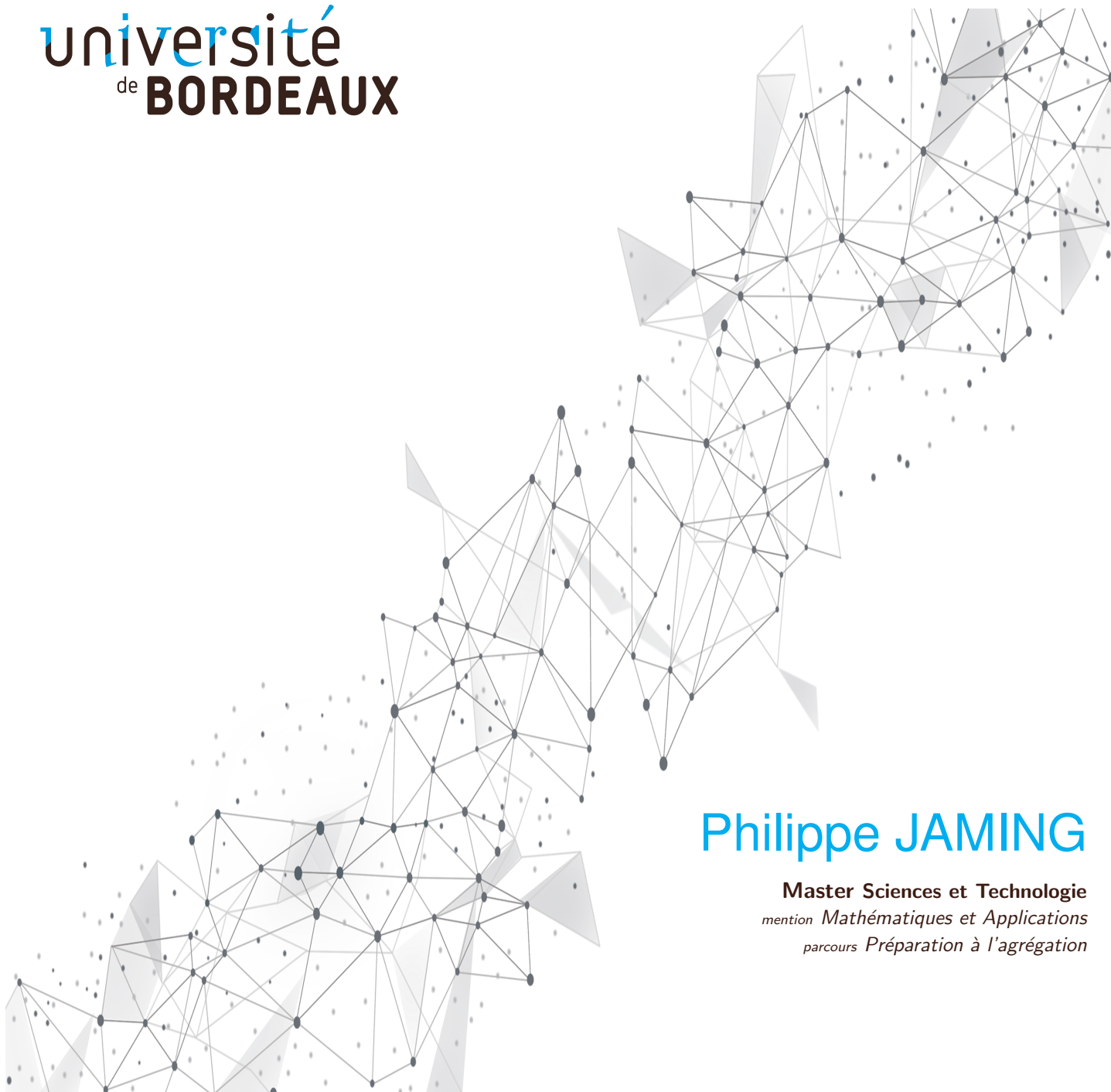




Philippe JAMING

Master Sciences et Technologie
mention Mathématiques et Applications
parcours Préparation à l'agrégation

Cours de M2
Analyse pour l'agrégation

Séries entières.

Philippe Jaming

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251

351 Cours de la Libération

F 33405 Talence cedex, France

Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr

<http://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/>

Table des matières

Chapitre 1. Séries entières	1
1. Les séries entières	1
1.1. Définitions, rayon de convergence	1
1.2. Propriétés de la somme	4
1.3. Produit de Cauchy et applications	6
2. Développements en séries entières	12
2.1. Définitions et exemples	12
2.2. La fonction exponentielle	17
2.3. Les développements en séries entières usuels	20
2.4. Développements en séries entières et équations différentielles	22
2.4.1. Principe général	22
2.4.2. Introduction à la classification des singularités d'une équation différentielle	25
2.4.3. Les fonctions hypergéométriques	26
2.4.4. La fonction d'Airy	32
2.5. Un résultat de Bernstein	42
3. Comportement au bord	43
3.1. Théorème d'Abel angulaire	43
3.2. Sommation d'Abel de séries divergentes	46
3.3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood	48
3.4. Points singuliers : le théorème de Pringsheim et le théorème des lacunes de Hadamard	53
3.5. Un théorème de Steinhaus sur les séries entières aléatoires	56
3.6. Théorème de transfert de Darboux	58
4. Séries génératrices : quelques applications combinatoires	61
4.1. Principe général et exemples simples	61
4.2. La formule d'inversion de Lagrange-Bürmann	64
4.3. Les nombres de Catalan	68
4.4. Les nombres de Bell	74
5. Résolution des exercices	77

Séries entières

Note pour les candidats à l'agrégation: Le programme

- (a) Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.
- (b) Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles

Dans ce chapitre, pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$, on notera $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert centré en z_0 et de rayon r et $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ le disque fermé correspondant. On notera $D(z_0, +\infty) = \bar{D}(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$. Les dérivées sont donc des dérivées complexes.

Nous avons fait le choix de parler de séries entières de la variable *complexe*. Il est parfois plus pratique de se restreindre à la variable réelle, il faut alors interpréter $D(z_0, R) =]z_0 - R, z_0 + R[$. Les dérivées sont alors des dérivées réelles.

1. Les séries entières

1.1. Définitions, rayon de convergence.

Definition 1.1 (Rayon de convergence)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. La série entière associée est la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Le *rayon de convergence* de cette série est

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\},$$

donc R est soit un nombre positif, soit $R = +\infty$.

Il faut comprendre qu'une série entière est a priori un objet *formel*, elle existe donc toujours, sans qu'on ne se pose *a priori* la question de sa convergence. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge évidemment pour $z = 0$ lorsque seul son premier terme n'est pas 0. Les séries entières à rayon de convergence $R = 0$ n'ont pas grand intérêt en tant que série entière. On peut évidemment s'intéresser aux séries formelles ou à la sommation des séries divergentes, mais il s'agit d'autres sujets que celui traité dans ce chapitre. Pour cette raison :

dans la suite, on supposera toujours que $R > 0$.

Notons que, si $|z| < R$, alors $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n$ donc $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si maintenant il existe z_0 tel que $a_n z_0^n \rightarrow 0$, par exemple si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. Alors, pour $r < |z_0|$, la série géométrique $\sum \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge absolument. Comme $|a_n| r^n = |a_n z_0^n| \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n = o\left(\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n\right)$, par critère de comparaison, la série $\sum |a_n| r^n$ converge.

Notons que si $a_n r^n$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum |a_n| r^n$ diverge. Le rayon de convergence s'obtient donc en prenant le sup des r pour lesquels $a_n r^n \rightarrow 0$. Résumons ces observations dans le lemme suivant :

Lemme 1.2

Soit (a_n) une suite complexe.

- (i) Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$ alors, pour tout $z \in D(0, R)$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- (ii) S'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq |z_0|$.
- (iii) Le rayon de convergence est donné par

$$R = \sup\{r \geq 0 : a_n r^n \rightarrow 0\}.$$

Soit maintenant $0 < r < R$ et $|z| \leq r$. La seconde observation est que $\sup_{z \in \bar{D}(0, r)} |a_n z^n| = O(|a_n| r^n)$, donc la série $\sum a_n z^n$ converge *uniformément* sur $\bar{D}(0, r)$. Comme ceci est vrai pour tout $r < R$, on peut donc définir une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D(0, R) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

la fonction somme de la série entière. Cet objet n'est *pas un objet formel*. Pour simplifier,

on dira dans la suite, “soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ”

voire “soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec rayon de convergence R ” pour désigner la somme de la série entière.

Exemple 1.3

- (i) La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et sa somme est

$$\begin{array}{ccc} D(0, 1) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \text{la fonction } z & \mapsto & \frac{1}{1-z} \end{array}$$

En effet, pour $z \neq 1$, on a $\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$. Lorsque $z = r$, on en déduit

que la série $\sum r^n$ converge pour $r < 1$ et diverge pour $r > 1$ donc le rayon de convergence est $R = 1$. De plus, lorsque $|z| < 1$, $z^{N+1} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, on en déduit donc la valeur de la somme.

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ avec $R = 1$. Il convient ici d'être prudent puisque la fonction

$z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est-elle définie pour tout $z \neq 1$ mais pas la somme de la série entière.

- (ii) La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme est appelée l'exponentielle. Nous ferons une étude détaillée de cette fonction dans

la section 2. Pour l'instant, vérifions simplement l'assertion sur le rayon de convergence. Cela se fait aisément avec les critères usuels. On écrit $\alpha_n = \frac{r^n}{n!}$

et on veut montrer que la série $\sum \alpha_n$ converge pour tout $r > 0$:

– avec le critère de d'Alembert : $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n!r^{n+1}}{(n+1)!r^n} = \frac{r}{n+1} \rightarrow 0$ donc la série est bien convergente ;

– ou avec le critère de Cauchy : on a $\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{r}{\sqrt[n]{n!}}$. On peut alors utiliser la

formule de Stirling pour voir que $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$, mais l'argument plus direct suivant suffit : soit $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$ selon la parité de n

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times p \times (p+1) \times \cdots \times n \geq p \times (p+1) \times \cdots \times n \geq p^p$$

donc $\sqrt[n]{n!} \geq p^{p/n}$ et comme $p \geq (n-1)/2$ on obtient bien $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\sqrt[n]{\alpha_n} \rightarrow 0 < 1$ donc la série $\sum \alpha_n$ converge.

- (iii) La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n$ a pour rayon de convergence $R = 0$. En effet, pour tout $r > 0$, $n!r^n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum n!r^n$ diverge. Cet objet est donc un objet formel puisqu'on ne pourra jamais sommer cette série (du moins au sens usuel).

Les critères de convergence sont souvent pratiques pour déterminer le rayon de convergence R d'une série $\sum a_n z^n$:

- (i) *Critère de d'Alembert* : supposons que pour tout n , $a_n \neq 0$ et que $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$

alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Ici nous adoptons la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Soit donc $r > 0$ et $\alpha_n = |a_n| r^n$. Alors $\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| r \rightarrow \ell r$. D'après le critère de d'Alembert :

– si $\ell = +\infty$, $\ell r = +\infty > 1$, la série $\sum \alpha_n$ diverge toujours donc $R = 0$;

– si $\ell = 0$, $\ell r = 0 < 1$, la série $\sum \alpha_n$ converge toujours donc $R = +\infty$;

– si $0 < \ell < +\infty$, alors la série $\sum \alpha_n$ converge si $\ell r < 1$ i.e. si $r < \frac{1}{\ell}$ et diverge

si $r > \frac{1}{\ell}$ donc le rayon de convergence est bien $R = \frac{1}{\ell}$.

- (ii) *Règle de Cauchy-Hadamard* : soit $\ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Il suffit ici d'observer que $\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{|a_n|} r \rightarrow \ell r$ et de recommencer le raisonnement précédent.

Exercice 1.4

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n z^{n^2}$ est $R = 1$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la n -ième décimale de π , $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4, \dots$ Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = 1$.

Enfin, il convient d'être prudent sur ce qui se passe quand $|z| = R < +\infty$.

Exemple 1.5

- (i) La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ mais diverge pour tout z avec $|z| = 1$.
- (ii) Avec la règle de d'Alembert, on voit aisément que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Elle diverge lorsque $z = 1$ et converge lorsque $|z| = 1$ et $z \neq 1$.
- (iii) Avec la règle de d'Alembert, on voit aisément que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Elle converge absolument lorsque $z = 1$.

Enfin terminons avec le résultat trivial mais important suivant :

Proposition 1.6

Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ des séries de rayon de convergence respectifs R_f, R_g et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + \mu g = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ avec rayon de convergence $R \geq \min(R_f, R_g)$. Si de plus $\lambda, \mu \neq 0$ et $R_f \neq R_g$ alors $R = \min(R_f, R_g)$.

DÉMONSTRATION. La série $\sum a_n z^n$ converge si $|z| < R_f$ et diverge si $|z| > R_f$ alors que la série $\sum b_n z^n$ converge si $|z| < R_g$ et diverge si $|z| > R_g$.

Enfin, la somme de deux séries convergentes converge et la somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge.

Rappelons que la somme de deux séries divergentes peut converger. ■

1.2. Propriétés de la somme. Nous allons maintenant nous intéresser à la propriété de la somme d'une série.

Pour cela observons que $z \rightarrow a_n z^n$ est continue, la somme de la série est continue sur $\bar{D}(0, r)$ et ceci pour tout $r < R$, donc la somme est continue sur $D(0, R)$.

Observons maintenant que la série dérivée (formelle) de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

est encore une série entière. Déterminons son rayon de convergence : soit $0 < r < s < R$ alors

$$|(n+1)a_{n+1}|r^n = \frac{1}{r} |a_{n+1}|s^{n+1}(n+1) \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} = o(|a_{n+1}|s^{n+1}).$$

Le théorème de comparaison des séries entières nous dit donc que $\sum |(n+1)a_{n+1}|r^n$ converge donc la série dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence $\geq R$. Si on prend $r > R$ alors $|a_{n+1}|r^{n+1} \leq r|(n+1)a_{n+1}|r^n$ et comme $\sum |a_{n+1}|r^{n+1}$ diverge, $\sum |(n+1)a_{n+1}|r^n$ également, donc la série dérivée a un rayon de convergence $\leq R$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ convergent toutes deux uniformément sur

$\bar{D}(0, r)$, la somme f est donc dérivable et sa dérivée est donnée par $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Une récurrence immédiate laissée au lecteur montre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}$. Enfin, en évaluant cette fonction en 0, on voit que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Résumons cette discussion dans le résultat suivant :

Théorème 1.7

Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, R)$ et les dérivées de f sont données par les séries entières de même rayon de convergence R

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

En particulier $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ i.e. la série entière f est la somme de sa série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

pour $|z| < R$.

Enfin, la série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a également pour rayon de convergence R et $F'(z) = f(z)$.

Insistons sur un point : les dérivées qui apparaissent ici sont des dérivations complexes, et nécessitent de connaître le cours sur les fonctions holomorphes. On peut très bien se restreindre dans un premier temps au cas de la variable réelle en remplaçant $D(0, R)$ par $] - R, R[$.

DÉMONSTRATION. Le seul point qui n'a pas encore été démontré est le dernier. Mais il découle immédiatement de la partie dérivation du théorème. On introduit simplement la série (formelle pour l'instant) $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ avec $b_0 = 0$ et $b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$ si $n \geq 1$. On note R_F son rayon de convergence et le théorème de dérivation nous dit que la série dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1} z^n$ a même rayon de convergence. On remarque enfin que $(n+1)b_{n+1} = a_n$ donc la série dérivée est la série entière f qui a rayon de convergence R . Ainsi $F' = f$ et $R_F = R$. ■

Notons enfin que, dans la définition d'une série entière, on a privilégié le point $z = 0$. On peut toujours se ramener à ce point en considérant la fonction g donnée par $g(z) = f(z_0 + z)$. La définition correspondante est la suivante :

Definition 1.8 (Fonction analytique)

Une fonction f est dite *analytique* au voisinage de z_0 s'il existe un disque $D(z_0, r)$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tel que, si $|z - z_0| < r$

alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Notons que cette définition a parfaitement un sens pour une fonction de la variable réelle. La série entière permet alors de prolonger cette fonction à un voisinage complexe de z_0 . Notons que ceci est une propriété de f au voisinage de z_0 , il est donc un peu abusif (mais commun) de dire que f est analytique en z_0 .

On sait déjà que, nécessairement, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Il est facile de construire une fonction f qui est $\mathcal{C}^\infty$ mais pas analytique. Par exemple, si on définit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Ainsi, si f était analytique au voisinage de 0 on aurait $f = 0$ sur ce voisinage, ce qui n'est clairement pas le cas.

Lemme 1.9

Soit f la somme d'une série entière (de rayon de convergence non nul), alors f est analytique au voisinage de tout point de son disque de convergence.

DÉMONSTRATION. Écrivons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$ i.e. $|z_0| < R$ et soit $z \in D(z_0, R - |z_0|)$ de sorte que $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| < R$.

Posons alors $h = z - z_0$, on a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_0^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} \mathbf{1}_{k \leq n} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{n \geq k} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k \end{aligned}$$

avec Fubini. Cela fournit le développement en série entière de f au point z_0 , à condition qu'on montre qu'on peut bien utiliser Fubini, i.e. que cette série est absolument convergente.

Ici, on utilise qu'une série entière converge absolument sur son disque de convergence et on refait le calcul à l'envers en utilisant Fubini-Tonnelli qui nous permet de toujours intervertir les

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{k} \mathbf{1}_{k \leq n} |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |h|^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|z_0| + |h|)^n < +\infty \end{aligned}$$

puisque $|z_0| + |h| < R$. ■

1.3. Produit de Cauchy et applications. Nous avons déjà vu au moment de l'introduire que le produit de Cauchy se comprend le mieux lorsqu'on considère des séries entières : Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ alors,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \right)$$

où $c_k = \sum_{m+n=k} a_m b_n$. On a de plus vu que si les sommes $\sum a_n z^n$ et $\sum b_m z^m$ sont *absolument* convergentes, ce qui est le cas à l'intérieur de leur disque de convergence, alors $\sum c_k z^k$ également. On en déduit le résultat suivant :

Lemme 1.10

Soient $a = (a_n)_{n \geq 0}$, $b = (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites complexes et R_a, R_b les rayons de convergence des séries entières associées. Soit $c = a * b = (c_k)_{k \geq 0}$ le produit de Cauchy de a et b . Alors le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum c_k z^k$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k.$$

Exemple 1.11

On a $e^{ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$ et $e^{bx} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^m}{m!} x^m$ les deux séries ayant un rayon de convergence infini. Leur produit de Cauchy aura également un rayon de convergence infini. De plus, pour $k \geq 0$,

$$\sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n=k}} \frac{a^n}{n!} \frac{b^m}{m!} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n=k}} \frac{k!}{m!n!} a^n b^m = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} = (a+b)^k$$

donc $e^{ax} e^{bx} = e^{(a+b)x}$.

Le rayon de convergence du produit de Cauchy peut être plus grand que le minimum des deux rayons de convergence :

Exemple 1.12

On a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$. Ainsi, en posant $a_n = 1$ pour tout n et $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_n = 0$ pour $n \geq 2$, alors la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_a = 1$ et la série entière $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_b = +\infty$. Par ailleurs

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m \right) = \frac{1}{1-z} (1-z) = 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

avec $c_0 = 1$ et $c_k = 0$ pour $k \geq 1$. Il s'ensuit que $c = a * b$ et que la série entière $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_c = +\infty > \min(R_a, R_b)$.

Remarque 1.13

Supposons que f soit une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et notons R_f le rayon de convergence de cette série. Alors la

série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_f, 1)$ et pour somme $\frac{f(z)}{1-z}$.

Pour cela, il suffit de remarquer que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1

et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n$ est le produit de Cauchy $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)$.

De même, si $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\tilde{R}$ alors la série

entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(\tilde{R}, 1)$ et pour somme $\frac{\tilde{f}(z)}{1+z}$.

On peut ensuite combiner cela avec d'autres opérations (dérivation, intégration...) pour obtenir une liste interminable de séries calculables. En voici une en exercice :

Exercice 1.14

Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^2}{16}.$$

Exemple 1.15

Écrivons à nouveau $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$. En faisant le produit de Cauchy de cette série avec elle-même, on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k 1 \right) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) z^k.$$

On retrouve évidemment la même formule qu'en utilisant

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}.$$

Notez qu'en recommençant, cela devient plus intéressant puisque, par le produit de Cauchy, on a

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k (j+1) \right) z^k$$

et par dérivation,

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)z^k.$$

Par suite

$$\sum_{j=0}^k (j+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \Rightarrow \sum_{j=0}^k j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

On peut évidemment continuer pour obtenir les sommes $\sum j^m$.

Exemple 1.16

Une application plus intéressante est la suivante : on a

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-z^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{3k}$$

donc, par produit de Cauchy

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{m,n \geq 0} \mathbf{1}_{2m+3n=k} \right) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} N(2,3;k) z^k$$

où $N(2,3;k)$ est le nombre de solutions de l'équation $2x + 3y = k$ dans $\mathbb{N}^2$. D'autre part, en écrivant $j = e^{2i\pi/3}$, on a la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} &= \frac{1}{(1-z)^2(1+z)(\bar{j}-z)(j-z)} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) + \frac{i}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\bar{j}}{1-(\bar{j}z)} - \frac{j}{1-(jz)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{6} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{4} z^k + \frac{i}{3\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{+\infty} (\bar{j}^{k+1} - j^{k+1}) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{6} + \frac{1+(-1)^k}{4} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2(k+1)\frac{\pi}{3}}{3} \right) z^k. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, on en déduit que

$$N(2,3;k) = \frac{k+1}{6} + \frac{1+(-1)^k}{4} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2(k+1)\frac{\pi}{3}}{3}.$$

Par exemple

$$N(2,3;0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = 1$$

et plus généralement

k	$\frac{k+1}{6}$	$\frac{1+(-1)^k}{4}$	$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2(k+1)\frac{\pi}{3}}{3}$	$N(2, 3; k)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
1	$\frac{2}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	1
3	$\frac{4}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	1
4	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1
5	1	0	0	1
6	$1 + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2
7	$1 + \frac{2}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	1

Notez que pour $k \geq 6$, la formule montre que $N(2, 3; k) \geq 1$ et que $N(2, 3; k) \sim \frac{k}{6}$ quand $k \rightarrow +\infty$.

On peut généraliser cette dernière asymptotique.

Théorème 1.17

Soit $a_1 < \dots < a_m$ des nombres entiers globalement premiers entre eux et soit $N(a_1, \dots, a_m; k)$ le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^m$ de l'équation $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = k$. Alors, quand $k \rightarrow +\infty$,

$$N(a_1, \dots, a_m; k) \sim \frac{1}{a_1 \cdots a_m} \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}.$$

DÉMONSTRATION. L'idée est d'écrire la série génératrice de $N(a_1, \dots, a_m; k)$ comme une fraction rationnelle à l'aide d'un produit de Cauchy, comme ce que nous avons fait pour le cas le plus simple $N(2, 3; k)$.

On introduit donc, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x^{a_j}} = \prod_{j=1}^m \sum_{k_j=0}^{+\infty} x^{a_j k_j} = \sum_{k_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{+\infty} x^{a_1 k_1 + \cdots + a_m k_m} \\
 (1.1) \quad &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ a_1 n_1 + \cdots + a_m n_m = k}} 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} N(a_1, \dots, a_m; k) x^k.
 \end{aligned}$$

On écrit alors formellement le développement en fractions simples de F . Pour cela, il faut identifier ses pôles. Les racines de $1 - x^{a_j}$ sont les a_j racines a_j -ième de l'unité,

$1, e^{2i\pi/a_j}, \dots, e^{2i\pi(a_j-1)/a_j}$ et sont toutes simples,

$$x^{a_j} - 1 = \prod_{k=0}^{a_j-1} (x - e^{2ik\pi/a_j}).$$

On remarque donc que les pôles de F sont listés avec multiplicité par

$$\{e^{2i0\pi/a_j} | j = 1, \dots, m\} \cup \{e^{2ik\pi/a_j} \neq 1 : j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, a_j-1\}$$

donc 1 est un pôle d'ordre m de F . Tous les autres pôles sont d'ordre $< m$. En effet, si ω est un pôle d'ordre m , alors ω est une racine a_j -ième pour $j = 1, \dots, m$ i.e. $\omega^{a_j} = 1$.

Comme les a_j sont premiers entre eux, il existe des entiers $k_1, \dots, k_m$ tels que $\sum_{j=1}^m k_j a_j = 1$.

Mais alors

$$\omega = \omega^{k_1 a_1 + k_m a_m} = \prod_{j=1}^m \omega^{k_j a_j} = \prod_{j=1}^m (\omega^{a_j})^{k_j} = 1.$$

En écrivant $\zeta_k = e^{2i\pi/a_k}$, on peut donc écrire

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^m \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{a_k-1} (x - \zeta_k^j)}$$

où les pôles $\zeta_k^{a_j}$ sont tous d'ordre au plus $m-1$. On en déduit que le développement en éléments simples de F est de la forme

$$(1.2) \quad F(x) = \frac{\alpha}{(1-x)^m} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j}{(1-x)^j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{a_k-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\alpha_{k,j,\ell}}{(\zeta_k^j - x)^\ell}.$$

Ici $\alpha, \alpha_j, \alpha_{k,j,\ell}$ sont des nombres complexes. Il est inutile de tous les déterminer, il suffit de savoir quel sera le terme dominant dans le développement en série entière. Si on en juge par l'exemple de $N(2, 3; k)$, le terme dominant proviendra de $\frac{\alpha}{(1-x)^m}$. Nous n'avons donc

besoin de déterminer que α (il nous faudrait tous les termes pour une expression exacte).

De plus, en multipliant l'expression (1.2) par $(1-x)^m$ puis en prenant $x = 1$, on trouve

$$\alpha = \frac{1}{\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{a_k-1} (1 - \zeta_k^j)}.$$

Enfin, comme $x^n - 1 = \frac{(x-1) \sum_{j=0}^{n-1} x^j}{(x-1) \prod_{j=1}^{n-1} (x - e^{2ij\pi/n})}$, la comparaison de ces deux ex-

pressions nous donne $\prod_{j=1}^{n-1} (x - e^{2ij\pi/n}) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j$. En particulier, pour $x = 1$, on a $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - e^{2ij\pi/n}) = n$. En appliquant cela à $n = a_j$ pour chaque j et en remplaçant cela dans l'expression de α , on obtient

$$(1.3) \quad \alpha = \frac{1}{\prod_{k=1}^m a_k}.$$

On peut ensuite écrire le développement en série entière de F . Pour cela, on rappelle qu'on peut écrire

$$\frac{1}{(1-x)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_j(n) x^n$$

avec $P_j(n) = \frac{n(n+1)\cdots(n+j-1)}{(j-1)!}$. Notons que $P_m(n) = \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + o(n^{m-1})$ et que, $P_j(n) = o(n^{m-1})$ pour $j < m$. De plus, si $|\zeta| = 1$

$$\frac{1}{(\zeta - x)^j} = \frac{\bar{\zeta}^j}{(1 - \bar{\zeta}x)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_j(n) \bar{\zeta}^{n+j} x^n.$$

Le point clé ici est qu'à nouveau, si $j < m$, $P_j(n) \bar{\zeta}^{n+j} = o(n^{m-1})$. En injectant cela dans le développement en fraction rationnelles de F , on trouve que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + o(n^{m-1}) \right) x^n.$$

En comparant avec (1.1) et en injectant la valeur de α donnée dans (1.3), on trouve bien

$$N(a_1, \dots, a_m; k) = \frac{1}{\prod_{k=1}^m a_k} \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} + o(k^{m-1})$$

comme annoncé. ■

Remarque 1.18

Lorsque les a_j ne sont plus globalement premiers entre eux, la fraction rationnelle F peut avoir d'autres pôles d'ordre m . Par exemple, il est facile de voir que $N(2, 4; n) = 0$ si n est impair et que $N(2, 4; 2n) = N(1, 2; n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Cela peut aussi s'obtenir en écrivant

$$\sum_{n \geq 0} N(2, 4; n) x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}.$$

Ensuite, une décomposition en éléments donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)} &= \frac{1}{8(1-x)^2} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)^2} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{4(1-x^2)} + \frac{1}{2(1-x^2)^2} + \frac{1}{4(1+x^2)} \end{aligned}$$

dans laquelle on a regroupé les pôles de signe opposé. En utilisant les développements en séries entières usuels de $(1 \pm x)^{-1}$ et $(1-x)^{-2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} N(2, 4; n) x^n &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} x^{2j} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) x^{2j} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j x^{2j} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) (x^{4k} + x^{4k+2}). \end{aligned}$$

Par suite $N(2, 4; 2p+1) = 0$ et $N(2, 4; 4k) = N(2, 4; 4k+2) = k+1$. En particulier $N(2, 4, 2n) \sim \frac{n}{2}$ alors que la formule précédente aurait donné un équivalent en $\frac{n}{4}$.

2. Développements en séries entières

2.1. Définitions et exemples.

Definition 2.1 (Fonction développable en série entière)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est *développable en série entière* au voisinage de z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence

$R > 0$ telle que, pour $r \in \Omega \cap D(z_0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si $D(z_0, R) \subset \Omega$, on dit que f est développable en série entière sur $D(z_0, R)$.

Notons qu'en évaluant en $z = z_0$, on trouve $a_0 = f(z_0)$. Du théorème de dérivation des séries entières, on déduit immédiatement que

Lemme 2.2

Si f est développable en série entière sur $D(z_0, R)$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la série entière correspondante est la série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Exemple 2.3

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ par $f(z) = \frac{1}{a-z}$ est développable en série entière au voisinage de tout point sauf $z_0 = a$.

En effet, on remarque que si $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$ et $|h| < |a - z_0|$ alors

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{a - z_0 - h} = \frac{1}{a - z_0} \frac{1}{1 - \frac{h}{a - z_0}} = \frac{1}{a - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{h}{a - z_0} \right)^n$$

puisque $\left| \frac{h}{a - z_0} \right| < 1$. Ainsi

$$\frac{1}{a - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad \text{pour } |z - z_0| < |z_0 - a|.$$

Exemple 2.4

Il est important de garder en tête que toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne sont pas développables en séries entières. Un exemple typique est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ quand $x > 0$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 0$. Sa série de Taylor en 0 est donc la série nulle. Si f était développable en série entière au voisinage de 0, alors on aurait $f = 0$ au voisinage de 0, ce qui n'est clairement pas le cas.

Quitte à considérer $g(z) = f(z_0 + z)$, on se ramène à $z_0 = 0$. Dans la suite, tous les résultats sont donc énoncés au voisinage de 0. La première observation est que le fait qu'une fonction soit développable en série entière peut se lire directement sur une estimation de ses dérivées :

Proposition 2.5

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Alors f est développable en série entière sur $D(0, r)$ si et seulement si $R_N \rightarrow 0$ simplement sur $D(0, r)$.

Enfin, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, r)$ et s'il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $z \in D(0, r)$ et tout entier n ,

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{|z|^n}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière sur $D(0, r) \cap D(0, \rho)$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà que la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est la seule série entière pouvant correspondre à f . Mais l'hypothèse $R_N(z) \rightarrow 0$ pour $|z| < r$ nous dit que cette série converge pour ces z donc que le rayon de convergence de la série est au moins r et de plus que sa somme est f .

La réciproque est encore plus directe, si f est développable en série entière sur $D(0, r)$ alors f est la somme de sa série de Taylor sur $D(0, r)$ ce qui est la même chose que $R_N(z) \rightarrow 0$ pour $|z| < r$.

Enfin, si la dernière estimation est vérifiée, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange nous montre que

$$|R_n(z)| \leq M \frac{|z|^{n+1}}{\rho^{n+1}} \rightarrow 0$$

quand $|z| < \rho$. On utilise la première partie de la proposition pour conclure. ■

Exemple 2.6

Pour ne pas entrer dans des considérations de fonctions holomorphes, cet exemple est pour l'instant réel. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ donné par $f(x) = (1+x)^\alpha$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Notation 2.7: (Symbole de Pochhammer)

Introduisons le symbole de Pochhammer (ou factorielle descendante), pour $a \in \mathbb{C}$, et n un entier, on pose $(a)_0 = 1$ et $(a)_n = a(a-1) \cdots (a-n+1)$.

En particulier, si a n'est pas un entier négatif, $(a)_n = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}$ et si a est un

entier positif $(a)_n = \frac{a!}{(a-n)!}$ lorsque $n \leq a$ et donc $(a)_m = a!$ et si $n > a$, $(a)_n = 0$.

La série de Taylor de f est donc donnée par

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n.$$

Il reste à voir que f est bien égal à sa série de Taylor. Pour cela on utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral pour écrire

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} (\alpha)_{n+1} (1+tx)^{\alpha-n-1} dt.$$

On utilise ensuite que, pour $-1 < x < 1$ et $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq 1 - t \leq 1 + xt$ pour majorer

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \frac{|(\alpha)_{n+1}|}{n!} \int_0^1 (1 + tx)^{\alpha-1} dt.$$

On pose alors $\beta_n = |x|^{n+1} \frac{(\alpha)_{n+1}}{n!}$ et on remarque que

$$0 \leq \beta_{n+1} = |x| \frac{|n+1-\alpha|}{n+1} \beta_n.$$

Comme $|x| \frac{|n+1-\alpha|}{n+1} \rightarrow |x| < 1$, il existe $0 < \rho < 1$ et n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq \beta_{n+1} \leq \rho \beta_n$, donc $0 \leq \beta_n \leq \rho^{n-n_0} \beta_{n_0} \rightarrow 0$ ce qui montre qu'on a bien $R_n \rightarrow 0$ quand $|x| < 1$. On a donc

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad \text{avec } R = 1.$$

Quand α n'est pas un entier positif, le rayon de convergence ne peut être supérieur à 1 car la fonction n'est pas $\mathcal{C}^\infty$. Notez aussi que cela permet de définir $(1+z)^\alpha$ quand $|z| < 1$.

Proposition 2.8

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et f, g deux fonctions développables en série entière sur $D(z_0, r)$. Alors $\lambda f + \mu g$, les dérivées $f^{(k)}$ et les primitives de f sont également développables en séries entières sur $D(z_0, r)$. Plus précisément si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

alors

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Enfin, si F est une primitive de f , alors F est développable en série entière avec

$$F(z) = F(z_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

En particulier, toute fraction rationnelle est développable en série entière au voisinage de tout point qui n'est pas un pôle.

DÉMONSTRATION. La première partie découle immédiatement des propriétés générales des séries entières.

Soit maintenant f une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$. Après décomposition en éléments simples, on voit que f est combinaison linéaire de fonctions de la forme $z \rightarrow \frac{(m-1)!}{(a-z)^m}$ où a parcourt l'ensemble (fini) des pôles de f . Il suffit donc de voir que $z \rightarrow \frac{(m-1)!}{(a-z)^m}$ est développable en série entière au voisinage de tout $z_0 \neq a$. Pour cela, il suffit de constater que $z \rightarrow \frac{(m-1)!}{(a-z)^m}$ est la dérivée $m-1$ -ième de $z \rightarrow \frac{1}{a-z}$ dont on a vu plus haut qu'elle était développable en série entière au voisinage de tout $z_0 \neq a$. ■

Notons que cette démonstration est constructive, pour peu qu'on sache trouver les pôles de f puisqu'on a montré que

$$\frac{1}{(a-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{m+n}} \quad \text{pour } |z-z_0| < |z_0-a|.$$

Remarque 2.9

Si une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence R , on peut toujours poser $z = \varphi(\zeta)$ tant que $|\varphi(\zeta)| < R$ et on aura $f \circ \varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(\zeta)^n$, mais cette dernière série n'est pas une série entière en ζ , sauf si $\varphi(\zeta) = \alpha \zeta^m$ lorsqu'on trouve

$$f \circ \varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n \zeta^{mn} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \zeta^k \quad \text{où } b_k = a_{k/m} \alpha^{k/m} \text{ si } k \in m\mathbb{N} \text{ et } b_k = 0 \text{ sinon.}$$

On peut montrer que si φ est développable en série entière au voisinage de ζ_0 et f développable en série entière au voisinage de $\varphi(\zeta_0)$ alors $f \circ \varphi$ est développable en série entière au voisinage de ζ_0 . Cela nécessite de passer par les fonctions holomorphes.

Exemple 2.10

Prenons un exemple réel (pour l'instant) en considérant $\ln$: $\ln$ est développable en série entière en tout $a > 0$.

En effet, on commence par $a = 1$ et on pose $f(x) = \ln(1+x)$. On a alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. On utilise le développement en série entière de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ dans lequel on

pose $z = -x$ puis on intègre pour obtenir

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad R = 1.$$

Ensuite, on écrit $\ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ donc, si $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, on peut remplacer x par x/a dans l'expression précédente et on trouve

$$\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n} x^n \quad R = a.$$

Une application simple est la suivante : si $0 \leq x \leq 1$, la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge et on a une estimation du reste

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Le reste converge donc uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ ce qui implique que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Sa somme est donc continue sur $[0, 1]$ tout comme $\ln(1+x)$. Or on a vu que, pour $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$$

donc cette expression est aussi valable en faisant tendre $x \rightarrow 1$ ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

2.2. La fonction exponentielle. On a déjà vu que la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini donc sa somme est définie sur $\mathbb{C}$:

Definition 2.11 (Fonction exponentielle)

La fonction *exponentielle*, notée $\exp$, est définie sur $\mathbb{C}$ comme étant la somme de la série entière

$$\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Notons qu'en remplaçant z par $\bar{z}$, on obtient

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z}.$$

Une seconde observation est qu'avec le produit de Cauchy

$$\exp(a) \exp(b) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} \frac{b^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} \frac{b^{m-k}}{(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k b^{m-k} = \frac{(a+b)^m}{m!}$$

donc

$$\exp a \exp b = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^m}{m!} = \exp(a+b).$$

En particulier $\exp(a) \exp(-a) = \exp(0) = 1$ donc $\exp$ ne s'annule pas et $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.

On remarque ensuite que, si x est réel, $\exp x$ est réel. Quand $x \geq 0$, clairement $\exp(x) \geq 1$ (on somme des termes positifs) et donc $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \in (0, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} |\exp(z)|^2 &= \exp(z) \overline{\exp(z)} = \exp(z) \exp(\bar{z}) \\ &= \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\Re(z)) \\ &= (\exp \Re(z))^2. \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est positive, $|\exp(z)| = \exp \Re(z)$. Notons que cela implique que si $y \in \mathbb{R}$, $|\exp(iy)| = \exp(0) = 1$.

Comme $\frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ coïncide avec sa série dérivée. De plus $\exp(0) = 1$ donc $\exp$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$.

Enfin, si y est une solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$ alors $z = \frac{y}{\exp}$ vérifie

$$z' = \frac{y' \exp - y \exp'}{\exp^2} = \frac{y \exp - y \exp}{\exp^2} = 0$$

donc z est constante, $z(x) = z(0) = 1$ soit $y(x) = \exp(x)$. L'exponentielle est donc l'unique solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.

Ensuite, comme $y > 0$, $y' > 0$ donc y est strictement croissante. De plus, pour $x > 0$, $\exp(x) \geq x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc aussi $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \rightarrow 0$. En particulier, $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty)$. En particulier $|\exp(z)| = \exp \Re(z) \neq 1 = \exp 0$ si $\Re(z) \neq 0$.

Résumons cette discussion dans le lemme suivant :

Lemme 2.12

La fonction $\exp$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie les propriétés suivantes

- (i) pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$;
- (ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ et $|\exp(z)| = \exp \Re(z)$. De plus $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\exp$ est une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*$, strictement croissante telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$;
- (iv) $\exp$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$

Remarque 2.13

La dernière partie de ce lemme peut être prise comme définition de la fonction exponentielle mais nécessite le théorème (non trivial) de Cauchy-Lipschitz pour montrer l'existence et l'unicité de la fonction ainsi définie. Les autres propriétés sont également un peu plus difficiles à démontrer à partir de cette seule définition, le mieux est donc de montrer que cette solution est développable en série entière.

Pour cela, on peut d'abord montrer par une récurrence immédiate que $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (si y est dérivable, alors $y' = y$ est dérivable et en dérivant $y'' = y'$

est dérivable...) et que sa série de Taylor est bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Il est facile de voir que

les restes de cette série convergent vers 0 : pour $n \geq N > 2|z|$, on remarque que $\frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{|z|^N}{N!} \frac{1}{2^{n-N}}$ donc

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^N}{(N)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2 \frac{|z|^N}{(N)!} \rightarrow 0.$$

Théorème 2.14

L'exponentielle est un morphisme de groupe $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ surjectif.

DÉMONSTRATION. l'énoncé est pompeux : $\exp z \neq 0$ nous dit que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ nous dit que c'est un morphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Le seul point à démontrer est la surjectivité, *i.e.* que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(\zeta)$.

On a bien sûr envie de poser $\zeta = \ln(z)$, mais cela demande de définir $\ln$. Bien sûr, sur $\mathbb{R}_*$, c'est la fonction réciproque de l'exponentielle et on montre alors aisément que c'est la primitive de $\frac{1}{t}$ qui s'annule en 1, $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{x-1}{1+(x-1)s} ds$ avec un changement

de variable $t = 1 + (x - 1)s$. En posant $\eta(s) = 1 + (x - 1)s$ on prend le chemin le plus simple (un segment) qui relie 1 à x et alors $\ln x = \int_0^1 \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds$. L'idée est ici de faire la même chose pour x complexe :

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on définit $\eta_z(s) = 1 + (z - 1)s$, pour $t \in [0, 1]$, $\ell_z(t) = \int_0^t \frac{\eta'_z(s)}{\eta_z(s)} ds$ et $g(z) = \ell_z(1)$. Comme z n'est pas un réel négatif, η_z ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Ainsi $\ell_z(t)$ est bien défini pour tout $t \in [0, 1]$, donc $g(z)$ est bien défini. De plus η et ℓ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose alors $\varphi(t) = \eta_z(t) \exp(-\ell_z(t))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\varphi'_z(t) = \eta'_z(t) \exp(-\ell_z(t)) - \eta'_z(t) \frac{\eta'_z(t)}{\eta_z(t)} \exp(-\ell_z(t)) = 0.$$

Ainsi φ est constante, en particulier $\varphi(1) = \varphi(0)$ ou encore $z \exp(-g(z)) = 1$.

Definition 2.15 (Détermination principale du logarithme)

La fonction $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ainsi définie est appelée la détermination principale du logarithme.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, sauf précision contraire, on note $\log(z) = g(z)$.

On a donc bien $\exp(g(z)) = z$ ce qui montre que tout complexe z qui n'est pas un réel négatif s'écrit sous la forme $z = \exp(\zeta)$. En particulier, il existe $\zeta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(\zeta_i) = i$ (inutile de le chercher pour l'instant) et donc $\exp(2\zeta_i) = i^2 = -1$. Enfin, si $x > 0$, on écrit $x = \exp \ln x$ et alors

$$-x = \exp(2\zeta_i) \exp \ln x = \exp(\ln x + 2\zeta_i)$$

donc les réels négatifs sont également des exponentielles de nombres complexes. ■

Soit maintenant $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Muni de la multiplication, c'est un groupe. On vient de voir que si $z \in \mathbb{T}$, alors il existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(\zeta)$. Mais on a vu dans le lemme 2.12 qu'alors $\zeta = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{T} = \{\exp(iy), y \in \mathbb{R}\}$. De plus $\theta : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{T}, \times)$ est un morphisme de groupe continu et surjectif. On considère son noyau $\ker \theta = \{y \in \mathbb{R} : \theta(y) = 1\} = \theta^{-1}(\{1\})$ qui est donc fermé. C'est également un sous-groupe de $\mathbb{R}$ puisque $\theta(y + y') = \exp i(y + y') = \exp iy \exp iy' = 1$ et $\theta(-y) = \exp(-iy) = \frac{1}{\exp(iy)} = 1$.

Il se trouve que les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de deux types :

Lemme 2.16

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ alors, soit G est dense, soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

Si G est fermé, alors soit $G = \mathbb{R}$, soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. On considère $\alpha = \inf\{g \in G, g > 0\}$ et on distingue deux cas :

– Si $\alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$. En effet, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ et si $G \neq \alpha\mathbb{Z}$, il existe $\beta \in G \setminus \alpha\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a aussi $-\beta \in G \setminus \alpha\mathbb{Z}$ et quitte à échanger β et $-\beta$, on peut donc supposer que $\beta > 0$. Il existe alors un entier $m \geq 0$ tel que $m\alpha < \beta < (m+1)\alpha$. Mais alors $\beta - m\alpha \in G$ et $0 < \beta - m\alpha < \alpha$, ce qui contredit la minimalité de α .

– Si $\alpha = 0$ alors G est dense. En effet, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour montrer que G est dense, il suffit de montrer que I contient un élément de G . Comme $0 \in G$, il est inutile de considérer les intervalles contenant 0 donc $I \subset (0, +\infty)$ ou $I \subset (-\infty, 0)$. On ramène ce cas au premier en remplaçant I par $-I$. Ainsi $I = (a, b)$ avec $0 < a < b$ et on pose

$\ell = b - a$. Par définition de α , comme $\alpha = 0$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \ell$. Soit ensuite n un entier tel que $ng \leq a < (n+1)g$ et on remarque qu'alors $(n+1)g < ng + \ell \leq a + b - a = b$ donc $(n+1)g \in G \cap (a, b)$ et est donc l'élément cherché.

— la dernière partie en découle immédiatement, si G est fermé et dense, alors $G = \mathbb{R}$ et $a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. ■

Comme $\ker \theta$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, qui n'est pas $\mathbb{R}$ en entier puisque $-1 \in \mathbb{T}$ et il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = e^{iy_0}$ donc $y_0 \notin G$. Par suite, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Enfin notons que $y_0 \neq 0$ donc $2y_0 \neq 0$ alors que $e^{2iy_0} = 1$ i.e. $2y_0 \in G$ donc $a \neq 0$ et on peut supposer $a > 0$. En écrivant $a = 2\pi$, on a montré le résultat suivant :

Théorème 2.17

Il existe un nombre $\pi > 0$ tel que $e^{iy} = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k\pi$.

Par suite $\exp$ est $2i\pi$ -périodique.

La périodicité est simplement $\exp(z + 2i\pi) = \exp(z) \exp(2i\pi) = \exp(z)$.

On définit maintenant les fonctions trigonométriques :

Definition 2.18 (Fonctions trigonométriques)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

toutes ces séries ayant un rayon de convergence infini.

Les expressions en série entières résultent d'un calcul direct sur la somme de séries. Notons que $\cosh$ et $\sinh$ sont respectivement la partie paire et impaire de $\exp$ alors que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \Re e^{ix}$ et $\sin x = \Im e^{ix}$ puisque $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$. En particulier, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

et

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Cette dernière relation est encore vraie lorsque x est complexe : soit par unicité du prolongement holomorphe, soit en utilisant le produit de Cauchy d'abord pour $x \in \mathbb{R}$ puis en remarquant que ce sont les mêmes relations en complexe !

On peut ensuite obtenir toutes les formules trigonométriques usuelles.

2.3. Les développements en séries entières usuels. Dans cette section, nous résumons les principaux développements en série entière et esquissons leur méthode d'obtention. Ces développements sont impérativement à savoir d'autant qu'ils recouvrent les développements limités classiques.

En sommant la série géométrique

$$\sum_{n \geq 0} r^n z^n = \frac{1}{1 - rz} \quad R = 1/r$$

et, en appliquant j fois $z \frac{d}{dz}$,

$$\sum_{n \geq 0} n^j r^n z^n = \frac{r^j}{(1 - rz)^j} \quad R = 1/r.$$

En prenant $r = -1$ et en intégrant, on obtient

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad R = 1.$$

En prenant $r = -1$, en remplaçant z par z^2 , puis en intégrant, on obtient

$$\arctan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad R = 1.$$

La formule de Taylor (ou la définition de $\exp$) et les opérations de base nous donnent

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty \\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad R = +\infty \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = +\infty \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad R = +\infty \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = +\infty. \end{aligned}$$

La formule de Taylor nous donne aussi, pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \quad R = 1$$

où $(\alpha)_0 = 1$ et $(\alpha)_n = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)$ (n facteurs). En remplaçant α par $-\alpha$, on obtient

$$(1 + z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n + 1)} z^n \quad R = 1$$

et l'expression en termes de Γ est valable tant que α n'est pas un entier négatif (auquel cas, on utilise la formule du binôme de Newton et la somme est finie!).

On en déduit en particulier que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \quad R = 1$$

puis, en remplaçant x par x^2 et en intégrant

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}, \quad R = 1$$

et

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}, \quad R = 1.$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1 \\ \operatorname{argtanh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1 \end{aligned}$$

alors que $\operatorname{argcosh}$ n'est pas définie en 0.

Exercice 2.19

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.4. Développements en séries entières et équations différentielles.

2.4.1. *Principe général.* En théorie, les équations différentielles d'ordre 1 $y' - a(x)y - b(x) = 0$ avec a, b continues peuvent toutes se résoudre à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Rappelons que les solutions sont données par la *formule de Duhamel* : si A est une primitive de a

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y(0) + \int_0^x e^{-A(t)} b(t) dt \right).$$

Cette formule montre que si a et b sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ alors y est elle-même holomorphe donc développable en série entières.

Les choses se compliquent lorsqu'on veut résoudre une équation de d'ordre 2,

$$y'' - a(x)y' - b(x)y - c(x) = 0.$$

Se ramener à une équation de d'ordre 1 ne permet pas toujours de fournir des solutions lorsque a et b ne sont pas constants. On sait aussi que la principale difficulté est de trouver une solution y_1 de l'équation homogène

$$y'' - a(x)y' - b(x)y = 0.$$

On cherche ensuite une seconde solution sous la forme $y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$ (λ pas constante) et ensuite une solution de l'équation $y'' - a(x)y' - b(x)y - c(x) = 0$ par la méthode de la variation de la constante.

Les équations d'ordre 2 sont très courantes en physique (mécanique, électronique, optique...)

Notre objectif ici est de chercher une solution de $y'' - a(x)y' - b(x)y = 0$ sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ ou plus généralement sous la forme $x^r \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$. On injecte cela dans l'équation et on espère en déduire les coefficients A_n (en général via une formule de récurrence). Si c'est bien le cas, on obtient un *candidat* solution sous forme d'une série entière *formelle*. Si cette série a un rayon de convergence $R > 0$, on obtient bien une solution sur $] -R, R[$.

La méthode peut s'appliquer aux équations différentielles de tout ordre. Commençons d'ailleurs par un exemple simple d'ordre 1 :

Exemple 2.20

En guise d'exemple, regardons ce que cela donnerait pour l'équation $y' = -2xy$ avec condition initiale $y(0) = 1$:

Analyse. On cherche une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ dont on espère que le rayon de convergence R est > 0 . Alors

$$\begin{aligned} -2xy(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -2A_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -2A_{n-1} x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nA_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

On veut que $y'(x) = -2xy(x)$ donc que ces deux séries entières coïncident donc que tous les coefficients de x^n coïncident. En comparant le coefficient de x^0 , on voit obtient $A_1 = 0$ et en comparant le coefficient de x^n , $n \geq 1$ on obtient $(n+1)A_{n+1} = -2A_{n-1}$ ou encore $A_{n+2} = -2 \frac{A_n}{n+2}$.

Une récurrence immédiate donne alors $A_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} A_0$ et $A_{2n+1} = 0$, pour tout $n \geq 0$. Enfin $A_0 = y(0) = 1$. Par suite

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}.$$

Synthèse : Une observation importante est que si on connaît le rayon de convergence R de la série $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ alors tous les calculs dans la partie analyse sont valables sur $] -R, R[$. La somme de cette série sera donc bien une solution sur $] -R, R[$.

Ici, on voit immédiatement que $R = +\infty$ donc $y(x) = e^{-x^2}$ est bien solution sur $\mathbb{R}$.

Les solutions qu'on trouve de cette façon peuvent parfois être des polynômes. Les équations différentielles d'ordre 2 apparaissent d'ailleurs fréquemment en théorie des polynômes orthogonaux. Voici un exemple important

Exemple 2.21

On considère l'équation de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Analyse. On cherche une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ dont on espère que le rayon de convergence R est > 0 . Alors

$$\begin{aligned} -2xy'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -2nA_n x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)A_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)A_{n+2} x^n \end{aligned}$$

donc

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 2A_2 + 2\lambda A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2(\lambda - n)A_n + (n+1)(n+2)A_{n+2})x^n.$$

On veut que ceci soit 0 donc $A_2 = -\lambda A_0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $A_{n+2} = -2 \frac{\lambda - n}{(n+1)(n+2)} A_n$.

Nous allons à nouveau utiliser le symbole de Pochhammer (voir 2.7). Nous distinguerons les cas n pair et impair. On commence par ré-écrire $A_{2(p+1)} = -4 \frac{\frac{\lambda}{2} - p}{(2p+1)(2p+2)} A_{2p}$ d'où on déduit que

$$A_{2p} = (-1)^p 2^{2p} \frac{(\lambda/2)_p}{(2p)!} A_0$$

alors qu'en écrivant $A_{2p+1} = -4 \frac{\frac{\lambda-1}{2} - p + 1}{(2p)(2p+1)} A_{2p-1}$ on trouve

$$A_{2p+1} = (-1)^p 2^{2p} \frac{(\frac{\lambda-1}{2})_p}{(2p+1)!} A_1.$$

Rappelons que $A_0 = y(0)$ et $A_1 = y'(0)$.

On définit donc deux fonctions

$$y_p^{(\lambda)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p 2^{2p} \frac{(\lambda/2)_p}{(2p)!} x^{2p}$$

et

$$y_i^{(\lambda)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p 2^{2p} \frac{(\frac{\lambda-1}{2})_p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

et notre analyse montre que les solutions développables en séries entières sont nécessairement de la forme

$$y(x) = y(0)y_p^{(\lambda)}(x) + y'(0)y_i^{(\lambda)}(x).$$

Synthèse. On va maintenant montrer que les séries entières $y_p^{(\lambda)}$ et $y_i^{(\lambda)}$ ont un rayon de convergence infini. Le critère de D'Alembert nous donne cela immédiatement car, pour $x \neq 0$

$$\left| \frac{A_{2(p+1)}x^{2(p+1)}}{A_{2p}x^{2p}} \right| = \frac{|\lambda - n|}{(2p+1)(2p+2)} x^2 \rightarrow 0$$

donc la série $y_i^{(\lambda)}$ converge pour tout $x \neq 0$. Le raisonnement est identique pour $y_i^{(\lambda)}$.

On peut donc justifier tous les calculs et $y_p^{(\lambda)}, y_i^{(\lambda)}$ sont des solutions de l'équation de Hermite. Observons aussi qu'elles sont linéairement indépendantes car de parité opposée et forment donc une base de l'ensemble des solutions. On a ainsi montré le résultat suivant :

Proposition 2.22

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l'équation de Hermite

$$y''(x) - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et s'écrivent

$$y(x) = y(0)y_p^{(\lambda)}(x) + y'(0)y_i^{(\lambda)}(x)$$

avec

$$y_p^{(\lambda)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p 2^{2p} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)_p}{(2p)!} x^{2p}$$

et

$$y_i^{(\lambda)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p 2^{2p} \frac{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)_p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

On peut aussi observer que si λ est un entier positif pair, $\lambda = 2m$, alors $y_p^{2m} = H_{2m}$ où

$$H_{2m}(x) := \sum_{p=0}^m (-1)^p 2^{2p} \frac{(m)_p}{(2p)!} x^{2p}$$

est un polynôme pair de degré $2m$ et si λ est un entier positif impair, $\lambda = 2m + 1$, alors $y_i^{2m+1} = H_{2m+1}$ où

$$H_{2m+1}(x) := \sum_{p=0}^m (-1)^p 2^{2p} \frac{(m)_p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

est un polynôme impair de degré $2m + 1$.

Ces polynômes sont les polynômes de Hermite qui jouent un rôle important en analyse de Fourier.

2.4.2. Introduction à la classification des singularités d'une équation différentielle.

Considérons une équation différentielle d'ordre 2 de la forme

$$(2.4) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy}{dz} + p_0(z)y = 0$$

avec p_0, p_1 des fractions méromorphes.

Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ sera dit

– *ordinaire* s'il n'est pas un pôle de p_0 ni de p_1 i.e. si p_0, p_1 sont analytiques au voisinage de z_0 .

– *singulier régulier* s'il est un pôle d'ordre au plus 1 de p_1 et au plus 2 de p_0 .

– *irrégulier* dans les autres cas.

Pour l'infini, on fait un changement de variable $z = 1/w$ de sorte que

$$\frac{dy}{dz} = -w^2 \frac{dy}{dw} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = w^4 \frac{d^2 y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$$

donc l'équation devient

$$(2.5) \quad w^4 \frac{d^2 y}{dw^2} + (2w^3 - w^2 p_1(1/w)) \frac{dy}{dw} + p_0(w)y = 0.$$

On dira que ∞ est un point ordinaire, singulier régulier ou irrégulier de (2.4) si 0 est respectivement un point ordinaire, singulier régulier ou irrégulier de (2.5).

Exemple 2.23

Considérons l'équation de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

En divisant par x^2 , on obtient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2} y = 0.$$

on voit que tous les points de $\mathbb{C}$ sauf 0 sont ordinaires et que 0 est un pôle d'ordre 1 de $\frac{1}{x}$ et d'ordre 0 ou 2 (si $\alpha = 0$) de $\frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}$. Le changement de variable $t = 1/x$ conduit à

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{t^4} - \frac{\alpha^2}{t^2} \right) y = 0$$

pour laquelle $t = 0$ est un point singulier (pôle d'ordre 4 de $\frac{1}{t^4} - \frac{\alpha^2}{t^2}$). Ainsi ∞ est un point singulier de l'équation de Bessel.

Nous allons ici nous intéresser aux équations différentielles du type (2.4) qui ont exactement 3 points singuliers réguliers distincts. Un changement de variable permet de ramener une telle équation à l'équation suivante :

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \frac{dy}{dx} - aby = 0$$

appelée *équation différentielle hypergéométrique*.

On voit immédiatement que 0 et 1 sont des points singuliers en la réécrivant sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{c - (a+b+1)x}{x(1-x)} \frac{dy}{dx} - \frac{ab}{x(1-x)} y = 0.$$

Le changement de variable $t = 1/x$ conduit à

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(2 + \frac{ct - (a+b+1)}{t-1} \right) t^{-1} \frac{dy}{dt} - \frac{abt^{-2}}{t-1} y = 0$$

dans lequel 0 est bien un pôle d'ordre 1 pour le facteur de y' et 2 pour le facteur de y . Ainsi ∞ est un point singulier régulier de l'équation hypergéométrique.

2.4.3. Les fonctions hypergéométriques. Comme beaucoup de fonctions spéciales, les fonctions hypergéométriques admettent plusieurs définitions : via une série entière, comme solution d'une équation différentielle ou via une représentation intégrale. Elles ont en outre l'avantage de recouvrir nombre de cas particuliers (voir Table 1).

Definition 2.24 (Fonctions hypergéométrique)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. La *fonction hypergéométrique de Gauss* est la fonction définie par la série entière

$$(2.6) \quad {}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

où $(a)_n, (b)_n, (c)_n$ sont des symboles de Pochhammer (voir 2.7).

Notez que, si a (resp. b) est un entier négatif, cette série entière est en fait un *polynôme* de degré $-a$ (resp. $-b$ ou $\min(-a, -b)$ si les deux sont des entiers négatifs).

Lemme 2.25

Le rayon de convergence de la série (2.6) est 1 et vérifie

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} {}_2F_1(a+n, b+n, c+n; z).$$

De plus si ni a ni b ne sont pas des entiers négatifs,

- lorsque $\Re(a+b-c) < 0$, la série (2.6) converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- lorsque $0 \leq \Re(a+b-c) < 1$, la série (2.6) est semi-convergente pour tout z tel que $|z| = 1$ sauf $z = 1$
- lorsque $\Re(a+b-c) \geq 1$ la série (2.6) diverge quand $|z| = 1$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, avec la formule de Stirling,

$$(2.7) \quad \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} (1 + O(n^{-1})).$$

Comme $|n^{a+b-c-1} z^n| \rightarrow +\infty$ quand $|z| > 1$ et $|n^{a+b-c-1} z^n| \rightarrow 0$ quand $|z| < 1$, le rayon de convergence est 1.

Ensuite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1} n!} z^n \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!} z^n = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; z) \end{aligned}$$

et une récurrence immédiate permet de conclure.

Examinons maintenant le comportement de la série (2.6) quand $|z| = 1$. Tout d'abord $|n^{a+b-c-1} z^n| = n^{\Re(a+b-c)-1}$ ainsi

- si $\Re(a+b-c) \geq 1$, ce terme ne tend pas vers 0 donc la série diverge;
- si $\Re(a+b-c) < 0$, par comparaison à la série de Riemann, on conclue bien que la série (2.6) converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Il nous reste donc à voir le cas $0 \leq \Re(a+b-c) < 1$.

À nouveau le facteur $O(n^{-1})$ dans (2.7) conduit, par comparaison à une série de Riemann, à une série convergente. Écrivons $z = e^{i\theta}$, $\alpha = -a - b + c + 1$ de sorte que $0 < \Re\alpha \leq 1$. Il s'agit alors de voir le comportement de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{in\theta}.$$

Lorsque $e^{i\theta} \neq 1$, on pose $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. En particulier, $|S_n(\theta)| \leq$

$C_\theta := \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ qui est donc une suite bornée (θ fixé). Une sommation d'Abel donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} e^{in\theta} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} (S_n(\theta) - S_{n-1}(\theta)) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} S_n(\theta) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} S_n(\theta) \\ &= \frac{1}{N^\alpha} S_N(\theta) - 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) S_n(\theta). \end{aligned}$$

On a $\frac{1}{N^\alpha} \rightarrow 0$ puisque $\Re \alpha > 0$. D'autre part, en posant $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, on a $f'(t) = -\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ donc avec l'inégalité des accroissements finis

$$\left| \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) S_n(\theta) \right| \leq C_\theta |f(n) - f(n+1)| \leq C_\theta \sup_{[n, n+1]} |f'(t)| = \frac{|\alpha| C_\theta}{n^{\Re \alpha + 1}}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^{\Re \alpha + 1}}$ converge,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) S_n(\theta)$$

a une limite et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{in\theta}$ converge.

Il faut maintenant montrer que $\sum n^{-\alpha}$ diverge lorsque $0 < \Re \alpha \leq 1$. Quand α est réel, c'est une somme de Riemann déjà vue. On suppose donc que α n'est pas réel et on remarque que

$$\frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}) = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha})$ converge c'est-à-dire si la suite $n^{1-\alpha}$ a une limite (finie). Mais $|n^{1-\alpha}| = n^{1-\Re \alpha} \rightarrow +\infty$ lorsque $0 < \Re \alpha < 1$, donc la divergence est montrée dans ce cas.

Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas $\alpha = 1 + i\beta$ i.e. de montrer que $n^{i\beta} = e^{i\beta \ln n}$ n'a pas de limite. En prenant $n = n_k = [e^{k\pi/\beta}]$ de sorte que $\leq n_k \leq e^{k\pi/\beta}$ donc

$$k\pi + \beta \ln(e^{k\pi/\beta} - 1) \beta \ln n_k \leq k\pi.$$

Mais $\beta \ln(1 - e^{-k\pi/\beta}) \rightarrow 0$, on peut donc écrire $\beta \ln n_k = k\pi + \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k \rightarrow 0$ et ainsi $n_k^{i\beta} = e^{i\beta \ln n_k} = (-1)^k e^{i\varepsilon_k}$ donc $+1$ et -1 sont valeurs d'adhérence. ■

Nous allons maintenant montrer que les fonctions hypergéométriques sont aussi des solutions de l'équation hypergéométrique.

Théorème 2.26

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors l'équation hypergéométrique

$$(2.8) \quad t(1-t)y'' + (c - (a+b+1)t)y' - aby = 0$$

a pour base de solutions sur $]0, 1[$ les fonctions

$$y_1(t) = {}_2F_1(a, b, c; t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = t^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; t).$$

Notons que nous avons supposé que c n'est pas un entier donc y_1, y_2 sont bien définies et de plus y_1 est une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$ et vérifiera donc l'équation sur tout le disque (par prolongement analytique) alors que y_2 ne se prolonge pas en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 puisque c n'est pas entier.

Le cas où c est un entier est plus subtil. Notons que y_1 est bien définie tant que $c \notin \mathbb{Z}^-$ et la démonstration montrera que y_1 est bien solution quand c est un entier avec $c \geq 1$. Il en va de même pour y_2 , mais cette fois-ci, nous devons avoir $c \leq 1$ pour que cette fonction soit définie. Ainsi, lorsque c est entier, y_1 et y_2 ne sont simultanément définies que lorsque $c = 1$ et dans ce cas $y_1 = y_2$. On n'obtient donc pas une base de l'ensemble des solutions.

DÉMONSTRATION. Rappelons que dans cette démonstration c n'est pas un entier.

L'espace des solutions sur $]0, 1[$ est de dimension 2 avec Cauchy-Lipschitz. Remarquons tout de suite que y_1 et y_2 sont bien linéairement indépendantes : supposons que

$$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0 \quad t \in]0, 1[.$$

Tout d'abord, y_1 et $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, il faudrait donc que $\lambda_2 y_2$ aussi, ce qui n'est le cas que si $\lambda_2 = 0$. Ensuite, comme y_1 n'est pas la fonction nulle, on en déduit que $\lambda_1 = 0$.

Nous pourrions simplement vérifier directement que y_1 et y_2 sont bien solution pour démontrer ce théorème, mais cela n'illustrerait en rien la méthode de résolution de l'équation (2.8). Au lieu de cela nous allons d'abord chercher une solution sous la forme d'une série

entière $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$ dont on suppose le rayon de convergence $R > 0$. Alors

$$(c - (a + b + 1)t)y'(t) = c\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c(n+1)\alpha_{n+1} - \alpha_n)t^n$$

et

$$t(1-t)y''(t) = 2\alpha_2 t + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n+1)\alpha_{n+1} - n(n-1)\alpha_n)t^n$$

et, au final

$$\begin{aligned} t(1-t)y'' + (c - (a + b + 1)t)y' - aby &= c\alpha_1 - ab\alpha_0 + (2(c+1)\alpha_2 - (a + b + 1 + ab)\alpha_1)t \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)(n+c)\alpha_{n+1} - (n(a+b+1) + n(n-1) + ab)\alpha_n \right) t^n. \end{aligned}$$

Ainsi, si y est bien solution, $\alpha_1 = \frac{ab}{c}\alpha_0 = \frac{(a)_1(b)_1}{(c)_1 1!}\alpha_0$, puis

$$\alpha_2 = \frac{a + b + 1 + ab}{2(c+1)}\alpha_1 = \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}\alpha_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}\alpha_0$$

i.e. $\alpha_2 = \frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2 2!}\alpha_0$. Enfin, pour $n \geq 2$

$$\alpha_{n+1} = \frac{n(a+b+1) + n(n-1) + ab}{(n+1)(n+c)}\alpha_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(n+c)}\alpha_n$$

qui montre qu'on a $\alpha_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\alpha_0$ puisque les deux suites ont même premier terme et même relation de récurrence. On en déduit donc que les solutions développables en série entière sont nécessairement de la forme $y(t) = \alpha_0 {}_2F_1(a, b, c; t)$. Réciproquement, comme ${}_2F_1(a, b, c; t)$ est bien développable en série entière avec un rayon de convergence $R = 1$, tous les calculs ci-dessus sont justifiés et on a bien une solution.

L'idée est ensuite de chercher une deuxième solution sous la forme $y(t) = t^\sigma z(t)$ avec σ bien choisi *i.e.* de faire un changement d'inconnu. Dans ce cas

$$\begin{aligned} y(t) &= t^\sigma z(t) \\ y'(t) &= \sigma t^{\sigma-1} z(t) + t^\sigma z'(t) \\ y''(t) &= \sigma(\sigma-1)t^{\sigma-2} z(t) + 2\sigma t^{\sigma-1} z'(t) + t^\sigma z''(t) \end{aligned}$$

qu'on introduit dans (2.8) pour obtenir

$$\begin{aligned}
& t(1-t)y'' + (c - (a+b+1)t)y' - aby = t(1-t)t^\sigma z''(t) + (2\sigma(1-t) + c - (a+b+1)t)t^\sigma z'(t) \\
& \quad + (\sigma(\sigma-1)(1-t) + \sigma(c - (a+b+1)t) - abt)t^{\sigma-1}z(t) \\
& = t(1-t)t^\sigma z''(t) + (c+2\sigma - (a+b+2\sigma+1)t)t^\sigma z'(t) + (\sigma(\sigma-1+c) - (\sigma(\sigma+a+b)+ab)t)t^{\sigma-1}z(t).
\end{aligned}$$

Le choix $\sigma = 1 - c$ permet d'éliminer le terme $\sigma(\sigma-1+c)t^{\sigma-1}z(t)$ et du coup de factoriser t^σ . On obtient alors

$$\begin{aligned}
& t(1-t)y'' + (c - (a+b+1)t)y' - aby \\
& = t^{1-c} \left(t(1-t)z''(t) + (2-c - (a+b-2-2c+1)t)z'(t) - (ab + (1-c)(a+b-c+1))z(t) \right) \\
& = t^{1-c} \left(t(1-t)z''(t) + (2-c - (a-c+1+b-c+1+1)t)z'(t) \right. \\
& \quad \left. - (a-c+1)(b-c+1)z(t) \right).
\end{aligned}$$

On reconnaît donc à nouveau l'équation hypergéométrique, mais avec les paramètres $a \rightarrow a-c+1$, $b \rightarrow b-c+1$, $c \rightarrow 2-c$. Ainsi, si $z(t) = {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; t)$,

$$t(1-t)z''(t) + (2-c - (a-c+1+b-c+1+1)t)z'(t) - (a-c+1)(b-c+1)z(t) = 0$$

et $y(t) = t^{1-c}z(t)$ est bien solution de l'équation (2.8). ■

Passons maintenant à la représentation intégrale :

Théorème 2.27 (Euler)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $\Re(c) > \Re(b) > 0$. Alors, pour $|z| < 1$

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt.$$

En particulier, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(z) < 1$.

Notons que cette formule dissymétrise les rôles de a et de b , à la fois dans les hypothèses (pas de restriction sur a , mais une restriction sur b et c) et dans la formule où

DÉMONSTRATION. On fixe z avec $|z| < 1$ et alors, pour $t \in [0, 1]$, on écrit

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n z^n$$

et on remarque que cette série converge normalement sur $[0, 1]$ puisque $|zt| < |z|$ et $\sum \frac{|(a)_n|}{n!} |z|^n$ converge. On peut donc multiplier par $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}$ et intégrer terme à terme pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n B(b+n, c-b)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n \Gamma(b+n) \Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n) n!} z^n
\end{aligned}$$

en reconnaissant une fonction β . En se rappelant que $(b)_n = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}$ et une formule identique pour $(c)_n$ on obtient bien

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b, c; z)$$

comme annoncé. Le prolongement analytique est maintenant évident : la fonction $\zeta \rightarrow (1-\zeta)^{-a}$ est holomorphe sur le demi-plan $H = \{\zeta \in \mathbb{C} : \Re(\zeta) < 1\}$. Mais si O est un ouvert relativement compact de H $\tilde{O} := \{t\zeta : t \in [0, 1], \zeta \in \tilde{O}\}$ est un compact d'intérieur non vide inclus dans H ($\tilde{O}$ est le cône fermé issu de 0 généré par O). En particulier

- pour tout $t \in [0, 1]$, $z \rightarrow (1-tz)^{-a}$ est holomorphe sur O
- $(t, z) \rightarrow (1-tz)^{-a}$ est uniformément bornée sur $[0, 1] \times \tilde{O}$: il existe C_O tel que $|(1-tz)^{-a}| \leq C_O$ pour $t \in [0, 1]$, $z \in \tilde{O}$.

Mais alors, comme $\Re(c) > \Re(b) > 0$,

$$|t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}| \leq C_O t^{\Re(b)-1} (1-t)^{\Re(c)-\Re(b)-1} \in L^1(0, 1),$$

le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre montre que

$$z \rightarrow \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt$$

est bien holomorphe sur O . Comme $O \subset H$ est arbitraire, elle est holomorphe sur H . ■

Pour conclure cette section, donnons quelques liens entre fonctions hypergéométriques et autres fonctions spéciales :

Paramètres	variable	nom
$c = b \notin \mathbb{Z}^-$	z	$(1 - z)^{-a} = {}_2F_1(a, b, b; z)$
$a = b = 1, c = 2$	$-z$	$\frac{\ln(1+z)}{z} = {}_2F_1(1, 1, 2; -z)$
$a = b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$	z^2	$\frac{\arcsin z}{z} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)$
$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$	z^2	$\frac{\arctan z}{z} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; z^2\right)$
$p, q > 0, a = p, b = 1 - q, c = p + 1$	z	<i>Fonction β incomplète</i> $B(p, q; x) := \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ $= \frac{x^p}{p} {}_2F_1(p, 1 - q, p + 1; x)$
$m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq m - 2, m - 2, \dots$ $a = 1 - m, b = 1,$ $c = \alpha - m + 2$	$-1/z$	<i>Série binomiale tronquée</i> $\sum_{n=0}^m \binom{\alpha}{n} z^n$ $= \binom{\alpha}{m-1} {}_2F_1(1 - m, 1, \alpha - m + 2; -1/z)$

TABLE 1. Liens entre fonctions hypergéométriques et autres fonctions

Enfin, les fonctions hypergéométriques permettent également d'exprimer certaines familles de polynômes orthogonaux dans $L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$ avec $\omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$. Dans le cas général, on obtient les polynômes de Jacobi, ceux de Legendre, Tchebichev et Gegenbauer sont des cas particuliers.

2.4.4. *La fonction d'Airy*. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.28

Les solutions de l'équation d'Airy

$$y'' - xy = 0$$

sont de la forme $y(x) = y(0)\widetilde{\text{Ai}}(x) + y'(0)\widetilde{\text{Bi}}(x)$ avec

$$\widetilde{\text{Ai}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2 \times 3) \times (5 \times 6) \times \cdots \times (3k-1)(3k)} x^{3k}$$

$$\widetilde{\text{Bi}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3 \times 4) \times (6 \times 7) \times \cdots \times (3k)(3k+1)} x^{3k+1}$$

et ces séries ont un rayon de convergence $R = +\infty$.

Paramètres	poïds variable	nom
$n \in \mathbb{N},$ $a = -n,$ $b = \alpha + \beta + n + 1,$ $c = \alpha + 1$	$\alpha, \beta > -1$ $z = \frac{1-z}{2}$	<i>Polynôme de Jacobi</i> $P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \times$ $\times {}_2F_1 \left(-n, \alpha + \beta + n + 1, \alpha + 1; \frac{1-z}{2} \right)$
$n \in \mathbb{N}, a = -n,$ $b = n + 1, c = 1,$	$\alpha = \beta = 0$ $z = \frac{1-z}{2}$	<i>Polynôme de Legendre</i> $P_n(z) = \frac{1}{n} {}_2F_1 \left(-n, n + 1, 1; \frac{1-z}{2} \right)$
$n \in \mathbb{N}, a = -n,$ $b = n, c = 1/2,$	$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ $z = \frac{1-z}{2}$	<i>Polynôme de Tchebichev</i> $T_n(z) = \frac{(1/2)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n, 1/2; \frac{1-z}{2} \right)$
$n \in \mathbb{N}, a = -n,$ $b = 2\gamma + n,$ $c = \gamma + \frac{1}{2}$	$\alpha = \beta = \gamma - \frac{1}{2}$ $z = \frac{1-z}{2}$	<i>Polynôme de Gegenbauer</i> $C_n^{(\gamma)}(z) = \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(2\gamma - n + 1)n!} \times$ $\times {}_2F_1 \left(-n, 2\gamma + n, \gamma + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2} \right)$

TABLE 2. Liens entres fonction hypergéométriques et polynômes orthogonaux

Montrons cela par un raisonnement d'analyse-synthèse. Pour l'analyse, on cherche une solution sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ (et évidemment $A_0 = y(0)$, $A_1 = y'(0)$). Alors $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n A_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned}
y'' - xy &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{n+1} \\
&= 2A_2 + \sum_{m=1}^{+\infty} ((m+1)(m+2)A_{m+2} - A_{m-1})x^m.
\end{aligned}$$

Or on veut que cette quantité soit 0 donc $A_2 = 0$ et, pour tout $m \geq 1$, $A_{m+2} = \frac{A_{m-1}}{(m+1)(m+2)}$ ou encore $A_{n+3} = \frac{A_n}{(n+2)(n+3)}$. On en déduit immédiatement que $A_{3k+2} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $A_3 = \frac{A_0}{2 \times 3}$, $A_6 = \frac{A_3}{5 \times 6} = \frac{A_0}{2 \times 3 \times 5 \times 6}$ et plus

généralement, par une récurrence directe

$$A_{3k} = \frac{A_0}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq 3k \\ j \notin 3\mathbb{N}+1}} j}.$$

De même

$$A_{3k+1} = \frac{A_1}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq 3k+1 \\ j \notin 3\mathbb{N}+2}} j}.$$

Ainsi, si y est une solution développable en série entière, alors $y(x) = y(0) \text{Ai}(x) + y'(0) \text{Bi}(x)$.

Synthèse : on remarque aussi que si les deux séries entières définissant $\widetilde{\text{Ai}}$ et $\widetilde{\text{Bi}}$ ont un rayon de convergence $R > 0$, alors les résultats sur les opérations sur les séries entières montrent que $y(x) = y(0)\widetilde{\text{Ai}}(x) + y'(0)\widetilde{\text{Bi}}(x)$ est bien une solution sur $] -R, R[$.

Il reste donc à déterminer R . Pour cela introduisons $\alpha_k = A_{3k}x^{3k}$. Si $x \neq 0$, alors $\alpha_{k+1}\alpha_k = \frac{x^3}{(3k+2)(3k+3)} \rightarrow 0$ donc la série $\sum \alpha_k$ converge *i.e.* la série définissant $\widetilde{\text{Ai}}$ converge pour tout x , cette série entière a donc bien un rayon de convergence $R = +\infty$. Le raisonnement est le même pour $\widetilde{\text{Bi}}$ en posant $\alpha_k = A_{3k+1}x^{3k+1}$.

Les fonctions $\widetilde{\text{Ai}}$ et $\widetilde{\text{Bi}}$ ont des expressions intégrales, mais la normalisation est légèrement différente.

Le changement de normalisation provient de la résolution de l'équation d'Airy par transformée de Fourier, elle-même normalisée par

$$\widehat{y}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} y(x) e^{-ix\xi} dx$$

de sorte que l'inversion de Fourier s'écrit

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{y}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

à condition bien sûr que $y, \widehat{y} \in L^1(\mathbb{R})$.

Nous allons faire ici une résolution *formelle* de l'équation d'Airy et ne chercherons pas à justifier ces calculs (qui nécessitent l'utilisation des distributions). Formellement

$$\widehat{y}'(\xi) = -i\xi \int_{\mathbb{R}} y(x) e^{-ix\xi} dx \quad \text{et} \quad \widehat{y}''(\xi) = -\xi^2 \int_{\mathbb{R}} y(x) e^{-ix\xi} dx = -\xi^2 \widehat{y}$$

alors que

$$\widehat{xy}(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} -ixy(x) e^{-ix\xi} dx = i\widehat{y}'(\xi)$$

en dérivant sous le signe intégral. L'équation d'Airy $y'' - xy = 0$ devient donc

$$-\xi^2 \widehat{y} - i\widehat{y}'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{y}'(\xi) = i\xi^2 \widehat{y}.$$

On en déduit que $\widehat{y}(\xi) = \exp i \frac{\xi^3}{3}$ et, après inversion de Fourier,

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp i \left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi \right) d\xi.$$

On prend ensuite la partie réelle et la partie imaginaire et on trouve

$$\Re y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos \left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi \right) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi \right) d\xi$$

par parité et $\text{Im } y(x) = 0$. On ne trouve qu'une seule fonction de cette façon alors qu'il nous en faut deux fonctions linéairement indépendantes pour décrire l'ensemble des solutions. La deuxième ne peut s'obtenir par analyse de Fourier.

Nous n'allons pas justifier ces calculs, mais simplement considérer le résultat du calcul et montrer qu'on obtient bien une solution. La deuxième solution cherchée est similaire.

Definition 2.29 (Fonction d'Airy)

On définit la *fonction d'Airy* (du premier type ou de première espèce) :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Il existe aussi une fonction d'Airy de seconde espèce dont les propriétés sont similaires :

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

que nous n'allons pas l'étudier ici.

Lemme 2.30

Cette intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ai}(x) = 0$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on intègre une fonction continue sur $[0, +\infty)$

$$t \mapsto \cos\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right).$$

Il s'agit donc de montrer la convergence à l'infini. On suppose d'abord que $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt &= \int_0^{+\infty} (t^2 + x) \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \frac{1}{t^2 + x} dt \\ &= \left[\frac{\sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)}{t^2 + x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2t \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)}{(t^2 + x)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2t \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)}{(t^2 + x)^2} dt \end{aligned}$$

puisque le terme tout intégré est 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Cela montre en particulier que la première et la dernière intégrale sont de même nature. Comme la fonction intégrée dans la dernière est $O(t^{-3})$, celle-ci est convergente ce qui montre que Ai est bien définie pour $x > 0$.

Cette formule montre aussi que $\text{Ai}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: pour tout $t > 0$, $\frac{2t \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)}{(t^2 + x)^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, pour $x \geq 1$, $\left| \frac{2t \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)}{(t^2 + x)^2} \right| \leq \frac{2t}{(t^2 + 1)^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, avec le théorème de convergence dominée, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ai}(x) = 0$.

Lorsque $x \leq 0$ il faut être un peu plus prudent car $t^2 + x$ s'annule en $\sqrt{-x}$. Dans ce cas, on coupe l'intégrale en $t_x > \sqrt{-x}$ et on obtient à nouveau la convergence de $\int_{t_x}^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$ avec une intégration par parties. ■

Notons qu'exactement le même raisonnement montre que $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$ converge. Par parité de cos et imparité de sin, on aura alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt &= \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \\ \int_{-\infty}^0 \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt &= -\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt\end{aligned}$$

et on en déduit immédiatement que

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt+it^3/3} dt.$$

Nous allons maintenant réécrire Ai à l'aide de l'analyse complexe. Soit $F_x(z) = e^{ixz+iz^3/3}$ de sorte que $2\pi \text{Ai}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_x(t) dt$.

On fixe ensuite $R, \eta > 0$ et on note $\mathcal{R}$ le rectangle de $\mathbb{C}$ de coordonnées $-R, R, R+i\eta$ et $-R+i\eta$ qu'on parcourt dans le sens trigonométrique, de sorte que $\int_{\partial\mathcal{R}} F_x(z) dz = 0$ i.e.

$$\begin{aligned}(2.9) \quad \int_{-R}^R F_x(t) dt &= -i \int_0^\eta F_x(R+it) dt \\ &\quad + \int_{-R}^R F_x(t+i\eta) dt + i \int_0^\eta F_x(-R+it) dt.\end{aligned}$$

Observons ensuite que

$$F_x(t+is) = e^{s^3} e^{-(sx+st^2)} e^{i\left(xt+\frac{t^3}{3}-s^2t\right)}.$$

Par conséquent, pour $R^2 > |x|$,

$$\left| \int_0^\eta F_x(\pm R+it) dt \right| \leq e^{\eta^3} \int_0^\eta e^{-s(x+R^2)} ds \leq \frac{e^{\eta^3}}{R^2+x} \rightarrow 0$$

quand $R \rightarrow +\infty$. Enfin $|F_x(t+i\eta)| \leq e^{\eta^3-\eta x} e^{-\eta t^2}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(t+i\eta) dt$ converge. En faisant tendre $R \rightarrow +\infty$, on obtient la formule suivante : pour tout $\eta > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt+it^3/3} dt = \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta+i\zeta^3/3} d\zeta = e^{\eta^3} e^{-\eta x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta t^2} e^{i\left(xt+\frac{t^3}{3}-\eta^2t\right)} dt.$$

On voit aisément avec la dernière expression que cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, nous allons maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.31

Soit $\eta > 0$ et $\mathbf{j} = e^{2i\pi/3}$. Alors

$$(2.10) \quad \text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta+i\zeta^3/3} d\zeta$$

et s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, $\text{Ai}(x)$, $\text{Ai}(\mathbf{j}x)$ et $\text{Ai}(\mathbf{j}^2x)$ sont solution de l'équation d'Airy

$$y'' - xy = 0$$

Enfin $\text{Ai}(x) + \mathbf{j} \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^2 \text{Ai}(\mathbf{j}^2x) = 0$.

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà démontré (2.10). Montrons que cela définit une fonction holomorphe. Introduisons $G(z, \zeta) = e^{iz\zeta+i\zeta^3/3}$ qui est clairement holomorphe en z . De plus, si $|\Re(z)|, |\Im(z)| \leq A$,

$$|G(z, t+i\eta)| = e^{\eta^3} e^{-\eta \Re(z)} e^{-t \Im(z) - \eta t^2} \leq e^{\eta^3} e^{\eta A} e^{|t| - \eta t^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

et indépendamment de z donc $2\pi \text{Ai} : z \rightarrow \int_{\mathbb{R}+i\eta} G(z, \zeta) d\zeta$ est holomorphe sur $\{z : |\Re(z)|, |\Im(z)| < A\}$. Comme A est arbitraire, on en déduit que Ai est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Maintenant que nous savons que (2.10) définit une fonction holomorphe, on peut dériver sous le signe intégral sans nécessiter de justification supplémentaire :

$$\begin{aligned} \text{Ai}''(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} -\zeta^2 e^{ix\zeta+i\zeta^3/3} d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+i\eta)} (t+i\eta)^2 e^{i(t+i\eta)^3/3} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+i\eta)} \frac{1}{i} \frac{d}{dt} e^{i(t+i\eta)^3/3} dt \\ &= \left[-\frac{e^{ix(t+i\eta)+i(t+i\eta)^3/3}}{i} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x e^{ix(t+i\eta)} e^{i(t+i\eta)^3/3} dt \end{aligned}$$

avec une intégration par parties. Celle-ci est justifiée par le fait que les estimations de modules faites avant l'énoncé montrent aussi que le terme tout-intégré est nul. On vient donc de montrer que $\text{Ai}''(x) = x \text{Ai}(x)$ i.e. que Ai vérifie l'équation d'Airy :

$$\text{Ai}''(x) - x \text{Ai}(x) = 0.$$

Soit alors ω une racine cubique de l'unité et $y(x) = \text{Ai}(\omega x)$. On a donc

$$y''(x) = \omega^2 \text{Ai}''(\omega x) = \omega^2 (\omega x \text{Ai}(\omega x)) = x \text{Ai}(\omega x) = xy(x)$$

où on a utilisé le prolongement analytique $\text{Ai}''(z) = z \text{Ai}(z)$ pour $z = \omega x$. on a donc bien que y est également solution de l'équation d'Airy.

La dernière assertion est alors simple. On pose $y(x) = \text{Ai}(x) + \mathbf{j} \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^2 \text{Ai}(\mathbf{j}^2 x)$ qui est solution de l'équation d'Airy. De plus, en utilisant que la somme des racines cubiques de l'unité est nulle, on a $y(0) = (1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2) \text{Ai}(0) = 0$ et $y'(x) = \text{Ai}'(x) + \mathbf{j}^2 \text{Ai}'(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^4 \text{Ai}'(\mathbf{j}^2 x)$ donc $y'(0) = (1 + \mathbf{j}^2 + \mathbf{j}^4) \text{Ai}'(0) = (1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2) \text{Ai}'(0) = 0$. Donc y est solution de l'équation d'Airy avec condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$. Cette solution étant unique grâce à Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $y = 0$. ■

Pour comparer Ai et $\widetilde{\text{Ai}}$, nous allons avoir besoin des valeurs suivantes :

Lemme 2.32

On a

$$\text{Ai}(0) = \frac{3^{-1/6} \Gamma(1/3)}{2\pi} \quad \text{et} \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\pi}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{3^{-1/6} \Gamma(1/3)}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2 \times 3) \times (5 \times 6) \times \cdots \times (3k-1)(3k)} x^{3k} \\ &\quad - \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3 \times 4) \times (6 \times 7) \times \cdots \times (3k)(3k+1)} x^{3k+1}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le développement en série entière de Ai provient directement du fait que Ai est solution de l'équation d'Airy donc $\text{Ai}(x) = \text{Ai}(0) \widetilde{\text{Ai}}(x) + \text{Ai}'(0) \widetilde{\text{Bi}}(x)$. Il nous reste donc à déterminer $\text{Ai}(0)$ et $\text{Ai}'(0)$.

On commence par écrire

$$2\pi \text{Ai}(0) = \int_{\mathbb{R}+i} e^{i\zeta^3/3} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+i)^3/3} dt.$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}\zeta_- &:= \int_{-\infty}^0 e^{i(t+i)^3/3} dt = \int_0^{+\infty} e^{i(-t+i)^3/3} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-i(t-i)^3/3} dt = \overline{\int_0^{+\infty} e^{i(t+i)^3/3} dt} := \overline{\zeta_+}.\end{aligned}$$

Enfin, $2\pi \operatorname{Ai}(0) = \zeta_- + \zeta_+ = \zeta_+ + \overline{\zeta_+} = 2\Re \zeta_+$ donc

$$\pi \operatorname{Ai}(0) = \Re \int_0^{+\infty} e^{i(t+i)^3/3} dt.$$

On a donc $\pi \operatorname{Ai}(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)$ avec

$$I(R) = \int_0^R e^{i(t+i)^3/3} dt.$$

On pose $F(z) = e^{iz^3/3}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on va faire une intégrale de contour de F le long du contour délimité par le segment $i + [0, R]$, l'arc de cercle $\mathcal{C} := \{i + Re^{is}, s \in [0, \pi/6]\}$ puis le segment $i + [Re^{i\pi/6}, 0]$. On pose

$$I_1(R) = \int_{\mathcal{C}} F(z) dz = iR \int_0^{\pi/6} e^{i(i+Re^{it})^3/3} e^{it} dt$$

et

$$I_2(R) = - \int_{i+[Re^{i\pi/6}, 0]} F(z) dz = \int_0^R F(i + te^{i\pi/6}) e^{i\pi/6} dt$$

alors

$$I(R) = -I_1(R) + I_2(R).$$

Mais

$$|e^{i(i+Re^{it})^3/3} e^{it}| = |\exp(1/3 - iRe^{it} - R^2 e^{2it} + iR^3 e^{3it}/3)| = e^{1/3} e^{R \sin t - R^2 \cos t - R^3 \sin 3t}.$$

On remarque que pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$, $R \sin t \leq R \sin \frac{\pi}{6} = \frac{R}{2}$, $R^2 \cos 2t \geq R^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{R^2}{2}$ et $-R^3 \sin 3t \leq 0$ et on en déduit que

$$|I_1(R)| \leq R \frac{\pi}{6} \max_{t \in [0, \pi/6]} |e^{i(i+Re^{it})^3/3} e^{it}| \leq \frac{\pi}{6} R e^{\frac{R}{2} - \frac{R^2}{2}} \rightarrow 0$$

quand $R \rightarrow +\infty$. Par suite

$$\pi \operatorname{Ai}(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \Re I_1(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \Re I_2(R).$$

On pose maintenant

$$I_3(R) = \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} F(z) dz$$

de sorte que

$$I_2(R) = - \int_{[0, i]} F(z) dz + I_3(R) + \int_{[0, i] + Re^{i\pi/6}} F(z) dz.$$

Mais

$$\Re \int_{[0, i]} F(z) dz = \Re \int_0^1 e^{i(it)^3/3} i dt = \Re i \int_0^1 e^{-t^3/3} dt = 0$$

et

$$\left| \int_{[0, i] + Re^{i\pi/6}} F(z) dz \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} |e^{i(Re^{i\pi/6} + t)^3/3}| \leq e^{-R^3/3 + o(R^3)} \rightarrow 0$$

donc

$$\pi \operatorname{Ai}(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \Re \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} F(z) dz = \Re e^{i\frac{\pi}{6}} \int_0^{+\infty} e^{i(t)^3/3} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^3/3} dt.$$

On fait un changement de variable $s = t^3/3$, et on trouve

$$\text{Ai}(0) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-s} (3s)^{-2/3} ds = \frac{3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} \Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi}$$

comme annoncé.

Le calcul pour $\text{Ai}'(0)$ est similaire. On commence par remarquer que $\text{Ai}'(0)$ est réel puisque Ai est réel sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on utilise l'expression holomorphe de Ai avec $\eta = 1$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} e^{ix\zeta+i\zeta^3/3} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+i\eta)+i(t+i\eta)^3/3} dt$$

qu'on peut dériver sous le signe somme

$$\text{Ai}'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i(t+i\eta) e^{ix(t+i\eta)+i(t+i\eta)^3/3} dt.$$

On remarque ensuite que $\text{Ai}'(0)$ est réel puisque Ai est réel sur $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} \text{Ai}'(0) &= \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^0 (-\eta + it) e^{i(t+i\eta)^3/3} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \Re \int_0^{+\infty} (-\eta + it) e^{i(t+i\eta)^3/3} dt. \end{aligned}$$

On réécrit à nouveau la première intégrale

$$\begin{aligned} \Re \int_{-\infty}^0 (-\eta + it) e^{i(t+i\eta)^3/3} dt &= \Re \int_0^{+\infty} (-\eta - it) e^{i(-t+i\eta)^3/3} dt \\ &= \Re \int_0^{+\infty} (-\eta + it) e^{-i(-t-i\eta)^3/3} dt \end{aligned}$$

en utilisant $\Re(z) = \Re(\bar{z})$. On en déduit que

$$\text{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi} \Re \int_{i+[0,+\infty)} i\zeta e^{i\zeta^3/3} dt.$$

En faisant les mêmes changements de contour que pour Ai , qui se justifient exactement de la même façon (noter que le terme qui diffère n'est pas dans l'exponentielle alors que ce sont ces termes là qui permettent de passer à la limite), on obtient

$$\text{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi} \Re \int_{e^{i\pi/6}\mathbb{R}^+} i\zeta e^{i\zeta^3/3} dt = \frac{1}{\pi} \Re \int_0^{+\infty} i e^{i\pi/6} t e^{-t^3/3} e^{i\pi/6} dt.$$

On termine comme précédemment avec un changement de variable $s = t^3/3$. ■

Enfin, considérons $y(x) = \lambda \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \mu \text{Ai}(\mathbf{j}^2x)$. La première remarque est que $\mathbf{j}^2 = \bar{\mathbf{j}}$ et que, comme Ai est réelle sur la droite réelle, elle vérifie le principe de réflexion de Schwarz $\text{Ai}(\bar{z}) = \overline{\text{Ai}(z)}$ donc $\text{Ai}(\mathbf{j}^2x) = \overline{\text{Ai}(\mathbf{j}x)}$ et donc $y(x) = \lambda \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \mu \overline{\text{Ai}(\mathbf{j}x)}$. Ainsi, en choisissant $\mu = \bar{\lambda}$, y sera réelle.

On considère donc maintenant $y(x) = \lambda \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \overline{\lambda \text{Ai}(\mathbf{j}x)}$ de sorte que $y'(x) = \lambda \mathbf{j} \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \overline{\lambda \mathbf{j} \text{Ai}(\mathbf{j}x)}$. Ainsi y est une solution de l'équation d'Airy avec donnée initiale $y(0) = 2 \text{Ai}(0) \Re(\lambda)$ et $y'(0) = 2 \text{Ai}'(0) \Re(\lambda \mathbf{j})$.

On cherche maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ c'est-à-dire $y = \widetilde{\text{Ai}}$ (par unicité dans Cauchy-Lipschitz). Cela se réduit à $2 \text{Ai}(0) \Re(\lambda) = 1$ et $2 \text{Ai}'(0) \Re(\lambda \mathbf{j}) = 0$ soit $\lambda = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\text{Ai}(0)}$ et

$$\widetilde{\text{Ai}}(x) = \frac{1}{\text{Ai}(0)} (e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{Ai}(e^{i\frac{2\pi}{3}}x) + e^{i\frac{\pi}{6}} \text{Ai}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}x)).$$

On cherche ensuite $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ c'est-à-dire $y = \widetilde{\text{Bi}}$ et on trouve $\lambda = \frac{1}{i \text{Ai}'(0)}$ d'où

$$\widetilde{\text{Bi}}(x) = \frac{1}{i \text{Ai}'(0)} (\text{Ai}(e^{i\frac{2\pi}{3}}x) - \text{Ai}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}x)).$$

En résumé

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ai}}(x) &= \frac{2\pi 3^{1/6}}{\Gamma(1/3)} (e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{Ai}(e^{i\frac{2\pi}{3}}x) + e^{i\frac{\pi}{6}} \text{Ai}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}x)) \\ \widetilde{\text{Bi}}(x) &= i \frac{2\pi}{3^{1/6}\Gamma(2/3)} (\text{Ai}(e^{i\frac{2\pi}{3}}x) - \text{Ai}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}x)). \end{aligned}$$

Nous allons enfin préciser le comportement à l'infini de la fonction d'Airy. Rappelons que, d'après (2.10), pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\eta > 0$, on a

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+i\eta)+i(t+i\eta)^3/3} dt.$$

En particulier, pour $x > 0$, on peut prendre $\eta = \sqrt{x}$ et on trouve

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+ix^{1/2})+i(t+ix^{1/2})^3/3} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} e^{it^3/3} dt.$$

On a mieux :

Lemme 2.33

Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$,

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t+ix^{1/2})+i(t+ix^{1/2})^3/3} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} e^{it^3/3} dt.$$

DÉMONSTRATION. L'égalité est vraie sur $]0, +\infty)$ et le membre de gauche est holomorphe (sur $\mathbb{C}$), il suffit donc de montrer que le membre de droite est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Rappelons que $z \rightarrow \sqrt{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Ainsi, en posant $F(t, z) = e^{-z^{1/2}t^2} e^{it^3/3}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z \rightarrow F(t, z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Ensuite, pour $\varepsilon > 0$ (petit) notons

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon, -\pi + \varepsilon < \arg(z) < \pi - \varepsilon\} = \{re^{i\theta} : r > \varepsilon, -\pi + \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon\}$$

Alors, pour $z = re^{i\theta} \in \Omega_\varepsilon$, $z^{1/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2}$ donc $\Re(z^{1/2}) \geq A_\varepsilon := \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$.

Mais alors $|F(t, z)| \leq e^{-A_\varepsilon t^2} \in L^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'holomorphicité des intégrales dépendant d'un paramètre, $\int_{\mathbb{R}} F(t, z) dt$ est holomorphe sur Ω_ε . Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cette fonction est holomorphe sur $\bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

En remarquant que $x \rightarrow e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$ aussi, on obtient le résultat. ■

Nous pouvons maintenant démontrer l'estimation suivante :

Théorème 2.34

Pour $\varepsilon > 0$, $-\pi + \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$ et $r > 0$,

$$\text{Ai}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}}\right)}{r^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\theta}{4}}} (1 + R(r, \theta))$$

avec $|R(r, \theta)| \leq \frac{C_\varepsilon}{r^{\frac{3}{4}}}$, C_ε une constante.

Remarque 2.35

On peut affiner la démonstration pour obtenir un développement asymptotique à tout ordre et une dépendance plus précise en θ de la forme $|R(r, \theta)| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}} (\cos \frac{\theta}{2})^{-\frac{7}{2}}}$ pour $-\pi < \theta < \pi$ et $r > 0$.

DÉMONSTRATION. Avec le lemme précédent, il s'agit de démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} e^{it^3/3} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{1/4}} (1 + R(x))$$

avec $|R(x)| \leq \frac{C_\varepsilon}{|x|^{\frac{3}{4}}}$.

Pour cela, on écrit simplement un développement de Taylor avec reste intégral au premier ordre de l'exponentielle *i.e.* $e^{ix} = 1 + ix \int_0^1 e^{isx} ds$ donc

$$e^{it^3/3} = 1 + i \frac{t^3}{3} \int_0^1 e^{ist^3/3} ds.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} e^{it^3/3} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} dt + \int_{\mathbb{R}} i \frac{t^3}{3} e^{-x^{1/2}t^2} \int_0^1 e^{ist^3/3} ds dt.$$

Attention, x est ici un nombre complexe. Quand x est un réel positif, un changement de variable $t = \sqrt{\pi} x^{-1/4} s$ montre que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^{1/2}t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{1/4}}.$$

Lorsque $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, il faut en plus faire un prolongement analytique : la formule est vraie sur $\mathbb{R}_*^+$ et le membre de gauche et celui de droite sont tous deux holomorphes sur ce domaine (par théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre sur Ω_ε comme ci-dessus).

Il nous reste donc à montrer que

$$R(x) := \int_{\mathbb{R}} i \frac{t^3}{3} e^{-x^{1/2}t^2} \int_0^1 e^{ist^3/3} ds dt = O(|x|^{-1}).$$

Mais, en observant que $\left| \int_0^1 e^{ist^3/3} ds \right| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} |R(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|t|^3}{3} \exp(-\Re(x^{1/2})t^2) dt \\ &\leq \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-|x|^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)t^2} dt. \end{aligned}$$

On pose alors $A_\varepsilon = \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0$ et $s = |x|^{1/4}t$ et on trouve

$$|R(x)| \leq \left(\frac{2}{3} \int_0^{+\infty} s^3 e^{-A_\varepsilon s^2} ds \right) \frac{1}{|x|}$$

qui est bien de la forme voulue. ■

Enfin, rappelons que $\text{Ai}(x) + \mathbf{j} \text{Ai}(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^2 \text{Ai}(\mathbf{j}^2x) = 0$ sur $\mathbb{C}$. En particulier, pour $x = -r$, $r \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-r) &= -\mathbf{j} \text{Ai}(-\mathbf{j}r) - \bar{\mathbf{j}} \text{Ai}(-\bar{\mathbf{j}}r) = e^{-i\pi/3} \text{Ai}(e^{-i\pi/3}r) + e^{i\pi/3} \text{Ai}(e^{i\pi/3}r) \\ &= 2\Re(e^{i\pi/3} \text{Ai}(e^{i\pi/3}r)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Re \left(\frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}ir^{\frac{3}{2}}\right)}{r^{\frac{1}{4}}} \right) (1 + O(r^{-3/4})) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{\pi}r^{\frac{1}{4}}} (1 + O(r^{-3/4})). \end{aligned}$$

Ce qui montre que Ai tend lentement vers 0 en oscillant (de plus en plus vite) quand $x \rightarrow -\infty$.

2.5. Un résultat de Bernstein. Une fonction f est dite totalement positive si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $(-1)^k f^{(k)} \geq 0$. Par exemple, si $\lambda > 0$, la fonction exponentielle $e_\lambda : x \rightarrow e^{-\lambda x}$ est totalement positive puisque $e_\lambda^{(k)} = (-\lambda)^k e_\lambda$. Un résultat relativement difficile de Bernstein caractérise les fonctions de ce type (comme étant essentiellement des moyennes de fonctions exponentielles).

Nous allons ici montrer un résultat un peu plus faible :

Théorème 2.36 (Bernstein)

Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $x \in]-a, a[$, et tout entier k , $f^{(2k)}(x) \geq 0$. Alors sur $] -a, a[$, f est la somme de sa série de Taylor.

DÉMONSTRATION. Soit $0 < b < a$. Soit F la partie paire de f , i.e.

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Clairement F est $\mathcal{C}^\infty$ de dérivée

$$F^{(k)}(x) = \frac{f^{(k)}(x) + (-1)^k f^{(k)}(-x)}{2}.$$

En particulier, pour tout entier n , $F^{(2n)}(x) \geq 0$, $F^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(0) \geq 0$ tandis que $F^{(2n+1)}(0) = 0$. Le développement de Taylor avec reste intégral de F à l'ordre $2n+1$ s'écrit donc

$$(2.11) \quad F(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt$. Nous allons montrer que, si $|x| \leq b < a$, alors $R_n(x) \rightarrow 0$. Comme F est paire, R_n aussi, il suffit donc de considérer $0 \leq x < b$.

Notons que (2.11) implique $F(x) \geq R_n(x)$ en particulier $R_n(b) \leq F(b)$ tandis que la formule du reste montre que c'est l'intégrale d'une fonction positive donc $R_n(x) \geq 0$. Ensuite, on écrit

$$R_n(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt.$$

On remarque que $t \rightarrow \frac{x-t}{b-t} = 1 - \frac{b-x}{b-t}$ est décroissante sur $[0, x]$ donc $0 \leq \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1}$. Comme $x \geq 0$ et que $\frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) \geq 0$, il en résulte que

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt \\ &= \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b). \end{aligned}$$

Par suite, on a bien $R_n(x) \rightarrow 0$ quand $0 \leq x < b$ donc F est développable en série entière sur $] -b, b[$. Comme $b < a$ est arbitraire, on aura

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \quad |x| < a.$$

Soit maintenant G la partie impaire de f , *i.e.*

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Clairement G est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée

$$G^{(k)}(x) = \frac{f^{(k)}(x) - (-1)^k f^{(k)}(-x)}{2}.$$

En particulier, pour tout entier n , $G^{(2n)}(0) = 0$ tandis que $G^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(0)$ et enfin

$$G^{(2n+2)}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(x) - f^{(2n+2)}(-x)}{2} \begin{cases} \leq \frac{f^{(2n+2)}(x)}{2} \leq F(x) \\ \geq -\frac{f^{(2n+2)}(-x)}{2} \geq -F(x) \end{cases}.$$

Le développement de Taylor avec reste intégral de G à l'ordre $2n+1$ s'écrit donc

$$(12.12) \quad G(x) = f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \tilde{R}_n(x)$$

où $\tilde{R}_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} G^{(2n+2)}(t) dt$. Notez que, maintenant G est impaire donc $\tilde{R}_n$ aussi. Nous allons montrer que si $|x| < b$, alors $\tilde{R}_n(x) \rightarrow 0$. Par parité, il suffit à nouveau de considérer $0 \leq x < b$. Notez que nos inégalités sur $G^{(2n+2)}(x)$ nous montrent que $-R_n(x) \leq \tilde{R}_n(x) \leq R_n(x)$ ce qui donne le résultat voulu. On vient donc de montrer que, sur $] -a, a[$, G est la somme de sa série de Taylor en 0,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad |x| < a.$$

Comme $f = F + G$, on en déduit le résultat. ■

3. Comportement au bord

3.1. Théorème d'Abel angulaire. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite sommable *i.e.* $\sum a_n$ converge. Cela implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est au moins 1. On pose alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Si le rayon de convergence de la série définissant S est $R > 1$ alors $S = f(1)$. Le théorème d'Abel nous affirme que $S = \lim f(x)$ quand $x \rightarrow 1$ (x réel) et dit même un peu mieux, on a même $S = \lim f(z)$

quand $z \rightarrow 1$ avec $z \in \Delta$ où Δ_φ est un secteur angulaire d'angle $\varphi < \frac{\pi}{2}$ i.e. z ne s'approche pas tangentiellement de 1. Plus précisément, pour $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, on notera

$$\Delta_\varphi = \{z \in \mathbb{C} : \exists \rho \in]0, 1), \exists \theta \in [-\varphi, \varphi] \text{ t.q. } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Le résultat est alors le suivant :

Théorème 3.1 (Théorème d'Abel angulaire)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite sommable, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < 1$. Alors,

pour $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\varphi}} f(z) = S.$$

Notez que $\Delta_0 = [0, 1[$, le théorème est donc vérifié en particulier quand $z \rightarrow 1^-$ (dans $\mathbb{R}$). Ce résultat nous dit que si $\sum a_n$ converge alors f se prolonge par continuité sur $\overline{\Delta_\varphi}$ (ou sur $[0, 1]$).

Exemple 3.2

Soit $\alpha > 0$, Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge tant que $e^{i\theta} \neq 1$, la fonction f définie sur $[0, 1[$

par $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(te^{i\theta})^n}{n^\alpha}$ se prolonge par continuité en 1.

La démonstration est basée sur une sommation d'Abel.

DÉMONSTRATION. Comme la série $\sum a_n$ converge, on peut définir ses restes $R_N = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ de sorte que, pour $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$. Notons tout de suite que, comme $R_n \rightarrow 0$, la série entière $\sum R_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 .

On a alors, pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^N a_n (z^n - 1)$$

puisque $z^0 = 1$ (par convention). On peut donc écrire $a_n = R_{n-1} - R_n$ dans cette série :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=1}^N R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1) \\ &= R_0(z - 1) - R_N(z^N - 1) + \sum_{n=1}^N R_n(z^{n+1} - z^n) \\ &= (z - 1) \sum_{n=0}^N R_n z^n - R_N(z^N - 1). \end{aligned}$$

Pour z fixé, on peut maintenant faire tendre $N \rightarrow +\infty$, en observant que $|z| < 1$ implique $|R_N(z^N - 1)| \leq 2R_N \rightarrow 0$, on obtient

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

Nous allons montrer que le membre de gauche tend bien vers 0 quand $z \rightarrow 1$ avec $z \in \Delta_\varphi$. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe alors M tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ quand $n \geq M$. On a alors

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z - 1| \sum_{n=0}^{M-1} |R_n| |z|^n + |z - 1| \sum_{n=M}^{+\infty} |R_n| |z|^n \\ &\leq |z - 1| \sum_{n=0}^{M-1} |R_n| + \varepsilon |z - 1| \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n \\ &= |z - 1| \sum_{n=0}^{M-1} |R_n| + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

– Comme M est fixé, il existe η_1 tel que, si $|z - 1| < \eta_1$, alors $|z - 1| \sum_{n=0}^{M-1} |R_n| \leq \varepsilon$ (on n'a pas besoin d'avoir $z \in \Delta_\varphi$ pour cela).

– il nous reste donc à montrer que $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ est majoré si $z \in \Delta_\varphi$ est suffisamment proche de 1 (ce sera alors le cas dans tout Δ_φ puisque 1 est le seul point où le dénominateur s'annule, mais cela est inutile). Notons que si $|z| < 1$ s'écrit $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ alors $|z - 1| = \rho$ et $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2$, (donc $\rho(2 \cos \theta - \rho) > 0$ en particulier $2 \cos \theta - \rho \neq 0$) d'où

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = (1 + |z|) \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2} \leq (1 + |z|) \frac{\rho}{2\rho \cos \theta - \rho^2} \leq \frac{2}{2 \cos \theta - \rho}.$$

On veut donc majorer cette expression uniformément, ce qui revient à minorer $2 \cos \theta - \rho$ lorsque $z \rightarrow 1$. Comme $z \rightarrow 1$ implique $\rho \rightarrow 0$, on voit que cette minoration ne peut avoir lieu que si $\cos \theta$ ne tend pas également vers 0, c'est-à-dire quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. En d'autres termes, on ne peut pas approcher le point $z = 1$ tangentiellement au cercle unité. C'est pour cette raison qu'on restreint la convergence de $z \rightarrow 1$ à $z \in \Delta_\varphi$. Dans ce cas $2 \cos \theta \geq 2 \cos \varphi$ et il suffit donc de se restreindre à $\rho \leq \cos \varphi$ pour en déduire que $\varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq \frac{2}{\cos \varphi} \varepsilon$.

Au final, on a donc, pour $|z - 1| < \min(\eta_1, \cos \varphi)$

$$|f(z) - S| \leq \left(1 + \frac{2}{\cos \varphi} \varepsilon\right)$$

ce qui est bien le résultat voulu. ■

La démonstration est un peu simplifiée lorsqu'on se contente de séries entières réelles puisque $\frac{|z-1|}{1-|z|} = 1$ quand z est un réel positif.

Corollaire 3.3

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites sommables et soit (c_n) leur produit de Cauchy,

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}. \text{ Si } \sum c_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Rappelons que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ peut ne pas converger.

DÉMONSTRATION. En effet, il suffit d'introduire les trois séries entières

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Comme $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ convergent, ces trois séries entières ont un rayon de convergence ≥ 1 . Comme c_n est le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n) , on a $h(z) = f(z)g(z)$ lorsque $|z| < 1$. Ceci est en particulier vrai quand $z \in]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ (ou dans n'importe quel Δ_φ) et alors, en faisant tendre $z \rightarrow 1$, on trouve bien $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$. ■

3.2. Sommation d'Abel de séries divergentes.

Definition 3.4 (Sommation au sens d'Abel)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est *sommable au sens d'Abel* si

$$\ell = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$$

existe et dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \stackrel{A}{=} \ell$.

La limite ici est dans $\mathbb{R}$. Ainsi, le théorème d'Abel (radial) nous dit que si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors elle est aussi sommable au sens d'Abel. On parle de méthode de sommation régulière.

Théorème 3.5 (Frobenius)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe et

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k.$$

Si la série $\sum a_n$ est sommable au sens de Cesàro, c'est-à-dire s'il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sigma_n \longrightarrow s,$$

alors elle est sommable au sens d'Abel et $\sum_{n \geq 0} a_n \stackrel{A}{=} s$.

DÉMONSTRATION. Pour $0 \leq r < 1$ et $N \geq 1$ un entier, en posant $s_{-1} = 0$, une sommation d'Abel donne

$$\sum_{n=0}^N a_n r^n = \sum_{n=0}^N (s_n - s_{n-1}) r^n = \sum_{n=0}^N s_n r^n - \sum_{n=0}^{N-1} s_n r^{n+1} = (1-r) \sum_{n=0}^N s_n r^n + s_N r^N.$$

Posons alors $S_n = \sum_{k=0}^n s_k = (n+1)\sigma_n$, $S_{-1} = 0$. La première observation est que σ_n est

bornée puisque convergente. Ainsi, il existe M tel que $|S_n| \leq (n+1)M$. Ensuite, comme $s_n = S_n - S_{n-1}$, on obtient $|s_n| \leq (2n+1)M$. Par suite $s_N r^N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ puisque $0 < r < 1$. La précédente sommation nous donne donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^N s_n r^n$$

et ces sommes convergent pour tout $0 < r < 1$.

On écrit à nouveau $s_n = S_n - S_{n-1}$, et on fait une seconde sommation d'Abel :

$$\sum_{n \geq 0} s_n r^n = (1-r) \sum_{n \geq 0} S_n r^n = (1-r) \sum_{n \geq 0} (n+1) \sigma_n r^n.$$

Notons qu'ici, il n'y a plus de difficulté à justifier la convergence puisque $S_N r^N \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$(3.13) \quad \sum_{n \geq 0} a_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n \geq 0} (n+1) \sigma_n r^n.$$

Posons $p_n(r) = (1-r)^2 (n+1) r^n$. Les nombres $p_n(r)$ sont positifs et

$$\sum_{n \geq 0} p_n(r) = (1-r)^2 \sum_{n \geq 0} (n+1) r^n.$$

L'identité (3.13) s'écrit donc

$$\sum_{n \geq 0} a_n r^n = \sum_{n \geq 0} p_n(r) \sigma_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sigma_n \rightarrow s$, il existe N tel que $|\sigma_n - s| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 0} a_n r^n - s \right| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} p_n(r) |\sigma_n - s| + \sum_{n \geq N} p_n(r) |\sigma_n - s| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} p_n(r) |\sigma_n - s| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour chaque entier n fixé, $p_n(r) = (1-r)^2 (n+1) r^n \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 1^-$. La dernière somme, qui est finie, tend donc vers 0. On en déduit

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \left| \sum_{n \geq 0} a_n r^n - s \right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n r^n = s$. ■

Exemple 3.6 (Série de Grandi)

Si $a_n = (-1)^n$, alors $s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ donc $\sigma_n = \frac{1 + \lfloor n/2 \rfloor}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$. Ainsi cette série est Césaro sommable donc aussi Abel sommable et ces sommes coïncident :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{A}{=} \frac{1}{2}.$$

Exemple 3.7

Si $a_n = (-1)^n (n+1)$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) r^n = \frac{1}{(1+r)^2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

quand $r \rightarrow 1$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) \stackrel{A}{=} \frac{1}{4}$.

Cette série n'est pas Césaro sommable puisqu'on montre assez facilement que $s_{2m} = m+1$ et que $s_{2m+1} = -m-1$. Ainsi $\sigma_{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $\sigma_{2n+1} \rightarrow -\frac{1}{2}$.

En partant de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} r^n = \frac{r}{1+r}$ et en appliquant deux fois $r \frac{d}{dr}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^2 r^n = \frac{r(1-r)}{(1+r)^3} \rightarrow 0$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^2 \stackrel{A}{=} 0$.

Remarque 3.8

Par contre $\sum_{n=1}^{+\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2} \rightarrow +\infty$ ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ n'est pas Abel sommable. Il existe d'autres méthodes de sommations, en particulier, celles basées sur les séries de Dirichlet qui permettent d'attribuer la valeur $-\frac{1}{12}$ à cette somme. Voici la méthode farfelue de Ramanujan que je vous invite à ne pas chercher à justifier : On note

$$\begin{array}{rcllcl} S & = & 1 & +2 & +3 & +4 & +\dots \\ 4S & = & & 2 \times 2 & & +2 \times 4 & +\dots \\ -3S & = & 1 & -2 & +3 & -4 & +\dots \end{array}$$

où la seconde ligne est obtenu en multipliant la première par 4 et on retranche le résultat à la première pour obtenir la dernière ligne. Mais la dernière série est Abel-sommable et on trouve donc $-3S = \frac{1}{4}$ d'où $S = -\frac{1}{12}$ qui se trouve être la valeur de $\zeta(-1)$ par prolongement analytique.

Hardy eut l'intuition de ne pas considérer ce type de raisonnement comme dépourvu de sens et publia par la suite un ouvrage consacré à la sommation des séries divergentes.

3.3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood. Commençons par le théorème taubérien faible :

Théorème 3.9 (Théorème taubérien faible)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_n = o(n^{-1})$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a une limite en $1-$, alors la série $\sum a_n$ converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1[$, posons $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On a alors

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k (1 - x^n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

Notons que $0 \leq 1 - x^k = (1 - x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leq k(1 - x)$ (on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis $|1 - \varphi(x)| \leq \sup_{[0,1]} |\varphi'(x)| |1 - x|$ avec $\varphi(x) = x^k$). On a donc

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k |a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et choisissons n tel que, pour $k \geq n$, $|a_k| \leq \frac{\varepsilon^2}{k}$ (le ε^2 est plus élégant dans la suite). Alors

$$\begin{aligned} |S_n - f(x)| &\leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k |a_k| + \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k \\ &\leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k |a_k| + \frac{\varepsilon^2}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\ &= (1 - x) n \sup_{k \geq 0} (k |a_k|) + \frac{\varepsilon^2}{n} \frac{1}{1 - x}. \end{aligned}$$

On va équilibrer les deux termes en prenant $x = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$ on en déduit que

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq \left(\sup_{k \geq 0} (k |a_k|) + 1 \right) \varepsilon.$$

Nous savons maintenant que $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow 1$, il existe donc N tel que, si $n \geq N$, $\left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - \ell \right| \leq \varepsilon$ et donc aussi

$$|S_n - \ell| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - \ell \right| \leq \left(\sup_{k \geq 0} (k |a_k|) + 2 \right) \varepsilon$$

ce qui démontre que $S_n \rightarrow \ell$ comme annoncé. ■

Le théorème taubérien fort (de Hardy-Littlewood) consiste à remplacer la condition $a_n = o(n^{-1})$ par $a_n = O(n^{-1})$. Sa démonstration est plus complexe.

Théorème 3.10 (Hardy-Littlewood)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_n = O(n^{-1})$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a une limite en $1-$, alors la série $\sum a_n$ converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La démonstration que nous donnons ici est due à J. Karamata et est plus simple que la démonstration d'origine. Elle est basée sur le résultat suivant :

Théorème 3.11 (Karamata)

Soit g une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ et (a_n) une suite positive. Alors

$$(3.14) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) = \int_0^1 g(x) dx.$$

Commençons par démontrer ce théorème.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE KARAMATA. Tout d'abord, rappelons qu'une fonction g est dite continue par morceaux sur $[0, 1]$ s'il existe une partition finie $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = 1$ telle que, sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, g est la restriction d'une fonction continue sur $[a_j, a_{j+1}]$ i.e. g est continue sur $]a_j, a_{j+1}[$ et a une limite à droite et à gauche de cet intervalle. En particulier, une telle fonction est bornée, $|g| \leq M$. Par conséquent, $|x^n g(x^n)| \leq M|x|^n$ et, comme $\sum |x|^n$ converge lorsque $|x| < 1$, la série $\sum x^n g(x^n)$ est absolument convergente pour $x \in]-1, 1[$. Ainsi (3.14) a bien un sens. Observons aussi que si $|g| \leq \varepsilon$ alors, pour $0 < x < 1$,

$$(3.15) \quad \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \right| (1-x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n |g(x^n)| \leq \varepsilon (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \varepsilon.$$

Commençons par démontrer (3.14) lorsque $g(x) = x^k$ est une fonction puissance. Dans ce cas

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(k+1)n} = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^k x^j} \rightarrow \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx. \end{aligned}$$

Ensuite, comme (3.14) est clairement linéaire en g , cette identité est valable lorsque g est un polynôme.

Lorsque g est continue, nous allons procéder par densité. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\sup_{x \in [0,1]} |g(x) - P(x)| \leq \varepsilon$. Par suite

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) + (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (g(x^n) - P(x^n)) \\ &\begin{cases} \geq (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) - \varepsilon \\ \leq (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) + \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

avec (3.15). On peut passer à la limite dans le membre de droite et en déduite que

$$\int_0^1 P(x) dx - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \limsup_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \int_0^1 P(x) dx + \varepsilon.$$

Comme

$$\left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 P(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(x) - P(x)| dx \leq \varepsilon$$

on en déduite que

$$\int_0^1 g(x) dx - 2\varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \limsup_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \int_0^1 g(x) dx + 2\varepsilon.$$

Enfin $\varepsilon > 0$ est arbitraire la limsup et la lim inf sont donc égales à $\int_0^1 g(x) dx$ qui est donc la limite cherchée. Ceci établit (3.14) lorsque g est continue.

Supposons enfin que g soit continue par morceaux et $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = 1$ la partition de début de la démonstration. Soit toujours $\varepsilon > 0$. Il existe alors deux fonctions continues g_ε^- et g_ε^+ telles que $g_\varepsilon^- \leq g \leq g_\varepsilon^+$, (sauf éventuellement aux points a_j) et

$$(3.16) \quad \int_0^1 |g_\varepsilon^\pm(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Admettons provisoirement l'existence de $g_\varepsilon^\pm$. Notez que ce n'est pas simplement une question de densité, puisqu'on a en plus un ordre $g_\varepsilon^- \leq g \leq g_\varepsilon^+$. On ne peut donc se contenter de relier de façon affine un point à gauche d'un saut à un point à droite (les deux suffisamment proches du saut).

On remarque ensuite que

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g_\varepsilon^-(x^n) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g_\varepsilon^+(x^n).$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1$ et en utilisant l'étape précédente pour $g_\varepsilon^\pm$, on trouve

$$\int_0^1 g_\varepsilon^-(x) dx \leq \liminf_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \limsup_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \int_0^1 g_\varepsilon^+(x) dx.$$

On utilise (3.16) pour remplacer $g_\varepsilon^\pm$ par g :

$$\int_0^1 g(x) dx - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \limsup_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n g(x^n) \leq \int_0^1 g(x) dx + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitrairement petit, la liminf et la limsup sont égales et sont donc une limite qui est bien celle qu'on veut. ■

Il nous reste à construire $g_\varepsilon^\pm$. Le cas général est un peu compliqué. Pour nos besoins, nous pouvons nous contenter d'une fonction g décroissante continue sur $[0, 1/2]$ et décroissante continue sur $]1/2, 1]$ avec $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} g(x) > g(1/2)$. On prend alors $g_\varepsilon^- = g$ sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2 + \eta, 1]$ et affine sur $[1/2, 1/2 + \eta]$ alors que $g_\varepsilon^+ = g$ sur $[0, 1/2 - \eta]$ et sur $[1/2, 1]$ et à nouveau affine entre ces deux intervalles.

Le cas d'une fonction continue par morceaux générale est un peu compliqué et est inutile pour nos besoins.

CONSTRUCTION DE $g_\varepsilon^\pm$. On prend ensuite η très petit, disons $\eta < \frac{1}{100} \min |a_{j+1} - a_j|$, et $h > 0$. On définit alors

- sur chaque $(a_j + \eta, a_{j+1} - \eta)$, on pose $g_\varepsilon + (x) = g_\varepsilon - (x) = g(x)$.

Il faut ensuite construire $g_\varepsilon^\pm$ sur chaque $]a_j - \eta, a_j + \eta[$. En théorie, il faut distinguer les cas $j = 0$ ou m des autres, mais pour cela, il suffit de prolonger g en une fonction constante sur $(-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty)$.

- Pour g_ε^- , on pose $G = \min_{[a_j - \eta, a_j + \eta]} (g(a_j), \lim_{x \rightarrow a_j^-} g(x))$ et h la fonction affine sur $[a_j - \eta, a_j]$ et sur $[a_j, a_j + \eta]$ et telle que $h(a_j \pm \eta) = g(a_j \pm \eta)$ et $h(a_j) = G$. Enfin, on pose $g_\varepsilon^-(x) = \min(h(x), g(x))$ pour $x \in]a_j - \eta, a_j + \eta[$.

Cette fonction est continue sur $]a_j - \eta, a_j + \eta[$ et en $a_j \pm \eta$ elle a pour limite $g(a_j \pm \eta) = g_\varepsilon^-(a_j \pm \eta)$ donc la fonction g_ε^- ainsi construite est bien continue.

Notez aussi que sur $]a_j - \eta, a_j + \eta[$ le graphe de g_ε^- est inclus dans $]a_j - \eta, a_j + \eta[\times [-\max |g|, \max |g|]$ donc

$$\int_0^1 g(x) - g_\varepsilon^-(x) dx \leq \sum_{j=0}^m \int_{a_j - \eta}^{a_j + \eta} g(x) + g_\varepsilon^-(x) dx \leq 4\eta \max |g|$$

– La construction de g_ε^+ est similaire en remplaçant les min par des max et on a alors

$$\int_0^1 g_\varepsilon^+(x) - g(x) dx \leq 4\eta \max |g|.$$

Il reste donc à prendre η assez petit pour que $4\eta \max |g| \leq \varepsilon$ pour obtenir (3.16). ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME TAUBÉRIEN DE HARDY-LITTLEWOOD. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Quitte à remplacer le terme a_0 de la suite (a_n) par $a_0 - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$.

Soit maintenant $g = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$ de sorte que, si $0 \leq x < 1$ alors $g(x^n) = 0$ si $n > \ln \frac{1}{x}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{0 \leq n \leq \ln \frac{1}{x}} a_n.$$

Il suffit donc de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)$ a une limite quand $x \rightarrow 1$ et que cette limite est

0. Comme $f(x) \rightarrow 0$, il suffit de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - f(x) \rightarrow 0$

Commençons par écrire $g(t) = t + h(t)$ de sorte que $h(0) = h(1) = 0$. Notons qu'on peut donc écrire $h(t) = t(1-t)k(t)$ avec k une fonction continue par morceaux. Explicitement

$$k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Alors, en remarquant que $h(x^0) = g(x^0) - x^0 = 1 - 1 = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (g(x^n) - x^n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h(x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n (1 - x^n) k(x^n). \end{aligned}$$

Notons qu'on n'a fait qu'additionner des séries convergentes, donc toutes ces séries convergent.

Maintenant, comme $a_n = O(n^{-1})$, on écrit donc $|a_n| \leq \frac{C}{n}$ pour $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - f(x) \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| x^n (1 - x^n) |k(x^n)| \\ &\leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (1 - x^n)}{n} |k(x^n)|. \end{aligned}$$

Notez que ces inégalités resteraient vraies même si les séries divergeaient, mais nous allons montrer plus loin que toutes ces quantités sont finies donc que toutes ces séries convergent

On utilise maintenant le fait que $1 - x^n = (1 - x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \leq n(1 - x)$ d'où on déduit que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - f(x) \right| \leq C(1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n |k(x^n)|.$$

Comme k est continue par morceaux, il en va de même pour $x \rightarrow xk(x)$. On déduit alors du théorème de Karamata que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n |k(x^n)| \rightarrow \int_0^1 x |k(x)| dx$$

quand $x \rightarrow 1$ (et que la série converge, donc que toutes les séries écrites jusque là dans cette démonstration sont absolument convergentes). On en déduit que $(1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n |k(x^n)| \rightarrow 0$ et donc aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - f(x) \rightarrow 0$ qui donne bien $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$ (en particulier, cette série converge). ■

3.4. Points singuliers : le théorème de Pringsheim et le théorème des lacunes de Hadamard. Dans cette section, nous allons explorer plus avant le lien entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques. Rappelons que si f est holomorphe sur un ouvert Ω et $z_0 \in \Omega$ alors f est développable en série entière en z_0 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et cette série entière a pour rayon de convergence $R \geq R(z_0) := \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Si $R > R(z_0)$ alors on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur $\Omega \cap B(z_0, R)$. Nous allons donc supposer que $R = R(z_0) < +\infty$. Quitte à remplacer f par $f(z_0 + Rz)$, on peut supposer que $z_0 = 0$ et $R = 1$.

La question à laquelle nous nous intéressons ici est celle de prolonger f en une fonction holomorphe au-delà de $D(0, 1)$. Nous allons distinguer deux cas :

Definition 3.12 (Point régulier ou singulier)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Soit $\zeta \in \mathbb{T} = \partial D(0, 1)$. On dit que ζ est un point régulier de $\mathbb{T}$ s'il existe $\rho_\zeta > 0$ et une série entière en ζ , $f_\zeta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - \zeta)^n$ de rayon de convergence ρ_ζ telle que $f_\zeta(z) = f(z)$ si $z \in D(0, 1) \cap D(\zeta, \rho_\zeta)$.
Il sera dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Ainsi un point régulier est un point ζ pour lequel il existe un voisinage sur lequel on peut prolonger f de façon holomorphe.

Exemple 3.13

Si on considère $\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ alors tous les points $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ sont réguliers et 1 est singulier.

La première observation est qu'il y a forcément au moins un point singulier sur le bord du disque de convergence. En effet, si ce n'était pas le cas, alors pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$ il existe $\rho_\zeta > 0$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(\zeta, \rho_\zeta)$. Mais alors, comme $\mathbb{T}$ est compact et $\mathbb{T} \subset \bigcup_{\zeta \in \mathbb{T}} D(\zeta, \rho_\zeta)$, il existe $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ tel que $\mathbb{T} \subset \bigcup_{j=1}^n D(\zeta_j, \rho_{\zeta_j})$ et f se

prolonge donc en une fonction holomorphe sur $D(0, 1) \cup \bigcup_{j=1}^n D(\zeta_j, \rho_{\zeta_j}) \supset D(0, 1+r)$ avec $r = \min \rho_{\zeta_j}$. Le rayon de convergence de la série est donc $\geq 1+r$ et non 1.

Le résultat suivant est frappant puisqu'il montre que la positivité des coefficients de la série (très commune pour les séries génératrices de la prochaine section) nous donne la position d'un point singulier :

Théorème 3.14 (Pringsheim)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels *positifs* tels que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $0 < R < +\infty$. Alors f a $z = R$ pour point singulier.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, en changeant de variable $z \rightarrow Rz$, *i.e.* en considérant $g(z) = f(Rz)$, on peut supposer que $R = 1$.

Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que f se prolonge en une fonction holomorphe sur un disque $D(1, \delta)$ avec $\delta > 0$. Nous notons encore f ce prolongement. En particulier, pour $r = 1 - \frac{\delta}{4}$, f est encore holomorphe du $D(r, \delta/2) \subset D(1, \delta)$ puisque

$$|z - 1| \leq |z - r| + |r - 1| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} < \delta$$

si $|z - r| < \frac{\delta}{2}$. On écrit ensuite le développement de Taylor de f au point r : pour $|h| < \frac{\delta}{2}$,

$$(3.17) \quad f(r+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(r)}{k!} h^k.$$

Mais $r < 1$, on peut donc exprimer $f^{(n)}(r)$ à l'aide de la série entière $\sum a_n z^n$:

$$\frac{f^{(k)}(r)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n r^{n-k}.$$

Ainsi (3.17) s'écrit

$$f(r+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} a_n r^{n-k} h^k.$$

Prenons maintenant h réel avec $\frac{\delta}{4} < h < \frac{\delta}{2}$ de sorte que cette série converge. De plus, comme $a_n \geq 0$ et $r > 0$, tous les termes dans cette somme sont positifs. Fubini-Tonelli nous permet d'intervertir les deux sommes

$$\begin{aligned} f(r+h) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n r^{n-k} h^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+h)^n. \end{aligned}$$

En particulier, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| \leq r+h$. Mais $r+h > 1 - \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} > 1$ donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R > 1$, une contradiction. Ainsi 1 est bien singulier. ■

On peut ensuite se poser la question de l'existence de points réguliers. Les développements en série entière des fonctions usuelles ont tous de tels points. Il est toutefois possible de montrer que toutes les fonctions n'ont pas forcément de points réguliers.

Une construction peut se faire avec le lien avec les fonctions harmoniques : on prend une fonction φ continue réelle nulle part dérivable sur $\mathbb{T}$. On la prolonge au disque par intégrale de Poisson $u = P_r * \varphi$ et on obtient ainsi une fonction harmonique sur $D(0, 1)$ continue sur $\overline{D(0, 1)}$ qui vaut φ sur $\mathbb{T}$. Elle est la partie réelle d'une fonction holomorphe f qui est continue sur $\overline{D(0, 1)}$. Par contre, sa partie réelle n'est nulle-part dérivable et ne se prolonge donc pas en une fonction holomorphe.

Les exemples que nous allons construire maintenant sont plus directs et plus élémentaires et ont l'avantage de se lire sur la série entière.

Théorème 3.15 (Théorème des lacunes de Hadamard)

Soit $\lambda > 1$ et (n_k) une suite d'entiers tels que, pour tout k , $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$.

Soit (a_k) une suite de nombres complexes tels que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ ait un rayon de convergence $R = 1$. Alors tous les points de $\mathbb{T}$ sont singuliers.

DÉMONSTRATION. Rappelons que $R = \limsup |a_k|^{1/n_k}$. Alors si on fixe une suite a_k , les séries entières $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ et $f_\theta(z) = f(e^{i\theta} z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{in_k \theta} z^{n_k}$ ont même rayon de convergence 1.

Mais alors, si on montre que pour toute série de la forme $\sum a_k z^{n_k}$ avec rayon de convergence $R = 1$, le point $\zeta = 1$ est singulier, alors $\zeta = 1$ est singulier pour f_θ pour tout θ , ce qui équivaut à ce que $\zeta = e^{i\theta}$ soit singulier pour f .

Montrons maintenant par l'absurde que 1 est singulier pour f . En effet, si 1 n'est pas singulier, f se prolonge en une fonction holomorphe (encore notée f) sur un voisinage $D(1, \eta)$ de 1. On pose alors $\Omega = D(0, 1) \cup D(1, \eta)$ qui est un ouvert (connexe) sur lequel f est holomorphe.

On prend maintenant un entier m tel que $\lambda \geq \frac{p+1}{p} > 1$ avec p un entier convenablement choisi de sorte que $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \frac{p+1}{p}$ i.e. $pn_{k+1} \geq (p+1)n_k$. On considère alors $\varphi(z) = \frac{z^{p+1} + z^p}{2}$.

Remarque 3.16

On pourrait se contenter d'énoncer le théorème avec $n_k = 3^k$ et alors $p = 1$ et

$$\varphi(z) = \frac{z^2 + z}{2}.$$

La fonction φ a les propriétés suivantes :

– On a $\varphi(1) = 1$ et si $z \neq 1$ mais $|z| \leq 1$, alors $\left| \frac{z^{p+1} + z^p}{2} \right| = |z|^p \frac{|1+z|}{2} < 2$. Par suite, $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$. Mais φ est continue, $\overline{D}$ est compact inclus dans l'ouvert $\varphi^{-1}(\Omega)$. On pose alors $\delta = \text{dist}(\overline{D}, \mathbb{C} \setminus \varphi^{-1}(\Omega)) > 0$ (en dimension finie, il est facile de voir que la distance d'un compact à un fermé est atteinte) donc $\varphi(D(0, 1 + \delta)) \subset \Omega$.

Posons alors $g(z) = f(\varphi(z))$. Cette fonction est alors holomorphe sur $\varphi^{-1}(\Omega)$. En particulier, elle est holomorphe sur $D(0, 1 + \delta)$. Sa série de Taylor en 0 a donc un rayon de convergence $R' \geq 1 + \delta$.

– Par ailleurs $\varphi(z)^{n_k}$ est un polynôme dont les termes sont de degré pn_k à $(p+1)n_k$. Écrivons $\varphi_{n_k}(z) = b_{p,n_k} z^{pn_k} + \dots + b_{p+1,n_k} z^{(p+1)n_k}$. Comme $pn_{k+1} > (p+1)n_k$, on peut

poser $b_j = b_{pn_k}$ lorsque $pn_k \leq j \leq (p+1)n_k$ (et $b_j = 0$ pour les j qui ne sont pas de ce type) et alors $\varphi_{n_k}(z) = b_{pn_k}z^{pn_k} + \dots + b_{(p+1)n_k}z^{(p+1)n_k}$.

On écrit alors

$$f(\varphi(z)) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K a_k \varphi(z)^{n_k}$$

mais

$$\sum_{k=0}^K a_k \varphi(z)^{n_k} = \sum_{k=0}^K a_k \sum_{j=pn_k}^{(p+1)n_k} b_j z^j = \sum_{m=0}^{(p+1)n_K} c_m z^m$$

où $c_m = 0$ sauf si $m = \ell n_k$ avec $p \leq \ell \leq p+1$ (et il existe au plus un seul couple (k, ℓ) pour lequel cela peut avoir lieu) auquel cas $c_m = a_k b_m$. En particulier, par unicité du développement en série entière, $\sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^m$ est la série de Taylor de g dont le

rayon de convergence est $\geq 1 + \delta > 1$. En prenant $z = 1 + \frac{\delta}{2}$, cette série converge, donc $\lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{(p+1)n_K} c_j z^j$ existe.

D'un autre côté, pour ce z , en posant $x := \varphi(z) = \frac{(1 + \delta/2)^{p+1} + (1 + \delta/2)^p}{2} \geq (1 + \delta/2)^p > 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{n_k}$ diverge grossièrement (puisque son rayon de convergence est 1). Par suite la limite de $\sum_{k=0}^K a_k \varphi(z)^{n_k}$ n'existe pas, d'où la contradiction. ■

Remarque 3.17 (Théorème des lacunes de Fabry)

La condition de lacunarité dans le théorème de Hadamard n'est pas optimale. Le Théorème des lacunes de Fabry nous dit que si $(n_k)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $\frac{n_k}{k} \rightarrow +\infty$ et si $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres complexes non nuls, tels que la série lacunaire

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^{n_k}$$

a un rayon de convergence $0 < R < +\infty$ alors le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ est une frontière naturelle de f .

Autrement dit, la fonction f , holomorphe dans le disque $D(0, R)$, ne peut être prolongée holomorphiquement au voisinage d'aucun point du cercle $|z| = R$.

3.5. Un théorème de Steinhaus sur les séries entières aléatoires.

Théorème 3.18 (Steinhaus)

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Alors, presque sûrement, la série entière aléatoire

$$F_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega) z^n$$

a pour rayon de convergence 1 et le cercle unité est une frontière naturelle de F_ω .

DÉMONSTRATION. Comme $|\varepsilon_n(\omega)| = 1$ pour tout n et (presque) tout ω , la formule de Hadamard donne

$$\frac{1}{R(F_\omega)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |\varepsilon_n(\omega)|^{1/n} = 1.$$

Ainsi, $R(F_\omega) = 1$ pour presque tout ω .

Fixons maintenant un arc ouvert non vide I du cercle unité et notons A_I l'événement

$$A_I = \{F_\omega \text{ se prolonge holomorphiquement à travers } I\}.$$

Pour tout entier $N \geq 0$, écrivons

$$F_\omega(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n(\omega) z^n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega) z^n.$$

La première somme est un polynôme. Par conséquent, F_ω se prolonge holomorphiquement à travers I si et seulement si la série $\sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega) z^n$ se prolonge holomorphiquement à travers I .

Ainsi, pour tout N , l'événement A_I ne dépend que des variables $\varepsilon_N, \varepsilon_{N+1}, \dots$. Il appartient donc à la tribu terminale associée à la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$. La loi du zéro-un de Kolmogorov donne alors $\mathbb{P}(A_I) \in \{0, 1\}$. Supposons, par l'absurde, que $\mathbb{P}(A_I) = 1$ i.e. F_ω se prolonge presque sûrement holomorphiquement à travers I .

Considérons la suite déterministe $(\delta_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\delta_n = \begin{cases} -1, & \text{si } n = 2^k \text{ pour un certain } k \geq 0, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite de variables aléatoires $(\delta_n \varepsilon_n)_{n \geq 0}$ a la même loi que la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$: les variables $\delta_n \varepsilon_n$ sont encore indépendantes et prennent les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité.

Par conséquent, la série aléatoire

$$\tilde{F}_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \varepsilon_n(\omega) z^n$$

a la même loi que F_ω . Comme $\mathbb{P}(A_I) = 1$, $\tilde{F}_\omega$ se prolonge également presque sûrement holomorphiquement à travers I .

Ainsi, presque sûrement, les deux fonctions F_ω et $\tilde{F}_\omega$ se prolongent holomorphiquement à travers I . Il en est alors de même de leur différence :

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - \tilde{F}_\omega(z) &= \sum_{n \geq 0} (1 - \delta_n) \varepsilon_n(\omega) z^n \\ &= 2 \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{2^k}(\omega) z^{2^k}. \end{aligned}$$

Or la série lacunaire $G_\omega(z) = 2 \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{2^k}(\omega) z^{2^k}$ a pour rayon de convergence 1, puisque

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |2\varepsilon_{2^k}(\omega)|^{1/2^k} = 1.$$

De plus, ses exposants vérifient $\frac{2^{k+1}}{2^k} = 2$. Le théorème des lacunes de Hadamard implique donc que le cercle unité est une frontière naturelle de G_ω .

En particulier, G_ω ne peut se prolonger holomorphiquement à travers l'arc I , ce qui contredit la conclusion précédente. Ainsi, on ne peut pas avoir $\mathbb{P}(A_I) = 1$. Du fait de la loi de Kolmogorov, nous en déduisons donc que $\mathbb{P}(A_I) = 0$.

Considérons enfin une famille dénombrable $\mathcal{I}$ d'arcs ouverts du cercle unité formant une base de sa topologie, par exemple les arcs dont les extrémités ont des arguments rationnels. Comme cette famille est dénombrable,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} A_I\right) = 0.$$

Si F_ω admettait un prolongement holomorphe au voisinage d'un point du cercle unité, il existerait un arc $I \in \mathcal{I}$ à travers lequel F_ω se prolongerait. L'événement correspondant est donc contenu dans $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} A_I$. Mais cet événement est de probabilité nulle. Ainsi, presque sûrement, F_ω ne se prolonge holomorphiquement au voisinage d'aucun point du cercle unité. Celui-ci est donc une frontière naturelle de F_ω . ■

3.6. Théorème de transfert de Darboux. Avertissement : cette section nécessite une certaine aisance avec la théorie des fonctions holomorphes.

Le résultat suivant montre que la singularité détermine la croissance des coefficients. Il utilise plusieurs résultats de fonctions holomorphes.

Théorème 3.19 (Théorème de transfert de Darboux)

Soient $R > 0$, $\rho > R$ et g une fonction holomorphe dans le disque $D(0, \rho)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. On considère, pour $|z| < R$, la fonction

$$f(z) = g(z) \left(1 - \frac{z}{R}\right)^{-\alpha},$$

où la puissance est définie par son développement binomial au voisinage de 0.

Alors f admet un développement en série entière en 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec

$$a_n = \frac{g(R)}{\Gamma(\alpha)} R^{-n} n^{\alpha-1} + O(R^{-n} n^{\alpha-2}).$$

En particulier, si $g(R) \neq 0$, alors

$$a_n \sim \frac{g(R)}{\Gamma(\alpha)} R^{-n} n^{\alpha-1}.$$

Notons que le fait que f admette un développement en série entière en 0 résulte directement du fait que f soit holomorphe au voisinage de 0. Nous allons utiliser deux résultats assez simples :

Lemme 3.20

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes tels que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $0 < r < R$,

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^n}.$$

On peut démontrer ce lemme en n'utilisant pas la théorie des fonctions holomorphes. **DÉMONSTRATION.** Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, R)$ et comme $r\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ est compact, f est bornée sur $r\mathbb{T}$ et $\max_{|z|=r} |f(z)| < +\infty$.

Ensuite, la série entière est normalement convergente sur $r\mathbb{T}$, on peut donc échanger intégration et sommation :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = a_m r^m.$$

Notez qu'on utilise ici un calcul usuel pour les séries de Fourier. L'estimation en découle avec l'inégalité triangulaire. ■

Lemme 3.21 (Formule du binôme généralisée)

Soit $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, alors

$$(1-z)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(n+1)} z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$. De plus

$$(3.18) \quad \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(n+1)} = \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

DÉMONSTRATION. Le développement en série entière de $(1-z)^{-\beta}$ s'obtient par la formule de Taylor pour $z \in]-1, 1[$ réel. Ensuite, comme $(1-z)^{-\beta} = \exp(-\ln(1-z))$, on prolonge ce développement comme identité entre deux fonctions holomorphes sur le disque unité. Cette identité étant valide sur un intervalle, elle l'est sur tout le disque (c'est le principe des zéros isolés appliqué à la différence). Enfin, le fait que le rayon de convergence de la série soit 1 résulte de la règle de d'Alembert et de $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

On peut aussi utiliser cette série comme *définition* de $(1-z)^{-\beta}$ pour $|z| < 1$. Pour ce résultat, cela est suffisant, de même si on se restreint à la variable réelle.

Enfin, l'estimation asymptotique provient de la formule de Stirling

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} (1 + O(z^{-1}))$$

quand $\Re(z) \rightarrow +\infty$ ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DARBOUX. Nous utiliserons la notation (empruntée des ouvrages sur les séries formelles) $[z^n]F(z)$ pour désigner le coefficient de z^n dans le développement en série entière de F . Par exemple, le lemme précédent implique qu'il existe C_β tel que, pour tout $n \geq 0$,

$$c_n := [z^n](1-z)^{-\beta} \leq C_\beta (1+n)^{\beta-1}.$$

Commençons par voir que, si $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ et si H est holomorphe dans un disque de rayon strictement supérieur à 1, alors

$$(3.19) \quad [z^n](H(z)(1-z)^{-\beta}) = O(n^{\beta-1}).$$

En effet, écrivons $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^k$. En utilisant le lemme 3.20, il existe $q \in (0, 1)$ et $C > 0$ tels que $|h_k| \leq Cq^k$. Par produit de Cauchy,

$$[z^n](H(z)(1-z)^{-\beta}) = \sum_{k=0}^n h_k c_{n-k}.$$

Séparons cette somme en deux parties. Pour $k \leq n/2$, $n - k \geq n/2$ donc $|c_{n-k}| \leq C'_\beta n^{\beta-1}$ où C'_β est une nouvelle constante. Il s'ensuit que

$$\sum_{k \leq n/2} |h_k c_{n-k}| \leq C'_\beta n^{\beta-1} \sum_{k \geq 0} |h_k| = O(n^{\beta-1}).$$

Ici, nous avons utilisé que le rayon de convergence de la série $\sum h_k z^k$ est > 1 donc que $\sum |h_k|$ converge. Pour $k > n/2$, la décroissance exponentielle des h_k donne

$$\sum_{k > n/2} |h_k c_{n-k}| = O(q^{n/2} n^M) = o(n^{\beta-1})$$

pour un certain $M \geq 0$ (qui dépend de β et dont la valeur n'a aucune importance). Cela démontre (3.19).

Revenons maintenant à la fonction f . Posons $F(z) = f(Rz)$ et $G(z) = g(Rz)$. La fonction G est holomorphe dans un disque de rayon $\rho/R > 1$, et $F(z) = G(z)(1-z)^{-\alpha}$.

Puisque G est holomorphe au voisinage de 1, on peut écrire $G(z) = G(1) + (1-z)H(z)$, où $H(z) = \frac{G(z) - G(1)}{1-z}$ se prolonge holomorphiquement en $z = 1$ (holomorphe sur un voisinage de 1 et continue en 1) et reste holomorphe dans un disque de rayon strictement supérieur à 1. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) &= G(1)(1-z)^{-\alpha} + H(z)(1-z)^{1-\alpha} \\ &= G(1)(1-z)^{-\alpha} + H(z)(1-z)^{-(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

La formule (3.18) avec $\beta = \alpha$, appliquée au premier terme, donne

$$[z^n](G(1)(1-z)^{-\alpha}) = \frac{G(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}).$$

Lorsque $\alpha \neq 1$, la majoration (3.19), appliquée avec $\beta = \alpha - 1$, donne

$$[z^n](H(z)(1-z)^{-(\alpha-1)}) = O(n^{\alpha-2}).$$

Lorsque $\alpha = 1$, ce second terme est simplement $H(z)$, dont les coefficients décroissent exponentiellement ; la même majoration reste donc vraie.

Par conséquent,

$$[z^n]F(z) = \frac{G(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}).$$

Or $F(z) = f(Rz) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n z^n$, de sorte que $[z^n]F(z) = a_n R^n$. Comme $G(1) = g(R)$, on obtient finalement

$$a_n = \frac{g(R)}{\Gamma(\alpha)} R^{-n} n^{\alpha-1} + O(R^{-n} n^{\alpha-2}).$$

Si $g(R) \neq 0$, le terme principal est non nul, d'où l'équivalent annoncé. ■

Example 3.22

Comme $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, $[z^n](1-4z^2)^{1/2} \sim -\frac{4^n}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

Nous allons redémontrer ce résultat lorsque nous étudierons les nombres de Catalan.

4. Séries génératrices : quelques applications combinatoires

4.1. Principe général et exemples simples. L'idée générale d'une série génératrice est la suivante : on a une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ ou $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, éventuellement finie, pour laquelle on dispose de quelques propriétés, typiquement une formule de récurrence. On souhaite l'étudier plus finement, par exemple connaître son comportement asymptotique, obtenir une expression pour son terme général... Cela peut être plus facile en lui attachant une série de fonctions : une série entière (un polynôme quand la suite est finie), une série de Laurent, de Fourier, de Dirichlet... Les deux qui nous intéressent ici sont les suivantes :

Definition 4.1 (Série génératrice)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite.

- La *série génératrice* associée est la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
- La *série génératrice exponentielle* associée est la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$.

Ces séries peuvent se manipuler de façon formelle et rigoureuse, mais nous allons ici éviter de rentrer dans ces subtilités et toujours supposer qu'elles ont un rayon de convergence $R > 0$. Les séries exponentielles sont alors utilisées lorsqu'on pense que la suite (a_n) croît rapidement.

Nous allons maintenant donner quelques exemples. Notons que nous avons déjà rencontré cette technique au moment où nous avons introduit les polynômes et les nombres de Bernoulli.

Exemple 4.2

Commençons par un exemple très simple avec des polynômes qui illustre bien la notion de série génératrice, dans le cas des suites finies.

Une suite finie $a_0, a_1, \dots, a_n$ s'identifie au polynôme $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. Dans cet exemple, on suppose qu'on dispose de 9 pièces de 1 euro, 4 pièces de 2 euros et 3 billets de 5 euros. Les pièces de 1 euro nous permettent de payer 1, 2, 3, ..., 9 euros et le polynôme correspondant est $P_1(X) = X + X^2 + \dots + X^9$. Les pièces de 2 euro nous permettent de payer 2, 4, 6 ou 8 euros et le polynôme correspondant est $P_2(X) = X^2 + X^4 + X^6 + X^8$ enfin les billets nous permettent de payer 5, 10 ou 15 euros et on leur associe le polynôme $P_3(X) = X^5 + X^{10} + X^{15}$.

On souhaite payer une somme de 12 euros : de nombreuses possibilités s'offrent à nous : 2 billets de 5 euros et soit 1 pièce de 2 euros, soit 2 pièces de 1 euro ou alors 1 billet de 5 euros, 3 pièces de 2 euros et une de 1 euro... Nous résumons les possibilités dans le tableau suivant :

5 euros	2	2	1	1	1	1	0	0	0
2 euros	1	0	3	2	1	0	4	3	2
1 euro	0	2	1	3	5	7	4	6	8

On observe que les combinaisons qui apparaissent sont celles pour lesquelles $5j + 2k + \ell = 12$ avec $0 \leq j \leq 3$, $0 \leq k \leq 4$ et $0 \leq \ell \leq 9$ soit exactement celles qu'on utilise pour déterminer le coefficient de X^{12} dans le polynôme $P_1(X)P_2(X)P_3(X)$.

Exemple 4.3

Soit f_n la suite de Fibonacci, $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On considère alors la série génératrice $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$ et on suppose que cette série a un rayon de convergence $R > 0$. On écrit alors

– d’une part

$$z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} z^{n+2} = F(z) - f_0 - f_1 z = F(z) - 1 - z$$

– d’autre part

$$\begin{aligned} z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} z^n &= z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n + f_{n+1}) z^n = z^2 F(z) + z \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} z^n \\ &= z^2 F(z) + z(F(z) - 1). \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, on trouve $(z^2 + z - 1)F(z) = -1$. Ainsi F est une fraction rationnelle qu’on développe en éléments simples. Les racines de $z^2 + z - 1$ sont

$$\varphi_+ = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_- = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

et donc,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{-1}{(z - \varphi_-)(z - \varphi_+)} \\ &= \frac{1}{\varphi_+ - \varphi_-} \left(\frac{1}{z - \varphi_-} - \frac{1}{z - \varphi_+} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi_+ - \varphi_-} \left(\frac{\varphi_+^{-1}}{1 - z/\varphi_+} - \frac{\varphi_-^{-1}}{1 - z/\varphi_-} \right). \end{aligned}$$

Cette fonction est développable en série entière de rayon de convergence $R = \min(|\varphi_+|, |\varphi_-|) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. pour $|z| < R$, tous les calculs ci-dessus sont justifiés.

On peut maintenant obtenir l’expression des f_n en utilisant l’unicité du développement en série entière :

$$\frac{\varphi_{\pm}^{-1}}{1 - z/\varphi_{\pm}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi_{\pm}^{n+1}} z^n$$

donc

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi_+ - \varphi_-} \left(\frac{1}{\varphi_+^{n+1}} - \frac{1}{\varphi_-^{n+1}} \right) z^n.$$

En comparant avec $F(z) = \sum f_n z^n$, on en déduit que

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\varphi_+ - \varphi_-} \left(\frac{1}{\varphi_+^{n+1}} - \frac{1}{\varphi_-^{n+1}} \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-2}{1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1} - \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Ce n'est pas la façon la plus rapide d'obtenir cela, toutefois, cette technique fonctionne pour toutes les suites récurrentes de pas $m \geq 1$, données par $u_0, \dots, u_{m-1}$ et, pour $n \geq 0$,

$$(4.20) \quad u_{n+m} + a_{m-1}u_{n+m-1} + \dots + a_0u_n = 0 \quad a_0 \neq 0.$$

Notez qu'on suppose $a_0 \neq 0$ sinon le pas est $< m$. Il est facile de voir que l'es suites vérifiant (4.20) forment un espace vectoriel de dimension m .

Rappelons qu'à une telle suite récurrente, on associe son polynôme caractéristique

$$P(x) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0.$$

On note alors $Z(P)$ l'ensemble de ses racines et si $r \in Z(P)$, $m_P(r)$ sera la multiplicité de la racine. Notons que $0 \notin Z(P)$ car on a supposé que $a_0 \neq 0$. On vérifie sans peine que si $r \in Z(P)$ et $j < m_P(r)$ alors $u_n^{r,j} = (n^j r^n)_{n \geq 0}$ vérifient la relation de récurrence (4.20). De plus, les suites $\{u_{r,j}\}_{r \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes donc $\{u_{r,j}\}_{r \in Z(P), j < m_P(r)}$ est une base de l'espace vectoriel des suites vérifiant (4.20). On peut donc écrire

$$u_n = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \lambda_{r,j} u_n^{r,j}.$$

Rappelons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{r,j} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j r^n z^n = \frac{r^j}{(1-rz)^{j+1}} \quad |z| < r.$$

Comme il y a un nombre fini de racines (toutes non nulles) et que leur multiplicité est finie, on en déduit que la série génératrice de (u_n) s'écrit, après interversion des sommes,

$$\sum_{n \geq 0} u_n z^n = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \lambda_{r,j} \sum_{n \geq 0} u_n^{r,j} z^n = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \frac{\lambda_{r,j} r^j}{(1-rz)^{j+1}}$$

où la série converge tant que $|z| < R = \min_{r \in Z(P)} \frac{1}{|r|}$ ($R > 0$).

On reconnaît à droite la forme générique d'un développement en éléments simples d'une fraction rationnelle qui est plutôt $\sum_{\rho} \sum_j \frac{\lambda_{r,j} r^j}{(z-\rho)^{j+1}}$ i.e. pour les séries génératrices, les pôles sont $\{1/r, r \in Z(P)\}$ et non les racines du polynôme P . Introduisons donc

$$P^*(z) = z^m P(1/z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$$

en posant $a_m = 1$ (i.e. on réécrit P à l'envers). Les racines de P^* sont donc les inverses des racines de P . Soit alors Q un polynôme de degré $\deg(Q) < m = \deg(P)$ et considérons la fraction rationnelle $f = \frac{Q}{P^*}$. Comme f est holomorphe sur le disque $D(0, R)$, où on a encore $R = \min_{\rho \in Z(P^*)} |\rho| = \min_{r \in Z(P)} \frac{1}{|r|}$, elle admet un développement en série entière

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P^*(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n. \text{ Mais alors, en posant } a_k = 0 \text{ pour } k > m$$

$$Q(z) = P(z)f(z) = \left(\sum_{n=0}^m a_{m-n} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\min(m,n)} a_{m-k} b_{n-k} \right) z^n.$$

Comme Q est un polynôme de degré $< m$, les termes pour $n \geq m$ dans le développement de droite sont nuls et on trouve, pour $n > m$

$$0 = \sum_{k=0}^m a_{m-k} b_{n-k} = b_n + a_{m-1} b_{n-1} + \dots + a_0 b_{n-m}$$

et ainsi (b_n) vérifie bien la relation de récurrence (4.20). Par suite, sa série génératrice s'écrit bien

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \frac{\lambda_{r,j} r^j}{(1 - rz)^j} = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \frac{\lambda_{r,j}}{(r - z)^j}.$$

Nous venons donc de démontrer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Si 0 est un pôle, on applique la formule à $f_\eta(z) = f(z + \eta)$ où η n'est pas un pôle et on re-translate dans l'autre sens. Ainsi, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 4.4

Toute fraction rationnelle $\frac{Q(z)}{P(z)}$ avec $\deg(Q) < \deg(P)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \frac{\lambda_{r,j} r^j}{(1 - rz)^j} = \sum_{r \in Z(P)} \sum_{j < m_P(r)} \frac{\lambda_{r,j}}{(r - z)^j}$$

où $Z(P)$ est l'ensemble des zéros de P et $m_P(r)$ la multiplicité de r comme zéro de P .

L'unicité provient bien évidemment de l'unicité du développement en série entière. Elle n'est pas primordiale en analyse.

4.2. La formule d'inversion de Lagrange–Bürmann. Cette section nécessite d'être à l'aise avec le calcul de résidus.

Théorème 4.5 (Formule d'inversion de Lagrange–Bürmann)

Soit φ une fonction holomorphe au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) \neq 0$. Il existe alors une unique fonction w , holomorphe au voisinage de 0, telle que

$$w(0) = 0 \quad \text{et} \quad w(z) = z\varphi(w(z)).$$

Si H est holomorphe au voisinage de 0, alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$[z^n]H(w(z)) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] (H'(z)\varphi(z)^n).$$

De manière équivalente,

$$[z^n]H(w(z)) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} (H'(u)\varphi(u)^n) \Big|_{u=0}.$$

À nouveau $[z^n]F$ signifie le coefficient de z^n dans le développement en série entière en 0 de F . Elle peut s'obtenir comme un résidu

$$[z^n]F(z) = \text{Res} \left(\frac{F(z)}{z^{n+1}}, 0 \right).$$

Il sera plus pratique de le noter

$$[z^n]F(z) = \text{Res}_{z=0} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

puisque la formule de Cauchy s'écrit

$$[z^n]F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

où Γ est un cercle $\{|z| = r\}$, $r < \rho$ avec ρ tel que F soit holomorphe sur un disque $D(0, \rho)$. Cette expression permet de faire facilement un changement de variable.

DÉMONSTRATION. Posons $\psi(u) = \frac{u}{\varphi(u)}$. Comme $\varphi(0) \neq 0$, la fonction ψ est holomorphe au voisinage de 0 et

$$\psi(0) = 0, \quad \text{et} \quad \psi'(0) = \frac{1}{\varphi(0)} \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale (holomorphe), ψ est biholomorphe au voisinage de 0. Son inverse w est donc holomorphe au voisinage de 0 et vérifie

$$z = \psi(w(z)) = \frac{w(z)}{\varphi(w(z))}.$$

On obtient ainsi $w(z) = z\varphi(w(z))$. L'unicité découle également du théorème d'inversion locale.

On a ensuite

$$[z^n]H(w(z)) = \text{Res}_{z=0} \frac{H(w(z))}{z^{n+1}} dz.$$

Effectuons le changement de variable $z = \psi(u) = \frac{u}{\varphi(u)}$. Comme ψ est biholomorphe au voisinage de 0, ce changement de variable est licite dans le calcul du résidu. De plus,

$$\psi'(u) = \frac{\varphi(u) - u\varphi'(u)}{\varphi(u)^2}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} [z^n]H(w(z)) &= \text{Res}_{u=0} H(u) \left(\frac{\varphi(u)}{u} \right)^{n+1} \frac{\varphi(u) - u\varphi'(u)}{\varphi(u)^2} du \\ &= \text{Res}_{u=0} \frac{H(u)\varphi(u)^{n-1}(\varphi(u) - u\varphi'(u))}{u^{n+1}} du. \end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$\frac{H(u)\varphi(u)^{n-1}(\varphi(u) - u\varphi'(u))}{u^{n+1}} = \frac{1}{n} \frac{H'(u)\varphi(u)^n}{u^n} - \frac{d}{du} \left(\frac{H(u)\varphi(u)^n}{u^n} \right).$$

Or le résidu de la dérivée d'une fonction méromorphe est nul. Par conséquent,

$$[z^n]H(w(z)) = \frac{1}{n} \text{Res}_{u=0} \frac{H'(u)\varphi(u)^n}{u^n} du.$$

Enfin,

$$\text{Res}_{u=0} \frac{H'(u)\varphi(u)^n}{u^n} du = [u^{n-1}](H'(u)\varphi(u)^n),$$

ce qui donne bien $[z^n]H(w(z)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}](H'(u)\varphi(u)^n)$. ■

Corollaire 4.6 (Formule d'inversion de Lagrange)

Sous les hypothèses du théorème, pour tout $n \geq 1$, $[z^n]w(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n$. Autrement dit,

$$w(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} [u^{n-1}]\varphi(u)^n.$$

Plus généralement, pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq m$, $[z^n]w(z)^m = \frac{m}{n}[u^{n-m}]\varphi(u)^n$.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la formule de Lagrange–Bürmann à $H(u) = u$ pour la première formule, puis à $H(u) = u^m$ donc $H'(u) = mu^{m-1}$, pour la seconde. ■

Exemple 4.7

Lorsque $\varphi(z) = e^z$ on obtient

$$[z^n]w(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]e^{nu} = \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation $T(z) = ze^{T(z)}$ est donné par la série

$$T(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n.$$

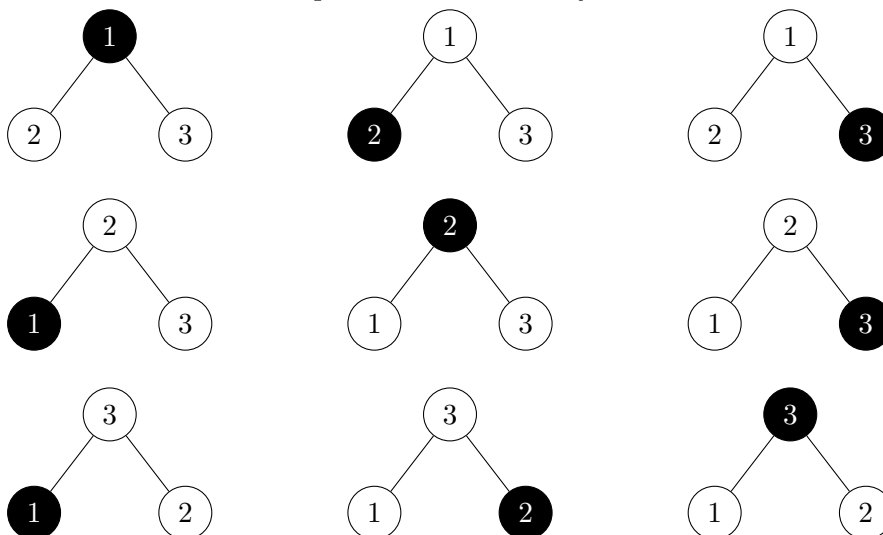
Cette fonction a une interprétation combinatoire : c'est la série génératrice exponentielle des arbres enracinés étiquetés.

Rappelons qu'un arbre enraciné étiqueté est

Un arbre enraciné étiqueté est un graphe qui possède les trois propriétés suivantes :

- (1) un arbre (un graphe connexe sans cycle) ;
- (2) l'un de ses sommets est distingué, on l'appelle la racine
- (3) chaque sommet porte une étiquette distincte, qu'on choisira ici dans $\{1, \dots, n\}$.

Voici les 9 arbres enracinés étiquetés à 3 sommets ayant la même racine

**Proposition 4.8 (Formule de Cayley)**

Pour tout $n \geq 1$, notons t_n le nombre d'arbres enracinés étiquetés dont l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$, et considérons leur série génératrice exponentielle

$$T(z) = \sum_{n \geq 1} t_n \frac{z^n}{n!}.$$

Alors $T(z) = z \exp(T(z))$.

En particulier $t_n = n^{n-1}$.

DÉMONSTRATION. Fixons $n \geq 1$ et considérons un arbre enraciné étiqueté à n sommets. On choisit d'abord l'étiquette de la racine, ce qui donne n possibilités. Après suppression de la racine et de toutes les arêtes qui lui sont incidentes, il reste un ensemble de k arbres enracinés étiquetés, pour un certain entier $k \geq 0$.

Supposons que ces k arbres possèdent respectivement $n_1, \dots, n_k \geq 1$ sommets de sorte que $n_1 + \dots + n_k = n - 1$. Le nombre de façons de répartir les $n - 1$ étiquettes restantes entre k blocs ordonnés de tailles $n_1, \dots, n_k$ est

$$\frac{(n-1)!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

Sur le bloc numéro j , on peut ensuite choisir un arbre enraciné étiqueté de t_{n_j} façons. Comme les branches issues de la racine ne sont pas ordonnées, chaque famille de k branches a été comptée $k!$ fois. On obtient donc

$$(4.21) \quad t_n = n \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n-1 \\ n_j \geq 1}} \frac{(n-1)!}{n_1! \cdots n_k!} t_{n_1} \cdots t_{n_k}.$$

Lorsque $n = 1$, on utilise la convention selon laquelle, pour $k = 0$, la somme vide vaut 0 et le produit vide vaut 1. La formule donne bien $t_1 = 1$.

Divisons maintenant l'identité (4.21) par $n!$. Comme $n! = n(n-1)!$, il vient

$$(4.22) \quad \frac{t_n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n-1 \\ n_j \geq 1}} \frac{t_{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{t_{n_k}}{n_k!}.$$

Or, par définition de T ,

$$T(z)^k = \sum_{m \geq k} \left(\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = m \\ n_j \geq 1}} \frac{t_{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{t_{n_k}}{n_k!} \right) z^m.$$

Par conséquent,

$$[z^{n-1}]T(z)^k = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n-1 \\ n_j \geq 1}} \frac{t_{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{t_{n_k}}{n_k!}.$$

L'identité (4.22) s'écrit donc $\frac{t_n}{n!} = [z^{n-1}] \sum_{k \geq 0} \frac{T(z)^k}{k!}$. Puisque $\sum_{k \geq 0} \frac{T(z)^k}{k!} = \exp(T(z))$,

on obtient $\frac{t_n}{n!} = [z^{n-1}] \exp(T(z))$.

D'autre part, $[z^n]T(z) = \frac{t_n}{n!}$, tandis que $[z^n](z \exp(T(z))) = [z^{n-1}] \exp(T(z))$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $[z^n]T(z) = [z^n](z \exp(T(z)))$.

Les deux séries ont en outre un terme constant nul. Elles sont donc égales soit $T(z) = z \exp(T(z))$. ■

Corollaire 4.9

La suite $(t_n)_{n \geq 1}$ vérifie également la récurrence quadratique

$$(n-1)t_n = n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} t_k t_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

DÉMONSTRATION. La série génératrice exponentielle $T(z) = \sum_{n \geq 1} t_n \frac{z^n}{n!}$ vérifie $T(z) = ze^{T(z)}$. En dérivant, il vient

$$T'(z) = e^{T(z)} + ze^{T(z)}T'(z) = \frac{T(z)}{z} + T(z)T'(z).$$

Le coefficient de z^{n-1} dans le membre de gauche est $\frac{t_n}{(n-1)!}$, tandis que celui du membre de droite est, avec la formule de Cauchy

$$\frac{t_n}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t_k}{k!} \frac{t_{n-k}}{(n-k-1)!}.$$

Ainsi,

$$\frac{t_n}{(n-1)!} - \frac{t_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t_k t_{n-k}}{k!(n-k-1)!}.$$

En multipliant par $n!$, on obtient la formule annoncée. ■

Les nombres de Catalan de la prochaine section fournissent un second exemple.

4.3. Les nombres de Catalan. Les nombres de Catalan sont une famille de nombres qui apparaissent dans nombre de problèmes de combinatoire. Voici quelques exemples :

- (i) On souhaite effectuer des opérations entre n objets $a_1 \cdots a_n$ et placer des parenthèses afin de lever toute ambiguïté. On note C_n le nombre de possibilités. Cela devient important si l'opération n'est pas associative (cas assez rare quand même, surtout en analyse) ou si on dispose d'un programme informatique pour effectuer une opération entre deux quantités (par exemple un produit de matrices) et qu'on veut l'utiliser pour effectuer une opération entre $n > 2$ quantités.

Les règles sont donc

- on n'a jamais plus de deux termes consécutifs sans parenthèse (pas de choix à effectuer),
- on ne met jamais de parenthèse autour d'un terme unique (pas de parenthèse inutile).

Par exemple,

- pour $n = 1$, il n'y a qu'un seul choix a , et $C_1 = 1$,
- pour $n = 2$, il n'y a qu'un seul choix (ab) , et $C_2 = 1$,
- pour $n = 3$, il y a deux possibilités : $(ab)c$ et $a(bc)$ et $C_3 = 2$,
- pour $n = 4$, il y a $C_4 = 5$ possibilités $((ab)c)d$, $(a(bc))d$ qui consistent à prendre celles pour $n = 3$ et leur adjoindre un dernier produit, $(ab)(cd)$ qui consiste à prendre celle pour $n = 2$ entre a et b et celle pour $n = 4 - 2$ entre c et d et enfin celle pour $n = 1$ et lui adjoindre celles pour $n = 4 - 1$ entre b, c et d , $a((bc)d)$ et $a(b(cd))$.

En général, il y a $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ possibilités : on coupe les n facteurs en deux paquets, l'un de k facteurs pour lequel il y a C_k possibilités et un paquet de $n - k$ facteurs pour lesquels il y a C_{n-k} possibilités et on fait le produit correspondant.

En posant $C_0 = 0$, on obtient une expression plus agréable :

Definition 4.10 (Nombres de Catalan)

Les *nombre de Catalan* sont définis par $C_0 = 0$, $C_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Notons que certains auteurs préfèrent décaler la suite et considèrent $c_n = C_{n+1}$ qui vérifie la relation de récurrence $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$.

Avant de d'étudier ces nombres, donnons quelques autres exemples qui aboutissent à la même relation de récurrence :

- (ii) Un *mot de Dyck* de longueur $2n$ est un mot composé de deux lettres X et Y tel qu'on n'écrit jamais plus de Y qu'on n'a déjà écrit de X , mais qui a autant de X que de Y . On reconnaît les mêmes règles que pour les parenthèses. Il y a 0 mot de longueur 0, un seul mot de longueur 2 : XY , 2 mots de longueur 4 : $XXYY$ et $XYXY$ et 5 mots de longueur 6, $XXXYYY$, $XXYXYY$, $XYXXYY$, $XXYYXY$, $XYXYXY$. En reprenant le raisonnement précédent, ou en posant $X = ($ et $Y =)$, on retrouve qu'il y a C_n mots de Dyck de longueur $2n$.
- (iii) Un arbre de décision binaire est un arbre où à chaque nœud : soit on a pris une décision finale et il n'y a plus de descendant (*i.e.* le nœud est une feuille) soit on a exactement deux descendants. Il y a C_n tels arbres à n nœuds.
- (iv) On prend une grille de taille (n, n) *i.e.* $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ et on va compter le nombre de chemins qui vont du point $(1, 1)$ au point (n, n) en se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut, sans jamais franchir la diagonale *i.e.* allant d'un point (j, k) soit à $(j+1, k)$, soit à $(j, k+1)$ avec la règle que si $k = j$, seul le déplacement $(j+1, k)$ est autorisé et si $j = n$, seul le déplacement $(j, k+1)$ est autorisé. On s'arrête dès qu'on a atteint le point (n, n) .

On voit aisément que cela correspond à un arbre de décision binaire puisqu'une fois qu'on a atteint un point (n, k) , le restant du chemin est défini. Il y a donc C_n tels chemins.

- (v) On dessine un polygone régulier à $n+1$ sommets, en numérotant les sommets. On relie les sommets deux par deux et on veut que les arrêtes ainsi obtenues ne se recoupent pas et que le polygone soit découpé en triangles. Par exemple, pour un hexagone, il y a 14 façons de faire cela (on notera qu'une fois qu'on a un dessin, une rotation des sommets donne un nouveau dessin). Il y a encore C_n possibilité.

Nous allons maintenant obtenir l'expression de C_n à l'aide de sa série génératrice

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

dont nous supposons à nouveau que le rayon de convergence est $R > 0$. Notons que la formule de récurrence $C_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ n'est valable que pour $n \geq 2$ et que $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = 0$ pour $n = 0$ ou 1 . On a alors

$$\begin{aligned} C(x) &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} C_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) x^n = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) x^n \\ &= x + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n \right)^2 = x + C(x)^2 \end{aligned}$$

en reconnaissant un produit de Cauchy.

Ainsi C vérifie l'équation $C(x)^2 - C(x) + x = 0$ dont les solutions sont

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Les deux sont développables en série entière, avec un rayon de convergence $R = \frac{1}{4}$, mais $C(0) = 0$ ce qui exclut donc la seconde. Cela justifie aussi tous les calculs ci-dessus tant que $|z| < R$, puisqu'il s'agit d'opérations sur les séries entières à l'intérieur du disque de convergence. Il nous reste donc à écrire ce développement. On commence par $(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n$, $(\alpha)_n$ le symbole de Pochhammer (voir 2.7). Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on peut le réécrire :

$$\left(\frac{1}{2}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{1}{2} \text{ puis, pour } n \geq 2,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-3)}{2} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times (2n-3)}{2^n}.$$

Ainsi

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

avec $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ puis, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{2 \cdot n!} \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{2^{n-1} 1 \times 3 \times (2n-3)}{n!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la formule suivante :

Proposition 4.11

Les nombres de Catalan sont donnés par $C_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$$

ou encore, pour tout $n \geq 0$,

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ils vérifient

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

En particulier $C_n \sim \frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ et $c_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$.

Nous pouvons donner une démonstration alternative à la dérivation de la formule pour C_n en utilisant la formule d'inversion de Lagrange

DÉMONSTRATION ALTERNATIVE. La série génératrice des nombres de Catalan est $C(x) = \sum_{n \geq 1} C_n x^n$ vérifie l'équation fonctionnelle $C(x) = x + C(x)^2$ qu'on peut réécrire sous la

forme $C(x) = \frac{x}{1 - C(x)}$. Dans la notation de la formule d'inversion de Lagrange, on a

donc

$$C(x) = x\varphi(C(x)), \quad \varphi(u) = \frac{1}{1-u}$$

et ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = [x^n]C(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](1-u)^{-n}.$$

Or la formule du binôme généralisée donne $(1-u)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} u^k$. Par conséquent,

$$[u^{n-1}](1-u)^{-n} = \binom{2n-2}{n-1}, \text{ et ainsi } C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad \blacksquare$$

Les équivalents de C_n, c_n s'obtiennent avec la formule de Stirling. Nous allons donner une démonstration alternative plus directe. Pour cela, nous réécrivons les nombres de Catalan sous forme d'une intégrale.

Lemme 4.12

Les nombres de Catalan s'expriment sous forme intégrale par

$$c_n = \frac{4^{n+1}}{\pi} \int_0^1 t^{2n} \sqrt{1-t^2} dt.$$

DÉMONSTRATION. On introduit $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, $n \geq 0$. Un changement de variable $t = \sin s$ donne

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi 2 \cos^2 t dt = \int_0^\pi 2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Cela établit déjà la formule pour $n = 0$. Ensuite, pour $n \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 x^{n+1} x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^{n+1} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 + \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2)(1-x^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{n+1}{3} (I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient la relation de récurrence

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n \quad \Rightarrow \quad I_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+2)} I_{2n}$$

donc

$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times (2n-1)}{2^n (n+1)!} I_0 = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\pi}{4} = c_n \frac{\pi}{4^{n+1}}$$

soit la formule voulue. \blacksquare

DÉMONSTRATION DE L'ESTIMATION ASYMPTOTIQUE. Une fois qu'on a une formule intégrale, on peut en obtenir beaucoup d'autres via des changements de variables. C'est cela qui va

nous conduire à l'estimation asymptotique : on commence par un changement de variable $s = \sqrt{1-t^2}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4^{n+1}}{\pi} \int_0^1 t^{2n-1} (1-t^2) \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{4^{n+1}}{\pi} \int_0^1 (1-s^2)^{n-1/2} s^2 ds \\ &= \frac{4^{n+1}}{\pi n^{3/2}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} x^2 dx \end{aligned}$$

avec un second changement de variable $s = \frac{x}{\sqrt{n}}$.

Mais ensuient

- pour tout $x > 0$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \rightarrow e^{-x^2}$
- comme pour $u \geq 0$, $\ln(1-u) \leq -u$,

$$\begin{aligned} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) &\leq x^2 \exp \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \right] \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \\ &\leq x^2 \exp \left[- \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{n} \right] \mathbf{1}_{[0, 1]}(x^2/n) \\ &\leq x^2 e^{-x^2+1/2} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée nous donne alors

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} t^2 dt \rightarrow \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Il reste donc à calculer cette intégrale : une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt &= \left[-t \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Pour cette dernière valeur, on fait un passage en polaire

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(s^2+t^2)} ds dt = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Par suite

$$c_n \sim \frac{4^{n+1}}{\pi n^{3/2}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

comme annoncé. ■

Remarque 4.13

Notez que cette asymptotique implique $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. On peut en déduire un encadrement du coefficient binomial central :

Remarquons que

$$\frac{4^{-(n+1)} \binom{2(n+1)}{n+1}}{4^{-n} \binom{2n}{n}} = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Par ailleurs

$$\left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \begin{cases} \leq \frac{n+1/3}{n+1+1/3} \\ \geq \frac{n+1/4}{n+1+1/4} \end{cases}.$$

Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (n+a+1)(4n^2+4n+1) &= 4n^3 + (4a+8)n^2 + (4a+5)n + a+1 \\ (n+a)(4n^2+8n+4) &= 4n^3 + (4a+8)n^2 + (8a+4)n + 4a \end{aligned}$$

et que, pour $a = 1/3$ la seconde expression est plus petite que la première alors que pour $a = 1/4$ c'est l'inverse.

On pose alors

$$a_n = \frac{1}{4^n \sqrt{n+1/3}} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{4^n \sqrt{n+1/4}} \binom{2n}{n}$$

et nous venons de voir que a_n est croissante et b_n décroissante et bien évidemment $a_n \leq b_n$. De plus, notre équivalent du coefficient binomial central nous montre que ces deux suites ont pour limite commune $\pi^{-1/2}$ donc $a_n \leq \pi^{-1/2} \leq b_n$ *i.e.*

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+1/3)}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+1/2)}}.$$

Remarque 4.14

Une autre application de la formule intégrale

$$c_n = \frac{4^{n+1}}{\pi} \int_0^1 t^{2n} \sqrt{1-t^2} dt$$

est la suivante.

Par convergence monotone, (les sommes partielles d'une série entière à termes positifs croissent sur $\mathbb{R}^+$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{4^{n+1}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} [\arcsin t]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{2^{2n+1}} = 1.$$

Ceci a une interprétation probabiliste. On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui part de 0 et, à chaque étape, a une probabilité $1/2$ d'aller à droite et une probabilité $1/2$ d'aller à gauche. On suppose que la marche s'arrête dès qu'on arrive à -1 . On ne peut donc arriver en -1 qu'après 1, 3, 5, ... pas *i.e.* un nombre impair de pas et le nombre de possibilités d'arriver à -1 en $2n+1$ pas est précisément c_n . L'expression

précédente nous dit que la probabilité d'arriver à -1 est 1 *i.e.* la marche aléatoire est récurrente.

4.4. Les nombres de Bell.

Definition 4.15 (Nombres de Bell)

Pour $n \geq 1$ un entier, on notera $\mathcal{P}_n$ les partitions de $\{1, \dots, n\}$. On appelle *nombre de Bell* et on note B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$, $B_n = |\mathcal{P}_n|$. Par convention $B_0 = 1$.

Évidemment, B_n est le nombre de partitions de n'importe quel ensemble à n éléments.

Exemple 4.16

$B_1 = 1$ car la seule partition est $\{1\}$. L'ensemble $\{1, 2\}$ se partitionne de deux façons $\{1, 2\}$ ou $\{1\}, \{2\}$ donc $B_2 = 2$.

L'ensemble $\{1, 2, 3\}$ se partitionne de $B_3 = 5$ façons. Celles-ci s'obtiennent à partir de $\mathcal{P}_2$ en comptant le nombre de partitions dans lesquels l'ensemble qui contient 3 a :

- Un seul élément. Les autres ensembles d'une telle partition parcourent donc $\mathcal{P}_2$, on trouve donc B_2 telles partitions : $\{1, 2\}, \{3\}$ ou $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
- Deux éléments : il faut donc choisir cet élément : il y a 2 possibilités soit 1 soit 2 et le reste de la partition est donc une partition d'un ensemble à $2 - 1 = 1$ élément, il y a $B_1 = 1$ possibilité. On trouve donc $2 \times B_1 = 2$ telles partitions : $\{1, 3\}, \{2\}$ et $\{2, 3\}, \{1\}$.
- Trois éléments : il n'y a plus le choix, on trouve $\{1, 2, 3\}$.

La façon de déterminer B_3 nous invite à déterminer une relation de récurrence pour B_n .

On note $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$ dans lesquelles l'ensemble qui contient n a k éléments. Clairement $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ est une partition de $\mathcal{P}_n$ donc

$$B_n = |\mathcal{P}_n| = \sum_{k=1}^n |\mathcal{F}_k|.$$

Mais un élément de $\mathcal{F}_k$ s'obtient de la façon suivante :

– On choisit un ensemble F de $k - 1$ éléments parmi $\{1, \dots, n - 1\}$. Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ tels ensembles.

– Une fois F choisi, on partitionne $F^c = \{1, \dots, n - 1\} \setminus F$. Comme F^c a $n - k$ éléments, il y a $B_{n-(k-1)}$ telles partitions.

En regroupant toutes ces informations, on arrive à la formule de récurrence

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Il est un peu plus agréable de l'écrire pour B_{n+1} :

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+1-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} B_{n-j}$$

en posant $j = n + 1 - k$. On utilise enfin $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ et on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.17

Pour tout $n \geq 1$, les nombres de Bell vérifient

$$(4.23) \quad B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j.$$

Remarque 4.18

On peut munir $\mathcal{P}_n$ d'une mesure de probabilité simplement en décidant que toutes les partitions sont équiprobables *i.e.* si P est une partition, alors $\mathbb{P}[\{P\}] = \frac{1}{B_n}$. Le raisonnement peut se formuler comme suit : si on fixe un ensemble F à k éléments

$$\mathbb{P}[\{P \in \mathcal{P}_n : F \in P\}] = \frac{B_{n-k}}{B_n}$$

puis

$$\mathbb{P}[\{P \in \mathcal{P}_n : \exists F \in P \text{ avec } n \in F \text{ et } |F| = k\}] = \binom{n-1}{k-1} \frac{B_{n-k}}{B_n}.$$

Il est facile à partir de cette formule d'obtenir une estimation de B_n :

Lemme 4.19

Pour tout entier n , $B_n \leq n!$.

DÉMONSTRATION. Cela se fait évidemment par récurrence. La formule est vraie pour $n = 0$ par convention et a déjà été montrée pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ (et $n = 3$). On suppose alors la propriété vraie au rang n . On a alors

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j \leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j! \\ &= n! \sum_{j=0}^n \frac{1}{(n-j)!} = n! \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \\ &\leq n! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = en! \leq (n+1)! \end{aligned}$$

dès que $n+1 \geq e$ c'est-à-dire $n \geq 2$. ■

Notre objectif est maintenant de donner une formule explicite pour B_n . L'idée est ici d'utiliser une fonction génératrice

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Comme $B_n \leq n!$, cette série entière a un rayon de convergence $R \geq 1$. On va donc supposer que $x \in]-1, 1[$ de sorte qu'on puisse dériver f et obtenir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n \frac{B_j}{j!} x^j \frac{x^{n-j}}{(n-j)!}. \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi le *produit de Cauchy* de f avec e^x i.e $f'(x) = e^x f(x)$. Comme $f(0) = B_0 = 1$, on résout cette équation et on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

Pour déterminer B_n , nous allons écrire cette série entière différemment en utilisant la série entière de l'exponentielle : pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} e^{e^x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n \end{aligned}$$

avec Fubini-Tonnelli : tous les termes sont positifs puisqu'on a supposé $x \geq 0$ et le membre de gauche converge pour tout $x \geq 0$ donc celui de droite aussi. Ainsi, on a écrit e^{e^x} comme une série entière qui converge pour tout $x \geq 0$ son rayon de convergence est donc $R = +\infty$. Au final, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a donc montré que :

Théorème 4.20 (Formule de Dobinski)

Les nombres de Bell sont donnés par

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Notez que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R = +\infty$, laissant penser que B_n croît quand même significativement moins vite que $n!$.

Nous allons maintenant affiner un peu le théorème en remarquant que B_n est un entier et qu'un intervalle de longueur < 1 contient au plus un entier. Ainsi, on écrit

$$B_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^n}{k!} + R_N \quad \text{avec} \quad R_N = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

alors $R_N \geq 0$ et, si $R_N < 1$ alors B_n est le plus petit entier $\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^n}{k!}$, qu'on note $\left\lceil \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^n}{k!} \right\rceil$. Il s'agit donc de déterminer un tel entier N . Il est clair que, tant que $N \leq n$, $R_N \geq \frac{N^n}{N!} \geq 1$. Pour N proche de n , l'amélioration est insuffisante, on essaie donc $N = 2n + p$ et on remarque que, si $k \geq 2n + p$ alors

$$\frac{k}{k-j} \leq 2 \quad j = 0, \dots, n-1$$

donc

$$\frac{k^n}{k!} = \frac{1}{(n+p)!} \frac{1}{(n+p+1) \cdots (k-n)} \prod_{j=1}^n \frac{k}{k-n+j} \leq \frac{2^n}{(n+p)!} \frac{1}{(k-2n-p)!}$$

ce qui donne

$$R_{2n+p} \leq \frac{2^n}{(n+p)!} \sum_{k=2n+p}^{+\infty} \frac{1}{(k-2n)!} = \frac{2^n}{(n+p)!} e.$$

On voit que le choix $p = n$ fonctionnera dès que $n \geq 4$.

5. Résolution des exercices

Solution de l'exercice 1.4.

Pour la série $\sum n^n z^{n^2}$, on pose $a_m = \begin{cases} n^n & \text{si } m = n^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors si $m = n^2$ $\sqrt[n]{a_m} = (n^n)^{1/n^2} = \exp \frac{n \ln n}{n^2} \rightarrow 1$ et comme $a_m = 0$ quand m n'est pas un carré, $\limsup \sqrt[n]{a_m} = 1$. Avec la formule de Cauchy-Hadamard, le rayon de convergence de $\sum n^n z^{n^2}$ est $R = 1$.

Quand a_n est la n -ième décimale de π , l'utilisation d'un critère de convergence est impossible car on manque d'information sur cette suite. Toutefois, $0 \leq a_n \leq 9$ donc $0 \leq a_n r^n < 9r^n$. Comme la série $\sum 9r^n$ converge pour $0 < r < 1$, la série $\sum a_n r^n$ aussi donc $R \geq 1$.

Par ailleurs, (a_n) est une suite d'entiers, si elle convergeait vers 0, elle serait 0 à partir d'un certain rang et π serait un rationnel, et on sait que ce n'est pas le cas. Donc $\sum a_n$ diverge et $R \leq 1$. Le rayon de convergence de la série $\sum a_n r^n$ est bien $R = 1$.

Solution de l'exercice 1.14. On veut montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^2}{16}.$$

On va poser $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$.

L'idée première est qu'il s'agit d'évaluer la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^n$ en $x = 1$.

La première chose est de vérifier que cela est possible. Pour cela, on va montrer que la série converge uniformément sur $[0, 1]$, sa somme sera donc continue. On déterminera ensuite f et, si on obtient l'expression d'une fonction continue en 1^- , on pourra faire tendre $x \rightarrow 1$.

On remarque que $u_n \geq 0$, l'idée est donc d'utiliser le critère des séries alternées. Pour cela, vérifions que u_n décroît :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\
 &= \left(\frac{n+1}{n+2} - 1 \right) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(n+2)(2n+3)} \\
 &= \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{(2n+3)} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &\leq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{(2n+3)} - \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2n+1} \right) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Pour voir que $u_n \rightarrow 0$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
 u_n &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{j} \leq \frac{1}{n+1} \left(1 + \int_1^{2n+1} \frac{dx}{x} \right) \\
 &= \frac{1 + \ln(2n+1)}{2n+1} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Pour $0 \leq x \leq 1$ de sorte que $x^n \geq 0$ décroît vers 0. On pose alors $U_n(x) = u_n x^n$ de sorte que $U_n(x) \geq 0$ et décroît vers 0. D'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^n U_n(x)$ converge et de plus, on a l'estimation du reste

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^n U_n(x) \right| \leq U_N(x) \leq u_N \rightarrow 0$$

ce qui montre que les restes convergent uniformément vers 0, donc que la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} x^n$$

converge uniformément sur $[0, 1]$, en particulier, c'est une fonction continue en 1 et

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}.$$

Ensuite, on multiplie par x et on dérive : cela aura l'effet de supprimer le $\frac{1}{n+1}$:

$$(xf(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} x^n.$$

On pose donc $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} x^n$ et, d'après l'exemple 1.13, G est le produit

de Cauchy de $\varphi(x) := \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et de (on prend $x > 0$)

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &:= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^k = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (-\sqrt{x})^{2k+1} \\
 &= \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que $G(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$. Mais alors

$$xf(x) = \int_0^x G(t) dt = \int_0^x \frac{\arctan \sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

On remarque que le membre de gauche est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$, on peut donc faire tendre $x \rightarrow 1$ et obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = f(1) = \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

Il reste à faire un changement de variable $s = \sqrt{t}$ pour obtenir

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2 \arctan s}{(1+s^2)} ds = [\arctan^2 s]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}$$

ce qui est bien le résultat annoncé.