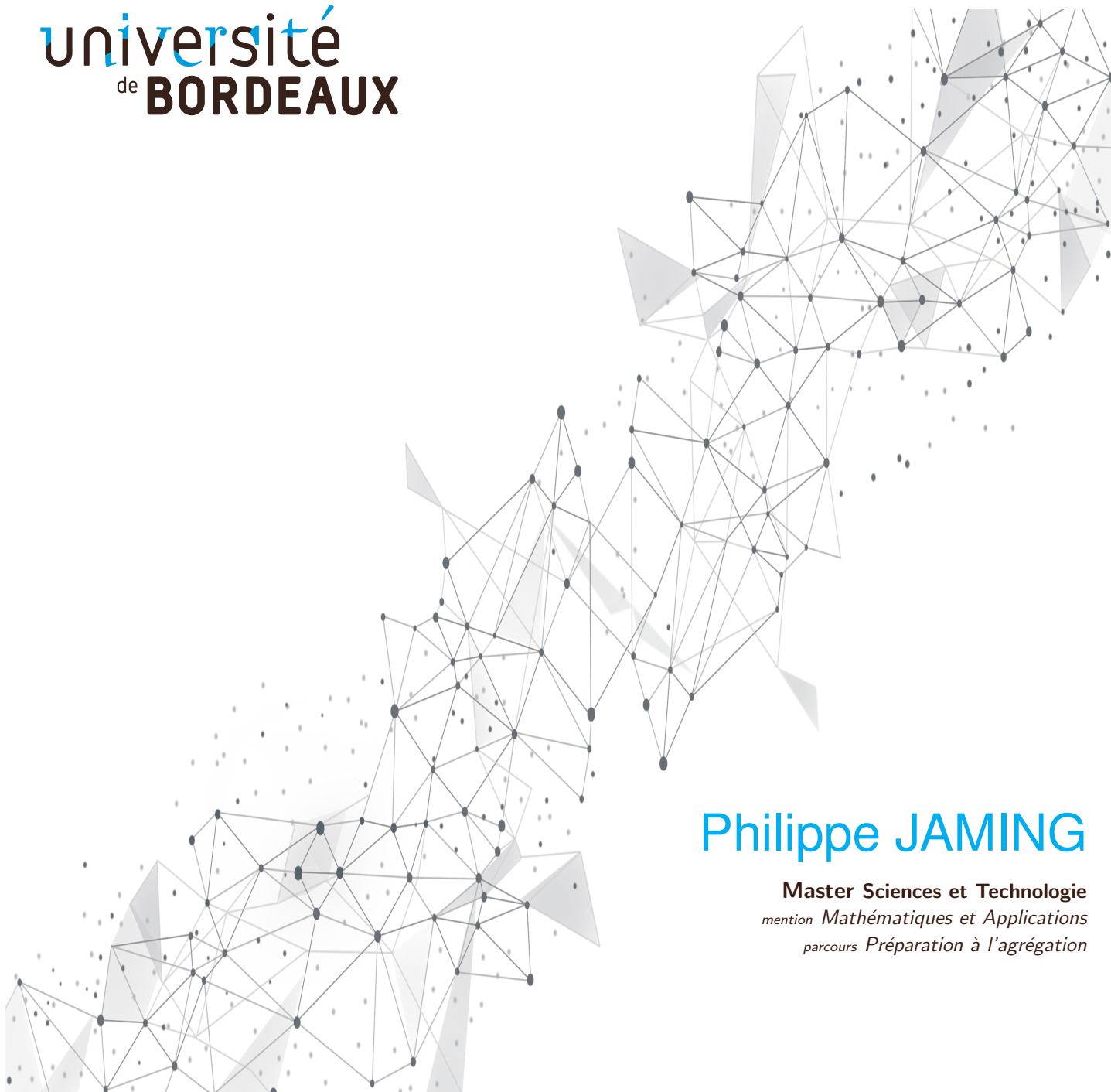




Philippe JAMING

Master Sciences et Technologie
mention Mathématiques et Applications
parcours Préparation à l'agrégation

Cours de M2
Analyse pour l'agrégation

**Suites et séries numériques,
Suites vectorielles, applications.**

Philippe Jaming

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251

351 Cours de la Libération

F 33405 Talence cedex, France

Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr

<http://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/>

Table des matières

Chapitre 1. Suites et séries numériques	1
1. Le B-A-BA de suites élémentaires et quelques sommes	1
1.1. Suites arithmétiques et quelques sommes associées	1
1.2. Suite géométrique et arithmético-géométrique	2
1.3. Suites homographiques	3
1.4. Quelques sommes usuelles	5
2. Suites numériques	5
2.1. Convergence, Cauchy, valeur d'adhérence...	5
2.2. Moyennes de Césaro	11
2.3. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	18
2.3.1. Étude au voisinage des points fixes	18
2.3.2. Le cas périodique	28
2.4. Application à la résolution d'équations	35
2.5. Accélération de convergence	38
3. Séries numériques	41
3.1. Généralités	41
3.2. Séries absolument convergentes	44
3.2.1. Critères de comparaison	44
3.2.2. Le théorème de du Bois-Reymond	51
3.2.3. Le théorème d'Abel-Dini-Pringsheim	53
3.2.4. Comparaison série-intégrale	55
3.2.5. Théorème de Kakeya	57
3.3. Un théorème tauberien	58
3.4. Développements asymptotiques	59
3.4.1. Polynômes de Bernoulli	59
3.4.2. Asymptotique d'Euler de la série harmonique	63
3.4.3. Formule de Stirling	64
3.5. Séries semi-convergentes	66
3.5.1. Séries alternées	66
3.5.2. Sommation d'Abel	67
3.5.3. Lemme de Kronecker	68
3.5.4. Séries de Rademacher	70
3.5.5. Réarrangement de Riemann	73
3.6. Produit de Cauchy	75
3.7. Accélération de convergence de séries	80
3.7.1. La sommation d'Euler	80
3.7.2. Une seconde transformation d'Euler, transformation binomiale	84
4. Produit infini	87
4.1. Convergence de produits infinis	87
4.2. Quelques exemples	89
5. Quelques applications en théorie des nombres	91
5.1. Une surprenante formule pour π	91
5.2. e est irrationnel	93

5.3.	π est irrationnel	94
5.4.	Approximation rationnelle	96
5.5.	Construction d'un nombre transcendant	98
5.6.	La somme des inverses des premiers diverge	100
Chapitre 2. Suites dans $\mathbb{R}^d$		103
1.	Relations de récurrence linéaire	103
2.	Application à l'inversion numérique de matrices	105
2.1.	Le rayon spectral d'une matrice	105
2.2.	Méthodes itératives d'inversion de matrices	107
3.	Application à la résolution d'équation $f(x) = 0$ en plusieurs variables.	108
Index		111

Suites et séries numériques

1. Le B-A-BA de suites élémentaires et quelques sommes

Note pour les candidats à l'agrégation

Tout ce qui est dans cette section est élémentaire et à savoir. La section sur les suites homographiques peut servir à illustrer une leçon sur les suites, y compris à l'intérieur d'un développement. Elle peut également servir de base à un développement dans lequel on introduit les notions clés de la leçon sur les suites récurrentes (intervalles stables, points fixes attractifs/répulsifs...) dont on présentera alors les démonstrations. Même si un tel développement serait un peu élémentaire, cela est toujours préférable à une présentation plus complexe mais non maîtrisée.

Commençons par quelques faits élémentaires sur les suites qu'il est indispensable de savoir.

1.1. Suites arithmétiques et quelques sommes associées.

Definition 1.1 Suite arithmétique

Une suite réelle (u_n) est dite *arithmétique* s'il existe $p \in \mathbb{R}$ appelé le *pas* tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = p$.

Le terme général d'une suite arithmétique $u_{j+1} = u_j + p$ à partir du rang j_0 (0,1 ou n'importe qui) est donné par

$$u_j = u_{j_0} + p(j - j_0).$$

On part de u_{j_0} puis on ajoute un terme linéaire, dont la pente est p et qui vaut 0 quand $j = j_0$.

Ensuite $\sum_{j=m}^n u_j = \frac{(n-m+1)(u_m + u_n)}{2}$: cela se trouve en écrivant la somme dans

le sens direct (de m à n i.e. $u_{m+j} = u_m + pj$ pour j allant de 0 à $n-m$) et dans le sens indirect ($u_{n-j} = u_m + p(n-j-m)$ pour j allant de 0 à $n-m$) et en prenant la moyenne de ces 2 sommes. Il suffit alors de constater qu'on a $n-m+1$ termes qui sont $\frac{1}{2}(u_m + pj + u_m + p(n-j-m)) = 2u_m + p(n-m) = u_m + u_n$.

Le cas particulier $S_n^1 = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ a une démonstration géométrique élégante :

On trace une grille de $(n+1) \times (n+1)$ carrés de côté 1 soit $(n+1)^2$ carrés. Ensuite, on compte les carrés situés sur la diagonale : il y a $n+1$ tels carrés. Il reste alors deux zones triangulaires de même aire de part et d'autre de la diagonale, et on compte le nombre de carrés qui la composent. Pour cela, on part du coin en haut à gauche : il y a un carré. On compte ensuite les carrés qui ont un côté adjacent : il y a deux tels carrés et on continue ainsi jusqu'à la diagonale. On a donc $1 + 2 + 3 + \dots + n = S_n$ carrés et ce de chaque côté de la diagonale. Au final on a calculé le nombre de carrés de 2 façons différentes : $(n+1)^2 = n+1 + 2S_n$ ce qui donne le résultat.

Il y a un autre cas particulier : la somme des entiers S_n^i impairs de 1 à $2n+1$ est la somme des entiers de 1 à $2n+1$ à laquelle on soustrait les entiers pairs

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2n+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (2n+1) - (2 + 4 + \cdots + 2n) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (2n+1) - 2(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (2n+1)(n+1) - n(n+1) = (n+1)^2. \end{aligned}$$

On en déduit la somme alternée

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2n + (2n+1) = (n+1)^2 - n(n+1) = n+1.$$

En particulier $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} k = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$

Notons qu'on peut alors obtenir la somme des puissances suivantes $S_n^k = \sum_{j=1}^n j^k$. On a $S_n^0 = n$, $S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour cela, on écrit

$$(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} j^l$$

donc

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=1}^n [(j+1)^{k+1} - j^{k+1}] = \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} \sum_{j=1}^n j^l = \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} S_n^l.$$

En particulier $n^3 + 3n^2 + 3n = (n+1)^3 - 1 = S_n^0 + 3S_n^1 + 3S_n^2 = n + \frac{3}{2}n(n+1) + 3S_n^2$ donne

$$S_n^2 = \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On laisse en exercice le fait amusant suivant : $S_n^3 = (S_n^1)^2$ (la somme des cubes est le carré de la somme des entiers).

1.2. Suite géométrique et arithmético-géométrique.

Definition 1.2 Suite géométrique

Une suite réelle (u_n) est dite *géométrique* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé la *raison* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n$.

Une suite réelle (u_n) est dite *arithmético-géométrique* s'il existe $p, r \in \mathbb{R}$ où p est appelé le *pas* et r est appelé la *raison*, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n + p$.

Le terme général d'une suite géométrique $u_{j+1} = ru_j$ à partir du rang j_0 (0,1 ou n'importe qui)

$$u_j = r^{j-j_0} u_{j_0}$$

La somme de la puissance de r et de l'indice de départ=indice d'arrivée.

Ensuite, si $r \neq 1$,

$$\sum_{j=m}^n u_j = \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - r} = \frac{\text{1er terme} - \text{1er terme oublié}}{1 - \text{raison}}$$

et la démonstration est simple : on note S la somme et on calcule $(1-r)S = S - rS$ pour se rendre compte que c'est une somme télescopique donc seul le premier terme et le dernier terme multiplié par r ne sont pas éliminés.

Le terme général d'une suite géométrique $u_{j+1} = ru_j + p$ avec $r \neq 1$ à partir du rang j_0 (0,1 ou n'importe qui). L'idée est que la partie géométrique domine et donc de se ramener à une suite géométrique en posant $v_j = u_j + \alpha$ de sorte que

$$v_{j+1} = u_{j+1} + \alpha = ru_j + p + \alpha = r(v_j - \alpha) + p - \alpha = rv_j + p - (r-1)\alpha.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha = \frac{p}{r-1}$ on voit que v_j est la suite géométrique $v_{j+1} = rv_j$, $v_{j_0} = u_{j_0} + \alpha$ donc

$$u_j = v_j - \alpha = r^{j-j_0}v_{j_0} - \alpha = r^{j-j_0}(u_{j_0} + \alpha) - \alpha = r^{j-j_0}u_{j_0} + \frac{r^{j-j_0} - 1}{r-1}p.$$

On peut déterminer cela directement aussi à l'aide d'une somme d'une suite géométrique (regarder le facteur de p pour savoir comment).

Les suites arithmético-géométriques apparaissent naturellement dans les modèles simples de population avec $r=1$ -taux de mortalité+taux de natalité et p =nombre d'immigrants-nombre d'émigrants.

1.3. Suites homographiques.

Definition 1.3 Suite homographique

Une suite réelle (u_n) est dite *homographique* s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ tels que $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.

On élimine les cas $c = 0$ (suites arithmético-géométriques) et $ad - bc = 0$ (suites géométriques). Nous considérons ici le cas où a, b, c, d sont réels, cela ne joue pas un rôle essentiel.

Une suite homographique est donc de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cx + d}$ qui est une fonction monotone. La suite (u_n) est bien définie si, pour tout entier n , $u_n \neq -\frac{d}{c}$. Dans la suite, nous allons supposer que u_0 est choisi tel que cette condition soit remplie.

On commence par regarder les limites éventuelles qui sont les points fixes de f . Notons que si x est un point fixe de f , et si $u_n = x$ alors $u_{n+1} = f(x) = x$ et, par une récurrence immédiate $u_m = x$ pour tout $m \geq n$. Par ailleurs, comme $f(x) = x = u_n = f(u_{n-1})$, l'injectivité de f montre aussi que $u_{n-1} = x$ donc au final, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_m = x$. On va maintenant supposer que u_0 n'est pas un point fixe de f .

Déterminons maintenant les points fixes. Un tel point fixe x vérifie $x = \frac{ax + b}{cx + d}$ et est donc solution de l'équation

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

C'est une équation de degré 2, on distingue donc deux cas

Cas 1. Cette équation a deux racines α, β .

Dans ce cas, on introduit la suite $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Comme $\alpha \neq \beta$, $v_n \neq 1$ et alors la relation s'inverse

$$u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}.$$

En utilisant que $\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ et $\beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d}}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} &= \frac{(au_n + b)(c\alpha + d) - (cu_n + d)(a\alpha + b)}{(cu_n + d)(c\alpha + d)} \\ &= \frac{(ac\alpha + ad - ca\alpha - bc)u_n + bc\alpha + bd - da\alpha - bd}{(cu_n + d)(c\alpha + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(u_n - \alpha)}{(cu_n + d)(c\alpha + d)}. \end{aligned}$$

De même, en remplaçant α par β ,

$$\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \frac{(ad - bc)(u_n - \beta)}{(cu_n + d)(c\beta + d)}$$

donc, après simplification

$$v_{n+1} = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} = qv_n$$

avec $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$. Notez que $q \neq 1$ puisque $\alpha \neq \beta$ et $c \neq 0$.

Il y a maintenant 3 cas à distinguer

- soit $|q| < 1$, dans ce cas $v_n \rightarrow 0$, mais alors $u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} \rightarrow \alpha$.
- soit $|q| > 1$, dans ce cas $1/v_n \rightarrow 0$, mais alors $u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} = \frac{\beta - 1/v_n}{1 - 1/v_n} \rightarrow \beta$.
- soit $|q| = 1$ et, comme $q \neq 1$, v_n n'a pas de limite donc u_n non plus.

Notez que, quand a, b, c, d sont réels, si le discriminant de l'équation $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ est négatif, alors α, β sont complexes conjugués et automatiquement $|q| = 1$. Sinon, α, β sont réels et seul $q = -1$ empêche l'existence d'une limite. Mais $q = -1$ équivaut à $c(\alpha + \beta) + 2d = 0$. Comme α, β sont racines de $x^2 + \frac{d-a}{c}x - \frac{b}{c} = 0$, $\alpha + \beta = \frac{a-d}{c}$ et cela se réduit à $a + d = 0$.

La suite (u_n) sera donc convergente, dès qu'elle est bien définie, que $(a-d)^2 + 4bc > 0$ et $a + d \neq 0$.

Cas 2. L'équation $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ a une seule racine α .

On introduit maintenant $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ et on écrit

$$v_{n+1} = \frac{1}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(ad - bc)(u_n - \alpha)}.$$

On simplifie ensuite cette expression en utilisant que α est l'unique solution de $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ ainsi $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ soit $c\alpha + d = \frac{a+d}{2}$. Ensuite, le discriminant $(d-a)^2 + 4bc = 0$ et comme $(d-a)^2 = (d+a)^2 - 4ad$, en soustrayant, on obtient $ad - bc = \frac{(a+d)^2}{4}$, en

particulier $a + d \neq 0$ dans ce cas. Ainsi

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{a+d} \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} = \frac{2}{a+d} \frac{c(u_n - \alpha) + d + c\alpha}{u_n - \alpha} \\ &= \frac{2c}{a+d} + \frac{2}{a+d} (d + c\alpha) v_n = v_n + \frac{2c}{a+d}. \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de pas $\frac{2c}{a+d} \neq 0$. Donc $v_n \rightarrow \pm\infty$ et $u_n = \alpha + \frac{1}{v_n} \rightarrow \alpha$.

1.4. Quelques sommes usuelles.

Les sommes suivantes apparaissent régulièrement.

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

qui n'est autre que le cas particulier $a = b = 1$ de

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = (a+b)^n.$$

En prenant $a \frac{\partial}{\partial a}$ on en déduit

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j a^j b^{n-j} = na(a+b)^{n-1}$$

qui donne, pour $a = b = 1$,

$$\sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} = n2^{n-1}.$$

2. Suites numériques

On ne regarde ici que des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ **réelles**.

2.1. Convergence, Cauchy, valeur d'adhérence...

Definition 2.1

On dit que (u_n) *converge* vers ℓ , sa *limite* et on note $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ i.e. $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout $M \geq 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq M$ (resp. $u_n \leq -M$). On note alors $\lim u_n = +\infty$ (resp. $\lim u_n = -\infty$).

On dit que (u_n) est une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $m, n \geq N$, $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

Lemme 2.2

Si une suite a une limite alors cette limite est unique.

DÉMONSTRATION. Si ℓ, ℓ' sont deux limites, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, si $n \geq M$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $N > 0$ tel que si $n \geq N$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Mais alors, si $n > \max(M, N)$, les deux inégalités sont vérifiées, donc

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitrairement petit, $|\ell - \ell'| = 0$ donc $\ell = \ell'$. ■

Lemme 2.3

Toute suite convergente est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit (u_n) une suite convergente et ℓ sa limite. Il existe donc N tel que, si $n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$ donc $|u_n| < |\ell| + 1$. Posons $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\}$ alors, pour tout $n \geq 0$, $|u_n| \leq M$. ■

Il faut savoir montrer des faits simples tels que la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient... Enfin, rappelons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, si et seulement si, pour toute suite convergente $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$.

Exercice 2.4

- (1) Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes et $\ell = \lim u_n, \ell' = \lim v_n$, $\ell, \ell' \neq \pm\infty$. Alors $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ et $\lim(u_n v_n) = \ell \ell'$.

Si, pour tout n , $v_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$, montrer que $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

- (2) Rappelez les différentes formes indéterminées.
 (3) Déterminez les limites des suites de terme général suivantes si elles existent

$$(-1)^n, \quad \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 - 1}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad (n^2 + 1)^{1/8} - (n + 1)^{1/4}.$$

La convergence préserve les inégalités :

Lemme 2.5

Soit (u_n) une suite convergente et ℓ sa limite. si $u_n \leq a$ (resp. $u_n \geq a$) alors $\lim u_n \leq a$ (resp. $\lim u_n \geq a$).

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que pour tout $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq a$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\ell - \varepsilon \leq a$ implique $\ell \leq a$. ■

Théorème 2.6 (Théorème des gendarmes)

Si $(u_n), (v_n), (a_n)$ sont des suites telles que
 – $(u_n), (v_n)$ convergent vers une limite commune ℓ ;
 – pour tout n , $u_n \leq a_n \leq v_n$
 alors $\lim a_n = \ell$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$ et M, N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et, pour tout $n \geq M$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. Quitte à remplacer M et N par $\max(M, N)$, on peut supposer que $M = N$ (on le fera systématiquement dans la suite de ce cours). Alors, pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq a_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$$

donc (a_n) converge bien vers ℓ . ■

Lemme 2.7

Une suite convergente est de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Soit (u_n) une suite convergente et ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc N tel que, si $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Par suite, si $m, n \geq N$,

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell - (u_m - \ell)| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et (u_n) est bien de Cauchy. ■

Notez qu'il faut ici être prudent et ne pas considérer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ est convergente (et donc éviter de dire que u_n converge vers $+\infty$).

La réciproque est (presque) la définition de $\mathbb{R}$. Ceci est un point délicat avec un vrai piège (*cf* complétude plus loin) et il est préférable d'admettre ce point dans une leçon sur les suites :

Théorème 2.8 (admis)

Toute suite de Cauchy de nombres réels converge dans $\mathbb{R}$ *i.e.* $\mathbb{R}$ est complet.

Corollaire 2.9 (Suites adjacentes)

Soient (u_n) une suite croissante, (v_n) une suite décroissante et telles que, pour tout n , $u_n \leq v_n$. Si $u_n - v_n \rightarrow 0$, alors $(u_n), (v_n)$ convergent et $\lim u_n = \lim v_n$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq v_n - u_n \leq \varepsilon$. Soit alors $m \geq n \geq N$, on a

$$u_n \leq u_m \leq v_m + \varepsilon \leq v_n + \varepsilon.$$

On en déduit que

$$0 \leq u_m - u_n \leq v_n - u_n + \varepsilon \leq 2\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \geq v_m - v_n \geq u_n - v_n - \varepsilon \geq -2\varepsilon$$

donc (u_n) et (v_n) sont de Cauchy, donc convergentes (le théorème admis). On note $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. Comme pour $n \geq N$, $0 \leq v_n - u_n \leq \varepsilon$, en passant à la limite $0 \leq \ell' - \ell \leq \varepsilon$ et, ε étant arbitraire, on a bien $\ell' = \ell$. ■

Exercice 2.10

On considère deux suites $(a_n), (b_n)$ telles que $a_0 > b_0 > 0$ et définies par récurrence par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes.

Corollaire 2.11

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide majoré *i.e.*, il existe $M > 0$ tel que tout $x \in A$ vérifie $x \leq M$. Alors A admet un plus petit majorant noté $\sup A$.

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que $\sup A$ est caractérisé par le fait que, tout $x \in A$ vérifie $x \leq M$ et, pour tout $n > 0$, il existe $x_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} \leq x_n \leq M$.

En effet, si un tel x_n n'existait pas, $M - \frac{1}{n}$ serait encore un majorant, plus petit que M . Inversement si M vérifie cette propriété, alors M est bien un majorant et si $M' \leq M$ est un autre majorant alors $M - \frac{1}{n} \leq x_n \leq M'$ donc, en passant à la limite, $M \leq M'$ donc $M = M'$.

Montrons maintenant l'existence de $\sup A$. Pour cela, construisons par récurrence deux suites $(u_n), (v_n)$ comme suit : on prend u_0 n'importe quel élément de A et v_0 n'importe

quel majorant de A . Une fois $u_n \in A$ et v_n majorant de A construits, on regarde alors $\frac{u_n + v_n}{2}$. On a deux possibilités

– soit $\frac{u_n + v_n}{2}$ est encore un majorant de A et on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$,
 – si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'il existe un élément qu'on notera u_{n+1} de A tel que $\frac{u_n + v_n}{2} \leq u_{n+1} \leq v_n$ et on posera $v_{n+1} = v_n$.

Notez que, par construction $u_{n+1} \in A$, $u_{n+1} \geq u_n$, $v_{n+1} \leq v_n$, v_{n+1} est un majorant de A et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$. Une récurrence immédiate montre donc que $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_0 - u_0}{2^n} \rightarrow 0$ donc $v_n - u_n \rightarrow 0$. Ainsi, (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Elles ont donc une limite commune ℓ .

Il nous reste à montrer que $\ell = \sup A$. Tout d'abord, ℓ est bien un majorant de A car, si $a \in A$ alors pour tout n , $v_n \geq a$ donc, en passant à la limite, $\ell \geq a$. Ensuite, prenons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe n tel que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$. Ainsi, ℓ vérifie bien la caractérisation de $\sup A$. ■

Théorème 2.12 (Convergence monotone)

Une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Une suite croissante dans $\mathbb{R}$ converge ou tend vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit (u_n) une suite croissante et majorée et $\ell = \sup u_n$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell$. Mais alors, pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell$$

donc $u_n \rightarrow \ell$. ■

Definition 2.13

Une suite extraite d'une suite $(u_n)_n$ est une suite de la forme $(u_{n_k})_k$ où $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers.

On appelle *valeur d'adhérence* de (u_n) toute limite (finie) de sous-suite de (u_n) .

Certains auteurs préfèrent prendre une application φ strictement croissante $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, l'appeler une *extractrice* et considérer $(u_{\varphi(n)})_n$, il suffit de poser $n_k = \varphi(k)$ pour voir qu'il s'agit bien de la même chose, mais l'utilisation d'extractrice peut s'avérer plus pratique quand on veut extraire une sous-suite d'une sous-suite. Une alternative consiste souvent à remplacer la suite de départ par une suite extraite.

Exercice 2.14

Montrer que a est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n : |u_n - a| < \varepsilon\}$ est infini.

Exercice 2.15

- (1) Montrer qu'une sous-suite d'une suite convergente est convergente.
- (2) Montrer qu'une suite qui a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes diverge.

Voici deux critères de convergence très utiles :

Théorème 2.16 (Heine-Borel)

Toute suite bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 2.17

Construire une suite sans valeur d'adhérence (finie), une suite qui diverge et qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Montrer que si une suite bornée n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge.

DÉMONSTRATION. C'est une reformulation de la forme classique du théorème de Heine-Borel : les fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts.

On considère (u_n) une suite bornée dans $\mathbb{R}$, i.e. telle qu'il existe $M > 0$ pour laquelle $-M \leq u_n \leq M$. Quitte à remplacer u_n par $v_n = \frac{u_n + M}{2M}$, on peut supposer qu'en fait $0 \leq u_n \leq 1$.

On considère alors $N_1^- = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1/2\}$ et $N_1^+ = \mathbb{N} \setminus N_1^-$. L'un au moins de ces ensembles est infini, si N_1^- est infini, on pose $N_1 = N_1^-$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1/2$, sinon on pose $N_1 = N_1^+$, $a_1 = 1/2$ et $b_1 = 1$ et enfin on pose $n_1 = \min N_1$.

Une fois que N_j, a_j, b_j, n_j sont construits, on pose $N_{j+1}^- = \{n \in N_j : n > n_j, a_j \leq u_n \leq \frac{a_j+b_j}{2}\}$ et $N_{j+1}^+ = N_j \setminus (N_{j+1}^- \cup \{n_j\})$. L'un au moins de ces ensembles est infini, si N_{j+1}^- est infini, on pose $N_{j+1} = N_{j+1}^-$, $a_{j+1} = a_j$, $b_{j+1} = \frac{a_j+b_j}{2}$ sinon, on pose $N_{j+1} = N_{j+1}^+$, $a_{j+1} = \frac{a_j+b_j}{2}$, $b_{j+1} = b_j$. Enfin, on pose $n_{j+1} = \min N_{j+1}$.

Il suffit de remarquer que

- a_j est croissante, b_j décroissante, $0 \leq b_j - a_j \leq \frac{1}{2^j} \rightarrow 0$, i.e. ces suites sont adjacentes,
- que $n_{j+1} > n_j$ donc u_{n_j} est une suite extraite de u_n ,
- que $a_j \leq u_{n_j} \leq b_j$.

On applique alors le théorème des suites adjacentes pour voir que $(a_j), (b_j)$ ont une limite commune ℓ puis le théorème des gendarmes pour voir que $u_{n_j} \rightarrow \ell$. ■

Definition 2.18

On appelle *limite supérieure* d'une suite (u_n)

$$\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} u_n$$

et *limite inférieure*

$$\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{p \geq n} u_n.$$

Ces deux quantités existent dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (qu'on peut munir de la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$). On a toujours

$$\liminf u_n \leq \limsup u_n$$

et, si ces deux quantités sont égales, c'est la limite de u_n (incluant $\pm\infty$).

Lorsque $\limsup u_n < +\infty$ (resp. $\liminf u_n > -\infty$) alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des n tels que $\limsup u_n - \varepsilon < u_n < \limsup u_n + \varepsilon$ (resp. $\liminf u_n - \varepsilon < u_n < \liminf u_n + \varepsilon$) est infini et $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u_n (resp. $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de u_n).

En particulier $\limsup u_n < a$ implique que $u_n < a$ à partir d'un certain rang.

Exercice 2.19

Montrer que

$$\liminf u_n + \liminf v_n \leq \limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n.$$

Donnez des exemples pour lesquelles ces inégalités sont strictes.

Exercice 2.20

- (1) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
- (2) Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $G = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. Montrer que G est dense si et seulement si $\omega \notin \mathbb{Q}$.
- (3) Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\sin \omega n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Cet exercice est corrigé dans la section 5.4.

Voici un exemple où ces notions sont particulièrement utiles :

Lemme 2.21 (Lemme de Fekete ou lemme sous-additif)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est *sous-additive*, c'est-à-dire que pour tous $m, n \geq 1$, $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Alors $\frac{u_n}{n}$ a une limite (éventuellement $-\infty$) et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Observons que la sous-additivité de (u_n) implique immédiatement que $u_{kn} \leq ku_n$.

DÉMONSTRATION. Notons qu'on a commencé à indexer la suite à $n = 1$ et qu'il faut donc éviter d'écrire u_0 .

Soit $q \geq 1$ un entier, $n \geq 2q$ un autre entier et écrivons la division euclidienne de n par q , $n = k_n q + r_n$ avec $k_n \geq 2$ et $0 \leq r_n < q$. La sous-additivité de la suite (u_n) implique que

$$u_n = u_{(k_n-1)q+q+r_n} \leq u_{(k_n-1)q} + u_{q+r_n} \leq (k_n-1)u_q + u_{q+r_n}.$$

On divise ensuite par n pour obtenir

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{k_n-1}{n} u_q + \frac{u_{q+r_n}}{n} \leq \frac{n-r_n-q}{n} \frac{u_q}{q} + \frac{\max_{j=q, \dots, 2q-1} u_j}{n}$$

puisque r_n ne prend que les valeurs de 0 à $q-1$ et $k_n = \frac{n-r_n}{q}$. On constate alors que le second membre tend vers $\frac{u_q}{q}$ quand $n \rightarrow +\infty$ (puisque r_n est borné) donc

$$\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $q \geq 1$ donc

$$\limsup \frac{u_n}{n} \leq \inf_{q \geq 1} \frac{u_q}{q} \leq \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{u_q}{q}.$$

Les limites supérieure et inférieures sont donc égales donc $\frac{u_n}{n}$ a bien une limite qui est donc $\inf_{q \geq 1} \frac{u_q}{q}$. ■

Ce lemme sera utilisé dans la section 2.1 dans laquelle nous définirons le rayon spectral d'une matrice.

Enfin, rappelons les notations utiles pour étudier le comportement asymptotique des suites : $(u_n), (v_n)$ deux suites. On notera

– $u_n = O(v_n)$ s'il existe une constante C et un entier N tel que, pour $n \geq N$, $|u_n| \leq C|v_n|$;

– $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite η_n avec $\lim \eta_n = 0$ et un entier N tel que, pour $n \geq N$, $|u_n| \leq \eta_n |v_n|$;

– $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(u_n)$.

Notons que $u_n - v_n = o(u_n)$ signifie qu'il existe $\eta_n \rightarrow 0$ et N_0 tel que, pour $n \geq N_0$, $|u_n - v_n| \leq \eta_n |u_n|$. En particulier, si $u_n = 0$ alors $v_n = u_n = 0$. Par ailleurs, il existe $N \geq N_0$ tel que $\eta_n \leq \frac{1}{2}$. Mais alors, pour $n \geq N$, si $v_n = 0$, $|u_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|$ donc $u_n = 0$. En d'autres termes, si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang u_n et v_n s'annulent simultanément. L'écriture $u_n \sim 0$ (que nous recommandons de proscrire) signifie donc que u_n s'annule à partir d'un certain rang. De plus, pour $n \geq N$, si $u_n \neq 0$, on peut poser $\varepsilon_n = \frac{u_n - v_n}{u_n}$ et $|\varepsilon_n| \leq \eta_n$ donc $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Mais alors $\frac{v_n}{u_n} = 1 - \varepsilon_n$. Si on prend pour convention que $\frac{0}{0} = 1$,

et de poser $\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n = 0 \\ 1 - \varepsilon_n & \text{sinon} \end{cases}$ alors pour $n \geq N$, $\frac{v_n}{u_n} = \alpha_n \rightarrow 1$.

Ainsi, $u_n \sim v_n$ se réduit à u_n, v_n s'annulent simultanément à partir d'un certain rang et $\frac{v_n}{u_n} \rightarrow 1$. Cette dernière limite est souvent donnée un peu abusivement comme définition, vu que c'est par cette propriété qu'on démontre l'équivalence de deux suites.

Par exemple $(1 + (-1)^n) \frac{1}{n} \sim (1 + (-1)^n) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$ puisque pour n impair, les deux suites s'annulent et si $n = 2p$, $(1 + (-1)^n) \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ et $(1 + (-1)^n) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} = \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$. Par contre $(1 + (-1)^n) \frac{1}{n} \not\sim (1 + (-1)^n) \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, puisque la première s'annule quand n est impair et la seconde non.

Ces notions sont utiles pour énoncer le comportement asymptotique des suites, c'est-à-dire de comparer des suites à des suites de référence dont le comportement est bien connu (polynôme, polynôme de Laurent, exponentielle...).

2.2. Moyennes de Césaro.

Il existe d'autres notions de convergence plus faible. La plus connue est la suivante :

Théorème 2.22 (Lemme de Césaro)

Soit (a_n) une suite convergente et ℓ sa limite. On considère $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$, alors

$\sigma_n \rightarrow \ell$.

La réciproque est fausse.

Définition 2.23 (Limite au sens de Césaro)

On appelle la suite (σ_n) avec $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$ les *moyennes de Césaro* de la suite

(a_n) . Il sera pratique d'écrire $\ell = \mathcal{C} - \lim a_n$ et de l'appeler la Césaro-limite de (a_n) (ou limite au sens de Césaro). Évidemment, si la Césaro limite existe, elle est unique.

DÉMONSTRATION. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors (u_n) est bornée. Notons $M = \sup |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}\sigma_n - \ell &= \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} - \ell = \frac{(u_0 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n+1} \\ &= \frac{(u_0 - \ell) + \cdots + (u_{N-1} - \ell)}{n+1} + \frac{(u_N - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n+1}.\end{aligned}$$

Dans la première fraction, on majore $|u_k - \ell| \leq M + |\ell|$ et dans la suivante, on majore $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$. et on en déduit que

$$|\sigma_n - \ell| \leq \frac{N}{n+1}(M + |\ell|) + \varepsilon.$$

Il suffit alors de prendre $K \geq N$ tel que $\frac{N}{K+1}(M + |\ell|) \leq \varepsilon$ et alors, pour tout $n \geq K$, $|\sigma_n - \ell| \leq 2\varepsilon$.

Lorsqu'on prend $u_n = (-1)^n$ (qui ne converge pas), on a $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 0$ si n est impair et 1 si n est pair donc $|\sigma_n| \leq (n+1)^{-1} \rightarrow 0$. ■

Note pour les candidats à l'agrégation

Le lemme de Césaro est complété plus loin par le lemme de Krocnecker ?? . La réunion des deux peut faire un développement tout à fait convenable, de même que ce qui suit.

Remarque 2.24

Le lecteur adaptera sans peine les démonstrations de cette section à la convergence dans un espace de Banach.

Remarque 2.25

La sommation de Césaro n'est *pas* une accélération de convergence au sens de la section 2.5.

Le cas de la suite $(-1)^n$ illustre le phénomène suivant : cette suite a deux valeurs d'adhérence $+1$ et -1 , la moitié des termes s'approche de $+1$ et l'autre moitié s'approche de -1 et les sommes de Césaro tendent vers $+1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$.

Nous allons maintenant introduire deux concepts qui nous permettent de mieux étudier la moyenne de Césaro.

Definition 2.26

Soit $J \subset \mathbb{N}$ infini de sorte qu'on peut énumérer $J = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ avec n_k une suite strictement croissante. Soit (a_n) une suite. Sa *limite selon J*, notée $J - \lim a_n$ ou $\lim_{n \in J} a_n$ est la limite, si elle existe, de la suite extraite (a_{n_k}) . La densité de J est

$$d(J) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|J \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1}$$

si cette limite existe.

On dit que (a_n) tend vers a en densité ou que a est la *limite en densité* de (a_n) et on note $\mathcal{D} - \lim a_n = a$ s'il existe $J \subset \mathbb{N}$ avec $d(J) = 1$ tel que $a = \lim_{n \in J} a_n$.

Il convient de ne pas confondre cette notion avec la densité au sens topologique.

La densité des entiers pairs et des entiers impairs est $d(2\mathbb{N}) = d(2\mathbb{N} + 1) = \frac{1}{2}$. Notons que, si la densité de J existe, alors $0 \leq d(J) \leq 1$ et que si $d(J) > 0$ alors J est infini. Si $J' \subset J$ avec $d(J) = 0$ alors $d(J') = 0$. Enfin $d(J) = 1$ si et seulement si $d(\mathbb{N} \setminus J) = 0$ puisque $\frac{|(\mathbb{N} \setminus J) \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} = 1 - \frac{|J \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1}$.

Exemple 2.27

Soit (a_n) la suite définie par $a_n = 0$ si n est un carré, ($n = p^2$ pour un $p \in \mathbb{N}$) et $a_n = 1$ sinon. Comme les carrés dans $\{0, 1, \dots, n\}$ sont $0, 1, 2^2, \dots, [\sqrt{n}]^2$, il y a $O(\sqrt{n})$ carrés dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Ainsi si J est l'ensemble des entiers qui ne sont pas des carrés alors $\frac{|J \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \geq \frac{n - O(\sqrt{n})}{n+1} \rightarrow 1$ donc $\mathcal{D} - \lim a_n = 1$.

Certaines parties de $\mathbb{N}$ n'ont pas de densité. Les deux objets suivants existent toujours

$$d_-(J) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|J \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \quad \text{et} \quad d_+(J) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|J \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1}$$

et sont appelés la *densité inférieure* et *supérieure* de J . Un ensemble aura une *densité* si elles coïncident.

Les exemples suivants doivent vous inviter à la prudence quand vous manipulez des densités :

Exemple 2.28

Notons $D_k = \{n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$ qui forment une partition de $\mathbb{N}^*$ (les intervalles dyadiques) et notons que $|D_k| = 2^k$ et contient autant d'entiers pairs que d'impairs. On note ensuite $P_k = 2\mathbb{N} \cap D_k$ et $I_k = (2\mathbb{N} + 1) \cap D_k$ les entiers pairs et impairs d'un intervalle dyadique. On définit enfin $A = \bigcup_{k \geq 0} D_{2k}$ et $B = \left(\bigcup_{k \geq 0} P_{2k} \right) \cup$

$$\left(\bigcup_{k \geq 0} I_{2k+1} \right).$$

Le principe de construction de A est le suivant : un ensemble d'entiers qui se suivent, un trou, un ensemble d'entiers qui se suivent de taille comparable au trou, un trou 2 fois plus grand que le trou précédent, un nouvel ensemble d'entiers qui se suivent de taille comparable au trou, un trou 2 fois plus grand que le trou précédent... un tel ensemble n'aura jamais de densité.

Pour voir cela pour A , soit $n \geq 1$ et m tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$. On distingue alors 2 cas :

– Si $m = 2p + 1$ est impair $A \cap \{0, \dots, n\} = \bigcup_{k=0}^p D_{2k}$ qui est de cardinal $\sum_{k=0}^p |D_{2k}| =$

$$\sum_{k=0}^p 2^{2k} = \frac{2^{2p+2} - 1}{3}. \text{ Par suite}$$

$$\frac{|A \cap \{0, \dots, 2^{2p+1}\}|}{2^{2p+1} + 1} = \frac{2^{2p+2} - 1}{3(2^{2p+1} + 1)} \rightarrow \frac{2}{3}$$

quand $p \rightarrow +\infty$ et, si $2^{2p+1} \leq n < 2^{2p+2}$,

$$\frac{1}{3} + o(1) = \frac{2^{2p+2} - 1}{3 \times 2^{2p+2}} \leq \frac{|A \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \leq \frac{2^{2p+2}}{3(2^{2p+1} + 1)} = \frac{2}{3} + o(1).$$

– Si $m = 2^p$ est pair et $2^{2p} \leq n < 2^{2p+1}$ i.e. $n = 2^{2p} + j$ avec $j < 2^{2p}$. alors $A \cap \{0, \dots, n\} = \left(\bigcup_{k=0}^{p-1} D_{2k} \right) \cup \{2^{2p}, \dots, 2^{2p} + j\}$ qui est de cardinal $\frac{2^{2p}-1}{3} + j + 1 = 2^{2p} + j - \frac{2^{2p+1}-1}{3}$. Par suite

$$\frac{|A \cap \{0, \dots, 2^{2p}\}|}{2^{2p} + 1} = \frac{\frac{2^{2p}-1}{3} + 1}{2^{2p} + 1} \rightarrow \frac{1}{3}$$

et si $n = 2^{2p} + j$ avec $0 \leq j < 2^{2p}$, alors

$$1 - \frac{2^{2p+1}-1}{3 \times 2^{2p}} \leq \frac{|A \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} = 1 - \frac{2^{2p+1}-1}{3(2^{2p}+j)} \leq 1 - \frac{2^{2p+1}-1}{3 \times 2^{2p+1}}.$$

Le membre de gauche est à nouveau $\frac{1}{3} + o(1)$ et celui de droite $\frac{2}{3} + o(1)$. En prenant la liminf et la limsup, on en déduit que $d_-(A) = \frac{1}{3}$ et $d_+(A) = \frac{2}{3}$ donc A n'a pas de densité.

Un raisonnement similaire montre que $d_-(B) = d_+(B) = \frac{1}{2}$ car cette fois-ci il n'y a plus de trou (juste une petite irrégularité à chaque 2^k où on fait un décalage de ± 1). Ainsi $d(B) = \frac{1}{2} = d(2\mathbb{N})$. Mais $B \cap (2\mathbb{N}) = \bigcup_{k \geq 1} P_{2k}$. On fait alors le même raisonnement que pour A , mais les cardinaux qui interviennent sont divisés par 2 (à 1 près). On obtient donc $d_-(B \cap (2\mathbb{N})) = \frac{1}{6}$ et $d_+(B \cap (2\mathbb{N})) = \frac{1}{3}$ de sorte que $B \cap (2\mathbb{N})$ n'a pas de densité.

Nous allons utiliser les observations simples suivantes :

Lemme 2.29

Si on a une partition $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^N J_k$ où chaque J_k a une densité, alors $\sum_{k=1}^N d(J_k) = 1$.

Si $J_1, J_2 \subset \mathbb{N}$ sont deux ensembles qui ont une densité $d(J_k) > \frac{1}{2}$ alors $J_1 \cap J_2$ contient un ensemble infini.

Si (a_n) , a, b sont tels que $\mathcal{D} - \lim a_n = a$ et $\mathcal{D} - \lim a_n = b$, alors $a = b$.

DÉMONSTRATION. Pour la première, il suffit d'écrire

$$1 = \frac{|\{0, \dots, n\}|}{n+1} = \frac{|\bigcup_{k=1}^N \{0, \dots, n\} \cap J_k|}{n+1} = \sum_{k=1}^N \frac{|\{0, \dots, n\} \cap J_k|}{n+1} \rightarrow \sum_{k=1}^N d(J_k).$$

Pour $k = 1, 2$, notons $d_k = d(J_k) > \frac{1}{2}$ et soit e tel que $d_k > e > \frac{1}{2}$. Il existe alors N tel que, si $n \geq N$, $\frac{|J_k \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} > e$ i.e. en notant $J_k^n = J_k \cap \{0, \dots, n\}$, $|J_k^n| > e(n+1)$.

D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, $|J_1^n \cap J_2^n| \geq \left(e - \frac{1}{2}\right)(n+1)$. Rappelons que pour cela on écrit $|J_1^n \setminus J_2^n| + |J_1^n \cap J_2^n| \geq e(n+1)$ et $|J_2^n \setminus J_1^n| + |J_1^n \cap J_2^n| \geq e(n+1)$ donc

$$(n+1) + 2|J_1^n \cap J_2^n| \geq |J_1^n \setminus J_2^n| + |J_2^n \setminus J_1^n| + 2|J_1^n \cap J_2^n| \geq 2e(n+1).$$

Ainsi $|J_1^n \cap J_2^n| \rightarrow +\infty$ i.e. $|J_1 \cap J_2| = +\infty$. Notons que cela n'implique pas que $J_1 \cap J_2$ ait une densité $\geq e - \frac{1}{2}$ seulement que

$$\limsup \frac{|(J_1 \cap J_2) \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \geq e - \frac{1}{2}.$$

Si $\mathcal{D} - \lim a_n = a$ et $\mathcal{D} - \lim a_n = b$, alors il existe J_1, J_2 avec $d(J_1) = d(J_2) = 1$ tel que $a = J_1 - \lim a_n$, $b = J_2 - \lim a_n$. En utilisant le point précédent, on écrit ensuite $J_1 \cap J_2 = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Une sous-suite d'une suite convergente a même limite que la suite elle-même. En utilisant que $n_k \in J_1$, on a $a = \lim a_{n_k} = b$ en utilisant que $n_k \in J_2$. ■

Proposition 2.30

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite et supposons que $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^K J_k$ avec $J_k \cap J_\ell = \emptyset$ si $k \neq \ell$ et chaque J_k a une densité. Supposons que $\ell_k = J_k - \lim a_n$ existent, alors $\mathcal{C} - \lim a_n = \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k$.

Ce résultat permet de traiter le cas des suites qui n'ont qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence mais avec une condition restrictive. Chacune d'entre elles doit correspondre à un ensemble J_k qui a une densité et ces ensembles partitionnent $\mathbb{N}$. Ce résultat montre que la Césaro limite existe alors et est un barycentre des valeurs d'adhérence avec des poids correspondant aux densités associées.

Ici aussi, nous démontrons ce résultat dans $\mathbb{R}$, mais la démonstration est inchangée dans un espace de Banach.

DÉMONSTRATION. Écrivons $J_k = \{n_\ell^k\}_{\ell \geq 0}$ et $d_k = d(J_k)$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tel que, si $n \geq N$ alors, pour $k = 1, \dots, K$,

$$d_k - \varepsilon \leq \frac{|J_k \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \leq d_k + \varepsilon$$

et de plus si $n \in J_k$ avec $n \geq N$ alors $|a_n - \ell_k| \leq \varepsilon$.

Notons que, comme les J_k forment une partition de $\mathbb{N}$ en ensembles infinis, si n est un entier, soit $n < N$ soit il existe k, ℓ tel que $n = n_\ell^k \geq N$. Par suite $|a_n| \leq M := \max(\sup_{n \leq N} |a_n|, \max_k |\ell_k| + \varepsilon)$.

Enfin, si $n \geq N$, notons $[N, n] = \{j \in \mathbb{N}, N \leq j \leq n\}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k &= \frac{\sum_{j=0}^n a_j}{n+1} - \sum_{k=1}^K d_k \ell_k \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} a_j}{n+1} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\sum_{j \in J_k \cap [N, n]} (a_j - \ell_k)}{n+1} + \ell_k \frac{|J_k \cap [N, n]|}{n+1} - d_k \ell_k \right). \end{aligned}$$

Mais alors,

- (i) $\left| \frac{\sum_{j=0}^{N-1} a_j}{n+1} \right| \leq \frac{M(N+1)}{n+1};$
- (ii) $\left| \sum_{j \in J_k \cap [N, n]} (a_j - \ell_k) \right| \leq \sum_{j \in J_k \cap [N, n]} |a_j - \ell_k| \leq \varepsilon |J_k \cap [N, n]| \leq \varepsilon(n+1);$

(iii) et pour le dernier terme, on écrit

$$\begin{aligned} \left| \frac{|J_k \cap [N, n]|}{n+1} - d_k \right| &\leq \left| \frac{|J_k \cap [0, n]|}{n+1} - d_k \right| + \left| \frac{|J_k \cap [0, N-1]|}{n+1} \right| \\ &\leq \varepsilon + \frac{N}{n+1}. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\left| \sigma_n - \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k \right| \leq \frac{M(N+1)}{n+1} + K\varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{N}{n+1} \right) \sum_{k=1}^K |\ell_k|.$$

Par suite $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma_n - \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k \right| \leq \varepsilon K + \varepsilon \sum_{k=1}^K |\ell_k|$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il suffit de faire $\varepsilon \rightarrow 0$ pour obtenir que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma_n - \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k \right| = 0$$

donc que la limite est nulle *i.e.* que $\sigma_n \rightarrow \sum_{k=1}^K d(J_k) \ell_k$ comme annoncé. ■

Supposons maintenant qu'une suite (a_n) a une $\mathcal{D}$ -limite *i.e.* qu'il existe J_0 avec $d(J_0) = 1$ tel que $\lim_J a_n = \ell_0$. Si (a_n) n'a qu'un nombre fini d'autres valeurs d'adhérences $\ell_1, \dots, \ell_K$ celle-ci sont alors toutes des J_k -limites avec $J_k \subset \mathbb{N} \setminus J_0$ et on peut supposer que $J_0, \dots, J_K$ forment une partition de $\mathbb{N}$. Pour cela, il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{1}{2} \min_{j \neq k} |\ell_j - \ell_k|$. Comme la suite n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences, il existe N tel que, si $n \geq N$, il existe au moins un k tel que $|a_n - \ell_k| < \varepsilon$, et alors $|a_n - \ell_j| > \varepsilon$ pour $j \neq k$. Nécessairement $n \in J_k$. Cela fournit donc une partition de $\{N, N+1, \dots\}$ et on peut mettre les N premiers termes dans J_0 . Alors pour $k = 1, \dots, K$, $J_k \subset \mathbb{N} \setminus J_0$ donc $d(J_k) = 0$. La proposition nous dit qu'alors $\ell_0 = \mathcal{C} - \lim a_n$.

Le lemme suivant est en quelque sorte une réciproque du résultat précédent :

Lemme 2.31 (Koopman-von Neumann)

Soit (a_n) une suite bornée dans $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ et p un réel avec $1 < p < +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k - a| = 0$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k - a|^p = 0$;
- (iii) $\mathcal{D} - \lim a_n = a$.

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer a_n par $|a_n - a|$, on peut supposer que $a = 0$ et que $a_n \geq 0$. Notons que (a_n) est bornée donc $0 \leq a_n \leq M$.

En posant $p' = \frac{p}{p-1}$ i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, l'inégalité de Hölder nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k &\leq \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k^p \leq M^{p-1} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow 0$ si et seulement si $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k^p \rightarrow 0$. Ainsi *i*) et *ii*) sont bien équivalents.

Montrons maintenant que *i*) implique *iii*). On pose $J_k = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq \frac{1}{k}\}$ de sorte que $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_k \subset \dots$. De plus, comme $ka_j \geq \begin{cases} 1 & \text{pour } j \in J_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a

$$\frac{|J_k \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \leq \frac{\sum_{j=0}^n ka_j}{n+1} = k \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n a_j \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$ (ainsi $d(J_k) = 0$). Il existe donc n_k tel que, si $n \geq n_k$

$$\frac{|J_k \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} < \frac{1}{k}.$$

On peut de plus supposer que $n_k > n_{k-1}$.

Posons alors

$$J = \bigcup_{k \geq 1} (J_k \cap [n_k, +\infty[).$$

Comme les J_k sont croissants, si $n \in J \cap \{0, \dots, m\}$ avec $n_k \leq m < n_{k+1}$ alors $n \in \bigcup_{1 \leq \ell \leq k} (J_\ell \cap [n_\ell, +\infty[) \subset J_k$ puisque les J_ℓ sont croissants. Ainsi $J \cap \{0, \dots, m\} \subset J_k \cap \{0, \dots, m\}$ et

$$\frac{|J \cap \{0, \dots, m\}|}{m+1} \leq \frac{|J_k \cap \{0, \dots, m\}|}{m+1} \leq \frac{1}{k}.$$

Comme $m \rightarrow +\infty$ implique $k \rightarrow +\infty$, on obtient $d(J) = 0$ et par suite $d(\mathbb{N} \setminus J) = 1$.

Enfin, soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $N = n_k$. Si $n \in (\mathbb{N} \setminus J)$ et $n \geq N$ alors $n \notin J_k$ donc $|a_n| \leq \frac{1}{k}$ ce qui montre que $(\mathbb{N} \setminus J) - \lim a_n = 0$. On a donc bien $\mathcal{D} - \lim a_n = 0$.

Montrons enfin la réciproque. Supposons *iii*) et soit $J \subset \mathbb{N}$ avec $d(J) = 1$ (donc $d(\mathbb{N} \setminus J) = 0$) tel que $\lim_{n \in J} a_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et N_ε tel que si $n \in J$ et $n \geq N_\varepsilon$ alors $0 \leq a_n \leq \varepsilon$. Pour un tel n , en découpant la somme de $j = 0$ à n en trois sommes :

- une somme sur les $j < N_\varepsilon$ dans laquelle on majore $a_j \leq M$,
- une somme sur les $j \in J$ avec $j \geq N_\varepsilon$ dans laquelle on majore $a_j \leq \varepsilon$
- et enfin les termes $j \notin J$ et $j \geq N_\varepsilon$, dans laquelle on majore à nouveau $a_j \leq M$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq j \leq N_\varepsilon} M + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{\substack{n \in J \\ n \geq N_\varepsilon}} 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{n \in J \\ n \geq N_\varepsilon}} M \\ &\leq \frac{MN_\varepsilon}{n+1} + \varepsilon + M \frac{|(\mathbb{N} \setminus J) \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \\ &\rightarrow \varepsilon + Md(\mathbb{N} \setminus J) = \varepsilon \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$0 \leq \limsup \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j \leq \varepsilon$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient bien $\lim \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j = 0$. ■

Remarque 2.32

Ces propriétés sont équivalentes à la propriété suivante :

$$iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j|^2 = |a|^2$$

En effet, si on a $iv)$ alors

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j - a|^2 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j|^2 + |a|^2 - 2\Re \left\langle \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j, a \right\rangle \\ &\rightarrow |a|^2 + |a|^2 - 2\langle a, a \rangle = 0. \end{aligned}$$

On a donc $ii)$ avec $p = 2$.

Inversément, si on a $ii)$ i.e. $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j - a|^2 \rightarrow 0$, on a aussi $i)$ i.e. $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j - a| \rightarrow 0$ mais alors

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n (a_j - a) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j - a| \rightarrow 0.$$

Ainsi $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j \rightarrow a$ qui est la première partie de $iv)$. On réécrit ensuite (2.1)

sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j|^2 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j - a|^2 - |a|^2 + 2\Re \left\langle \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j, a \right\rangle \\ &\rightarrow 0 - |a|^2 + 2\Re \langle a, a \rangle = |a|^2 \end{aligned}$$

qui est la deuxième partie de $iv)$ ce qui achève la démonstration.

Ici la démonstration est inchangée dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Il suffit de choisir une norme issue d'un produit scalaire. On pourra toujours écrire (2.1).

En dimension infinie, cela n'est plus possible et on se restreint aux espaces de Hilbert. Dans ce cas, on n'a pas besoin d'imposer une convergence en norme mais seulement une convergence faible (la convergence en norme sera automatique).

2.3. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.3.1. Étude au voisinage des points fixes.

Dans cette partie, nous allons étudier les suites *numériques* de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $u_0 \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ un intervalle) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction *continue*.

Ce qu'on cherche à savoir ici est le comportement de la suite (monotone, oscillante, limite finie ou non, comportement asymptotique).

Nous allons tout au long de cette partie considérer la suite suivante

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{3x + 1}{2x + 4}.$$

Il s'agit d'une suite homographique et on peut l'étudier directement à l'aide des méthodes décrites dans la section 1.3. La première remarque est que cette suite ne pourrait pas être bien définie puisque le domaine de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ainsi, si pour un certain n , $u_n = -2$, u_{n+1} n'est pas définie.

Pour pallier cela, on introduit la notion suivante :

Lemme 2.33

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $J \subset I$ un intervalle stable par f , c'est-à-dire $f(J) \subset J$. Si $u_0 \in J$, alors la suite u_n est bien définie.

DÉMONSTRATION. Montrons par récurrence sur n que u_n est bien défini et $u_n \in J$.

Au rang $n = 0$, c'est l'hypothèse de départ. Supposons maintenant la propriété vraie jusqu'au rang n : pour $m = 0, \dots, n$, u_m existe et $u_m \in J$ et montrons-la au rang $n + 1$. Comme $u_n \in J$ et que J est stable par f , $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à J . ■

Dans la suite, on partira toujours d'un intervalle stable. La seconde propriété est l'étude des limites possibles : si $u_n \rightarrow \ell$ alors $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et comme on suppose f continue, en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$:

Lemme 2.34

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si $u_n \rightarrow \ell$ alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2.35

On considère $f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$, montrer que $u_{n+1} = f(u_n)$ n'a que deux limites possibles qu'on notera $\ell_1 < \ell_2$. Montrez que $] \ell_1, \ell_2[$ et $] \ell_2, +\infty)$ sont stables par f et que $f((-\infty, -2]) \subset] \ell_2, +\infty)$.

Pour résoudre cet exercice, il est **obligatoire** de représenter f (ainsi que la diagonale). Pour la suite, il est recommandé de représenter 3 suites (u_n) avec u_0 dans chacun des 3 intervalles. Vous devriez constater une distinction entre les 2 points fixes et 2 types de comportements très différents.

Passons maintenant à la monotonie :

Lemme 2.36

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et *monotone* et I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.

- (1) Si f est croissante et si $u_1 \leq u_0$ alors (u_n) est décroissante.
- (2) Si f est croissante et si $u_1 \geq u_0$ alors (u_n) est croissante.
- (3) Si f est décroissante, alors les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie contraire.

DÉMONSTRATION. Les deux premiers se font par une récurrence immédiate : supposons que f soit croissante et que $u_1 \leq u_0$ (resp. $u_1 \geq u_0$) et montrons que, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} \geq u_n$).

La propriété est évidemment vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang n , alors, par croissance de f , $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}$ (resp. $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$) ce qui montre la propriété au rang $n + 1$.

Supposons maintenant que f soit décroissante, de sorte que $f \circ f$ soit croissante. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones. Pour voir que leur monotonie est contraire, il suffit de le voir sur le premier terme puisque (u_{2n}) est croissante (resp. décroissante) si $u_2 \geq u_0$ (resp. $u_2 \leq u_0$). Mais, par décroissance de f , on a alors $u_3 = f(u_2) \leq f(u_0) = 1$ (resp. $u_3 \geq u_1$) qui implique que u_{2n+1} est décroissante (resp. croissante). ■

Il est important de voir que si f est croissante alors (u_n) est monotone (mais pas forcément croissante) donc a une limite éventuellement infinie. Si I est borné, (u_n) aussi, donc elle converge vers un point fixe de f . L'existence d'un point fixe s'obtient directement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f(x) - x$, mais celui-ci n'est pas nécessairement unique.

De même si I est borné et f est décroissante, les suites u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers des points fixes de $f \circ f$. Si ce point fixe est unique, alors les suites u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ . Par suite, u_n converge vers ℓ .

Nous allons maintenant étudier le comportement de la suite (u_n) au voisinage d'un point fixe, lorsque la fonction f est un peu régulière.

Lemme 2.37

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et I un intervalle stable par f contenant un point fixe ℓ .
 – si $|f'(\ell)| < 1$ alors il existe $\eta_0 > 0$ tel que, s'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \eta_0$, alors $u_n \rightarrow \ell$. Plus précisément, il existe $0 < r < 1$ tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \eta_0 r^{n-n_0}$.
 – si $|f'(\ell)| > 1$ alors il existe ε_0 tel que s'il existe n , $0 < |u_n - \ell| \leq \varepsilon_0$ alors il existe m tel que $|u_{n+m} - \ell| > \varepsilon_0$.

Definition 2.38 (Points fixes attractifs et répulsifs)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et I un intervalle stable par f et $\ell \in I$ un point fixe, $f(\ell) = \ell$. On dira que ℓ est un *point fixe attractif* si $|f'(\ell)| < 1$ et un *point fixe répulsif* si $|f'(\ell)| > 1$. Si $|f'(\ell)| = 1$ on dit que ℓ est un *point fixe parabolique*.

Pour un point fixe attractif, une suite qui s'en approche suffisamment va converger vers ce point. Pour un point fixe répulsif, la seule façon de converger vers ℓ est qu'il existe n tel que $u_n = \ell$ et alors la suite sera stationnaire à partir de n . On peut donner une définition plus générale d'un point fixe attractif ou répulsif à partir de cette propriété. Il n'y a pas de résultat universel pour les points fixes paraboliques.

DÉMONSTRATION. Comme f' est continue, si $|f'(\ell)| < 1$ (resp. $|f'(\ell)| > 1$), en prenant r tel que $|f'(\ell)| < r < 1$ (resp. $|f'(\ell)| > r > 1$), il existe η_0 tel que, si $|x - \ell| \leq \eta_0$ alors $|f'(x)| \leq r$ (resp. $|f'(x)| \geq r$).

Supposons d'abord que $|f'(\ell)| < 1$ et qu'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \eta_0$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \eta_0 r^{n-n_0}$. Cette relation est vraie au rang $n = n_0$, supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $n \geq n_0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, si $|x - \ell| \leq \eta_0$, alors

$$|f(x) - \ell| = |f(x) - f(\ell)| \leq |x - \ell| \sup_{y \in [x, \ell]} |f'(y)| \leq |x - \ell| r$$

En appliquant cela à $x = u_n$ on obtient bien $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - \ell| \leq \eta_0 r^{n-n_0+1}$.

Le cas $|f'(\ell)| > 1$ et $|u_{n_0} - \ell| \leq \eta_0$ est similaire. Dans ce cas, on utilise l'identité des accroissements finis. Pour tout x tel que $|x - \ell| \leq \eta_0$, il existe ξ_x tel que

$$|f(x) - \ell| = |f'(\xi_x)| |x - \ell| \geq r |x - \ell|.$$

Ainsi, $|u_{n_0+n}-\ell| \leq \eta_0$ pour $n = 0, \dots, m$, alors $|u_{n_0+n+1}-\ell| = |f(u_{n_0+n})-\ell| \geq r|u_{n_0+n}-\ell|$ donc $|u_{n_0+n}-\ell| \geq r^n|u_{n_0}-\ell|$ pour $n = 0, \dots, m+1$ donc si $m \geq \frac{\ln \frac{\eta_0}{|u_{n_0}-\ell|}}{\ln r}$ alors $|u_{n_0+m+1}-\ell| \geq \eta_0$. ■

Regardons maintenant le cas d'un point fixe qui n'est ni attractif ni répulsif. Il n'y a pas de résultat universel, toutefois, le résultat suivant permet de conclure lorsque f possède un développement limité autour du point fixe un peu particulier (le terme suivant est négatif). C'est un développement classique sur l'étude des suites.

Théorème 2.39

Soit $a > 0$ et f une fonction continue et croissante sur $[0, a]$ telle que

- (i) $f(0) = 0$ et, pour $0 < x < a$, $0 < f(x) < x$. En particulier, $[0, a]$ est stable et 0 est l'unique point fixe de f dans $[0, a]$.
- (ii) Il existe $\lambda > 0$ et $r > 1$ tel que $f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$ au voisinage de 0.

Alors la suite récurrente donnée par $0 < u_0 < a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie

$$u_n \sim \frac{1}{(\lambda(r-1)n)^{\frac{1}{r-1}}}.$$

DÉMONSTRATION. La première chose à remarquer est que l'intervalle $[0, a]$ est stable puisque $0 < f(x) < x < a$ si $0 < x < a$. Ensuite, f est croissante donc u_n est monotone et, comme $f(x) < x$, $u_1 = f(u_0) < u_0$ donc u_n est décroissante, minorée par 0 donc convergente. La limite est un point fixe et comme $f(x) < x$ si $x > 0$, le seul point fixe est 0. Ainsi $u_n \rightarrow 0$.

Le deuxième point à comprendre est que l'équivalent ne tombe pas du ciel. Si on écrit la relation de récurrence $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \sim -\lambda u_n^r$ et qu'on interprète la différence $u_{n+1} - u_n$ comme une dérivée discrète, alors on pense à l'équation différentielle $y' = -\lambda y^r$. Les solutions de cette équation différentielle (homogène) sont de la forme $y(t) = \frac{1}{(\lambda(r-1)t+C)^{\frac{1}{r-1}}}$.

On s'attend donc à un équivalent de la forme $u_n \sim \frac{1}{(Cn)^{\frac{1}{1/(r-1)}}}$ ou, de façon équivalente que $u_n^{r-1} \sim \frac{1}{Cn}$ ou encore $u_n^{1-r} \sim Cn$. Cette dernière forme est intéressante car

$$\text{-- comme } u_n \rightarrow 0 \text{ et } r > 1, u_n^{1-r} \rightarrow +\infty \text{ donc } u_n^{1-r} \sim u_n^{1-r} - u_0^{1-r} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r})$$

$$\text{-- on écrit alors } Cn = \sum_{k=0}^{n-1} C$$

– et on utilise un résultat de comparaison des séries divergentes : si $(a_n), (b_n)$ sont deux suites positives équivalentes telles que la série $\sum a_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.

Ainsi, il suffit de montrer que $u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r} \sim C$ pour obtenir $u_n^{1-r} \sim Cn$.

Mais

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} &= (f(u_n))^{1-r} - u_n^{1-r} = (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r} \left[(1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r} - 1 \right] \\ &= u_n^{1-r} (-\lambda(1-r)u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})) = \lambda(r-1) + o(1). \end{aligned}$$

On a donc bien $u_n^{1-r} \sim Cn$ avec $C = \lambda(r-1)$. ■

Il y a deux exemples classiques : $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et beaucoup d'autres. Dans les deux cas, la méthode s'étend et permet d'obtenir d'autres termes du développement asymptotique.

Nous allons nous concentrer sur le deuxième cas :

Exemple 2.40

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Alors $u_n \rightarrow 0$ et de plus

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3} \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

En effet, remarquons que

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

donc $\lambda = \frac{1}{2}$ et $r = 2$ dans le théorème précédent, ce qui implique que

$$u_n \sim \frac{2}{n}.$$

Pour obtenir des termes supplémentaires dans le développement asymptotique, il faut revenir à la démonstration. Dans ce cas ($r = 2$), on a écrit

$$u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln(1 + u_n)} - \frac{1}{u_n} = g(u_n)$$

avec $g(x) = \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}$. On a ensuite fait un développement limité de la fonction g

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3}\right)x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}x + o(x). \end{aligned}$$

Dans le théorème, on n'avait utilisé que le terme à l'ordre 0 et on avait écrit

$$u_n^{-1} \sim \sum_{k=0}^n (u_k^{-1} - u_{k-1}^{-1}) \sim \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

i.e. $u_n \sim \frac{2}{n}$. On pose alors $v_n = u_n^{-1} - \frac{n}{2}$ de sorte que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{n+1}{2}\right) - \left(\frac{1}{u_n} - \frac{n}{2}\right) = g(u_n) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{12}u_n + o(u_n) \sim -\frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Mais à nouveau, la série (à termes négatifs) $\sum -\frac{6}{n}$ diverge donc ses sommes partielles

sont équivalentes aux sommes partielles $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 \sim v_n$. Comme

$\sum_{k=1}^{n-1} -\frac{1}{6k} \sim -\frac{\ln n}{6}$, on en déduit que $v_n = -\frac{\ln n}{6} + o(\ln n)$ soit encore

$$u_n^{-1} = \frac{n}{2} - \frac{\ln n}{6} + o(\ln n).$$

Par suite

$$u_n = \frac{1}{\frac{n}{2} \left(1 - \frac{\ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)} = \frac{2}{n} \left(1 + \frac{\ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

et en développant, on obtient le résultat voulu.

Exemple 2.41

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

On considère $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. Tout d'abord, comme $u_1 = \sin u_0 \in [-1, 1]$, quitte à remplacer u_n par $v_n = u_{n+1}$, on peut supposer $u_0 \in]-1, 1]$. Ensuite, comme $v_n = -u_n$ vérifie la même relation de récurrence, on peut supposer que $u_0 \geq 0$.

On suppose donc $u_0 \in [0, 1]$. Comme $x \rightarrow \sin x$ est croissante sur $[0, 1]$ et $u_1 = \sin u_0 \leq u_0$, u_n est décroissante. Elle est minorée par 0 donc converge vers un point fixe de sin et le seul point fixe de sin est 0 donc $u_n \rightarrow 0$.

Comme $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ en 0, on peut appliquer le théorème avec $r = 3$ et $\lambda = \frac{1}{6}$ ce qui donne directement $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. Pour avoir le terme suivant, il faut à nouveau revenir à la démonstration et se rappeler qu'on regarde maintenant

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{\sin^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{u_n^2}{\sin^2 u_n} - 1 \right).$$

Introduisons alors g défini par

$$g(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x} - 1 = \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4)$$

en 0. En utilisant le développement limité à l'ordre 2, on obtient l'équivalent du théorème, comme $u_n^{-2} \rightarrow +\infty$, $u_n^{-2} \sim u_n^{-2} - u_0^{-2} = \sum_{k=1}^n (u_k^{-2} - u_{k-1}^{-2})$. Mais $u_k^{-2} -$

$u_{k-1}^{-2} \sim \frac{1}{3}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3}$ diverge donc $\sum_{k=1}^n (u_k^{-2} - u_{k-1}^{-2}) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \sim \frac{n}{3}$ et finalement $u_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$.

Pour obtenir le terme suivant dans le développement, on considère $v_n = u_n^{-2} - \frac{n}{3}$ et alors

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} - \frac{1}{3} = \frac{g(u_n)}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}.$$

Comme $\sum \frac{1}{5n}$ diverge, les sommes partielles de cette série et les somme partielles de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ (donc v_n) sont équivalentes, ce qui donne $v_n \sim \frac{\ln n}{5}$.

On en déduit que $u_n^{-2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n)$. Par suite

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\left(\frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n)\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{3 \ln n}{5n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{3 \ln n}{10n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3} \ln n}{10n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

comme annoncé.

Le lecteur pourra s'entraîner en montrant le résultat suivant par la même méthode :

Exemple 2.42

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$. alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}} - \frac{3\sqrt{6} \ln n}{80 n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Exercice 2.43

Faire une étude complète de la suite homographique $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2u_n + 4}$ en fonction de u_0 : il y a 4 cas à distinguer.

Exercice 2.44

Soit $0 < \lambda \leq 1$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Étudier cette suite.

SOLUTION. Tout d'abord f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - \lambda > 0$ donc $[0, 1]$ est stable et (u_n) est bien définie.

Les seules limites possibles de (u_n) sont les points fixes de f . Ceux-ci sont les racines de $1 - \lambda x^2 = x$ et sont donc $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ et $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} < 0$. Une étude rapide de la fonction $\lambda \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ montre que $0 < x_0 \leq 1$. Comme

$$f'(x_0) = -2\lambda x_0 = 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1$$

on distingue 3 cas

– soit $1 - \sqrt{1+4\lambda} > -1$ i.e. $0 < \lambda < \frac{3}{4}$ et le point fixe est attractif. Donc si u_0 est suffisamment proche de x_0 , alors $u_n \rightarrow x_0$. Nous verrons plus loin que c'est le cas pour tout $u_0 \in [0, 1]$.

– soit $1 - \sqrt{1+4\lambda} < -1$ i.e. $\frac{3}{4} < \lambda \leq 1$ et le point fixe x_0 est répulsif. La suite (u_n) ne convergera vers x_0 que si elle est stationnaire. Remarquons que $f'(x) = -2\lambda x < 0$ sur $]0, 1]$ donc f est strictement décroissante, donc injective. Ainsi si $u_n = x_0$ alors $f(u_{n-1}) = f(x_0)$ donc $u_{n-1} = x_0$ et, par une récurrence immédiate, $u_0 = x_0$. Donc $u_n \rightarrow x_0$ si et seulement si $u_0 = x_0$.

– soit $1 - \sqrt{1 + 4\lambda} = -1$ i.e. $\lambda = \frac{3}{4}$ donc $x_0 = \frac{2}{3}$. On regarde ensuite

$$\tilde{f}(x) = f(x + x_0) - x_0 = 1 - \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} = x - \frac{3}{4}x^2$$

et le théorème 2.39 et à nouveau $u_n \rightarrow x_0$ quand u_0 est assez proche de x_0 et on a même le développement asymptotique $u_n - x_0 \sim \frac{4}{3\sqrt{n}}$.

On peut ici compléter l'étude en utilisant le fait que f est décroissante. On sait alors avec le lemme 2.36 que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (l'une est croissante et l'autre décroissante). Comme elles sont bornées (minorée par 0 et majorée par 1), elles convergent toutes les deux. Comme elles vérifient la relation de récurrence $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ leur limite est un point fixe de $f \circ f$.

Déterminons donc ces points fixes. Pour cela, on calcule d'abord

$$f(f(x)) = 1 - \lambda(1 - \lambda x^2)^2 = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4.$$

On veut résoudre $f(f(x)) = x$ soit

$$(2.2) \quad 1 - \lambda - x + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4 = 0$$

Comme tout point fixe de f est aussi point fixe de $f \circ f$, les racines du polynôme $f(x) - x$ sont aussi racine de (2.2). On peut donc factoriser $f(x) - x$. Ainsi, on veut donc résoudre

$$0 = 1 - \lambda - x + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4 = (1 - x - \lambda x^2)(1 - \lambda - \lambda x + \lambda^2 x^2).$$

Il nous faut donc déterminer les racines de $1 - \lambda - \lambda x + \lambda^2 x^2$ dont le discriminant est

$$\Delta := \lambda^2 - 4\lambda^2(1 - \lambda) = \lambda^2(4\lambda - 3).$$

On distingue donc 3 cas

– Si $0 < \lambda < \frac{3}{4}$, $\Delta < 0$ et la seule racine de (2.2) dans $[0, 1]$ est x_0 . Ainsi $f \circ f$ a un unique point fixe dans $[0, 1]$ donc u_{2n} et u_{2n+1} convergent toutes les deux vers x_0 donc u_n aussi. Ainsi, quel que soit $u_0 \in [0, 1]$, $u_n \rightarrow x_0$ dans ce cas, et pas seulement quand u_0 est assez proche de x_0 .

– Si $\lambda = \frac{3}{4}$, alors (2.2) a trois racines, $x_0 = \frac{2}{3}$, $x_1 < 0$ et la nouvelle racine $x_2 = \frac{\lambda}{2\lambda^2} = x_0$ le point fixe de f ! Comme u_{2n} et u_{2n+1} convergent, et que x_0 est la seule limite possible, u_{2n} et u_{2n+1} convergent toutes les deux vers x_0 donc u_n aussi. Là encore, cela se produit en fait quel que soit u_0 dans $[0, 1]$, alors que nous ne connaissions ce résultat que lorsque u_0 était assez proche de x_0 .

– Si $\frac{3}{4} < \lambda \leq 1$. On a donc deux nouveaux points fixes de $f \circ f$ qui sont

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

On vérifie sans peine que $x_2 < x_0 < x_3$.

Cette fois-ci x_0 est un point fixe répulsif de f , et on a déjà vu que (u_n) ne convergera, nécessairement vers x_0 , que si l'un de ses termes vaut x_0 et que cela ne se produit que si $u_0 = x_0$. On suppose donc que $u_0 \neq x_0$. Par ailleurs, on peut remarquer que si $g = f \circ f$ alors $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ donc $g'(x_0) = f'(x_0)^2 > 1$ donc x_0 est aussi un point fixe répulsif de g . Ainsi u_{2n} , u_{2n+1} ne peuvent tendre vers x_0 que si elles prennent la valeur x_0 à partir d'un certain rang et on a vu que cela ne se produisait que quand $u_0 = x_0$ ce qu'on a exclu.

Cela implique que les suites u_{2n} et u_{2n+1} , qui convergent, donc nécessairement vers un point fixe de $f \circ f$, ne peuvent converger que vers x_2 et x_3 . Si elles convergeaient vers la

même valeur, (u_n) serait convergente, ce qui est exclus. Ainsi, l'une converge vers x_2 et l'autre vers x_3 .

Notons que si $u_0 < x_0$ alors $u_1 > x_0$ et $u_2 < x_0$ et finalement $u_{2n} < x_0$ donc $\lim u_{2n} \leq x_0$ donc $\lim u_{2n} = x_2$ et par suite $\lim u_{2n+1} = x_3$. Quand $u_0 > x_0$, c'est l'inverse. ■

Théorème 2.45 (Convergence de la suite logistique)

Soit $0 < \mu < 4$, la *suite logistique* de paramètre μ est la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$. Alors, pour tout n , u_n est défini et $0 < u_n < 1$. De plus,

- (i) Si $0 < \mu \leq 1$ alors $u_n \rightarrow 0$.
- (ii) Si $1 < \mu \leq 3$ alors $u_n \rightarrow 1 - \frac{1}{\mu}$.
- (iii) Si $\mu > 3$, il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C} \subset]0, 1[$ tel que, si $u_0 \in \mathcal{C}$ alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = 1 - \frac{1}{\mu}$. Si $u_0 \notin \mathcal{C}$, u_n ne converge pas.

Notez que si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$, on élimine donc ce cas.

DÉMONSTRATION. On introduit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \mu x(1 - x)$. La première observation est que $0 \leq f(x) \leq \frac{\mu}{4} \leq 1$ pour $x \in [0, 1]$ donc $[0, 1]$ est stable par f et la suite (u_n) est donc bien définie avec $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .

Ensuite $f(x) = x$ i.e $x(\mu - 1 - \mu x) = 0$ a deux solutions, 0 et $\ell_\mu := \frac{\mu - 1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$.

Ce dernier point n'est dans $[0, 1]$ que si $\mu \geq 1$. Enfin $f'(x) = \mu(1 - 2x)$ donc $f'(0) = \mu$ et $f'(\ell_\mu) = 2 - \mu$. On en conclut que 0 est stable pour $0 < \mu < 1$, parabolique pour $\mu = 1$ et répulsif pour $\mu > 1$ alors que ℓ_μ est stable pour $1 < \mu < 3$, parabolique pour $\mu = 3$ et répulsif pour $\mu > 3$. Notez que $\ell_1 = 0$, et que $\ell_\mu \notin [0, 1]$, il est donc inutile de considérer ce point fixe pour $\mu < 1$. Nous allons donc distinguer tous ces cas.

Cas 1. Si $0 < \mu < 1$.

Alors f a 0 pour unique point fixe dans $[0, 1]$ et ce point fixe est attractif. De plus, on a alors $f(x) \leq \mu x < x$ pour $x \in]0, 1]$ donc u_n est strictement décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge. Comme la limite est un point fixe, $u_n \rightarrow 0$. En fait on peut voir directement que $u_n \leq \mu^n u_0$ puisque $u_{n+1} \leq \mu u_n$.

Cas 2. $\mu = 1$.

Alors f a 0 pour unique point fixe dans $[0, 1]$ et ce point fixe est parabolique. On a toujours que $f(x) < x$ pour $x \in]0, 1[$ donc u_n est toujours strictement décroissante et minorée par 0 donc, comme dans le cas précédent, $u_n \rightarrow 0$. Notez qu'on est dans les conditions d'application du théorème 2.39 avec $r = 2$ et $\lambda = 1$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Nous allons maintenant traiter le cas $1 < \mu < 3$ lorsque 0 est un point fixe répulsif et ℓ_μ un point fixe attractif. En regardant le graphe de f , on voit que ce cas se divise lui-même en trois cas.

Cas 3. $1 < \mu < 2$.

Dans ce cas, commençons par remarquer que si $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $u_1 = f(u_0) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} < 1/2$. Ainsi, quitte à remplacer (u_n) par (u_{n+1}) , on peut supposer que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. On distingue alors deux cas,

– soit $0 < u_0 \leq \ell_\mu$. Mais, pour $0 < x \leq \ell_\mu$, $x \leq f(x) \leq \ell_\mu$. Une récurrence immédiate montre alors que, pour tout n , $u_n \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq \ell_\mu$. Ainsi (u_n) est croissante et majorée. Elle converge donc, nécessairement vers un point fixe de f , qui ne peut être 0 puisque $u_n \geq u_0 > 0$, et qui est donc ℓ_μ .

– soit $\ell_\mu < u_0 < 1$. Mais, pour $\ell_\mu < x < 1$, $x \geq f(x) \geq \ell_\mu$. Une récurrence immédiate montre alors que, pour tout n , $u_n \geq f(u_n) = u_{n+1} \geq \ell_\mu$. Ainsi (u_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc, nécessairement vers un point fixe de f , qui ne peut être 0 puisque $u_n \geq \ell_\mu > 0$, et qui est donc ℓ_μ .

Dans les deux cas $u_n \rightarrow \ell_\mu$.

Cas 4. $\mu = 2$ de sorte que $\ell_\mu = \frac{1}{2}$.

Comme dans le cas précédent, si $u_0 \geq \frac{1}{2}$, $u_1 \leq \frac{1}{2}$ et on suppose que $0 < u_0 \leq \frac{1}{2}$. Mais, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et une récurrence immédiate montre que, pour tout n , $u_n \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq \ell_\mu$. Ainsi (u_n) est croissante et majorée. Elle converge donc, nécessairement vers un point fixe de f , qui ne peut être 0 puisque $u_n \geq u_0 > 0$, et qui est donc $\ell_\mu = \frac{1}{2}$.

Cas 5. $2 < \mu < 3$ de sorte que $\ell_\mu > \frac{1}{2}$.

Le comportement de la suite est maintenant plus compliqué. Tout d'abord, f est strictement croissante sur $[0, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, 1]$. En particulier, si $\ell_\mu < x < 1$ alors $f(x) < f(\ell_\mu) = \ell_\mu$. Donc, si $\ell_\mu < u_0 < 1$ alors $0 < u_1 = f(u_0) < \ell_\mu$. Quitte à décaler (u_n) d'un indice, on va donc supposer que $0 < u_0 < \ell_\mu$.

Ensuite posons $f_2 = f \circ f$ et $\tau_0 = \frac{1}{\mu} < \frac{1}{2}$ le deuxième antécédent du point fixe par f i.e $f(\tau_0) = 1 - \frac{1}{\mu} = \ell_\mu$. On définit alors par récurrence la suite (τ_n) par $f(\tau_{n+1}) = \tau_n$ et $\tau_{n+1} < \tau_0$. Concrètement

$$\tau_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{\tau_n}{\mu}}}{2}.$$

Comme f est strictement croissante sur $[0, \tau_0]$ et $f(0) = 0$, si $0 < \alpha < \tau_0$ alors le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence de $0 < \beta < \tau_0$ tel que $f(\beta) = \alpha$ et ce β est unique car f est strictement croissante. De plus comme $f(x) > x$ sur $[0, \tau_0]$, $\alpha > \beta$. Ainsi la suite (τ_n) est bien définie pour tout n , compris entre 0 et τ_0 et (τ_n) est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle a une limite. Comme $\tau_n = f(\tau_{n+1})$, celle-ci vérifie donc $\ell = f(\ell)$ et $\ell \leq \tau_0 < \ell_\mu$ donc $\ell = 0$. Ainsi $\tau_n \rightarrow 0$. Enfin, la dernière propriété est que, si $x \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$ alors

$$f(x) \in [f(\tau_{n+1}), f(\tau_n)] = \begin{cases} [\tau_n, \tau_{n-1}] & \text{si } n \geq 1 \\ [\tau_0, \ell_\mu] & \text{pour } n = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si $0 < u_0 \leq \tau_0$, il existe m tel que $u_0 \in [\tau_{m+1}, \tau_m]$ donc $u_1 = f(u_0) \in [\tau_m, \tau_{m-1}], \dots, u_m \in [\tau_1, \tau_0]$ et donc $u_{m+1} \in [\tau_0, \ell_\mu]$.

Ainsi, après un nombre fini de pas (qui dépend de u_0), on arrive toujours dans $[\tau_0, \ell_\mu]$ et, quitte à décaler la suite, on peut supposer que $u_0 \in [\tau_0, \ell_\mu]$. Remarquons alors que $f([\tau_0, \ell_\mu]) = [\ell_\mu, \mu/4]$ puisque f est croissante sur $[\tau_0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, \ell_\mu]$ et que $f(\ell_\mu) = \ell_\mu$, $f(1/2) = \mu/4$. Ensuite, comme $\frac{\mu}{4} > \frac{1}{2}$, f est décroissante sur $[\ell_\mu, \mu/4]$ donc $f_2([\tau_0, \ell_\mu]) = f([\ell_\mu, \mu/4]) = [f(\mu/4), \ell_\mu]$. Enfin

$$f\left(\frac{\mu}{4}\right) = \frac{\mu^2(4-\mu)}{16} \geq \frac{1}{2}$$

quand $2 < \mu < 3$ ce qui équivaut à l'inégalité facile à établir : $-\mu^3 + 4\mu^2 - 8 \geq 0$ quand $2 \leq \mu \leq 3$ (faire une étude rapide si besoin). Il en résulte que $f_2([\tau_0, \ell_\mu]) \subset [1/2, \ell_\mu]$. Ainsi, si $u_0 \in [\tau_0, \ell_\mu]$, alors $u_2 \in [1/2, \ell_\mu]$ et quitte à décaler une dernière fois la suite, on va supposer que $u_0 \in [1/2, \ell_\mu]$.

On considère alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$ donc $v_0 = u_0$ et $v_{n+1} = f_2(v_n)$. On vient de voir que $[1/2, \ell_\mu]$ est stable par f_2 donc $v_n \in [1/2, \ell_\mu]$ pour tout n . De plus, comme $f'_2(x) = f'(f(x))f'(x)$, que pour $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$, et que, pour $x \in [1/2, \ell_\mu]$, $f(x) > \ell_\mu$, $f'(f(x)) < 0$ donc $f'_2(x) > 0$ i.e. f_2 est strictement croissante sur $[1/2, \ell_\mu]$. Ainsi, (v_n) est monotone et bornée, elle converge donc vers un point fixe de f_2 dans $[1/2, \ell_\mu]$. Il nous reste donc à déterminer ces points fixes.

Ce sont des solutions de $f_2(x) = x$. Comme f est un polynôme de degré 2, f_2 est un polynôme de degré 4. De plus, toutes les racines du polynôme, de degré 2, $f(x) - x$ (i.e. les points fixes de f) sont aussi racines de $f_2(x) - x = 0$, on en déduit qu'il existe un polynôme g , de degré 2, tel que $f_2(x) - x = (f(x) - x)g(x)$. Concrètement, $f(x) - x = x(\mu - 1 - \mu x)$ et

$$f_2(x) - x = x(\mu^2 - 1 - \mu^2(\mu + 1)x + 2\mu^3x^2 - \mu^3x^3) = x(\mu - 1 - \mu x)(\mu + 1 - \mu(\mu + 1)x + \mu^2x^2).$$

Les autres points fixes de f_2 sont donc les racines de $\mu + 1 - \mu(\mu + 1)x + \mu^2x^2$. Mais le discriminant de ce polynôme est

$$\mu^2(\mu + 1)^2 - 4\mu^2(\mu + 1) = \mu^2(\mu + 1)(\mu - 3) < 0.$$

Ainsi f_2 a un seul point fixe dans $[1/2, \ell_\mu]$ qui est ℓ_μ . Par suite $v_n \rightarrow \ell_\mu$ i.e. $u_{2n} \rightarrow \ell_\mu$. Mais alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \rightarrow f(\ell_\mu) = \ell_\mu$ donc au final $u_n \rightarrow \ell_\mu$.

Quand $\mu = 3$, le discriminant est nul et f_2 a un point fixe en $\frac{\ell_\mu}{2} = \frac{1}{3}$ qui est également en-dehors de l'intervalle $[1/2, \ell_\mu]$, le raisonnement s'applique donc encore.

Cas 6. $\mu > 3$.

Les deux points fixes sont répulsifs donc pour que u_n converge, il faut que u_n prenne une de ces deux valeurs. Comme $f(x) = 0$ que pour $x = 0$ et $x = 1$ et que $f(x) = 1$ n'a de solution que quand $\mu = 4$, ceci ne se produit jamais puisqu'on a supposé $0 < u_0 < 1$. Par contre, ℓ_μ a deux antécédents par f , ℓ_μ et $1/\mu$. Ils ont eux-même 2 antécédents... Au final, il existe un ensemble dénombrable de u_0 pour lesquels il existe n_0 tel que $u_{n_0} = \ell_\mu$ et alors $u_n = \ell_\mu$ pour $n \geq n_0$. Dans tous les autres cas, (u_n) ne converge pas. ■

2.3.2. *Le cas périodique.*

Nous allons utiliser la notation suivante $f^{\circ 1} = f$, $f^{\circ 2} = f \circ f$, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$ et $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ n-1}$.

Definition 2.46 cycle attractif

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I stable par f . On définit qu'un point $x \in I$ est p -périodique pour f si $f^{\circ p}(x) = x$ mais $f^{\circ k}(x) \neq x$ pour $1 \leq k \leq p-1$. Dans ce cas, on dit encore que l'ensemble $\{x_0 = x, x_1 = f(x), \dots, x_{p-1} = f^{\circ p-1}(x)\}$ est un p -cycle de f .

Notons qu'alors $x_1, \dots, x_{p-1}$ sont également p -périodiques pour f . De plus, définissons une suite récurrente par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que x soit p -périodique pour f et qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = x$ alors $u_{n_0+p} = f^{\circ p}(u_{n_0}) = f^{\circ p}(x) = x = u_{n_0}$ puis, par récurrence $u_{n_0+kp} = u_{n_0}$ pour tout entier $k \geq 0$. Plus généralement si $n \geq n_0$, alors $u_{n+kp} = u_n$ i.e. (u_n) est p -périodique à partir du rang n .

Considérons maintenant la dérivée de $f^{\circ p}$. On a la formule bien connue $(f^{\circ 2})'(x) = f'(f(x))f'(x)$ puis

$$\begin{aligned}(f^{\circ 3})'(x) &= (f \circ f^{\circ 2})'(x) = f'(f^{\circ 2}(x))(f^{\circ 2})'(x) \\ &= f'(f^{\circ 2}(x))f'(f(x))f'(x).\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate nous donne

$$(f^{\circ p})'(x) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{\circ j}(x)).$$

Il est plus commode d'introduire la suite (x_j) donnée par $x_0 = x$ et $x_{j+1} = f(x_j) = f^{\circ j+1}(x_0)$ de sorte que

$$(2.3) \quad (f^{\circ p})'(x) = f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1}).$$

Definition 2.47 p -cycles attractifs et super-attractifs

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I stable par f . On définit qu'un point $x \in I$ est p -périodique pour f . On dit que $\{x_0 = x, x_1 = f(x), \dots, x_{p-1} = f^{\circ p-1}(x)\}$ est un p -cycle *stable* ou *attractif* de f si $|(f^{\circ p})'(x)| < 1$.

Le cycle sera dit *super-attractif* si $|(f^{\circ p})'(x)| = 0$.

Example 2.48 Suite logistique

Si on considère $f(x) = \mu x(1 - x)$ avec $0 < \mu < 4$ et la suite associée $u_0 \in]0, 1[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (la suite logistique déjà étudiée dans le théorème 2.45) alors cette suite ne contient de p -cycle super-attractif que si un des points du cycle est $\frac{1}{2}$.

En effet, f' ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$ donc $f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1}) = 0$ si et seulement si l'un des x_j est $\frac{1}{2}$.

Notez qu'avec (2.3), si le cycle est stable, alors $|(f^{\circ p})'(x_j)| = |(f^{\circ p})'(x_0)| < 1$ pour $j = 0, \dots, p-1$ i.e. pour chaque point du cycle.

Proposition 2.49

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ avec I stable par f . On définit qu'un point $x \in I$ est p -périodique pour f . On suppose que le p -cycle associé $(x_0, \dots, x_{p-1})$ est stable. Alors il existe $\eta > 0$ tel que,

- si (u_n) est défini par récurrence par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 - s'il existe k et n_0 tel que $|u_{n_0} - x_k| < \eta$
- alors, pour $j = 0, \dots, p-1$, $u_{n_0+j+mp} \rightarrow x_{k+j}$ quand $m \rightarrow +\infty$.

En d'autres termes, les termes de la suite vont tendre successivement vers le cycle.

DÉMONSTRATION. Notons $\rho = |(f^{\circ p})'(x_j)|$ et soit r avec $\rho < r < 1$. Tout d'abord, comme $f^{\circ p}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour chaque $j = 0, \dots, p-1$, il existe $\eta_j > 0$ tel que, si $|x - x_j| \leq \eta_j$, alors $|(f^{\circ p})'(x)| \leq r$. On pose alors $\eta_0 = \min \eta_j$.

Ensuite, on remarque que chaque x_j est un point fixe de $f^{\circ p}$ donc, si $|x - x_j| \leq \eta$ alors

$$|f^{\circ p}(x) - x_j| = |f^{\circ p}(x) - f^{\circ p}(x_j)| \leq r|x - x_j|.$$

En particulier, si (u_n) est la suite de l'énoncé et k, n_0 sont tels que $|u_{n_0} - x_k| < \eta_0$, alors, par une récurrence immédiate, pour tout $m \geq 0$ $|u_{n_0+mp} - x_k| \leq r^m|u_{n_0} - x_k|$.

Quitte à renuméroter le cycle, on va supposer que $k = 0$ et poser $m_0 = 0$. Ainsi, pour tout $m \geq m_0$, $|u_{n_0+mp} - x_0| \leq r^m |u_{n_0} - x_0| \rightarrow 0$.

Il faut maintenant s'occuper des autres points. Pour cela, on utilise la continuité de f en x_0 . Il existe $\eta_1 > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - x_1| = |f(x) - f(x_0)| < \eta_0$. En particulier, s'il existe n_1 tel que $|u_{n_1} - x_0| < \eta_1$, alors $|u_{n_1+1} - x_0| < \eta_0$ et donc, pour tout $m \geq 0$, $|u_{n_1+1+mp} - x_1| \leq r^m |u_{n_1+1} - x_1| \rightarrow 0$. Mais, $|u_{n_0+mp} - x_0| \rightarrow 0$, il existe donc m_1 tel que $|u_{n_0+m_1p} - x_0| \leq \eta_1$ et on peut choisir $n_1 = n_0 + m_1p$ pour avoir, pour tout $m \geq m_1$, $|u_{n_0+1+mp} - x_1| \leq r^{m-m_1} |u_{n_0+m_1p+1} - x_1| \rightarrow 0$.

Soit alors $k \leq p-2$ et supposons qu'on ait montré qu'il existe des entiers $m_0, \dots, m_k$ tel que, si $|u_{n_0} - x_0| < \eta_0$ alors, pour $j = 0, 1, \dots, k$, et $m \geq m_j$, $|u_{n_0+j+mp} - x_j| \leq r^{m-m_j} |u_{n_0+j} - x_j|$. Par continuité de f en x_k , il existe $\eta_k > 0$ tel que, si $|x - x_k| < \eta_k$ alors $|f(x) - x_{k+1}| = |f(x) - f(x_k)| < \eta_0$. Comme $|u_{n_0+j+mp} - x_j| \rightarrow 0$, il existe $m_{k+1} \geq m_k$ tel que $|u_{n_0+k+m_{k+1}p} - x_k| < \eta_k$ donc, $|u_{n_0+k+1+m_{k+1}p} - x_{k+1}| < \eta_0$ et alors, pour tout $m \geq m_{k+1}$, $|u_{n_0+k+1+mp} - x_{k+1}| \leq r^{m-m_{k+1}} |u_{n_0+k+1+m_{k+1}p} - x_{k+1}| \rightarrow 0$.

On fait ce processus p fois et on obtient des entiers $m_0, \dots, m_{p-1}$ tels que, pour $j = 0, \dots, p-1$ et $m \geq m_j$, $|u_{n_0+j+mp} - x_j| \rightarrow 0$ (à la vitesse d'une suite géométrique). ■

L'idée de la démonstration est simple : les points du cycle sont des points fixes attractifs pour $f^{\circ p}$. On commence par le premier point du cycle : si un terme de la suite u_n est suffisamment proche de ce point x_0 , ses itérés par $f^{\circ p}$ vont s'approcher de x_0 , i.e. $u_{n+kp} \rightarrow x_0$. Par continuité de f en x_0 , les images de u_{n+kp} par f i.e. u_{n+1+kp} vont s'approcher de x_1 . Comme ce point est lui aussi attractif pour $f^{\circ p}$, dès qu'on s'en est suffisamment approché, on a la garantie de converger vers x_1 . On peut donc recommencer avec x_1 . Une alternative aurait été de restreindre suffisamment le voisinage de x_0 dans lequel on veut trouver un terme de la suite pour que les $p-1$ termes suivants soient attirés par les points fixes correspondants. Pour cela, on utilise la continuité de $f, f^{\circ 2}, \dots, f^{\circ p-1}$ pour choisir $\eta_1 \leq \eta_0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$, $|f(x) - x_1| = |f(x) - f(x_0)| < \eta_0$, $|f^{\circ 2}(x) - x_2| = |f^{\circ 2}(x) - f^{\circ 2}(x_0)| < \eta_0, \dots, |f^{\circ p-1}(x) - x_{p-1}| = |f^{\circ p-1}(x) - f^{\circ p-1}(x_0)| < \eta_0$.

Le théorème suivant permet de montrer facilement que certaines suites récurrentes convergent :

Théorème 2.50 (Coppel)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que I soit stable par f et que f n'admette pas de 2-cycle. Alors, pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

Dire que f n'admette pas de 2-cycle signifie que s'il existe x tel que $f \circ f(x) = x$ alors $f(x) = x$. Notez aussi que si $\{x, y\}$ est un 2-cycle, $x \neq y$ avec $y = f(x)$ et $f(y) = x$, alors en prenant $u_0 = x$, $u_{2n} = x$ et $u_{2n+1} = y$ et n'a donc pas de limite.

Exemple 2.51 Suite logistique

Si on considère $f(x) = \mu x(1-x)$ avec $0 < \mu < 4$ et la suite associée $u_0 \in]0, 1[$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors nous avons vu dans la démonstration du théorème 2.45 que, lorsque $2 < \mu \leq 3$, f n'a pas de 2-cycle. La suite (u_n) converge donc dans ce cas. Si on poursuit un peu le calcul, on peut voir que des 2-cycles existent dès que $\mu > 3$ ce qui montre l'existence de u_0 tel que (u_n) ne converge pas. Nous avons toutefois vu que (u_n) ne convergeait jamais, quel que soit u_0 .

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.52

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que I soit stable par f et que f n'admette pas de 2-cycle. Pour $c \in I$, Si $f(c) > c$ (resp $f(c) < c$), alors, pour tout entier n , $f^{\circ n}(c) > c$ (resp. $f^{\circ n}(c) < c$).

Évidemment si $f(c) = c$ on a toujours $f^{\circ n}(c) = c$ sans que cela ne nécessite d'hypothèse sur f .

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.52. Cela se fait par l'absurde. Commençons par le cas $n = 2$. Comme $f^{\circ 2}(a) \geq a$, si $f^{\circ 2}(c) < c$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x < c$ tel que $f^{\circ 2}(x) = x$ i.e. un point fixe de $f^{\circ 2}$. Comme f n'a pas de cycle de longueur 2, c'est donc aussi un point fixe de f . Prenons $d = \sup\{x < c : f(x) = x\}$. Par continuité de f , $f(d) = d$ et, comme de plus $f(c) < c$, on a $d < c$. Enfin, sur $]d, c]$, $f(x) > x$ sinon le théorème des valeurs intermédiaires nous fournirait un point fixe dans $]d, c[$ contredisant la définition de d . Enfin, $f^{\circ 2}$ n'a pas de point fixe dans $]d, c[$ puisque ce serait un point fixe de f .

Ensuite, comme $f(d) = d < c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $d < e < d + \varepsilon$, alors $d < e < f(e) < c$. On a donc $f^{\circ 2}(e) = f(f(e)) > f(e) > e$. Comme $f^{\circ 2}(c) < c$, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit alors un point fixe de $f^{\circ 2}$ dans $]d, c[$, une contradiction.

La démonstration est identique dans le deuxième cas en renversant toutes les inégalités.

Le cas général s'obtient par une récurrence sur n . L'hypothèse de récurrence au rang n est :

pour tout $c \in I$, si $f(c) < c$ alors $f^{\circ j}(c) < c$ pour $j = 1, \dots, n$ et si $f(c) > c$ alors $f^{\circ j}(c) > c$ pour $j = 1, \dots, n$.

Étape 1. Si $f^{\circ n+1}$ a un point fixe, $f^{\circ n+1}(c) = c$, alors c'est un point fixe de f , $f(c) = c$.

Nous allons à nouveau raisonner par l'absurde. Soit donc $c \in I$ tel que $f^{\circ n+1}(c) = c$ mais $f(c) > c$ (le cas $f(c) < c$ est similaire). Posons $d := f^{\circ n}(c)$. Comme $f(c) > c$, l'hypothèse de récurrence nous donne alors que $d > c$.

Supposons que

$$(2.4) \quad d = f^{\circ n-1}(f(c)) \geq f(c).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, si $f(f(c)) < f(c)$ alors $f^{\circ n-1}(f(c)) < f(c)$ qui contredirait (2.4). Cette dernière inégalité implique donc que $f(f(c)) \geq f(c)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence avec $x = f(c)$ on aurait alors $c = f^{\circ n+1}(c) = f^{\circ n}(f(c)) \geq f(c)$, soit $c \geq f(c)$ ce qui contredit $f(c) > c$.

Ainsi (2.4) ne peut avoir lieu, c'est-à-dire que

$$(2.5) \quad d = f^{\circ n-1}(f(c)) < f(c).$$

Mais maintenant $d < c$, $f(d) = f^{\circ n+1}(c) = c > d > f(c)$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe $x \in]c, d[$ tel que $f(x) = d$. On pose $q = \inf\{x : f(x) = d\}$ de sorte que, par continuité de f , $f(q) = d$ et, comme $f(c) < d$, $q > c$. De plus, pour $c < x < q$, $f(x) > d$ sans quoi le théorème des valeurs intermédiaires nous fournirait un $q' < q$ tel que $f(q') = d$, contredisant ainsi la définition de q .

Mais alors $f^{\circ 2}(q) = f(d) = c < q$. Comme par ailleurs $f(c) > c$ et que f n'a pas de 2-cycle, on sait depuis la première partie de la démonstration que $f^{\circ 2}(c) > c$. Mais alors, avec le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à $f^{\circ 2}(x) - x$) il existe $x \in]c, q[$ tel que $f^{\circ 2}(x) = x$. Comme f n'a pas de 2-cycle, cela implique que $f(x) = x$. C'est la contradiction voulue puisque $c < x < q$ donc $f(x) > d > x$.

Étape 2. *Conclusion.*

L'hypothèse de récurrence est vraie pour $n = 1$ et 2 . On la suppose vraie jusqu'au rang n . Nous raisonnons encore par contradiction en supposant qu'il existe c tel que $f(c) > c$ donc $f^{\circ 2}(c) > c, \dots, f^{\circ n}(c) > c$ mais $f^{\circ n+1}(c) \leq c$.

Dans la précédente étape, nous avons vu que si $f^{\circ n+1}(c) = c$ alors $f(c) = c$ et non $f(c) > c$. On suppose donc que $f^{\circ n+1}(c) < c$.

Mais $f^{\circ n+1}(a) \geq a$ donc, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $f^{\circ n+1}(x) - x$, $f^{\circ n+1}$ a au moins un point fixe dans $[a, c]$. Comme précédemment, il existe un plus grand point fixe $p < c$, $f^{\circ n+1}(p) = p$ et donc, avec l'étape précédente, $f(p) = p$. Notez que f n'a pas d'autre point fixe dans $]p, c]$ donc $f(x) > x$ dans cet intervalle.

L'hypothèse de récurrence nous dit alors que $f^{\circ n}(x) > x > p$ pour $p < x \leq c$. Par ailleurs, comme p est le plus grand point fixe de $f < c$, $f^{\circ n}(p) = p < c$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour $p < x < p + \varepsilon$, $f^{\circ n}(x) < c$ et donc $p < x < f^{\circ n}(x) < c$. Mais alors

$$f^{\circ n+1}(x) = f(f^{\circ n}(x)) > f^{\circ n}(x) > x.$$

Comme $f^{\circ n+1}(c) < c$, cela montre que $f^{\circ n+1}$ a un autre point fixe entre x et c , donc entre p et c , contredisant la définition de p .

Le cas où $f^{\circ n+1}(c) > c$ est identique. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE COPPEL. On suppose que f n'a pas de 2-cycle et on fixe $u_0 \in I$. On veut montrer que si $un + 1 = f(u_n)$ alors (u_n) converge.

La première observation est que, s'il existe n_0 tel que $u_{n_0+1} = f(u_{n_0})$ i.e. si u_{n_0} est un point fixe de f , alors (u_n) est stationnaire à partir du rang n_0 donc converge. On peut donc supposer que $u_{n+1} \neq u_n$ pour tout n .

La seconde observation est que, s'il existe n_0 tel que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 . Comme elle est majorée (par b), elle converge et le résultat est démontré. Il en va de même si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

On suppose donc maintenant que $u_{n+1} - u_n$ change une infinité de fois de signe. On pose

$$\begin{aligned} U_+ &:= \{u_n : u_{n+1} - u_n > 0\} = \{u_n : u_n < f(u_n)\} \\ U_- &:= \{u_n : u_{n+1} - u_n < 0\} = \{u_n : u_n > f(u_n)\}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, comme $u_{n+1} - u_n \neq 0$, U_+, U_- est une partition de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en deux ensembles infinis (avec la seconde observation). On désigne alors par $n_1 < n_2 < \dots$ les indices correspondant à U_+ ,

$$U_+ = \{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots\} \quad , \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

en particulier $u_{n_k} = f^{\circ n_k}(u_0)$.

Par définition de U_+ , $f(u_{n_k}) > u_{n_k}$. Avec le lemme précédent, on en déduit que

$$u_{n_{k+1}} = f^{\circ n_{k+1}}(u_0) = f^{\circ n_{k+1} - n_k}(f^{\circ n_k}(u_0)) = f^{\circ n_{k+1} - n_k}(u_{n_k}) > u_{n_k}.$$

Ainsi $(u_{n_k})_k$ est une suite croissante. Elle est également majorée (par b), donc elle converge vers une limite $x \in [a, b]$.

De même, on peut numéroter $U_- = \{u_{m_1}, u_{m_2}, \dots, u_{m_k}, \dots\}$, voir que $(u_{m_k})_k$ est une suite décroissante et minorée et qu'elle converge donc vers une limite $y \in [a, b]$.

Maintenant, comme U_- et U_+ partitionnent $\{u_n\}$ en deux ensembles infinis, l'ensemble J des indices j tels que $u_{n_j} \in U_-$ mais $u_{n_j+1} = f(u_{n_j}) \in U_+$ est infini. En faisant tendre j vers l'infini selon cet ensemble, on obtient que $J - \lim u_{n_j} = \lim u_{n_k} = x$ alors que, par continuité de f ,

$$f(x) = f(J - \lim u_{n_j}) = J - \lim f(u_{n_j}) = J - \lim u_{n_j+1} = \lim u_{m_k} = y.$$

Le même raisonnement avec l'ensemble K des indices j tels que $u_{m_j} \in U_+$ mais $u_{m_j+1} = f(u_{m_j}) \in U_-$ montre que $f(y) = x$.

Ainsi $\{x, y\}$ est un cycle pour f . Comme f n'a pas de 2-cycle, cela signifie que $x = y$. Mais alors, comme U_- , U_+ partitionne $\{u_n\}$, on a $\lim u_n = x = y$. ■

Le résultat de Coppel date de 1955 et est un précurseur d'un théorème de Sharkovsky de 1960 qui, *a priori*, ignorait le théorème de Coppel (et en a d'ailleurs donné une démonstration). Nous allons maintenant donner une version partielle du résultat de Sharkovsky.

Théorème 2.53 (Sharkovsky)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que I est stable par f et que f a un 3-cycle. Alors pour tout $n \geq 1$, f a un n -cycle.

Ce résultat se résume en général par “3-cycle implique chaos”.

Remarque 2.54

Le résultat de Sharkovsky est plus général. Il fournit un ordre sur les entiers $m \triangle n$ tel que si f a un m -cycle alors il a un n -cycle pour tout n qui succède à m dans cet ordre. Le théorème dit donc que 3 est le plus grand élément pour cet ordre alors que le théorème de Coppel dit que 2 est le plus petit élément. Cet ordre est donné comme suit : on liste d'abord les entiers impairs ≥ 3 dans l'ordre croissant, puis les impairs fois 2 dans l'ordre croissant, les impairs fois $2^2, \dots$ et on finit par les puissances de 2 dans l'ordre décroissant. En clair

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \triangle & 5 & \triangle & 7 & \triangle & \dots \\ 3 \times 2 & \triangle & 5 & \times 2 \triangle & 7 \times 2 & \triangle & \dots \\ \vdots & & \vdots & \dots & & & \\ \dots & & 2^2 & \triangle & 2 & & \end{array}$$

En clair, si on écrit $n = 2^a(2p+1)$ et $m = 2^b(2q+1)$ alors $n \triangle m$ si $p \neq 0$ et $a < b$ ou si $p \neq 0$, $a = b$ et $2p+1 \geq 2q+1$ ou si $p = q = 0$ et $a \geq b$.

Exemple 2.55

Il est facile de construire des exemples. Il suffit pour cela de prendre une fonction f telle que $f(0) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(1) = 0$. donc $\{0, 1/2, 1\}$ est un 3-cycle. Pour obtenir une telle fonction, on peut prendre une fonction affine par morceaux ou le polynôme d'interpolation de Lagrange pour obtenir une fonction un peu plus lisse.

Remarque 2.56

La rotation d'angle $2\pi/3$ montre que ce théorème n'est pas vrai pour les applications du cercle dans le cercle. De même, la stabilité de I est indispensable. Si on prend $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < 1$) définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $f^{\circ 3}(x) = x$ donc il n'y a pas de n -cycle pour $n \geq 4$.

La démonstration se fait en plusieurs étapes. On commence par un premier lemme simple

Lemme 2.57

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que I est stable par f . Alors si $K \subset f(I)$ est un intervalle compact, il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que $K = f(J)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.57. On note $K = [\alpha, \beta]$ de sorte qu'il existe $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$ on peut prendre $J = \{a\}$. On suppose donc $\alpha \neq \beta$ de sorte que $a \neq b$ et, sans perte de généralité, que $a < b$ (sinon considérer $f(-x)$ sur $-I$).

On considère alors $c = \sup\{x, a \leq x \leq b, f(x) = \alpha\}$. Par continuité de f , si $c_n \geq c - n^{-1}$ est tel que $f(c_n) = \alpha$ alors $c_n \rightarrow c$ donc $f(c) = \alpha$. Ainsi ce sup est un max. De plus, si $x > c$ alors $f(x) > \alpha$ sinon le théorème des valeurs intermédiaires permettrait de contredire la définition de c puisque $f(b) = \beta > \alpha$.

On considère ensuite $d = \min\{x : c \leq x \leq b, f(x) = \beta\}$. L'inf est bien atteint, $f(d) = \beta$ et $f(x) < \beta$ si $c < x < d$.

Au final, $f(c) = \alpha$, $f(d) = \beta$ et pour tout $c < x < d$, $\alpha < f(x) < \beta$. Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires nous montre que si $y \in K = [\alpha, \beta]$, alors il existe x avec $c \leq x \leq d$ tel que $f(x) = y$ donc $J = [c, d]$ répond à la question. ■

Notez que J n'est pas unique et que celui que nous avons construit a la propriété que f est une bijection $J \rightarrow K$, donc qu'aucun sous-intervalle ne réponde plus à la question.

Le second lemme que nous allons utiliser est une généralisation du théorème du point fixe :

Lemme 2.58

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que I est stable par f .

On suppose ensuite qu'il existe des intervalles compact $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que $I_0 \subset f(I)$ et, pour $k = 0, \dots, n-2$, $I_{k+1} \subset f(I_k)$. Alors il existe $x_0 \in I_0$, point fixe de $f^{\circ n}$, $f^{\circ n}(x_0) = x_0$ et tel que, pour $k = 1, \dots, n-1$, $f^{\circ k}(x_0) \in I_k$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.58. Pour $n = 1$, c'est simplement le théorème du point fixe. On écrit $I_0 = [a, b]$ et $g(x) = f(x) - x$. On suppose donc que $f(I_0) \subset I_0$ donc $g(a) = f(a) - a \geq 0$ alors que $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous montre qu'il existe $x_0 \in I_0$ tel que $g(x_0) = 0$ soit $f(x_0) = x_0$.

Pour $n = 2$, on suppose que $I_1 \subset f(I_0)$. D'après le lemme 2.57, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais alors $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^{\circ 2}(J_1)$. Le théorème du point fixe montre qu'il existe $x_0 \in J_1 \subset I_0$ tel que $f^{\circ 2}(x_0) = x_0$ et de plus $f(x_0) \in f(J_1) = I_1$.

Avec le lemme 2.57, comme $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J_1)$. Puis, comme $I_2 \subset f(I_1) = f^{\circ 2}(J_1)$, il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $f^{\circ 2}(J_2) = I_2$. De proche en proche, on construit ainsi

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \dots \subset J_1 \subset I_0$$

tels que $f^{\circ k}(J_k) = I_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

Enfin, comme $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^{\circ n}(J_{n-1})$. Le lemme 2.57 nous donne alors un intervalle $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^{\circ n}(J_n) = I_0$. Mais alors $J_n \subset I_0 = f^{\circ n}(J_n)$. Ainsi, J_n contient un point fixe x_0 de $f^{\circ n}$. comme $x_0 \in J_n \subset J_k$, $f^{\circ k}(x_0) \in f^{\circ k}(J_k) = I_k$ qui est la propriété voulue. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SHARKOVSKY. Commençons par introduire une notation : pour deux intervalles J, K , on notera $K \rightsquigarrow J$ si $K \subset f(J)$. Dans le lemme 2.58, l'hypothèse de départ se note donc $I_0 \rightsquigarrow I_{n-1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$.

On suppose maintenant que f a un 3-cycle $\{a, b, c\}$ avec $a, b = f(a)$, $c = f(b) = f^{\circ 2}(a)$ et $a = f(c) = f^{\circ 3}(a)$ mais $b \neq a$ (a point fixe) et $c \neq b$ (2-cycle) et enfin $c \neq a$ (sinon a point fixe) i.e. les 3 points sont distincts. Comme $\{b, c, a\}$ et $\{c, a, b\}$ sont également des 3-cycles, on peut supposer que $a < b, c$.

On va distinguer deux cas :

Cas 1. On a $a < b < c$.

On pose alors $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$, le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit que $I_1 \subset f(I_0)$ i.e. $I_1 \rightsquigarrow I_0$. De même, $f(b) = c$ et $f(c) = a$ donc $[a, c] \subset f(I_1)$. Notre hypothèse sur a, b, c implique que $I_0, I_1 \subset [a, c] \subset f(I_1)$ c'est-à-dire $I_0 \rightsquigarrow I_1$ et $I_1 \rightsquigarrow I_1$. Notez que cette dernière relation s'itère : si $I_1 \subset f(I_1)$ alors $f(I_1) \subset f(f(I_1))$... On a donc une chaîne

$$I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$$

où on peut mettre autant de I_1 qu'on veut (au moins 1). Le lemme 2.58 nous dit alors que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $x_n \in I_0$ tel que $f^{\circ n}(x_n) = x_n$ et pour $1 \leq k \leq n-1$, $f^{\circ k}(x_n) \in I_1$. Il nous reste à voir que $f^{\circ k}(x_n) \neq f^{\circ k+1}(x_n)$ pour $k = 0, \dots, n-1$, mais pour cela il suffit de voir que $f^{\circ n-1}(x_n) \neq x_n$.

Supposons que ce ne soit pas le cas, alors $x_n = f^{\circ n-1}(x_n) \in I_0 \cap I_1 = \{b\}$. Mais si $n = 1$, b n'est pas un point fixe de f , si $n = 2$, b n'est pas un point fixe de $f^{\circ 2}$, si $n \geq 3$, on devrait avoir $a = f^{\circ 2}(b) = f^{\circ 2}(x_n) \in I_1$ ce qui est également une contradiction.

Cas 2. On a $a < c < b$.

Dans ce cas, on recommence le raisonnement avec $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$ et on montre que $I_1 \rightsquigarrow I_0$, $I_0 \rightsquigarrow I_0$, $I_0 \rightsquigarrow I_1$. La suite du raisonnement est identique en échangeant les rôles de I_0 et I_1 . ■

2.4. Application à la résolution d'équations.

Un exemple classique d'utilisation des suites récurrentes est la résolution d'équations de la forme $f(x) = 0$ avec f une fonction un peu régulière (au moins continue), pour peu qu'on ait déjà une idée d'une approximation de la solution.

Le premier algorithme est celui de la dichotomie (ou bisectrice) : on suppose qu'on connaisse $u_0 < v_0$ tels que $f(u_0)f(v_0) < 0$ (f est de signe opposé en u_0 et en v_0). Le but est de construire deux suites adjacentes u_n, v_n telles que, $f(u_n)f(v_n) < 0$, leur limite commune sera la solution. Une fois u_n, v_n construits (c'est le cas pour $n = 0$), on regarde le milieu $m = \frac{u_n + v_n}{2}$ de l'intervalle $[u_n, v_n]$. Soit $f(m) = 0$ et on s'arrête puisque le processus devient inutile, soit $f(u_n)f(m) < 0$ (et alors $f(m)f(v_n) > 0$) et on pose $u_{n+1} = u_n$, $v_{n+1} = m$ et on remarque que $f(u_{n+1})$ a même signe que $f(u_n)$ et que $f(v_{n+1})$ a même signe que $f(v_n)$. Sinon $f(m)f(v_n) < 0$ et on pose $u_{n+1} = m, v_{n+1} = v_n$. Il suffit de remarquer que u_n est croissante, v_n décroissante et $0 \leq v_n - u_n = \frac{v_0 - u_0}{2^n}$ pour voir que les deux suites construites sont adjacentes. Mais alors elles ont une limite commune. Comme $f(u_n)$ et $f(v_n)$ sont de signe constants mais opposés, leur limite commune est donc positive et négative donc 0.

Cet algorithme est robuste (converge toujours, du moins quand on arrive à l'initialiser), facile à programmer, mais pas toujours efficace (même en partant près d'une solution, cela peut prendre du temps) puisqu'il faut $\simeq \log_2 \frac{v_0 - u_0}{\varepsilon}$ itérations pour obtenir une erreur ε .

L'algorithme de Newton est un peu plus efficace mais requière d'avoir un peu plus de régularité. Il requière également d'avoir une première estimation de la racine afin de l'initialiser suffisamment près de la racine. Pour le définir, il suffit que f soit dérivable, mais pour l'étudier, on prend f de classe $\mathcal{C}^2$. L'idée est que si x est une solution et que $y \simeq x$ alors

$$0 = f(x) \simeq f(y) + f'(y)(x - y)$$

donc $x \simeq y - \frac{f(y)}{f'(y)}$. Avec un peu de chance, cette valeur est même une meilleure approximation de x que y . On va alors recommencer. En clair, on définit une suite récurrente par un point de départ u_0 puis $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Notons que l'interprétation graphique est simple : u_{n+1} est l'unique solution de l'équation $f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n) = 0$ or $y = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en u_n donc u_{n+1} est l'abscisse du point où cette tangente rencontre l'axe horizontal. Il devrait maintenant être facile de dessiner deux graphes de fonctions, l'une où l'algorithme va converger (penser à une fonction convexe) et l'autre où il va diverger (du moins si on ne part pas de très très près de la solution, si on veut une fonction régulière).

Théorème 2.59 (Algorithme de Newton)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$. On pose

$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors

- il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$;
- il existe $\delta > 0$ tel que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ est stable par F ;
- si $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ alors la suite définie par $u_{n+1} = F(u_n)$ converge vers α . De plus, en posant $C = \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{2 \min_{[a,b]} f'}$, on a $|u_n - \alpha| \leq C^{-1}(C\delta)^{2^n}$.
- si de plus $f'' > 0$ et $u_0 \in [\alpha, b]$ alors u_n est strictement décroissante et $u_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(u_n - \alpha)^2$.

Notons que F est bien définie et que, dans l'algorithme de Newton, on considère une suite définie par $u_{n+1} = F(u_n)$. Si cette suite converge, sa limite est un point fixe c de F , mais un tel point fixe est un zéro de $f : F(c) = c$ i.e. $c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$ équivaut à $f(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. L'existence de α résulte du théorème des valeurs intermédiaires et son unicité du fait que f est strictement croissante (puisque $f' > 0$) donc $f(x) > 0$ si $x > \alpha$ et $f(x) < 0$ si $x < \alpha$. Notons aussi que $a < \alpha < b$.

On remarque ensuite que $F(\alpha) = \alpha$ et que

$$F'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 1 - 1 = 0.$$

et

$$F(x) - \alpha = \frac{f(\alpha) - f(x) + (x - \alpha)f'(x)}{f'(x)}$$

donc, d'après la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe $\xi_x \in [a, x]$ tel que

$$F(x) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_x)}{f'(x)} (x - \alpha)^2.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, f'' est bornée sur $[a, b]$, et f' atteint son minimum en un point η donc $\min f' = f'(\eta) > 0$. En posant $C = \frac{1}{2} \frac{\sup_{[c,d]} |f''|}{f'(\eta)}$ on a donc $|F(x) - \alpha| \leq C(x - \alpha)^2$.

En particulier, en choisissant δ assez petit $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [a, b]$. Ensuite, si on suppose de plus que $\delta \leq C^{-1}$ i.e. $C\delta^2 \leq \delta$, si $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ i.e. $|x - \alpha| \leq \delta$, alors $|F(x) - \alpha| \leq \delta$. L'intervalle $I_\delta := [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ est donc stable par F .

Notons ensuite qu'une récurrence immédiate montre que si $u_0 \in I_\delta$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |F(u_n) - \alpha| \leq C(u_n - \alpha)^2.$$

Cela donne la vitesse de convergence : $|u_1 - \alpha| \leq C|u_0 - \alpha|^2 \leq C\delta^2$ puis

$$|u_2 - \alpha| \leq C|u_1 - \alpha|^2 \leq C^{2+1}\delta^{2 \times 2} = C^3\delta^4$$

puis

$$|u_3 - \alpha| \leq C|u_2 - \alpha|^2 \leq C^{(2+1) \times 2 + 1}\delta^{4 \times 2} = C^{1+2+2^2}\delta^{2^3}$$

et donc une récurrence immédiate donnera

$$|u_n - \alpha| \leq C^{1+2+\dots+2^{n-1}}\delta^{2^n} = C^{2^n-1}\delta^{2^n}.$$

Dans le cas où $f'' > 0$ (f est strictement convexe), tout l'intervalle $[\alpha, b]$ est stable puisque

- d'une part $f(x), f'(x) \geq 0$ pour $[\alpha, b]$ donc $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \leq b$
- d'autre part (avec les notations précédentes) $F(x) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_x)}{f'(x)} (x - \alpha)^2 \geq 0$.

Notez qu'on a toujours $|F(x) - \alpha| \leq C(x - \alpha)^2$.

Ensuite, on remarque que $u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n \leq 0$ avec le premier point donc (u_n) est bien décroissante. Elle est aussi minorée par α donc converge. Sa limite est un zéro de f donc α .

Il reste à montrer l'équivalent, qui donne la vitesse exacte de convergence : avec la formule de Taylor, pour tout n , il existe $\xi_n \in [\alpha, u_n]$ tel que

$$u_{n+1} - \alpha = F(u_n) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(u_n)} (u_n - \alpha)^2.$$

Mais $u_n \rightarrow \alpha$ donc $\xi_n \rightarrow \alpha$ donc $f''(\xi_n) \sim f''(\alpha)$ (car $f''(\alpha) > 0$) et $f'(u_n) \sim f'(\alpha)$ (car $f'(\alpha) > 0$) et ainsi on a bien

$$u_{n+1} - \alpha \sim \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} (u_n - \alpha)^2.$$

On a ici utilisé que si une suite a une limite non nulle ℓ , elle est équivalente à ℓ (ce qui n'est plus vrai si $\ell = 0$). ■

Exemple 2.60

La méthode de Hénon consiste à appliquer l'algorithme de Newton au cas particulier $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$, en partant de $u_0 = 1$. La suite ainsi définie est

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

et cette suite converge vers $\sqrt{a}$. On vérifie en effet trivialement que $]0, +\infty)$ est stable par $F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ et que son unique point fixe est $\sqrt{a}$.

Notez que si $a \in \mathbb{Q}$, tous les termes de la suite sont encore rationnels.

Note pour les candidats à l'agrégation 1

La méthode de Newton s'étend à la dimension supérieure, *i.e.* pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (voir Théorème 3.1). Il faut supposer que la différentielle de f est inversible et l'itération est alors

$$x_{k+1} = x_k - df_{x_k}^{-1}(f(x_k)).$$

La démonstration est essentiellement la même mais nécessite d'utiliser du calcul différentiel un peu plus difficile qu'en une variable, en particulier le théorème d'inversion locale. Elle présente néanmoins l'avantage d'être également utilisable dans les leçons correspondantes.

2.5. Accélération de convergence.

Une question importante en analyse numérique consiste à accélérer la convergence d'une suite. Il s'agit donc de trouver une transformation T telle que, si $u = (u_n)$ est une suite convergente, $u_n \rightarrow \ell$, alors la suite $v = Tu$ vérifie également $v_n \rightarrow \ell$ et de plus $\frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} \rightarrow 0$.

Le théorème de Césaro nous présente un procédé qui transforme une suite convergente en une suite convergente de même limite. Mais, si c'est bien un procédé d'amélioration de la convergence, ce n'est pas un procédé d'accélération car les premiers termes de la suite jouent un rôle trop important. En particulier, si la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq 0$, alors $u_n \rightarrow 0$ et donc $\sigma_n \rightarrow 0$, et $\sigma_n \sim \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui converge plus lentement vers 0 que u_n dès que $u_n = o(n^{-1})$.

Nous allons maintenant donner deux résultats, le premier suppose qu'on a une estimation précise de la vitesse de convergence de la suite :

Théorème 2.61 (Romberg-Richardson)

soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ . Supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$, r, s avec $0 < s < |r| < 1$ tels que

$$u_n = \ell + \lambda r^n + O(s^n)$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Soit v_n la suite définie par

$$v_n = \frac{u_{n+1} - r u_n}{1 - r}.$$

Alors $v_n - \ell = O(s^n)$.

La suite v_n converge donc plus vite vers ℓ que la suite u_n puisque $s < |r|$. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite de connaître exactement r . Par contre, elle ne nécessite pas de connaître λ (sans quoi on se contenterait de la suite $u_n - \lambda r^n$).

DÉMONSTRATION. L'observation clé est que, si on définit la suite $a = (a_n)$ par $a_n = \ell + \lambda r^n$ alors

$$a_{n+1} = \ell + \lambda r^{n+1} = \ell + r(a_n - \ell) = r a_n + (1 - r)\ell$$

donc $\frac{a_{n+1} - r a_n}{1 - r} = \ell$.

On définit alors la transformation linéaire T qui à une suite (w_n) associe la suite $(Tw)_n = \frac{w_{n+1} - r w_n}{1 - r}$. Ainsi par définition, $(v_n) = Tu$ et on vient de voir que $(Ta)_n = \ell$. Définissons alors $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ par $\varepsilon = u - a$ de sorte que $v - \ell = Tu - Ta = T(u - a) = T\varepsilon$.

Mais, comme $\varepsilon_n = O(s^n)$, on écrit $|\varepsilon_n| \leq C s^n$, on a

$$|v_n - \ell| = |T\varepsilon_n| = \frac{|\varepsilon_{n+1} - r\varepsilon_n|}{|1 - r|} \leq \frac{|\varepsilon_{n+1}| + |r||\varepsilon_n|}{|1 - r|} \leq \frac{|r| + s}{|1 - r|} s^n$$

qui est exactement ce qu'il fallait démontrer. ■

Notons que si on a une estimation plus précise $\varepsilon_n = Cs^n + O(\rho^n)$ avec $\rho < |s|$ (s n'a plus de raison d'être positive), alors le même calcul donne

$$T\varepsilon_n = \frac{Cs - r}{1 - r} s^n + O(\rho^n)$$

et on peut alors itérer le processus en posant $w_n = \frac{v_{n+1} - sv_n}{1 - s}$ qui vérifiera $w_n - \ell = O(\rho^n)$.

Exemple 2.62 Application au calcul approché de π

On veut calculer π . Pour cela, on utilise

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

On considère donc la suite $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$. La première observation est que tous les u_n se calculent : pour les 3 premiers, ce sont des valeurs particulières de $\sin$ que tout lycéen doit connaître : $u_0 = \sin \pi = 0$, $u_1 = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$, $u_2 = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} = 2.82\dots$

Ensuite, on utilise un peu de trigonométrie : pour $0 < a < \frac{\pi}{4}$,

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2a}}{2}$$

puisque $\cos 2a > 0$. Et comme $\sin a > 0$, on en déduit que

$$\sin a = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2a}}{2}}.$$

Ainsi, on définit $\alpha_0 = 1$, puis $\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_n^2}}{2}}$ et alors $\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \alpha_n$. Avec cela, on peut calculer les termes suivants de la suite : $u_4 = 3.1214$, $u_5 = 3.1365$, $u_6 = 3.1403$, $u_7 = 3.1412$, $u_8 = 3.1415$.

Mais, en faisant un développement limité, on a

$$2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi - \frac{\pi^3}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n + O(16^{-n}).$$

On se retrouve donc la situation du théorème de Romberg-Richardson avec $r = 1/4$ et $s = 1/16$ et $\lambda = -\frac{\pi^3}{6}$ qu'on ne connaît pas, puisque c'est précisément π qu'on veut calculer. On accélère toutefois la suite en posant $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n/4}{1 - 1/4} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}$.

Les termes de la suite sont

$$v_2 = 3.1391, \quad v_3 = 3.1414, \quad v_4 = 3.14158\dots$$

Notons qu'on connaît la vitesse de convergence de (v_n) : $v_n = \pi + O(1/16^n)$ d'après le théorème. On peut donc ré-accélérer la vitesse en posant $w_n = \frac{v_{n+1} - v_n/16}{1 - 1/16} =$

$\frac{16v_{n+1} - v_n}{15}$. Le calcul donne alors $w_3 = 3.141592$.

Notez que la suite (u_n) utilisée ici a une interprétation géométrique. On considère le polygone régulier P_n à n côtés inscrit dans le cercle unité (de centre 0). En considérant un triangle OAB où A et B sont deux sommets consécutifs de ce triangle, on a $|OA| = |OB| = 1$ alors que l'angle $AOB = \frac{2\pi}{n}$. De plus, la bisectrice de cet angle est orthogonal au segment $[AB]$ donc $AB = 2 \sin \frac{\pi}{n}$. On a donc montré que

le périmètre de P_n est $\ell(P_n) = 2n \sin \frac{\pi}{n}$. Le périmètre du cercle est $2\pi = \lim \ell(P_n)$. Ainsi u_n est la moitié du périmètre du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle unité. Celui-ci peut se construire à la règle et au compas.

On peut également calculer e assez rapidement en accélérant la convergence de $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \rightarrow e$.

La méthode de Aitken est une variante de la précédente mais ne nécessitant pas la connaissance de r . L'idée est la suivante : quand n est grand, $u_n - \ell \sim \lambda r^n$, $u_{n+1} - \ell \sim \lambda r^{n+1}$, $u_{n+2} - \ell \sim \lambda r^{n+2}$ et donc $u_{n+1} - u_n = (u_{n+1} - \ell) - (u_n - \ell)$ est proche de $\lambda(r-1)r^n$ alors que $u_{n+2} - u_{n+1}$ est proche de $\lambda(r-1)r^{n+1}$, on devrait donc avoir une quantité proche de r en divisant : on pose $c_n = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$ puis

$$v_n = \frac{u_{n+1} - c_n u_n}{1 - c_n}.$$

En remplaçant c_n par son expression, on trouve

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+2} - u_{n+1})u_n}{u_{n+1} - u_n - (u_{n+2} - u_{n+1})} = \frac{u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}}{2u_{n+1} - u_n - u_{n+2}} \\ &= u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)^2}{u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Cette expression peut se ré-écrire à l'aide de l'opérateur de différence $\partial u_n = u_{n+1} - u_n$ en remarquant que $\partial^2 u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$ et donc

$$v_n = u_n - \frac{(\partial u_n)^2}{\partial^2 u_n}.$$

Théorème 2.63 (Aitken)

soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ . Supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$, r, s avec $0 < s < |r| < 1$ tels que

$$u_n = \ell + \lambda r^n + O(s^n)$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Soit v_n la suite définie par

$$v_n = u_n - \frac{(\partial u_n)^2}{\partial^2 u_n}.$$

Alors $v_n - \ell = O(s^n)$.

On récupère donc le même ordre de convergence que dans le théorème précédent, mais sans avoir besoin de connaître celui-ci.

DÉMONSTRATION. Avant de débiter, notons que ∂ est linéaire et que, si $a_n = \ell + \lambda r^n$ alors

$$\partial a_n = \lambda(r-1)r^n$$

donc $\partial^2 a_n = \lambda(r-1)^2 r^n$. Par ailleurs, si $\varepsilon_n = O(s^n)$ alors $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2} = O(s^n)$ donc $\partial \varepsilon_n, \partial^2 \varepsilon_n = O(s^n)$.

On écrit à nouveau $u_n = a_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = O(s^n)$. Alors

$$\partial u_n = \partial a_n + \partial \varepsilon_n = \lambda(r-1)r^n + O(s^n) = \lambda(r-1)r^n \left(1 + O((s/r)^n)\right)$$

donc

$$(\partial u_n)^2 = \lambda^2(r-1)^2 r^{2n} \left(1 + O((s/r)^n)\right)$$

tandis que

$$\partial u_n^2 = \partial^2 a_n + \partial^2 \varepsilon_n = \lambda(r-1)^2 r^n + O(s^n) = \lambda(r-1)^2 r^n \left(1 + O((s/r)^n)\right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} v_n - \ell &= u_n - \ell - \lambda r^n \frac{1 + O((s/r)^n)}{1 + O((s/r)^n)} \\ &= \lambda r^n + O(s^n) - \lambda r^n \left(1 + O((s/r)^n)\right) \\ &= \lambda r^n + O(s^n) - \lambda r^n + O(s^n) = O(s^n) \end{aligned}$$

comme annoncé. ■

3. Séries numériques

3.1. Généralités.

Definition 3.1

À une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ on associe la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ définies par $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

On dira que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) de ses sommes partielles a une limite (finie) et on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ cette limite. On définit alors la suite des restes

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 3.2

Comme $u_n = S_n - S_{n-1}$, si la série converge, alors $u_n \rightarrow 0$. La réciproque étant fautive (voir $\sum \frac{1}{n}$ plus bas).

Par ailleurs, la convergence de la série ne dépend pas des premiers termes, c'est pour cela qu'on s'autorise à écrire $\sum u_n$ converge.

Un certain nombre de résultats de convergence consistent à transférer des résultats de convergence de suites aux séries.

Par exemple : la combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente, la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente et la somme de deux séries divergentes peut être convergente. Nous parlerons de produits de séries plus loin (séries de Cauchy en Section 3.6)

La seconde observation est qu'on peut transformer une suite en somme de série. Plus précisément, si on pose $v_{n_0} = u_{n_0}$ et, pour $n \geq n_0 + 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$ (l'incrément qui fait passer de u_{n-1} à u_n), alors la somme des v_n est télescopique :

$$\sum_{n=n_0}^N v_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} - u_{n_0} + \cdots + u_N - u_{N-1} = u_N.$$

Ainsi, $\sum v_n$ converge si et seulement si u_N converge.

La façon la plus simple de montrer une convergence est d'être capable de calculer explicitement S_n , mais cela est assez exceptionnel. Le cas le plus notable est le suivant :

Exemple 3.3

Soit (u_n) une suite géométrique non nulle, de raison r , alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{u_{n_0}}{1-r}$ et $R_n = \frac{u_{n+1}}{1-r}$.

En effet, si $|r| \geq 1$, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. Supposons maintenant que $|r| < 1$ de sorte que $u_n \rightarrow 0$. Comme $\sum_{n=n_0}^N u_n = \frac{u_{n_0} - u_{N+1}}{1-r} \rightarrow \frac{u_{n_0}}{1-r}$ quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient la convergence de la série, l'expression pour sa somme et celle pour le reste.

Exemple 3.4

Un second exemple est le cas des séries télescopiques, *i.e.* de séries dont le terme général s'écrit sous la forme $u_n = v_n - v_{n+1}$ avec $v_n \rightarrow \ell$ auquel cas $\sum_{n=n_0}^N u_n = v_{n_0} - v_{N+1} + v_{N+1} - v_{N+2} + \dots - v_{N-1} + v_N - v_{N+1}$ donc, en faisant $N \rightarrow +\infty$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = v_{n_0} - \ell$. Par exemple :

- Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
- Comme $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = -\frac{1}{2}$.
- Comme $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln n$, $\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(N+1) \rightarrow +\infty$ donc $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

Comme $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est complet, la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ vérifie le critère de Cauchy. Pour les séries, celui-ci s'écrit donc comme suit :

Lemme 3.5 Critère de Cauchy des séries

La série $\sum a_n$ converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy des séries : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que, si $p, q \geq N$, $\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \varepsilon$.

Exemple 3.6

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge car

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

donc le critère de Cauchy n'est pas satisfait.

De façon générale, on montre ainsi que si (u_n) décroît et $\sum u_n$ converge alors $nu_n \rightarrow 0$ car $Nu_{2N} \leq \sum_{n=N}^{2N} u_n \rightarrow 0$ avec le critère de Cauchy et de même $Nu_{2N+1} \leq \sum_{n=N}^{2N+1} u_n \rightarrow 0$. En particulier $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge lorsque $0 < \alpha \leq 1$.

Une conséquence directe du critère de Cauchy est le lemme important suivant :

Lemme 3.7

Si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier le critère de Cauchy qui résulte directement de l'inégalité triangulaire : $\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \sum_{n=p}^q |a_n|$. ■

Definition 3.8

On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si $\sum |u_n|$ converge. On dit, que la série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente *i.e.* si $\sum u_n$ converge mais que $\sum |u_n|$ diverge.

Remarque 3.9

Insistons sur le fait qu'une série semi-convergente tout comme une série absolument convergente est convergente. La seconde est en général meilleure que la première, voir le lemme 3.13 et le théorème de réarrangement de Riemann 3.52.

Remarque 3.10

Jusqu'ici tout s'étend directement aux suites et séries dans des espaces de Banach E , à condition de remplacer la valeur absolue par la norme de E . On parle alors de série normalement convergente et si $\sum \|a_n\|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Une autre conséquence du critère de Cauchy est qu'on peut sommer par paquets :

Lemme 3.11

Soit (n_k) une suite strictement croissante d'entiers et (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors si $\sum u_n$ converge,

$$(3.6) \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} u_n$$

où la seconde série est également convergente.

Si de plus, $n_{k+1} - n_k$ est bornée, alors la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} u_n$ implique celle de $\sum u_n$ et la formule (3.6) est donc encore vérifiée.

Notons que si $n_k = 2k$ et $u_n = (-1)^n$, alors $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} u_n = 0$, la condition $u_n \rightarrow 0$ est donc essentielle.

DÉMONSTRATION. La première assertion consiste juste à remarquer que

$$\sum_{k=p}^q \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} u_n = \sum_{n=n_p}^{n_{q+1}-1} u_n$$

et comme $n_k \rightarrow +\infty$, le critère de Cauchy pour $\sum u_n$ implique celui pour la seconde série.

La réciproque est à peine plus compliquée mais nécessite d'être faite soigneusement : soit M tel que $n_{k+1} - n_j \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que,

$$- \text{ si } k, \ell \geq K, \text{ alors } \left| \sum_{j=k}^{\ell} \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} u_n \right| \leq \varepsilon ;$$

$$- \text{ si } n \geq n_K, \text{ alors } |u_n| \leq \varepsilon.$$

Soit alors $N = n_K$ et $p, q \geq N$. Il existe donc k_p, ℓ_q tel que $n_{k_p} \leq p < n_{k_p+1}$ et $n_{\ell_q} \leq q < n_{\ell_q+1}$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q u_n &= \sum_{n=n_{k_p}}^{n_{\ell_q+1}-1} u_n - \sum_{n=n_{k_p}}^{p-1} u_n - \sum_{n=q+1}^{n_{\ell_q+1}-1} u_n \\ &= \sum_{j=k_p}^{\ell_q} \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} u_n - \sum_{n=n_{k_p}}^{p-1} u_n - \sum_{n=q+1}^{n_{\ell_q+1}-1} u_n \end{aligned}$$

avec la convention que $\sum_{n=n_{k_p}}^{p-1} = 0$ si $p = n_{k_p}$ et $\sum_{n=q+1}^{n_{\ell_q+1}-1} = 0$ si $q = n_{\ell_q+1} - 1$. Mais, dans ces deux

dernières sommes $n \geq n_K$ dont tous les termes sont de module $|u_n| \leq \varepsilon$. Comme de plus $p - n_{k_p}, n_{\ell_q+1} - q \leq M$, ces deux sommes ont au plus M termes. On majore donc chacune de ces sommes par $M\varepsilon$. La première somme étant bornée par ε , on obtient finalement

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq (2M + 1)\varepsilon.$$

La série $\sum u_n$ vérifie donc le critère de Cauchy et est donc convergente. ■

Exemple 3.12

Pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $u_n \rightarrow 0$ et on a $|u_n + u_{n+1}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc $\sum |u_n + u_{n+1}|$ est convergente (somme d'une suite télescopique) i.e. $\sum (u_n + u_{n+1})$ est (absolument) convergente donc $\sum u_n$ est convergente.

Nous allons d'abord nous concentrer sur les suites à termes positifs et, plus généralement, aux séries absolument convergentes.

3.2. Séries absolument convergentes.

3.2.1. Critères de comparaison.

Commençons par une observation simple :

Si (u_n) est une suite positive, $u_n \geq 0$ alors les sommes partielles $S_n = \sum_{m=0}^n u_m$ forment une suite croissante et converge donc si et seulement si elle est majorée :

Lemme 3.13

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs, $u_n \geq 0$ pour tout n . Alors

(1) $\sum u_n$ converge si et seulement si ses sommes partielles $S_n = \sum_{m=0}^n u_m$ sont majorées indépendamment de n .

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ F \text{ fini}}} \sum_{n \in F} u_n$ que la série converge ou non. En particulier, si σ est une permutation de $\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

avec la convention suivante : *si l'une des séries diverge, l'autre aussi.*

(3) Soit (v_n) est une seconde suite à termes positifs telle que $u_n = O(v_n)$.

– Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge également et $\sum_{m=n}^{+\infty} u_m = O\left(\sum_{m=n}^{+\infty} v_m\right)$ (on peut remplacer les grands O par des petits o).

– Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge également et $\sum_{m=0}^n u_m = O\left(\sum_{m=0}^n v_m\right)$ (on peut remplacer les grands O par des petits o);

(4) Si de plus $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et

– si les deux séries sont convergentes, les suites des restes sont équivalentes

$$\sum_{m=n}^{+\infty} u_m \sim \sum_{m=n}^{+\infty} v_m;$$

– si les deux séries sont divergentes, les sommes partielles sont équivalentes

$$\sum_{m=0}^n u_m \sim \sum_{m=0}^n v_m.$$

Lorsque $u_n \geq 0$, on écrit donc souvent (de façon abusive) $\sum u_n < +\infty$ pour dire que cette série converge. **Cette notation est à réserver aux séries à termes positifs** et $\sum u_n = +\infty$ lorsqu'elle diverge.

Nous verrons à la fin de la section que le second point est totalement différent pour les séries semi-convergentes.

DÉMONSTRATION. Le premier point est déjà démontré. Montrons le second :

$$S_N = \sum_{n \in \{0, \dots, N\}} u_n \leq \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ F \text{ fini}}} \sum_{n \in F} u_n := \tilde{S}.$$

Notons S la somme de la série avec la convention $S = +\infty$ si la série diverge. Si $S = +\infty$, $S_N \rightarrow +\infty$ donc $\tilde{S} = +\infty = S$ et si $S < +\infty$ alors $S \leq \tilde{S}$.

Inversement, soit F un ensemble fini d'entiers, il existe alors N tel que $F \subset \{0, \dots, N\}$ et donc, en utilisant la positivité des u_n ,

$$\sum_{n \in F} u_n \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et on obtient l'inégalité souhaitée en passant au sup sur les F finis.

Enfin, en faisant le même raisonnement avec la série de terme général $u_{\sigma(n)}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} &= \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ F \text{ fini}}} \sum_{n \in F} u_{\sigma(n)} = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ F \text{ fini}}} \sum_{m \in \sigma(F)} u_m \\ &= \sup_{\substack{G = \sigma^{-1}(F) \subset \mathbb{N} \\ G \text{ fini}}} \sum_{m \in G} u_m = \sup_{\substack{G \subset \mathbb{N} \\ G \text{ fini}}} \sum_{m \in G} u_m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \end{aligned}$$

Pour (3), rappelons que $u_n = O(v_n)$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ et un entier N_0 tels que, pour $n \geq N_0$, $u_n \leq C v_n$. Mais alors si $N \geq N_0$,

$$\sum_{m=0}^N u_m \leq \sum_{m=0}^{N_0-1} u_m + C \sum_{m=N_0}^N v_m.$$

Par suite, si $\sum v_n$ converge, les sommes partielles $\sum_{n=0}^N v_n$ sont majorées il en va de même

pour $\sum_{m=N_0}^n v_m$ donc aussi pour $\sum_{n=0}^N u_n$ donc $\sum u_n$ converge. Inversement, si $\sum u_n$ diverge,

$\sum_{m=0}^N u_m \rightarrow +\infty$ donc $\sum_{m=N_0}^n v_m \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$ et $\sum v_n$ diverge.

On peut rendre cela un peu plus précis en remarquant que, si pour $n \geq N_0$, $u_n \leq C v_n$, alors pour $M \geq N \geq N_0$, $\sum_{m=M}^N u_m \leq C \sum_{m=M}^N v_m$. En faisant $N \rightarrow +\infty$ on obtient $\sum_{m=M}^{+\infty} u_m \leq$

$C \sum_{m=M}^{+\infty} v_m$ soit $\sum_{m=M}^{+\infty} u_m = O\left(\sum_{m=M}^{+\infty} v_m\right)$. Si $u_n = o(v_n)$, C peut être pris arbitrairement

petit en prenant N_0 assez grand on obtient donc par le même calcul que $\sum_{m=M}^{+\infty} u_m =$

$o\left(\sum_{m=M}^{+\infty} v_m\right)$. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$ donc

$$\sum_{m=M}^{+\infty} u_m - \sum_{m=M}^{+\infty} v_m = o\left(\sum_{m=M}^{+\infty} v_m\right)$$

soit $\sum_{m=M}^{+\infty} u_m \sim \sum_{m=M}^{+\infty} v_m$.

Inversement, si $\sum u_n$ diverge donc $\sum v_n$ aussi, les sommes partielles tendent donc vers $+\infty$. Alors

$$\sum_{n=0}^N v_n \sim \sum_{n=N_0}^N v_n \geq \frac{1}{C} \sum_{n=N_0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N u_n$$

donc $\sum_{n=0}^N u_n = O\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$.

Pour l'équivalent, il faut être un peu plus précis. Pour $0 < \varepsilon < 1$, il existe N_0 tel que, si $n \geq N_0$, $(1 - \varepsilon)u_n \leq v_n \leq (1 + \varepsilon)u_n$. Ainsi, pour $N \geq N_0$,

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=N_0}^N u_n \leq \sum_{n=N_0}^N v_n \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=N_0}^N u_n.$$

Ce qui montre que $\sum_{n=N_0}^N u_n \sim \sum_{n=N_0}^N v_n$. Comme ces deux quantités tendent vers $+\infty$, on

peut ajouter une quantité finie de chaque côté de l'équivalent donc $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$. ■

Ce lemme nous dit qu'une fois que nous avons une série convergente ou divergente, nous en aurons beaucoup d'autres. Regardons par exemple ce qui se passe pour la série géométrique pour laquelle on connaît une formule explicite des sommes partielles de sorte qu'il suffit de regarder les limites de ces sommes.

Exemple 3.14

Si $r < 1$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a r^n$ converge puisqu'en prenant $r < \rho < 1$, $n^a r^n = o(\rho^n)$ et $\sum \rho^n$ converge. Mais, si $r > 1$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a r^n$ diverge puisqu'en prenant $1 < \rho < r$, $\rho^n = o(n^a r^n)$ et $\sum \rho^n$ diverge.

Les deux critères suivants sont des critères de comparaison aux séries géométriques :

Lemme 3.15 (Critères de d'Alembert et de Cauchy)

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

— *Critère (ou règle) de d'Alembert* supposons que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ existe.

Alors

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

— *Règle de Cauchy* soit $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^{1/n}$. Alors

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

DÉMONSTRATION. Pour la règle de d'Alembert, on suppose que u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang pour que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait un sens. Pour le cas $\ell < 1$, on prend r tel que $\ell < r < 1$ et il existe alors N tel que, pour $n \geq N$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq r$. Mais alors, pour $n \geq N$, $|u_n| \leq r^{n-N} |u_N|$ et par suite

$$\sum_{m=0}^n |u_m| \leq \sum_{m=0}^M |u_m| + |u_N| \sum_{m=N}^n r^{n-N} \leq \sum_{m=0}^M |u_m| + \frac{|u_N|}{1-r} < +\infty.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |u_m|$ sont donc bornées, donc cette série converge.

Lorsque $\ell > 1$, on prend r tel que $1 < r < \ell$ et il existe alors N tel que, pour $n \geq N$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq r$, donc $|u_n| \geq r^{n-N} |u_N| \rightarrow +\infty$, a fortiori, u_n ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

La démonstration de la règle de Cauchy est similaire. Lorsque $\ell < 1$, la suite $|u_n|$ est majorée à partir d'un certain rang N par une suite géométrique r^n de raison $\ell < r < 1$. Lorsque $\ell > 1$, u_n a une sous-suite telle que $|u_{n_k}| > r^{n_k}$ avec $1 < r < \ell$. Donc u_n ne tend pas vers 0. ■

Notez que le cas $\ell = 1$ est indécis (sauf si la limite est 1^+ auquel cas on montre facilement que u_n ne tend pas vers 0 donc que la série diverge). On peut affiner un peu la règle de d'Alembert en utilisant des $\liminf$ et $\limsup$ et, dans ce cas, la règle de Cauchy est un peu plus fine dans le cas critique puisque

$$\liminf \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \limsup |u_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

Exemple 3.16

Les séries $\sum n^\alpha r^n$ convergent si $|r| < 1$ et divergent si $|r| > 1$ puisque

- avec d'Alembert, si $r \neq 0$, $\frac{(n+1)^\alpha |r|^{n+1}}{n^\alpha |r|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha |r| \rightarrow |r|$;
- avec Cauchy, $(n^\alpha |r|^n)^{1/n} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}} |r| \rightarrow |r|$.

Une autre application des critères de comparaison est le lemme suivant :

Lemme 3.17 (Critère de condensation de Cauchy)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante à termes positifs, $u_n \geq 0$ et soit $(v_m)_{m \geq 0}$ la suite définie par $v_m = 2^m u_{2^m}$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_m$ sont de même nature.

En particulier, la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

DÉMONSTRATION. Notons $S_m = \sum_{n=1}^m u_n$.

Tout d'abord, pour $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$, $u_{2^{m+1}} \leq u_n \leq u_{2^m}$ et donc, en sommant sur ces n (il y a $2^{m+1} - 2^m = 2^m$ termes)

$$2^m u_{2^{m+1}} \leq \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} u_n \leq 2^m u_{2^m}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} v_{m+1} \leq S_{2^{m+1}} - S_{2^m} \leq v_m.$$

Mais alors

$$\sum_{m=1}^p v_m \geq S_{2^{p+1}} - S_1 \geq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} v_m.$$

De là on déduit que

- si $\sum u_n$ converge, alors $S_{2^{p+1}} - S_1$ est majorée donc les sommes partielles $\sum_{m=1}^{p+1} v_m$ aussi donc la série (à termes positifs) $\sum v_m$ converge

– si $\sum v_m$ converge, alors ses sommes partielles sont majorées. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout p , $\sum_{m=1}^p v_m \leq M$ et alors $S_{2^{p+1}} \leq M + S_1$. Mais alors, si n est un entier, il existe p tel que $n \leq 2^{p+1}$ et, comme u_n est positive, $S_n \leq S_{2^{p+1}} \leq M + S_1$. Les sommes partielles de $\sum u_n$ sont donc majorées, cette série converge.

Enfin, considérons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Quand $\alpha \leq 0$, u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge. On suppose donc que $\alpha > 0$ et alors (u_n) est une suite décroissante à termes positifs. De plus $v_n = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{n(1-\alpha)}$ est une suite géométrique de raison $2^{1-\alpha} > 0$ et $2^{1-\alpha} < 1$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi $\sum v_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ donc $\sum u_n$ également. ■

On peut considérer de façon un peu plus générale $v_n = p^n u_{p^n}$ avec $p \geq 2$ un entier.

Exercice 3.18

Montrer à l'aide du critère de condensation de Cauchy que la série de Bertrand

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Terminons par le critère suivant qui complète celui de d'Alembert et est un critère de comparaison aux séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 3.19 (Critère de Raabe-Duhamel)

Soit (u_n) une suite à termes positifs $u_n > 0$ pour n assez grand, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(3.7) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors

- si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Notons que la condition (3.7) implique que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang, il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer que u_n est positive (dès le premier rang).

Une autre observation est que $u_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$ vérifie (3.7) avec $\alpha = 1$ et que le seul critère ne permet donc pas de conclure dans le cas $\alpha = 1$.

DÉMONSTRATION. L'observation clé ici est que, si $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et que la règle est donc que la proposition est déjà démontrée dans ce cas. S'il n'y avait pas les $o(n^{-1})$ on pourrait directement conclure en comparant les deux suites (u_n) et (v_n) . Il faut ici être un peu plus prudent.

Nous allons poser $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$ et $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ de sorte que

- si $\alpha > 1$, $1 < \beta < \gamma < \alpha$;
- si $\alpha < 1$, $\alpha < \gamma < \beta < 1$.

Les valeurs de β et γ ne sont pas importantes, seules ces relations comptent dans la suite.

Supposons d'abord que $\alpha > 1$, dans ce cas, il existe N_0 tel que, si $n \geq N_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\gamma}{n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En particulier, on a une chaîne d'inégalités :

$$\frac{u_{N_0+1}}{u_{N_0}} \leq \frac{v_{N_0+1}}{v_{N_0}}, \quad \frac{u_{N_0+2}}{u_{N_0+1}} \leq \frac{v_{N_0+2}}{v_{N_0+1}}, \quad \dots, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En observant que toutes les quantités sont positives et *télescopiques*, la multiplication de ces inégalités donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_{N_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{N_0}}$$

c'est-à-dire $u_{n+1} \leq \frac{u_{N_0}}{v_{N_0}} v_{n+1}$. Comme la série $\sum v_n$ converge, il en va de même de $\sum u_n$.

Dans le cas $\alpha < 1$, toutes les inégalités sont inversées et on obtient donc $u_{n+1} \geq \frac{u_{N_0}}{v_{N_0}} v_{n+1}$. Comme la série $\sum v_n$ diverge, il en va de même de $\sum u_n$. ■

Exercice 3.20: (Règle de Gauss)

Soit (u_n) une suite à termes positifs $u_n > 0$ pour n assez grand, telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $k > 1$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

- (1) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

Indication : considérer $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ et utiliser $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$, que nous démontrons plus loin.

- (2) En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On peut multiplier les règles de ce type. Par exemple, on a la suivante qui raffine le critère de Raabe-Duhamel :

Remarque 3.21 (Critère de Kummer)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Posons

$$K_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}.$$

- (1) S'il existe $c > 0$ tel que, à partir d'un certain rang,

$$K_n \geq c,$$

alors la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

- (2) Si, à partir d'un certain rang,

$$K_n \leq 0$$

et si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{b_n}$$

diverge, alors la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

En prenant $b_n = n$ on obtient la règle de Raabe-Duhamel. En prenant $b_n = n \log n$, on peut en déduire la convergence des séries de Bertrand.

Pour montrer ce critère, supposons d'abord qu'il existe $c > 0$ tel que $K_n \geq c$ à partir d'un certain rang N . En multipliant cette inégalité par a_{n+1} , on obtient

$$b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} \geq c a_{n+1}.$$

En sommant de $n = N$ à $n = m$, il vient

$$c \sum_{n=N}^m a_{n+1} \leq b_N a_N - b_{m+1} a_{m+1} \leq b_N a_N.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ sont donc bornées, et cette série converge.

Supposons maintenant que $K_n \leq 0$ à partir d'un certain rang N . Alors $b_n a_n \leq b_{n+1} a_{n+1}$, de sorte que la suite $(b_n a_n)_{n \geq N}$ est croissante. En particulier, $b_n a_n \geq b_N a_N > 0$, et donc $a_n \geq \frac{b_N a_N}{b_n}$. Si la série $\sum 1/b_n$ diverge, le critère de comparaison montre alors que $\sum a_n$ diverge.

3.2.2. *Le théorème de du Bois-Reymond.*

Théorème 3.22 (du Bois-Reymond)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

- (1) Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, alors il existe une suite croissante $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ et telle que la série

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_n a_n$$

converge.

- (2) Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge, alors il existe une suite décroissante $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $\mu_n \rightarrow 0$ et telle que la série

$$\sum_{n \geq 1} \mu_n a_n$$

diverge.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que la série

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

converge et considérons les restes de la série $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$, $N \geq 1$. Comme la série converge, on a $R_N \rightarrow 0$. On peut donc construire une suite strictement croissante d'entiers $(N_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$R_{N_k} \leq \frac{2^{-k}}{k}$$

pour tout $k \geq 1$.

Définissons alors la suite (λ_n) par blocs en posant $\lambda_n = k$ pour $N_k \leq n < N_{k+1}$. Pour les éventuels indices $n < N_1$, on pose par exemple $\lambda_n = 1$. La suite (λ_n) est croissante et vérifie $\lambda_n \rightarrow +\infty$.

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{\infty} \lambda_n a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=N_k}^{\infty} a_n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k R_{N_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \lambda_n a_n$ est donc convergente.

Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge. Choisissons $N_1 = 1$. Comme les termes sont positifs et que la série diverge, on peut construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(N_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n \geq 1$$

pour tout $k \geq 1$.

Définissons la suite (μ_n) par blocs en posant $\mu_n = \frac{1}{k}$ pour $N_k \leq n < N_{k+1}$. La suite (μ_n) est décroissante, strictement positive, et $\mu_n \rightarrow 0$.

Cependant,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La série harmonique étant divergente, la série $\sum_{n \geq 1} \mu_n a_n$ diverge. ■

Remarque 3.23

Le théorème montre qu'il n'existe pas de frontière universelle entre les séries positives convergentes et divergentes.

En effet, si $\sum a_n$ converge, il existe une suite (b_n) telle que $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow +\infty$ et telle que $\sum b_n$ converge : il suffit de poser $b_n = \lambda_n a_n$.

Inversement, si $\sum a_n$ diverge, il existe une suite (c_n) telle que $\frac{c_n}{a_n} \rightarrow 0$ et telle que $\sum c_n$ diverge : il suffit de poser $c_n = \mu_n a_n$. Ainsi, il n'existe, au sens de la comparaison asymptotique, ni plus grande série positive convergente, ni plus petite série positive divergente.

3.2.3. *Le théorème d'Abel-Dini-Pringsheim.*

Les critères de d'Alembert et de Cauchy sont des critères de comparaison à des séries géométriques. Pour ces deux cas, on a des cas où le critère ne permet pas de conclure. Ce phénomène est en fait général au vu du résultat suivant :

Théorème 3.24 (Abel-Dini-Pringsheim)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs telle que $a_0 > 0$. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge et on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ les sommes partielles de cette série. Alors

- (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^t}$ converge si $t > 1$ et diverge si $t \leq 1$.
- (ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0/S_0 + a_1/S_1 + \cdots + a_n/S_n}{\ln S_n} = 1$.

Notez que la condition $a_0 > 0$ sert uniquement à ce que $S_n \neq 0$. Comme la série $\sum a_n$ diverge, il existe n_0 tel que $a_{n_0} > 0$ et il suffirait de commencer les sommations à partir de n_0 sans changer les conclusions du théorème.

DÉMONSTRATION. Rappelons que, comme $a_n \geq 0$, S_n est croissante et la divergence de $\sum a_n$ implique que $S_n \rightarrow +\infty$.

Montrons d'abord que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge. Il suffit de vérifier que le critère de Cauchy n'est pas satisfait. Pour cela, notons que pour tout $n \geq 0$, il existe $k_n \geq 1$ tel que $\frac{S_n}{S_{n+k_n}} < \frac{1}{2}$. On a alors,

$$\sum_{j=n+1}^{n+k_n} \frac{a_j}{S_j} \geq \sum_{j=n+1}^{n+k_n} \frac{a_j}{S_{n+k_n}} = \frac{S_{n+k_n} - S_n}{S_{n+k_n}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k_n}} > \frac{1}{2}$$

ce qui contredit bien le critère de Cauchy.

Ensuite, comme $S_n \geq a_0$, pour $t < 1$,

$$\frac{a_n}{S_n^t} = S_n^{1-t} \frac{a_n}{S_n} \geq a_0^{1-t} \frac{a_n}{S_n} > 0.$$

Avec le critère de comparaison des séries positives, $\sum \frac{a_n}{S_n^t}$ diverge également.

Soit ensuite $t \geq 1 + \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. Lorsque n est assez grand pour que $S_n \geq 1$,

$$\frac{a_n}{S_n^t} \leq \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}} \leq \frac{a_n}{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha}.$$

Avec le critère de comparaison, il suffit de montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha}$ converge.

On écrit ensuite

$$(3.8) \quad \frac{a_n}{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha} = \frac{1}{S_n^\alpha} \left(1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \right).$$

On introduit la fonction g définie sur $]0, +\infty)$ par $g(x) = 1 - x^\alpha$ et on remarque que $g''(x) = \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2} \geq 0$ donc g est convexe. Le graphe est donc au-dessus de la tangente en 1 et, comme $g(1) = 0$, $g'(1) = -\alpha$, cela s'écrit $1 - x^\alpha \geq -\alpha(x - 1) = \alpha(1 - x)$. En introduisant cela dans (3.8), on en déduit que

$$\frac{a_n}{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha S_n^\alpha} \left(1 - \left(\frac{S_{n-1}}{S_n} \right)^\alpha \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{S_n^\alpha} - \frac{1}{S_{n-1}^\alpha} \right).$$

Comme $\frac{1}{S_n^\alpha} \rightarrow 0$, la série télescopique $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}^\alpha} - \frac{1}{S_n^\alpha} \right)$ converge donc la série $\sum \frac{a_n}{S_n} \frac{1}{S_{n-1}^\alpha}$ converge également.

Pour le deuxième point, notons que

$$\frac{a_0/S_0 + a_1/S_1 + \cdots + a_n/S_n}{\ln S_n} = \frac{a_0/S_0 + a_1/S_1 + \cdots + a_n/S_n}{\ln S_0 + \ln S_1/S_0 + \ln S_2/S_1 + \cdots + \ln S_n/S_{n-1}}.$$

On remarque ensuite que

$$\ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln \frac{S_n}{S_n - a_n} = \ln \frac{1}{1 - \frac{a_n}{S_n}} \sim \frac{a_n}{S_n}$$

puisque $\frac{a_n}{S_n} \rightarrow 0$. Comme la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge, la série $\sum \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ également et les sommes partielles sont équivalentes, ce qui montre bien que

$$\frac{a_0/S_0 + a_1/S_1 + \cdots + a_n/S_n}{\ln S_n} = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{S_k}}{\ln S_0 + \sum_{k=0}^n \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}} \rightarrow 1$$

comme annoncé. ■

Exemple 3.25

La série $\sum 1$ diverge, $S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ donc $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^t}$ converge si $t > 1$ et diverge si $t \leq 1$. De plus

$$\frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}}{\ln n} \rightarrow 1.$$

Si on considère la série divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, on a $S_n \sim \ln n$ donc $\frac{1}{n S_n^t} \sim \frac{1}{n \ln^t n}$, on en

déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^t n}$ converge si $t > 1$ et diverge si $t \leq 1$. De plus

$$\frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} \rightarrow 1.$$

Notez qu'une itération de ce raisonnement nous dit la chose suivante : notons $\log^{\circ 1} x = \ln x$ et $\log^{\circ k+1} x = \log^{\circ 1} \log^{\circ k} x$ qui est défini pour x assez grand. Alors la série

$$\sum \frac{1}{n \prod_{j=1}^{k-1} \log^{\circ j} n (\log^{\circ k} n)^t}$$

converge si $t > 1$ et diverge si $t \leq 1$.

Ce théorème a un pendant pour les séries convergentes. Supposons que a_n soit une suite de termes positifs telle que $\sum a_n$ converge. On suppose pour éviter les trivialités que a_n n'est pas nulle à partir d'un certain rang, les restes $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ forment donc une suite strictement positive qui tend vers 0. En particulier $\frac{1}{r_n} \rightarrow +\infty$.

On note alors $b_0 = \frac{1}{r_0}$ et, pour $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_n r_{n-1}} = \frac{a_n}{r_n r_{n-1}}$$

de sorte que $S_n = \sum_{k=0}^n b_k = \frac{1}{r_n}$. En particulier, la série $\sum b_k$ diverge. Le théorème d'Abel-Dini-Pringsheim implique donc que

$$\sum \frac{b_n}{S_n} = \sum \frac{a_n}{r_{n-1}}$$

diverge. Comme $r_{n-1} \rightarrow 0$, par comparaison on en déduit que $\sum \frac{a_n}{r_{n-1}^t}$ diverge si $t \geq 1$.

Par ailleurs, on a vu dans la démonstration précédente que, pour $\alpha > 0$, la série

$$\sum \frac{b_n}{S_n S_{n-1}^\alpha} = \sum \frac{a_n}{r_{n-1}^{1-\alpha}}$$

converge. On obtient donc le résultat suivant :

Corollaire 3.26

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite positive telle que la série $\sum a_n$ converge et telle que les restes $r_n = \sum_{k \geq n} a_k$ ne soient pas nuls. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^t}$$

diverge si $t \geq 1$ et converge si $t < 1$.

Un deuxième corollaire est le suivant qui montre que l'écart entre convergence et divergence est aussi lent qu'on veut :

Corollaire 3.27

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement décroissante tendant vers 0, alors il existe une suite positive $(d_n)_{n \geq 1}$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ diverge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n d_n$ converge.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier les notations, prenons $n_0 = 0$. Notons que d'après l'hypothèse de stricte décroissance on a $\varepsilon_n > 0$. On pose alors $p_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$ qui forme une suite strictement croissante et on pose enfin $a_0 = p_0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = p_n - p_{n-1} > 0$. Alors $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = p_n \rightarrow +\infty$ donc la série $\sum a_n$ diverge. D'après Abel-Dini-Pringsheim, $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge également. On pose alors $d_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}$ de sorte que $\sum d_n$ est bien divergente. De plus

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} = 1 - \frac{p_n}{p_{n+1}} = 1 - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}.$$

donc $\varepsilon_n d_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ et, comme $\varepsilon_n \rightarrow 0$, la série $\sum \varepsilon_n d_n$ est une série télescopique convergente. ■

3.2.4. Comparaison série-intégrale.

Théorème 3.28 (Comparaison série-intégrale)

Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty)$. Alors les séries $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature. De plus, si les deux sont convergentes, on a, pour $p \geq n_0$

$$(3.9) \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_p^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$$

et si elles divergent

$$(3.10) \quad \sum_{n=n_0}^{n_1} f(n) \sim \int_{n_0}^{n_1} f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Comme f est décroissante, pour $n \leq x \leq n+1$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ donc, en intégrant entre n et $n+1$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n).$$

En sommant sur n allant de p à $q-1 \geq p$,

$$(3.11) \quad \sum_{n=p+1}^q f(n) \leq \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n).$$

Mais $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge) si et seulement si $\int_0^q f(t) dt$ est borné (resp. $\sum_{n=0}^q f(n)$ est borné) et (3.11) montre que $\int_0^q f(t) dt$ et $\sum_{n=0}^q f(n)$ sont simultanément bornés ou non.

De plus, dans le cas de la convergence, on fait $q \rightarrow +\infty$ dans (3.11) pour obtenir (3.9) et sinon, on prend $p = n_0$ pour obtenir

$$\sum_{n=n_0+1}^{n_1} f(n) \leq \int_{n_0}^{n_1} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{n_1-1} f(n).$$

Mais $\sum_{n=n_0+1}^{n_1} f(n) = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} f(n) - f(n_0) + f(n_1)$. Comme f est décroissante, $-f(n_0) + f(n_1)$ est bornée alors que la somme tend vers $+\infty$, on en déduit donc l'équivalent (3.10). ■

Exemple 3.29

On prend $\alpha > 0$ et f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty)$. On vérifie par un calcul de primitive que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. On note alors que, si $\alpha > 1$, (3.9) nous donne

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{p^\alpha}.$$

Comme $p^{-\alpha} = o\left(\frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}\right)$ on en déduit que

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}.$$

D'autre part, si $\alpha \leq 1$, on obtient de (3.10) que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \sim \begin{cases} \ln N & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}.$$

Nous laissons en exercice de montrer que ce dernier équivalent est encore valable si $\alpha \leq 0$.

3.2.5. Théorème de Kakeya.

Théorème 3.30 (Théorème de Kakeya)

Soit $a = (a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. On pose

$$S = \sum_{n \geq 1} a_n, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

et on considère l'ensemble des sommes de sous-séries

$$E(a) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n : \varepsilon_n \in \{0, 1\} \right\}.$$

(1) On a $E(a) = [0, S]$ si et seulement si

$$a_n \leq r_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(2) Si $a_n > r_n$ pour tout $n \geq 1$, alors $E(a_n)$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. De plus, tout élément de Ea possède une unique écriture sous la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, posons

$$s_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k$$

et

$$E_n = \bigcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} [s_\varepsilon, s_\varepsilon + r_n].$$

On a

$$E(a) = \bigcap_{n \geq 1} E_n.$$

En effet, une fois les n premiers coefficients $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ fixés, la somme des termes restants est comprise entre 0 et r_n .

Supposons d'abord que $a_n \leq r_n$ pour tout n . Pour tout préfixe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, de somme partielle s , les deux intervalles correspondant aux choix $\varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$ sont

$$[s, s + r_n] \quad \text{et} \quad [s + a_n, s + a_n + r_n].$$

Comme $a_n \leq r_n$, ces deux intervalles se rencontrent et leur réunion est

$$[s, s + a_n + r_n] = [s, s + r_{n-1}].$$

Ainsi, à chaque étape, aucun intervalle n'est supprimé et l'on obtient

$$E_n = [0, S].$$

Par conséquent,

$$E(a) = \bigcap_{n \geq 1} E_n = [0, S].$$

Réciproquement, supposons qu'il existe n tel que $a_n > r_n$. Comme la suite (a_n) est décroissante, chacun des termes $a_1, \dots, a_n$ est supérieur ou égal à a_n . Une somme de sous-série appartenant à l'intervalle (r_n, a_n) ne peut donc contenir aucun des termes $a_1, \dots, a_n$. Mais elle serait alors majorée par r_n , ce qui est impossible. Ainsi

$$E(a) \cap (r_n, a_n) = \emptyset,$$

et $E(a)$ n'est pas un intervalle.

Supposons enfin que $a_n > r_n$ pour tout n . Considérons l'application

$$\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow E(a_n), \quad \Phi((\varepsilon_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n.$$

Cette application est continue et surjective par définition.

Montrons qu'elle est injective. Soient (ε_n) et (η_n) deux suites distinctes et soit n le premier indice pour lequel $\varepsilon_n \neq \eta_n$. Supposons, par exemple, que $\varepsilon_n = 1$ et $\eta_n = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi((\varepsilon_k)) - \Phi((\eta_k)) &= a_n + \sum_{k>n} (\varepsilon_k - \eta_k) a_k \\ &\geq a_n - \sum_{k>n} a_k \\ &= a_n - r_n > 0. \end{aligned}$$

Les deux sommes sont donc distinctes.

L'application Φ est ainsi une bijection continue du compact $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur le compact $E(a_n)$. Elle est donc un homéomorphisme. Or $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor, ce qui conclut. ■

3.3. Un théorème tauberien. Nous allons maintenant démontrer une réciproque (partielle) à la dernière assertion :

Théorème 3.31 (Théorème taubérien)

Soit (u_n) une suite réelle, positive décroissante et soient $C > 0$, $0 < \alpha < 1$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ la n -ième somme partielle de la série associée à (u_n) . Alors $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ si et seulement si $S_n \sim \frac{C}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$.

DÉMONSTRATION. Nous venons de voir que si $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ alors $S_n \sim \frac{C}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$. Il reste donc à montrer la réciproque. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\ell := \liminf n^\alpha u_n \geq C \geq \limsup n^\alpha u_n := L.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 1$ et $m = [n\delta] \leq n\delta$ (la partie entière de $n\delta$). On a

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m u_k \leq (m - n)u_n \leq (\delta - 1)nu_n.$$

On en déduit que

$$(3.12) \quad \begin{aligned} n^\alpha u_n &\geq \frac{1}{(\delta - 1)n^{1-\alpha}}(S_m - S_n) \\ &= \frac{1}{\delta - 1} \left(\left(\frac{m}{n} \right)^{1-\alpha} \frac{S_m}{m^{1-\alpha}} - \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que si $n \rightarrow +\infty$, alors $m \rightarrow +\infty$ et donc $\frac{S_m}{m^{1-\alpha}}, \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} \rightarrow \frac{C}{1-\alpha}$. De plus $\frac{m}{n} \rightarrow \delta$. Par ailleurs, il existe une suite d'entiers (n_k) avec $n_k \rightarrow +\infty$ telle que $\lim n_k^\alpha u_{n_k} := \liminf n^\alpha u_n = \ell$. En choisissant $n = n_k$ et $m = [n\delta_k]$ dans (3.12) on en déduit que

$$\ell \geq \frac{\delta^{1-\alpha} - 1}{\delta - 1} \frac{C}{1 - \alpha}.$$

Cette inégalité est vraie quel que soit $\delta > 1$. On peut maintenant faire tendre $\delta \rightarrow 1$ (en remarquant qu'on a un rapport d'accroissement) et on obtient $\ell \geq C$.

Pour la seconde inégalité, on procède de la même façon, mais en choisissant $0 < \delta < 1$ et $m = [\delta n] \leq \delta n$. À nouveau, si $n \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$ et $\frac{m}{n} \rightarrow \delta$. De plus

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n u_k \geq (n - m)u_n \geq (1 - \delta)nu_n.$$

De façon similaire au premier cas, on écrit

$$(3.13) \quad n^\alpha u_n \leq \frac{1}{1 - \delta} \left(\frac{S_n}{n^{1-\alpha}} - \left(\frac{m}{n} \right)^{1-\alpha} \frac{S_m}{m^{1-\alpha}} \right).$$

Ensuite, il existe une suite d'entiers (n_k) avec $n_k \rightarrow +\infty$ telle que $\lim n_k^\alpha u_{n_k} := \limsup n^\alpha u_n = L$. En choisissant $n = n_k$ et le m correspondant dans (3.13) et en faisant tendre k vers l'infini, on obtient maintenant

$$L \leq \frac{1 - \delta^{1-\alpha}}{1 - \delta} \frac{C}{1 - \alpha}$$

pour tout $0 < \delta < 1$. Enfin, en faisant $\delta \rightarrow 1$, on obtient $L \leq C$ ce qui conclut la démonstration. ■

3.4. Développements asymptotiques.

3.4.1. Polynômes de Bernoulli.

On peut être plus précis que le simple résultat de comparaison série-intégrale, par exemple pour estimer les sommes partielles de la série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Pour cela, introduisons d'abord les polynômes de Bernoulli.

Soit $x > 0$, la fonction $F : (x, z) \rightarrow \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$ est une fonction holomorphe en z pour $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < 2\pi\}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particulier, à x fixé, F admet un développement en série entière de rayon de convergence $\geq 2\pi$ de la forme

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

où $B_n(x) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(x, 0)$. En particulier, B_n est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et nous allons montrer que B_n est en fait un polynôme. Si on pose $b_n = B_n(0)$ de sorte que

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

et $e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$ alors le produit de Cauchy de ces deux séries s'écrit

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k} x^k}{k!(n-k)!} \right) z^n$$

ce qui montre que $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} b_{n-k} x^k$ qui est donc un polynôme de degré n .

Definition 3.32 (Polynômes et nombres de Bernoulli)

Pour $n \geq 0$, les *nombres de Bernoulli* sont obtenus par la *série génératrice*

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Les *polynômes de Bernoulli* sont définis pour $n \geq 0$ par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} b_{n-k} x^k.$$

Les premiers termes se calculent par un développement limité

$$F(x, z) = \frac{1 + xz + \frac{x^2}{2}z^2 + o(z^2)}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + o(z^2)} = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)z + \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)z^2 + o(z^2)$$

donc $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Une observation supplémentaire est que

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}z \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z \cosh \frac{z}{2}}{2 \sinh \frac{z}{2}}$$

est paire et s'écrit par ailleurs

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = B_0(0) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n(0)}{n!} z^n = b_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

donc $b_n = B_n(0) = 0$ lorsque $n \geq 2$ est impair.

Ensuite, $B'_n(x) = \frac{\partial^{n+1} F}{\partial z^n \partial x}(x, 0)$ (avec Schwarz) qui fournit donc le n -ième coefficient de Taylor de

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, z) = \frac{z^2 e^{xz}}{e^z - 1} = zF(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n B_{n-1}(x)}{n!} z^n$$

soit $B'_n = n B_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Enfin,

$$F(1-x, z) = \frac{ze^{(1-x)z}}{e^z - 1} = \frac{ze^{-xz}e^z}{e^z - 1} = \frac{(-z)e^{x(-z)}}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_n(x)}{n!} z^n$$

donc $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. On en déduit que $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ et donc que, si n est pair $B_n(1) = B_n(0)$ et si $n \geq 2$ est impair, on a $B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = 0 = B_n(0)$. Ensuite, pour $n \geq 1$

$$\int_0^1 B_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(x) dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0.$$

Enfin, revenons aux nombres de Bernoulli qui sont donnés par

$$F(0, z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

donc

$$\begin{aligned} z &= F(0, z)(e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

avec un produit de Cauchy. En particulier, si $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$ soit, en isolant b_{n-1} ,

$$\frac{b_{n-1}}{(n-1)!} = - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = - \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k.$$

On en déduit une relation de récurrence pour b_n , $n \geq 1$.

Résumons les propriétés que nous allons utiliser en un lemme :

Lemme 3.33

Les polynômes de Bernoulli vérifient, $B_0 = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et, pour $n \geq 2$,

$B'_n = nB_{n-1}$ et $B_n(0) = B_n(1)$ et, pour $n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$.

Enfin, les nombres de Bernoulli $b_n = B_n(0)$ vérifient $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$ et les b_n vérifient la relation de récurrence :

$$b_n = - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Nous pouvons maintenant donner le résultat clé de cette section :

Théorème 3.34 (Formule de sommation d'Euler-Mac Laurin)

Soient $m < n$ deux entiers et $f : [m, n] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. alors

$$\begin{aligned} (3.14) \quad \sum_{k=m}^n f(k) &= \int_m^n f(t) dt + \frac{f(m) + f(n)}{2} \\ &\quad + \sum_{j=2}^r \frac{(-1)^j B_j(0)}{j!} [f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(m)] + R_r \end{aligned}$$

où

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n B_r(t - [t]) f^{(r)}(t) dt.$$

Notons que le terme $\sum_{j=2}^r \frac{B_j(0)}{j!} [f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(m)]$ n'apparaît qu'à partir de $r = 2$.

De plus, comme $B_j(0) = 0$ lorsque j est impair, on écrit souvent cette formule à l'ordre $2r$

$$(3.15) \quad \sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(t) dt + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m)] - \tilde{R}_r$$

où

$$\tilde{R}_r = \frac{1}{(2r)!} \int_m^n B_{2r}(t - [t]) f^{(2r)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. On va procéder par récurrence. Pour $r = 1$, on utilise que $B'_1 = 1$ et on intègre par partie : on obtient

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t) dt &= \int_k^{k+1} B'_1(t - k) f(t) dt \\ &= [B_1(t - k) f(t)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B_1(t - k) f'(t) dt \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} B_1(t - [t]) f'(t) dt \end{aligned}$$

puisque $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$. On somme ensuite de k allant de m à $n - 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_m^n f(t) dt &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_m^n B_1(t - [t]) f'(t) dt \\ &= \sum_{k=m}^n f(k) - \frac{f(m) + f(n)}{2} - \int_m^n B_1(t - [t]) f'(t) dt \end{aligned}$$

qui est bien l'expression voulue.

On suppose maintenant l'expression valable au rang r et tout ce qu'il suffit de remarquer, c'est qu'on passe de R_r à R_{r+1} par une intégration par parties : on utilise le fait que

$$B_r = \frac{1}{r+1} B'_{r+1}$$

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n B_r(t - [t]) f^{(r)}(t) dt \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} B'_{r+1}(t - k) f^{(r)}(t) dt \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{k=m}^{n-1} \left([B_{r+1}(t - k) f^{(r)}(t)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B_{r+1}(t - k) f^{(r+1)}(t) dt \right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{k=m}^{n-1} (B_{r+1}(1) f^{(r)}(k+1) - B_{r+1}(0) f^{(r)}(k)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{r+2}}{(r+1)!} \int_m^n B_{r+1}(t - [t]) f^{(r+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Enfin, $B_{r+1}(1) = B_{r+1}(0)$ quand $r \geq 1$, donc on a une somme télescopique

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{k=m}^{n-1} (B_{r+1}(1)f^{(r)}(k+1) - B_{r+1}(0)f^{(r)}(0)) \\ = \frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}(0)}{(r+1)!} [f^{(r)}(n) - f^{(r)}(m)] \end{aligned}$$

qui donne bien

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}(0)}{(r+1)!} [f^{(r)}(n) - f^{(r)}(m)] + R_{r+1}$$

comme voulu. ■

Note pour les candidats à l'agrégation

Pour un développement à l'agrégation, on peut se contenter du cas $r = 2$ pour un développement un peu moins ambitieux et dans ce cas, on détermine B_1 et B_2 par les propriétés qu'on souhaite : $B'_1 = 1$ et $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, $B_1(1) = \frac{1}{2}$ donc $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ puis $B'_2 = 2B_1$ (le facteur 2 est pratique car il simplifie les calculs) donc $B_2(x) = x^2 - x + c$ où c est déterminé par la propriété $\int_0^1 B_2(x) dx = 0$ qui donne $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$ soit $c = \frac{1}{6}$.

3.4.2. Asymptotique d'Euler de la série harmonique.

Donnons comme première application l'approximation de la série d'Euler que nous avons déjà utilisée dans l'exercice sur le critère de Gauss 3.20 :

Théorème 3.35 (Asymptotique d'Euler)

Il existe une constante γ (appelée constante d'Euler) telle que, lorsque $N \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(n^{-6}).$$

DÉMONSTRATION. Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et appliquons la formule (3.15) à f définie sur

$[1, +\infty)$ par $f(t) = \frac{1}{t} = t^{-1}$ de sorte que $f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j j!}{t^{j+1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} H_n &= \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j} \left(1 - \frac{1}{n^{2j}}\right) - (2r+1) \int_1^n \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt \\ &= \ln n + \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j} - (2r+1) \int_1^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt \right) \\ &\quad + \frac{1}{2n} - \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2jn^{2j}} + \int_n^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt. \end{aligned}$$

En utilisant que B_{2r} est un polynôme et est donc continu donc borné sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{|B_{2r}(t - [t])|}{t^{2r+1}} dt \leq \sup_{[0,1]} |B_{2r}| \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2r+1}} dt < +\infty.$$

De plus,

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt \right| \leq \sup_{[0,1]} |B_{2r}| \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{2r+1}} dt = O(n^{-2r}).$$

On vient donc d'écrire

$$H_n = \ln n + \gamma_r + \frac{1}{2n} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{B_{2j}(0)}{2j} \frac{1}{n^{2j}} + O(n^{-2r}).$$

On en déduit que $H_n - \ln n \rightarrow \gamma_r$ quand $n \rightarrow +\infty$ et en particulier, γ_r ne dépend pas de r . On écrit donc $\gamma = \gamma_r$.

L'expression de B_2 donne $B_2(0) = \frac{1}{6}$. Un calcul un peu plus pénible donne $B_4 = -\frac{1}{30}$ ce qui donne l'expression voulue. ■

Remarque 3.36

La démonstration précédente laisse penser que $\tilde{R}_r$ n'est pas un reste puisque notre estimation nous a montré qu'il est du même ordre que le dernier terme de la somme qui le précède. Même si cela n'est pas utile, montrons qu'on a en fait un peu mieux :

$$\begin{aligned} \int_n^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt &= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{B_{2r}(t - k)}{t^{2r+1}} dt \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} B_{2r}(t - k) \left(\frac{1}{t^{2r+1}} - \int_k^{k+1} \frac{ds}{s^{2r+1}} \right) dt \end{aligned}$$

puisque $\int_k^{k+1} B_{2r}(t - k) dt = 0$. Mais, avec le théorème de la moyenne, pour chaque k , il existe $s_k \in [k, k+1]$ tel que $\int_k^{k+1} \frac{ds}{s^{2r+1}} = \frac{1}{s_k^{2r+1}}$. Par suite, pour $t \in [k, k+1]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t^{2r+1}} - \int_k^{k+1} \frac{ds}{s^{2r+1}} \right| &= \left| \frac{1}{t^{2r+1}} - \frac{1}{s_k^{2r+1}} \right| \\ &\leq |t - s_k| \sup_{s \in [t, s_k]} \frac{2r+1}{s^{2r+2}} \leq \frac{2r+1}{k^{2r+2}} \end{aligned}$$

avec l'inégalité des accroissements finis et le fait que $[t, s_k] \subset [k, k+1]$ (donc $|t - s_k| \leq 1$). Mais alors

$$\begin{aligned} \int_n^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r+1}} dt &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sup_{[0,1]} |B_{2r}| \int_k^{k+1} \frac{2r+1}{k^{2r+2}} dt \\ &\leq (2r+1) \sup_{[0,1]} |B_{2r}| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{2r+2}} = O(n^{-2r-1}). \end{aligned}$$

3.4.3. Formule de Stirling.

Une seconde application de la formule de sommation d'Euler-MacLaurin est la suivante :

Théorème 3.37 (Formule de Stirling)

Pour tout $r \geq 1$, on a

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \left(\sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + O(n^{-2r}) \right).$$

En particulier, on a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

DÉMONSTRATION. Cette fois-ci, nous allons considérer $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty)$ de sorte que

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!$$

tandis que

$$\int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

De plus, pour $j \geq 1$, $f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1} (j-1)! x^{-j}$.

On applique alors la formule (3.15) et on trouve

$$\begin{aligned} \ln n! &= n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j(2j-1)} \left(\frac{1}{n^{2j-1}} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2r} \int_1^n \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r}} \, dt \\ &= \ln \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n} + \left(1 + \frac{1}{2r} \int_1^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r}} \, dt - \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j(2j-1)} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} - \frac{1}{2r} \int_n^{+\infty} \frac{B_{2r}(t - [t])}{t^{2r}} \, dt \\ &= \ln \frac{\theta_r \sqrt{n} n^n}{e^n} + \sum_{j=1}^r \frac{B_{2j}(0)}{2j(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + O(n^{-2r}) \end{aligned}$$

avec le même raisonnement que plus haut pour obtenir le $O(n^{-2r})$. Là encore on peut arrêter la somme à $r-1$ et mettre un $O(n^{-2r+1})$, ce qui est un peu plus simple.

À nouveau, θ_r ne dépend pas de r et on le note donc θ , mais, contrairement à la constante d'Euler, θ se calcule explicitement.

On a donc $n! \sim \theta \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n}$. On va utiliser les intégrales de Wallis

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \begin{cases} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 2p \\ \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}.$$

Cela provient d'un calcul direct pour $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ et ensuite deux intégrations par partie montrent que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Enfin, comme W_n est clairement décroissant ($0 \leq \sin t \leq 1$ sur $[0, \pi/2]$)

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

ce qui montre que $1 \sim \frac{W_{n+1}}{W_n}$. En particulier, $n! \sim \theta \frac{\sqrt{nn^n}}{e^n}$

$$1 \sim \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{2}{\pi} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)[(2p)!]^2} \sim \frac{2\theta^2}{\pi} \frac{p^2}{2p(2p+1)} \sim \frac{\theta^2}{2\pi}$$

montrant que $\theta = \sqrt{2\pi}$ comme voulu. ■

3.5. Séries semi-convergentes.

3.5.1. Séries alternées.

Le théorème des suites adjacentes peut se reformuler comme suit :

Lemme 3.38 (Critère des séries alternées)

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $v_n = (-1)^n |v_n|$ avec $|v_n|$ qui décroît et tend vers 0. Alors

$$\begin{aligned} & - \sum v_n \text{ converge;} \\ & - \left| \sum_{n=m+1}^{+\infty} v_n \right| \leq |v_{m+1}|. \end{aligned}$$

Remarque 3.39

Il faut noter que la décroissance de $|v_n|$ est essentielle. Un exemple courant est le suivant si $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ alors $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(n^{-2})$ est la somme de 3 suites, la première et la dernière donnent des séries convergentes mais la seconde donnera une série divergente. Par suite, $\sum v_n$ diverge.

DÉMONSTRATION. On pose $u_N = \sum_{n=0}^N v_n$ de sorte que $u_0 = v_0$ et de plus :

- (i) $u_{2n+2} = u_{2n} + |v_{2n+2}| - |v_{2n+1}| \leq u_{2n}$. Ainsi (u_{2n}) est une suite décroissante puisque $|v_m|$ décroît.
- (ii) $u_{2n+1} = u_{2n-1} - |v_{2n+1}| + |v_{2n}| \geq u_{2n-1}$. Ainsi (u_{2n-1}) est une suite croissante puisque $|v_m|$ décroît.
- (iii) $u_{2n} - u_{2n-1} = |v_{2n}| \rightarrow 0$ puisque $|v_m| \rightarrow 0$.

Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes de sorte qu'elles ont une limite commune. Celle-ci est donc la limite de u_n i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n |v_n|$ qui converge bien ■

Exemple 3.40

Soit $\alpha > 0$, pour $-1 \leq x \leq 0$, la série $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge (il y a même convergence uniforme sur $[-1, 0]$). En effet, $\frac{x^n}{n^\alpha} = (-1)^n \frac{|x|^n}{n^\alpha}$ et $|x|^n$, $n^{-\alpha}$ étant positives décroissantes, il en va de même pour $\frac{|x|^n}{n^\alpha}$ d'où la convergence de la série. Notons que le reste se majore alors par

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \rightarrow 0$$

ce qui donne la convergence uniforme. En particulier, on a pour $-1 < x < 1$,

$$(3.16) \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le membre de gauche est continue en $x = -1$. Pour le membre de droite, on a convergence uniforme de la série sur $[-1, 0]$, donc celle-ci définit une fonction continue sur $[-1, 0]$. Ainsi, l'identité (3.16) se prolonge par continuité en $x = -1$ et on en déduit que

$$-\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

3.5.2. Sommation d'Abel.

La technique de sommation d'Abel consiste à faire une “intégration par partie discrète” : si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites complexe telles que

– (v_n) est facile à sommer (ou du moins, la somme des v_n est facile à estimer), on pose

alors $s_{-1} = 0$ et, pour $n \geq 0$, $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ de sorte que $v_n = s_n - s_{n-1}$

– (u_n) est une suite telle que $u_{n+1} - u_n$ décroît plus vite que u_n .

On fait ensuite le calcul simple suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q u_n v_n &= \sum_{n=p}^q u_n (s_n - s_{n-1}) = \sum_{n=p}^q u_n s_n - \sum_{n=p}^q u_n s_{n-1} \\ &= \sum_{n=p}^q u_n s_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} u_{n+1} s_n \\ (3.17) \quad &= u_q s_q - u_p s_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) s_n \end{aligned}$$

où on a simplement fait un changement d'indice de sommation dans la deuxième ligne. Dans la troisième ligne, on fait un regroupement des deux sommes en enlevant un terme dans chacune des deux afin de sommer sur le même ensemble (il y a plusieurs façons de faire). Le signe $-$ devant la dernière somme est ici pour faire apparaître l'analogie avec

une intégration par parties, on pourrait tout aussi bien écrire $+\sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) s_n$.

Definition 3.41 Transformation d'Abel

La formule (3.17)

$$\sum_{n=p}^q u_n v_n = \sum_{n=p}^q u_n (s_n - s_{n-1}) = u_q s_q - u_p s_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) s_n$$

est appelée la *formule d'Abel* ou la *transformation d'Abel* de la série $\sum u_n v_n$.

C'est plus la technique simple que la formule qu'il convient de connaître. Toutefois, notons, qu'on peut en déduire le résultat suivant :

Lemme 3.42 (Abel)

Soit (u_n) , une suite positive décroissante qui tend vers 0. Soit (v_n) une suite telle que, si on pose $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ alors la suite (s_n) est bornée. Alors $\sum u_n v_n$ converge.

Remarque 3.43

Notons tout de suite qu'on ne suppose pas que $\sum v_n$ converge, simplement que les sommes partielles sont bornées, ce qui est plus faible, sauf quand v_n est de signe constant.

DÉMONSTRATION. Notez que u_n est ici une suite positive puisqu'elle tend vers 0 en décroissant.

On va montrer que $\sum u_n v_n$ vérifie le critère de Cauchy : soit M tel que $|s_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que, si $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Alors (3.17) nous montre que, si $p, q \geq N$,

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n v_n \right| \leq |u_q s_q| + |u_p s_{p-1}| + \sum_{n=p}^{q-1} |u_{n+1} - u_n| |s_n| \leq 2M\varepsilon + M \sum_{n=p}^{q-1} |u_{n+1} - u_n|.$$

Mais, comme u_n est décroissante, $|u_{n+1} - u_n| = u_n - u_{n+1}$ et la dernière somme est donc télescopique :

$$\sum_{n=p}^{q-1} |u_{n+1} - u_n| = u_p - u_{q+1} \leq u_p \leq \varepsilon$$

et donc $\left| \sum_{n=p}^q u_n v_n \right| \leq 3M\varepsilon$ comme voulu. ■

Notez qu'en faisant $q \rightarrow +\infty$, la démonstration donne en fait une estimation du reste

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} u_n v_n \right| \leq 2Mu_p.$$

On peut aussi remarquer que dans la démonstration, on n'a en réalité utilisé que le fait que $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge (il suffit d'utiliser le critère de Cauchy pour cette série).

Le critère des séries alternées est un cas particulier de ce lemme avec $v_n = (-1)^n$ dont les sommes partielles sont bornées par 2. Plus généralement, si on prend $v_n = e^{2i\pi n\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors

$$s_n = \sum_{k=0}^n e^{2i\pi k\theta} = \frac{1 - e^{2i\pi(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\pi\theta}}$$

puisque $e^{2i\pi\theta} \neq 1$. Ainsi $|s_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{2i\pi\theta}|}$ et (s_n) est borné. On en déduit l'exemple suivant :

Exemple 3.44

Soit $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi n\theta}}{n^\alpha}$$

converge (et même uniformément en $\theta \in]\theta_0, 1 - \theta_0[+ \mathbb{Z}$ pour $0 < \theta_0 < 1/2$, la somme est donc une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

Notez aussi que la transformation d'Abel transforme la série en une série qui converge plus rapidement. En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on part d'une série semi-convergente pour arriver à une série absolument convergente.

3.5.3. Lemme de Kronecker.

Théorème 3.45 Lemme de Kronecker

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série convergente et soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs, croissante et telle que $b_n \rightarrow +\infty$. Alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k a_k \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad s_0 = 0.$$

Par hypothèse, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $s_n \rightarrow s$. Comme $a_k = s_k - s_{k-1}$, une sommation d'Abel donne

$$\sum_{k=1}^n b_k a_k = \sum_{k=1}^n b_k (s_k - s_{k-1}) = b_n s_n - \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) s_k.$$

Posons $r_k = s_k - s$, de sorte que $r_k \rightarrow 0$. Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1,$$

on obtient

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k a_k = r_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k + \frac{b_1 s}{b_n}.$$

Le premier et le dernier termes tendent vers 0. Montrons qu'il en est de même du terme central.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|r_k| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Pour $n > N$,

$$\frac{1}{b_n} \left| \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k \right| \leq \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + \frac{\varepsilon}{b_n} \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k).$$

La première quantité tend vers 0, puisqu'il s'agit d'une constante divisée par b_n , tandis que la seconde est majorée par

$$\varepsilon \frac{b_n - b_N}{b_n} \leq \varepsilon.$$

Le terme central tend donc vers 0, ce qui termine la démonstration. ■

Le cas $a_n = \frac{u_n}{n}$, $b_n = n$ nous donne directement le corollaire suivant :

Corollaire 3.46 S

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \longrightarrow 0.$$

Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k \longrightarrow 0.$$

La seconde assertion est une conséquence directe de la première mais aussi du lemme de Césaro : si $\sum a_n$ converge, alors $a_n \rightarrow 0$ donc converge aussi vers 0 au sens de Césaro.

Exemple 3.47

Soit $\alpha \in (0, 1)$ et considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n n^\alpha$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n^{\alpha-1}$$

converge d'après le critère des séries alternées, puisque la suite $n^{\alpha-1} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ est décroissante et tend vers 0. Le lemme de Kronecker, appliqué à la série $\sum_{n \geq 1} u_n/n$,

donne alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k k^\alpha \rightarrow 0.$$

Ce résultat est remarquable puisque la suite $((-1)^n n^\alpha)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée. On ne peut donc pas l'obtenir en appliquant directement le lemme de Césaro à une suite convergente.

Le cas $\alpha = 1$ montre que la condition $\alpha < 1$ est critique. En effet,

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k = (-1 + 2) + (-3 + 4) + \cdots + (-(2m-1) + 2m) = m,$$

de sorte que

$$\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k k = m - (2m+1) = -m-1,$$

et donc

$$\frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k k = -\frac{m+1}{2m+1} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la suite des moyennes

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k k \right)_{n \geq 1}$$

ne converge pas.

3.5.4. Séries de Rademacher.

Théorème 3.48 Séries de Rademacher)

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Alors la série aléatoire

$$\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n a_n$$

converge presque sûrement si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty.$$

Remarque 3.49

Le théorème montre que, pour une série à signes indépendants et équiprobables, la condition naturelle de convergence n'est pas l'absolue sommabilité

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| < +\infty,$$

mais la sommabilité quadratique

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty.$$

La démonstration de la condition suffisante repose sur l'inégalité maximale de Kolmogorov.

Lemme 3.50 (Inégalité maximale de Kolmogorov)

Soient $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes, centrées et de carré intégrable. Posons

$$S_k = \sum_{j=1}^k X_j.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |S_k| \geq \lambda \right) \leq \frac{\text{Var}(S_N)}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ MAXIMALE. Pour $1 \leq k \leq N$, posons

$$A_k = \{|S_1| < \lambda, \dots, |S_{k-1}| < \lambda, |S_k| \geq \lambda\}.$$

Les événements $A_1, \dots, A_N$ sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{k=1}^N A_k = \left\{ \max_{1 \leq k \leq N} |S_k| \geq \lambda \right\}.$$

Sur A_k , on écrit $S_N = S_k + (S_N - S_k)$. L'événement A_k et la variable S_k ne dépendent que de $X_1, \dots, X_k$, tandis que $S_N - S_k$ est indépendant de ces variables et centré. Par conséquent,

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{A_k} S_k (S_N - S_k)] = 0.$$

Il vient alors

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{A_k} S_N^2] = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{A_k} S_k^2] + \mathbb{E} [\mathbb{1}_{A_k} (S_N - S_k)^2] \geq \lambda^2 \mathbb{P}(A_k).$$

En sommant sur k , on obtient

$$\mathbb{E}(S_N^2) \geq \lambda^2 \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(A_k).$$

Comme S_N est centré, $\mathbb{E}(S_N^2) = \text{Var}(S_N)$, et donc

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |S_k| \geq \lambda \right) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(A_k) \leq \frac{\text{Var}(S_N)}{\lambda^2}.$$



DÉMONSTRATION 8 DU THÉORÈME.

Supposons d'abord que $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty$. Posons $S_N = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n$. Choisissons une suite strictement croissante d'entiers $(N_j)_{j \geq 1}$ telle que $\sum_{n > N_j} a_n^2 \leq 2^{-3j}$.

Pour $M > N_j$, appliquons l'inégalité maximale de Kolmogorov aux variables $\varepsilon_{N_j+1} a_{N_j+1}, \dots, \varepsilon_M a_M$. On obtient

$$\mathbb{P} \left(\max_{N_j < m \leq M} |S_m - S_{N_j}| > 2^{-j} \right) \leq 2^{2j} \sum_{n=N_j+1}^M a_n^2 \leq 2^{-j}.$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, il vient

$$\mathbb{P} \left(\sup_{m > N_j} |S_m - S_{N_j}| > 2^{-j} \right) \leq 2^{-j}.$$

Comme $\sum_{j \geq 1} 2^{-j} < +\infty$, le lemme de Borel–Cantelli montre que, presque sûrement, il existe j_0 tel que, pour tout $j \geq j_0$, $\sup_{m > N_j} |S_m - S_{N_j}| \leq 2^{-j}$. La suite (S_N) est donc presque sûrement de Cauchy. Elle converge presque sûrement.

Supposons réciproquement que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n a_n$ converge presque sûrement.

On a alors nécessairement $\varepsilon_n a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ presque sûrement. Or $|\varepsilon_n a_n| = |a_n|$, de sorte que $a_n \rightarrow 0$.

Pour $m \leq n$, posons

$$T_{m,n} = \sum_{k=m}^n \varepsilon_k a_k.$$

La convergence presque sûre de (S_n) implique que $T_{m,n} \rightarrow 0$ presque sûrement, et donc en probabilité, lorsque m, n tendent vers l'infini.

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{itT_{m,n}}) \rightarrow 1$.

D'autre part, l'indépendance des variables ε_k donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{itT_{m,n}}) &= \prod_{k=m}^n \mathbb{E}(e^{it\varepsilon_k a_k}) \\ &= \prod_{k=m}^n \frac{e^{ita_k} + e^{-ita_k}}{2} \\ &= \prod_{k=m}^n \cos(ta_k). \end{aligned}$$

Prenons $t = 1$. Il existe une constante $c > 0$ telle que $0 < \cos x \leq e^{-cx^2}$ pour tout $|x| \leq \frac{1}{2}$. Comme $a_n \rightarrow 0$, cette inégalité s'applique à partir d'un certain rang. On obtient alors

$$0 \leq \prod_{k=m}^n \cos(a_k) \leq \exp \left(-c \sum_{k=m}^n a_k^2 \right).$$

Supposons par l'absurde que $\sum_{n \geq 1} a_n^2 = +\infty$. Pour tout m suffisamment grand, on peut choisir $n \geq m$ tel que $\sum_{k=m}^n a_k^2 \geq 1$. On aurait alors

$$\mathbb{E}(e^{iT_{m,n}}) = \prod_{k=m}^n \cos(a_k) \leq e^{-1},$$

ce qui contredit le fait que $\mathbb{E}(e^{iT_{m,n}}) \rightarrow 1$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty$. ■

Exemple 3.51

Prenons $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}$

converge presque sûrement si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

En revanche, elle ne converge absolument que pour $\alpha > 1$. En particulier, pour $\alpha = 1$, un choix aléatoire de signes rend presque sûrement convergente la série harmonique signée.

3.5.5. Réarrangement de Riemann.

Théorème 3.52 (Théorème de réarrangement de Riemann)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ soit semi-convergente. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$.

En d'autres termes, si on modifie l'ordre de sommation dans une série semi-convergente, on peut obtenir n'importe quel résultat.

DÉMONSTRATION. Rappelons que $\sum u_n$ semi-convergente signifie que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

Nous allons introduire $E_+ = \{n : u_n \geq 0\}$ et $E_- = \{n : u_n < 0\}$ qui forme donc une partition de $\mathbb{N}$. Aucun de ces deux ensembles ne peut être fini sans quoi la suite u_n serait de signe constant après un certain rang et la convergence de $\sum u_n$ entraînerait sa convergence absolue.

On note ensuite $u_n^+ = \max(u_n, 0) = \frac{u_n + |u_n|}{2}$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) = \frac{|u_n| - u_n}{2}$ les parties positives et négatives de la suite u_n . Ainsi $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes les deux somme d'une série convergente et d'une série divergente, donc elles divergent toutes deux (vers $+\infty$ puisque ce sont des séries à termes positifs).

On fixe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et on construit une permutation σ par récurrence en posant $\sigma(0) = 0$ puis, une fois $\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)$ construits, on pose

$$\sigma(n) = \begin{cases} \min\{E_+ \setminus \{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\}\} & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \leq \alpha \\ \min\{E_- \setminus \{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\}\} & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} > \alpha \end{cases}.$$

En d'autres termes, tant qu'on est en-dessous de α , on ajoute le premier terme positif qu'on n'a pas encore utilisé et tant qu'on est au-dessus, c'est le premier terme négatif qu'on ajoute.

Comme E_+ et E_- sont tous deux infinis, $\sigma(n)$ est bien défini. Il est aussi évident que σ est injectif (une fois l'entier $\sigma(k)$ choisi, il est éliminé par construction pour $n > k$). Montrons par l'absurde que ce σ est aussi surjectif sur $\mathbb{N}$ (donc σ est une bijection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ c'est-à-dire une permutation). Soit donc $N = \min \mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ qui existe si $\sigma(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$ et supposons que $N \in E_+$ (le cas $N \in E_-$ est similaire). Cela signifie qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $\sigma(n) \in E_-$ et, par construction, est une énumération de E_- i.e. $\{m \in E_- : m \geq \sigma(n_0)\} = \{\sigma(n) : n \geq n_0\}$. Mais alors, pour $n \geq n_0$,

$$\alpha < \sum_{m=0}^n u_{\sigma(m)} = \sum_{m=0}^{n_0-1} u_{\sigma(m)} + \sum_{m=n_0}^n u_{\sigma(m)} = \sum_{m=0}^{n_0-1} u_{\sigma(m)} - \sum_{\substack{m \in E_- \\ m \geq \sigma(n_0)}}^n u_{\sigma(m)}$$

ce qui contredit le fait que $\sum_{\substack{m \in E_- \\ m \geq \sigma(n_0)}}^n u_{\sigma(m)} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Notons aussi que lorsque n varie, $\sigma(n)$ ne peut rester ni dans E_+ ni dans E_- . Cela résulte de la démonstration de la surjectivité de σ mais est aussi une propriété de toute permutation, vu que E_+, E_- sont infinis.

Nous allons maintenant montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ converge et vaut α . Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \rightarrow 0$, il existe donc N_ε tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, $|u_n| \leq \varepsilon$. On définit ensuite $M_\varepsilon = \max \sigma^{-1}(\{0, \dots, N_\varepsilon\})$ de sorte que, si $m \geq M_\varepsilon$, $\sigma(m) \geq N_\varepsilon$ et donc $|u_{\sigma(m)}| < \varepsilon$.

Posons maintenant $S_n = \sum_{m=0}^n u_{\sigma(m)}$. Comme $\sigma(m)$ ne peut rester ni dans E_+ ni dans E_- , il existe $M \geq M_\varepsilon$ tel que $\sigma(M) \in E_+$ i.e. $S_{M-1} \leq \alpha$ et $\sigma(M+1) \in E_-$ i.e. $\alpha < S_M = S_{M-1} + u_{\sigma(M)} \leq S_{M-1} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon$. Montrons par récurrence sur m que $\alpha - \varepsilon \leq S_{M+m} \leq \alpha + \varepsilon$. On vient de voir que c'est vrai pour $m = 0$, supposons que ce soit vrai au rang m . Mais alors, comme $S_{M+m+1} = S_{M+m} + u_{\sigma(M+m+1)}$ on a deux possibilités :
 - soit $\alpha - \varepsilon \leq S_{M+m} \leq \alpha$ et alors, par construction $\sigma(M+m+1) \in E_+$ et $M+m+1 \geq M_\varepsilon$ donc $0 \leq u_{\sigma(M+m+1)} \leq \varepsilon$ et alors $\alpha - \varepsilon \leq S_{M+m+1} \leq \alpha + \varepsilon$;
 - soit $\alpha < S_{M+m} \leq \alpha + \varepsilon$ et alors, par construction $\sigma(M+m+1) \in E_-$ et $M+m+1 \geq M_\varepsilon$ donc $-\varepsilon \leq u_{\sigma(M+m+1)} \leq 0$ et ainsi $\alpha - \varepsilon \leq S_{M+m+1} \leq \alpha + \varepsilon$.

On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe M tel que, si $m \geq M$, $|S_m - \alpha| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire que $S_m \rightarrow \alpha$ comme annoncé. ■

Exercice 3.53

Dans cet exercice, nous utiliserons l'asymptotique d'Euler $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

(1) Soit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sigma_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$. En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- (2) On considère maintenant la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ obtenue de la façon suivante $b_1 = a_1 = 1$, $b_2 = a_3 = \frac{1}{3}$, $b_3 = a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = a_5 = \frac{1}{5}$... *i.e.* on prend deux termes positifs puis un terme négatif. $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Montrer que $S_{3n} = s_{4n} - \frac{1}{2}(s_n + s_{2n})$ et en déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge et déterminer sa valeur.

3.6. Produit de Cauchy. Pour comprendre le produit de Cauchy de deux séries, il convient de passer d'une série numérique à une série entière *formelle i.e.* de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ à $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.

Mais alors, si on a deux séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ leur produit est donné par

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n z^{m+n} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{m+n=p} u_m v_n \right) z^p$$

en regroupant les termes de même degré. Cela conduit à introduire la notion suivante :

Definition 3.54

Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles ou complexes. Le *produit de Cauchy* des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{p \geq 0} w_p$ de terme général $w = u * v$ donné par

$$w_p = \sum_{m+n=p} u_m v_n = \sum_{n=0}^p u_n v_{p-n} = \sum_{n=0}^p u_{p-n} v_n.$$

La première difficulté est que le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être divergent. En effet, si $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ alors

$$w_p = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \frac{(-1)^{p-n}}{\sqrt{p-n+1}} = (-1)^p \sum_{n=0}^p \frac{1}{\sqrt{n+1} \sqrt{p-n+1}}.$$

Mais, pour $-1 \leq x \leq p+1$ on a $(x+1)(p+1-x) \leq \left(\frac{p}{2}+1\right)^2$ donc

$$|w_p| \geq \frac{p+1}{\frac{p}{2}+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

quand $p \rightarrow +\infty$ donc la série $\sum w_p$ diverge (grossièrement).

Le problème ici est que les deux séries ne sont que semi-convergentes. À l'opposé, on a

Théorème 3.55 (Cauchy)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy converge absolument et de plus, en notant $u * v = (w_p)$,

$$(3.18) \quad \sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit en fait essentiellement du théorème de Fubini pour la mesure de comptage. On commence par supposer que $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ de sorte que $w_p \geq 0$. On note $T_N = \{(m, n) \in \mathbb{N} : m + n \leq N\}$ et $Q_N = \{(m, n) \in \mathbb{N} : m, n \leq N\}$ de sorte que $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subset T_N \subset Q_N$ et alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{N/2} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{N/2} v_n \right) &= \sum_{(m,n) \in Q_{N/2}} u_m v_n \leq \sum_{(m,n) \in T_N} u_m v_n \\ &= \sum_{p=0}^N w_p \\ &\leq \sum_{(m,n) \in Q_N} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^N u_m \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Cela montre que la série $\sum w_p$ converge puis, en faisant $N \rightarrow +\infty$ que

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} w_p \leq \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

c'est-à-dire le résultat pour les séries à termes positifs.

Par suite, comme on a clairement $|w| \leq |u| * |v|$ si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, $\sum w_n$ également. Il reste donc à montrer (3.18). Pour cela, on estime les erreurs commises dans les inégalités ci-dessus puisque

$$\sum_{(m,n) \in Q_N} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^N u_m \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \rightarrow \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

quand $N \rightarrow +\infty$ et que

$$\sum_{(m,n) \in T_N} u_m v_n = \sum_{p=0}^N w_p \rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$$

quand $N \rightarrow +\infty$. Il reste donc à voir que la différence de ces deux quantités tend vers 0.

Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in Q_N} u_m v_n - \sum_{m,n \in T_N} u_m v_n &= \sum_{(m,n) \in Q_N \setminus T_N} u_m v_n \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=N-m+1}^N u_m v_n \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} u_m \sum_{n=N-m+1}^N v_n + \sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^N u_m \sum_{n=N-m+1}^N v_n. \end{aligned}$$

Remarquons que dans l'avant dernière somme, comme $m \leq N/2$, $n = N - M + 1 \geq N/2$. Par suite, l'inégalité triangulaire (et l'ajout de quelques termes positifs) nous donne

$$\left| \sum_{(m,n) \in Q_N} u_m v_n - \sum_{m,n \in T_N} u_m v_n \right| \leq \left(\sum_{m \geq 0} |u_m| \right) \sum_{n \geq N/2} |v_n| + \sum_{m \geq N/2} |u_m| \sum_{n \geq 0} |v_n|.$$

Mais $\sum |u_m|, \sum |v_n| < +\infty$ donc $\sum_{m \geq N/2} |u_m|, \sum_{n \geq N/2} |v_n| \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ donc

$$\sum_{(m,n) \in Q_N} u_m v_n - \sum_{m,n \in T_N} u_m v_n \rightarrow 0$$

comme annoncé. ■

On peut en fait faire un peu mieux :

Théorème 3.56 (Mertens)

Si la $\sum u_n$ est semi-convergente et $\sum v_n$ est absolument convergente, alors leur produit de Cauchy converge et de plus, en notant $u * v = (w_p)$,

$$(3.19) \quad \sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

DÉMONSTRATION. On note $U_N = \sum_{m=0}^N u_m \rightarrow U = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m$ avec la convention $U_{-1} = 0$ de

sorte que $u_m = U_m - U_{m-1}$ pour tout $m \geq 0$. On note ensuite $V_N = \sum_{n=0}^N v_n \rightarrow V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et enfin

$$\begin{aligned} W_P &= \sum_{p=0}^N w_p = \sum_{(m,n): m+n \leq P} u_m v_n = \sum_{(m,n): m+n \leq P} (U_m - U_{m-1}) v_n \\ &= \sum_{(m,n): m+n \leq P} U_m v_n - \sum_{(m,n): m+n \leq P} U_{m-1} v_n \\ &= \sum_{(m,n): m+n \leq P} U_m v_n - \sum_{(m,n): m+n \leq P-1} U_m v_n \\ &= \sum_{(m,n): m+n=P} U_m v_n = \sum_{n=0}^P U_{P-n} v_n. \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe M, N tels que, pour $m \geq M$, $|U_m - U| \leq \varepsilon$ et pour $n \geq N$, $|v_n| \leq \varepsilon/M$. On prend en outre $C > 0$ tel que pour tout $P \geq M$, $\sum_{n=0}^{P-M} |v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \leq C$

et pour tout $m \geq 0$, $|U_m - U| \leq C$. Alors, si $P \geq N + M - 1$,

$$\begin{aligned}
 |W_P - UV_P| &= \left| \sum_{n=0}^P U_{P-n} v_n - U \sum_{n=0}^P v_n \right| = \left| \sum_{n=0}^P (U - U_{P-n}) v_n \right| \\
 &\leq \left| \sum_{n=0}^{P-M} (U - U_{P-n}) v_n \right| + \left| \sum_{n=P-M+1}^P (U - U_{P-n}) v_n \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{P-M} |U - U_{P-n}| |v_n| + \sum_{n=P-M+1}^P |U - U_{P-n}| |v_n| \\
 &\leq C\varepsilon + MC \frac{\varepsilon}{M} = 2C\varepsilon
 \end{aligned}$$

où on a utilisé que $P-n \geq P-(P-M) = M$ dans la première somme donc $|U - U_{P-n}| \leq \varepsilon$ et $n \geq P-M+1 \geq N+M-1-M+1 = N$ dans la seconde et que cette somme a $P - (P-M+1) + 1 = M$ termes.

Comme ε est arbitraire, on a bien montré que $W_P - UV_P \rightarrow 0$ et comme $UV_P \rightarrow UV$ on obtient le résultat voulu. ■

Remarque 3.57

Ce théorème admet une réciproque : si pour toute série convergente $\sum u_n$, on a $\sum (u * v)_n$ est également convergente, alors $\sum |v_n|$ converge.

C'est une conséquence (facile) du théorème de Banach-Steinhaus qui n'est pas (plus) au programme de l'agrégation : on considère $cv = \{(u_n) : (u_n)_{n \geq 0} \text{ converge}\}$ l'espace des suites convergentes muni de la norme $\|u_n\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$. C'est un espace de Banach (exercice).

On se donne (v_n) une suite telle que, pour toute suite u_n telle que $\sum u_n$ converge, alors $\sum (u * v)_n$ converge. Sur cv , on définit alors les formes linéaires L_N par $L_N u =$

$$\sum_{m+n=N} (u_m - u_{m-1}) v_n = \sum_{m+n=N} u_m v_n = (u * v)_N \text{ (avec la convention } u_{-1} = 0 \text{ pour } m+n \leq N$$

la première expression). On a $|L_N u| \leq \left(\sum_{n=0}^N |v_n| \right) \|u\|_\infty$ soit $\|L_N\| \leq \sum_{n=0}^N |v_n|$. Pour

l'inégalité inverse, on écrit $v_n = |v_n| e^{i\theta_n}$ et on prend $u_n = e^{-i\theta_n}$ pour $n \leq N$ et $u_n = 0$ pour $n > N$ de sorte que $u \in cv$ et que $L_N u = \sum_{n=0}^N |v_n|$, on obtient bien

que $\|L_N\| \geq \sum_{n=0}^N |v_n|$. Ainsi $\|L_N\| = \sum_{n=0}^N |v_n|$. En particulier, $\|v\|_1 = \sup_{N \geq 0} \|L_N\|$.

Comme (u_n) converge si et seulement si $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge, l'hypothèse sur (v_n) nous dit que, pour tout $u \in cv$, $\sum_N (u * v)$ converge ce qui implique que $(u * v)_N$ est borné, i.e. $\sup_{N \geq 0} |L_N u| < +\infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus implique alors que $\|v\|_1 = \sup_{N \geq 0} \|L_N\| < +\infty$.

Outre l'exemple ci-dessus qui montre que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes peut diverger, voici quelques exemples classiques qui montrent l'utilité du théorème :

Exemple 3.58

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0}$ définis par $u_n = \frac{x^n}{n!}$ et $v_n = \frac{y^n}{n!}$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = e^y$ et les deux séries convergent absolument. Par ailleurs

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

avec la formule du binôme de Newton. Ainsi, la formule de Cauchy nous donne $e^{x+y} = e^x e^y$.

Example 3.59

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x|, |y| < 1$ et $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0}$ définis par $u_n = x^n$ et $v_n = y^n$.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{1}{1-y}$ et les deux séries convergent absolument. Par ailleurs, si $y \neq 0$ et $x \neq y$,

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} = y^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{y}\right)^k = y^n \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{y^{n+1} - x^{n+1}}{y - x}$$

par sommation d'une suite géométrique. Si $x = y$ le calcul est plus simple puisqu'on a alors

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$$

(notez qu'on obtient la même chose en faisant $y \rightarrow x$ dans la formule précédente ce qui est légitime puisqu'on voit que $(u * v)_n$ dépend continûment de x et y par son expression en tant que somme). Enfin, si $y = 0$, c'est encore plus simple puisque

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} = x^n,$$

cette somme étant réduite à un seul point (là encore, on peut faire $y \rightarrow 0$ dans le premier calcul et obtenir le même résultat).

Le théorème de Cauchy nous donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(qui peut s'obtenir à l'aide de la dérivation des séries entières).

Il est utile de savoir que le produit de Cauchy d'une série convergente et d'une série divergente peut converger et même que le produit de Cauchy de deux séries divergentes peut converger.

Example 3.60

Soit (u_n) une suite et (v_n) défini par $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et $v_n = 0$ pour $n \geq 2$. Alors $(u * v)_0 = u_0$ et, pour $n \geq 1$,

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n v_k u_{n-k} = u_n - u_{n-1}.$$

En prenant $u_n = 1$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} (u * v)_n = 1$ avec une série absolument convergente

bien que $\sum u_n$ diverge. Plus généralement, si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $0 < \alpha \leq 1$, on a

$$|u_n - u_{n-1}| = \left| \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} \right| \sim \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

(avec les accroissements finis) donc à nouveau $\sum_{n=0}^{+\infty} (u * v)_n$ converge absolument bien

que $\sum u_n$ diverge.

Par contre, si $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, alors

$$|u_n - u_{n-1}| = \left| \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\alpha} \right| \sim \frac{2}{n^\alpha}$$

et cette fois-ci $\sum_{n=0}^{+\infty} (u * v)_n$ diverge.

Exemple 3.61

Soit (u_n) défini par $u_0 = 1$ puis $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$ et (v_n) défini par $v_0 = -1$ puis $v_n = 1$ pour $n \geq 1$. Comme u_n, v_n ne tendent pas vers 0, $\sum u_n, \sum v_n$ divergent. Par ailleurs, $(u * v)_0 = u_0 v_0 = -1$, $(u * v)_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 1 - 1 = 0$ et, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} (u * v)_n &= \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = -u_n + u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k = -2^{n-1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 0 \end{aligned}$$

de sorte que $\sum (u * v)_n$ converge.

3.7. Accélération de convergence de séries.

3.7.1. La sommation d'Euler.

La méthode de sommation d'Euler est une méthode d'accélération de convergence particulièrement efficace pour sommer les séries alternées.

Commençons par la définir pour les suites.

Définissons T_a l'opérateur qui, à une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, associe la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ donnée par

$$v_n = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k.$$

En particulier, T_a est un opérateur linéaire.

Exemple 3.62

Les deux exemples les plus simples sont les suites constantes et les suites géométriques :

- Si $u_n = c$ pour tout n , alors $T_a u = c$ puisque $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$
- Si $u_n = cr^n$, alors $v = T_a u$ est donnée par $v_n = c \left(\frac{1+ar}{1+a} \right)^n$. Notez que si $|r| < 1$, alors $\left| \frac{1+ar}{1+a} \right| < 1$ donc si (u_n) converge, (v_n) aussi.

Nous verrons plus loin que c'est toujours le cas. La réciproque est fausse puisque, si $0 < a \leq 1$ et $u_n = (-1)^n$ alors $v_n = \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^n \rightarrow 0$ et si $a \geq 1$, on pose $r = -1/a$ de sorte que $u_n = r^n$ ne converge pas alors que $v_n = 0$.

Avant de poursuivre, commençons par signaler la propriété suivante :

Lemme 3.63

Si $a, b > 0$, $T_a T_b = T_c$ avec $c = \frac{ab}{1+a+b} > 1$.

DÉMONSTRATION. Notons que si $v = T_a u$, $w = T_b v = T_b T_a u$ alors

$$\begin{aligned}
 (1+b)^n w_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k v_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{1+a} \right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j u_j \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{1+a} \right)^k \sum_{j=0}^n \mathbf{1}_{j \leq k} \binom{k}{j} a^j u_j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{j \leq k} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{1+a} \right)^k \binom{k}{j} a^j u_j \\
 (3.20) \quad &= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \binom{k}{j} \left(\frac{b}{1+a} \right)^k \right] a^j u_j.
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.64

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et pour tout $0 \leq j \leq n$,

$$S_j(x) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \binom{k}{j} x^k = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.64. Pour $j = 0$, on trouve

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

puis

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x \frac{d}{dx} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x \frac{d}{dx} x^k = x \frac{d}{dx} S_0 \\ &= nx(1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

et enfin, pour $j = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} S_j(x) &= \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \frac{k(k-1) \cdots (k-j+1)}{j!} x^k = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} x^j \frac{d^j}{dx^j} x^k \\ &= \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^j \frac{d^j}{dx^j} x^k = \frac{x^j}{j!} \frac{d^j}{dx^j} S_0 \\ &= \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j} \end{aligned}$$

comme annoncé. ■

Avec ce lemme, (3.20) devient

$$\begin{aligned} (1+b)^n w_n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{b}{1+a} \right)^j \left(1 + \frac{b}{1+a} \right)^{n-j} a^j u_j. \\ &= \left(\frac{1+a+b}{1+a} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{ab}{1+a+b} \right)^j u_j. \end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que $\frac{(1+a)(1+b)}{1+a+b} = 1 + \frac{ab}{1+a+b}$. ■

La seconde observation est que T_a préserve la convergence des suites :

Proposition 3.65

Soit $a > 0$, si $u = (u_n)$ a une limite ℓ alors $T_a u$ converge également vers ℓ .

Notez que pour les suites géométriques, la convergence est légèrement plus rapide.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, comme les suites constantes sont invariantes par T_a , $T_a \ell = \ell$, on a $T_a u - \ell = T_a(u - \ell)$. On peut donc supposer que $\ell = 0$.

Soit M une borne de u_n , $|u_n| \leq M$. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que, si $n > N$, $|u_n| \leq \varepsilon$. On a alors, pour $n > N$,

$$\begin{aligned} |(T_a u)_n| &= \left| \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k \right| \leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k |u_k| \\ &\leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} a^k |u_k| + \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} a^k |u_k| \\ &\leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} a^k M + \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} a^k \varepsilon. \end{aligned}$$

La seconde somme se majore par la somme de $k = 0$ à N qui vaut ε . Pour la première, on observe que $\binom{n}{k}$ est croissante pour k allant de 0 à $n/2$. Ainsi, si $n \geq 2N$, tous ces

coefficients sont majorés par

$$\binom{n}{N} = \frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!} \leq \frac{n^N}{N!}.$$

Comme $a^k \leq \max(1, a^N)$ pour $k = 0, \dots, N$ et au final, on obtient la majoration

$$|(T_a u)_n| \leq \frac{N \max(1, a^N) M}{N!} \frac{n^N}{(1+a)^n} + \epsilon \leq 2\epsilon$$

en prenant n assez grand, par croissance comparée. ■

Definition 3.66

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ les sommes partielles de sa série $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (convergente ou non). Pour $a > 0$, la *transformation d'Euler* $T_a s$ est la transformation d'Euler des sommes partielles $(T_a s_n)$.
On dit que $\sum u_n$ converge au sens d'Euler vers ℓ si $T_a s_n \rightarrow \ell$.

Nous venons de voir que si $\sum u_n$ converge alors elle converge au sens d'Euler vers sa somme.

Proposition 3.67

Soit $a > 0$, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite et (v_n) la suite définie par

$$v_n = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k = \frac{a}{1+a} (T_a u)_n.$$

Alors $T_a s_n = \sum_{k=0}^n v_k$ i.e. la transformation d'Euler de (u_n) est la suite des sommes partielles de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(\sigma_n) = T(s_n)$ et écrivons $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ avec $v_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$. Alors,

comme $\binom{n}{n+1} = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_n &= \sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k s_k - \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k s_k \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - (1+a) \binom{n}{k} \right) a^k s_k. \end{aligned}$$

En utilisant $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, avec la convention $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} - a \binom{n}{k} \right) a^k s_k \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k s_k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{k+1} s_k \right) \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k (s_{k+1} - s_k) \\ &= \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=-1}^{n+1} \binom{n}{k} a^k u_k \end{aligned}$$

avec la convention $s_{-1} = 0$. ■

Le restant de cette section consiste à montrer que la transformation d'Euler permet dans certains cas d'accélérer la convergence.

Exemple 3.68

Appliquons ce procédé à la série

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < x < 1$$

(qui converge) avec $a = 1/x$. On en déduit que $\ln(1+x) = \sum v_n$ avec

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1/x}{(1+1/x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x}{k+1} = \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k dt \\ &= \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}}$$

qui revient à $\ln(1+x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+1/x}\right)$. La nouvelle série converge beaucoup plus vite lorsque x est proche de 1 (comme une série géométrique de raison $1/2$) et converge même pour tout $x > 0$.

3.7.2. Une seconde transformation d'Euler, transformation binomiale.

La méthode précédente requiert $a > 0$ pour accélérer la convergence. Toutefois toute la partie algébrique est maintenue tant que $a \neq -1$. Ce cas est intéressant en lui-même mais nécessite une renormalisation.

Definition 3.69

Soit $u = (u_n)$ une suite, sa *transformation binomiale* est la suite $v = Bu$ définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

Exemple 3.70

Supposons que $u = \delta_m$ i.e. $u_n = \delta_{n,m}$ (symbole de Kronecker). Alors

$$(Bu)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \binom{n}{m} (-1)^m & \text{si } n \geq m \end{cases}.$$

En particulier $(Bu)_m$ ne tend pas vers 0.

De même, pour $c \in \mathbb{R}$, si $u = (c^n)$ une suite géométrique, alors $(Bu)_n = (1-c)^n$ qui tend donc vers 0 si $0 < c < 2$ mais diverge si $c < 0$ et si $c \geq 2$.

On peut noter que $(Bu)_n = \lim_{a \rightarrow -1} (1+a)^n (T_a u)_n$. En adaptant la démonstration du lemme 3.63, il est facile de voir que $B(Bu) = Bu$. Cette opération est donc involutive. L'exemple précédent montre qu'on peut transformer une suite divergente en une suite convergente.

La deuxième observation est qu'on peut ré-écrire v_n à l'aide de l'opérateur de différence $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$. En effet, $(\Delta^0 u)_0 = u_0$ puis $(\Delta u)_0 = u_1 - u_0$ et ensuite

$$\begin{aligned} (\Delta^2 u)_0 &= (\Delta u)_1 - (\Delta u)_0 = u_2 - u_1 - (u_1 - u_0) \\ &= (-1)^0 \binom{2}{2} u_2 + (-1)^1 \binom{2}{1} u_1 + (-1)^2 \binom{2}{0} u_0. \end{aligned}$$

En continuant, on se rend donc compte du fait suivant :

Lemme 3.71

Pour tout m, n ,

$$(3.21) \quad (\Delta^n u)_m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{m+k}$$

En particulier,

- la transformation binomiale de (u_n) est donnée par $(Bu)_n = (-1)^n (\Delta^n u)_0$.
- Si $u_k \rightarrow 0$ alors, pour tout m , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} (\Delta^n u)_m = 0$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, (3.21) avec $m = 0$ donne $(Bu)_n = (-1)^n (\Delta^n u)_0$ puisque $(-1)^{n-k} = (-1)^n (-1)^k$.

Montrons maintenant (3.21) par récurrence sur n . Pour $n = 0$, cette formule se réduit à $u_m = u_m$ et pour $n = 1$, c'est la définition $(\Delta u)_m = -u_m + u_{m+1}$. Supposons que la relation soit vérifiée au rang n . Alors

$$\begin{aligned} (\Delta^{n+1} u)_m &= (\Delta^n \Delta u)_m \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (u_{m+1+k} - u_{m+k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} u_{m+k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} u_{m+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} u_{m+k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} u_{m+k} \end{aligned}$$

avec la convention $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$. On conclut en utilisant que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ pour $k = 0, \dots, n+1$.

Montrons enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} (\Delta^n u)_m = 0$ quand $u_n \rightarrow 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$ et soient N, M tels que, pour tout k , $|r_k| \leq M$ et, pour tout $k \geq N$, $|r_k| \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} r_k \right| &\leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^N \binom{p}{k} M + \frac{1}{2^p} \sum_{k=N+1}^p \binom{p}{k} \varepsilon \\ &\leq \frac{NMp^N}{2^p} + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour p assez grand.

La dernière ligne a été obtenue en utilisant $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} \leq p^N$ pour la première somme et $\sum_{k=N+1}^p \binom{p}{k} \leq \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}$ pour la seconde. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.72 (Euler)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\Delta^n u)_0}{2^{n+1}}.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par ré-écrire u_n : posons $\alpha_p = \frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n$ de sorte que $\alpha_0 = u_n$ et, en vertu du lemme 3.71, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = 0$. On a donc $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (\alpha_p - \alpha_{p+1})$ c'est-à-dire

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right).$$

L'étape suivante consiste à ré-écrire

$$(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n ((\Delta^p u)_n + 2(\Delta^{p+1} u)_n).$$

Pour cela, on écrit $\alpha = (\Delta^p u)_n$ donc

$$2\Delta^p u + \Delta^{p+1} u = (2I + \Delta)\Delta^p u = ((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1})_n.$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (-1)^n ((\Delta^p u)_n + 2(\Delta^{p+1} u)_n) &= (\Delta^p u)_0 + (\Delta^p u)_1 - (\Delta^p u)_1 - (\Delta^p u)_2 + \cdots \\ &\quad + (-1)^N (\Delta^p u)_N + (-1)^N (\Delta^p u)_{N+1} \\ &= (\Delta^p u)_0 + (-1)^N (\Delta^p u)_{N+1} \rightarrow (\Delta^p u)_0 \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow +\infty$.

En multipliant par $\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}$ on obtient donc

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n \right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 &= \sum_{p=0}^N \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^N \left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(u_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}}(\Delta^{N+1} u)_n \right). \end{aligned}$$

La première ligne étant une somme (finie) de séries convergentes, la dernière série est convergente. Comme $\sum (-1)^n u_n$ converge, il s'en suit que $\sum (\Delta^{N+1} u)_n$ aussi. On vient donc de montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\Delta^{N+1} u)_n.$$

En utilisant (3.21), on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n &= \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 - \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+k} \binom{N+1}{k} u_{n+k} \\ &= \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 - \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n u_n. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge, $R_k := \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n u_n \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Ainsi, comme

remarqué au début de cette démonstration, $\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} R_k \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, ce qui donne le résultat cherché. ■

4. Produit infini

4.1. Convergence de produits infinis.

Definition 4.1

Soit $(z_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes *non nuls*. On dit que le produit infini

$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge vers ℓ et on note $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n = \ell$ si la suite des produits $p_k = \prod_{n=1}^k z_n$ converge vers ℓ .

Notez qu'on définit de la même façon $\prod_{n=N+1}^{+\infty} z_n$ qui existe si et seulement si $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ existe et dans ce cas $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n = \left(\prod_{n=1}^N z_n \right) \left(\prod_{n=N+1}^{+\infty} z_n \right)$. En particulier, en faisant $N \rightarrow +\infty$, on trouve $\ell = \ell \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=N+1}^{+\infty} z_n$ et cette dernière limite existe dès que $\ell = 1$ et vaut alors 1.

La difficulté dans l'usage des produits infinis est qu'il est difficile d'utiliser le critère de Cauchy pour les produits. En effet, il faudrait estimer, pour $N > K$

$$p_N - p_K = \prod_{n=1}^N z_n - \prod_{n=1}^K z_n = \left(\prod_{n=1}^K z_n \right) \left(\prod_{n=K+1}^N z_n - 1 \right)$$

et il n'y a *a priori* pas de méthode générale pour faire cela.

Toutefois, le lemme suivant est une exception car il consiste à écrire $\prod z_n = \exp(\sum \log z_n)$. Il convient ici d'être prudent. Si les z_n sont des réels positifs, on a $\log \prod z_n = \sum \log z_n$ mais, pour des nombres complexes, cette formule peut être fautive. Par exemple $\log e^{3i\pi/4} = 3i\pi/4$ (dans la détermination principale du logarithme) mais $(e^{3i\pi/4})^2 = e^{-i\pi/2}$ donc $\log(e^{3i\pi/4})^2 = -i\pi/2 \neq 2 \log e^{3i\pi/4}$. La démonstration consiste à contourner cette difficulté.

Lemme 4.2

Soit $(z_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $z_n \neq -1$ pour tout entier n .

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ converge, alors le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z_n)$ converge vers un nombre $\ell \neq 0$. De plus, cette convergence et la limite correspondante ne dépendent pas de l'ordre des termes.

DÉMONSTRATION. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ converge, il existe N tel que, pour $n \geq N$, $|z_n| < \frac{1}{2}$.

Tout d'abord, observons qu'il suffit de montrer que $\prod_{n=N}^{+\infty} (1 + z_n)$ converge. En effet, en remarquant que $\prod_{n < N} (1 + z_n) \neq 0$, si $\prod_{n=N}^{+\infty} (1 + z_n)$ converge vers $\tilde{\ell} \neq 0$, $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z_n)$ converge vers $\ell = \tilde{\ell} \prod_{n < N} (1 + z_n)$. Ainsi, quitte à remplacer la suite (z_n) par (z_{n+N}) , on peut donc supposer que $|z_n| < \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Mais alors $\log(1 + z_n)$ est défini par la série entière

$$\log(1 + z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z_n^{k+1}}{k+1}$$

D'autre part $1 + z_n = \exp(\log(1 + z_n))$ et donc,

$$\prod_{n=1}^N (1 + z_n) = \prod_{n=1}^N \exp(\log(1 + z_n)) = \exp\left(\sum_{n=1}^N \log(1 + z_n)\right).$$

Ainsi si $\sum_{n=1}^N \log(1 + z_n)$ converge, il en va de même de $\prod_{n=1}^N (1 + z_n)$.

Il suffit alors de remarquer que

$$|\log(1 + z_n)| = |z_n| \left| \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{z_n^{j+1}}{j+1} \right| \leq |z_n| \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \right| = 2|z_n|.$$

Le critère de comparaison nous dit alors que, puisque $\sum z_n$ converge absolument, il en va de même de $\sum \log(1 + z_n)$ et alors

$$\prod_{n=1}^N (1 + z_n) \rightarrow \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + z_n) \right) \neq 0.$$

On pourra noter aussi que si σ est une permutation de $\mathbb{N}^*$, alors $\sum \log(1 + z_{\sigma(n)})$ converge encore vers la même limite donc $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z_{\sigma(n)})$ converge et sa limite ne dépend pas de σ . ■

Remarque 4.3

Si les z_n sont des fonctions sur un ensemble A plutôt que des nombres complexes, alors la même démonstration montre que si $\sum |z_n(t)|$ converge uniformément sur A , il en va de même pour $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z_n(t))$ et que cette fonction ne s'annule qu'aux t pour lesquels il existe n tel que $z_n(t) = -1$.

4.2. Quelques exemples.

Exemple 4.4

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

La convergence de ce produit est immédiate puisque $\sum \left| 1 - \frac{1}{n^2} - 1 \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ converge. Pour déterminer sa valeur, on remarque que

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}} \\ &= \frac{\frac{3}{1} \frac{4}{2}}{\frac{2}{1} \frac{3}{2}} \cdots \frac{\frac{N}{N-1} \frac{N+1}{N}}{\frac{N-1}{N-2} \frac{N}{N-1}} = \frac{\frac{N+1}{2}}{\frac{2}{1}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puisque ce produit est télescopique.

Exemple 4.5 Le produit d'Euler

Le *produit d'Euler* est l'expression suivante du sinus

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

et ce produit converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION. Si K est compact, il est borné donc inclus dans un disque $K \subset \overline{D(0, R)}$. Mais alors, si $z \in K$, $\left| 1 - \frac{z^2}{k^2} - 1 \right| = \frac{|z|^2}{k^2} \leq \frac{R^2}{k^2}$. Comme la série $\sum \frac{R^2}{k^2}$ converge, le produit

infini est bien uniformément convergent sur K . Il nous reste donc à identifier la limite du produit.

On commence par écrire

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{2n}\right)^{2n}$$

donc

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{z}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - i\frac{z}{2n}\right)^{2n} \right].$$

On pose alors

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{z}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - i\frac{z}{2n}\right)^{2n} \right].$$

En utilisant le binôme de Newton, on voit que P_n est un polynôme impair de degré $2n - 1$ et que son terme de plus petit degré est z (cela se voit aussi en calculant $P'_n(0)$). Ses racines sont faciles à déterminer : tout d'abord $\zeta^{2n} = \xi^{2n}$ si et seulement s'il existe $k \in \{-n + 1, \dots, n\}$ tel que $\zeta = e^{ik\pi/n}\xi$ ou encore $e^{-ik\pi/2n}\zeta = e^{ik\pi/2n}\xi$. Les racines de P_n vérifient donc

$$e^{-ik\pi/2n} \left(1 - i\frac{z}{2n}\right) = e^{ik\pi/2n} \left(1 + i\frac{z}{2n}\right).$$

Il n'y a pas de solution quand $k = n$ et pour les autres k on trouve $z = 2n \tan \frac{k}{2n}\pi$. Ainsi, les racines de P sont $z_k = 2n \tan \frac{k\pi}{2n}$, $k \in \{-n + 1, \dots, n - 1\}$. En regroupant z_k et z_{-k} , on obtient donc une factorisation de P_n sous la forme

$$P_n(z) = \alpha_n z \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2n \tan \frac{k\pi}{2n} \right) = \beta_n z \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{2n \tan \frac{k\pi}{2n}} \right).$$

Il est un peu plus facile de déterminer β_n que α_n puisqu'en développant le produit on voit que β_n est le coefficient de z dans P_n i.e. $\beta_n = 1$ donc

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{z}{2n \tan \frac{k\pi}{2n}} \right)^2 \right).$$

Fixons z et posons $u_n(k) = \left(\frac{z}{2n \tan \frac{k\pi}{2n}} \right)^2$ pour $1 \leq k \leq n - 1$ et $u_n(k) = 0$ si $k \geq n$

de sorte que

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - u_n(k)).$$

Remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(k) = \left(\frac{z}{k}\right)^2 := a_k$ avec $0 \leq |u_n(k)| \leq |a_k|$ et $\sum |a_k|$ converge.

Enfin posons

$$Q_N(n) = z \prod_{k=1}^N (1 - u_n(k))$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |Q_{N+1}(n) - Q_N(n)| &= \left| z u_n(N+1) \prod_{k=1}^N (1 - u_n(k)) \right| \\ &\leq |z| |u_n(N+1)| \prod_{k=1}^N (1 + |a_k|) \\ &\leq |z| \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + |a_k|) |a_{N+1}| \end{aligned}$$

où le produit infini converge car $\sum a_k$ converge. Par suite $\sum_N (Q_{N+1}(n) - Q_N(n))$ converge uniformément en n et comme cette série est télescopique, cela signifie que Q_N converge uniformément en n .

On peut donc intervertir les limites en N et n et obtenir que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} z \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - u_n(k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} Q_N(n) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_N(n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} z \prod_{k=1}^N (1 - a_k) \\ &= z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\pi k} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

qui est la formule d'Euler.

Il y a d'autres façons de démontrer cette formule, la plus efficace est d'utiliser le théorème de factorisation de Hadamard des fonctions entières d'ordre fini. ■

Nous donnerons un autre exemple concernant la fonction ζ de Riemann dans le théorème ??.

5. Quelques applications en théorie des nombres

L'utilisation des séries se trouve dès l'origine de la construction des nombres.

En effet, l'idée naïve de construction des nombres réels consiste à considérer l'ensemble des nombres de la forme $\sum_{n=-N}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ avec $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ et $N \in \mathbb{Z}$ qui correspond à

l'écriture décimale des nombres $a_N a_{-N+1} \cdot s a_0, a_1 a_{12} \dots$. C'est d'ailleurs souvent comme cela que les réels sont (ou du moins étaient) introduits au collège. Une première difficulté est que l'écriture décimale n'est pas unique. En fait, $\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9 \cdot 10^{-m}}{1 - 1/10} = 10^{-m+1}$ en d'autres termes, le nombre $0, a_1 \dots a_{m-2} a_{m-1} 9999 \dots$ avec $a_{m-1} \neq 9$ est en fait $0, a_1 \dots a_{m-2} (a_{m-1} + 1) 0000 \dots$.

Mais la principale difficulté n'est pas là : il faut pouvoir donner un sens à la série et pour cela, il faut construire un ensemble dans lequel toutes ces séries convergent... Une solution consiste à construire $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}}$, le complété des rationnels. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

5.1. Une surprenante formule pour π .

Proposition 5.1 (Bailey, Borwein, Plouffe)

On a

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

DÉMONSTRATION. Notons que, comme

$$\left| \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right| \leq \frac{4}{8n+1} + \frac{2}{8n+4} + \frac{1}{8n+5} + \frac{1}{8n+6}$$

qui est donc ≤ 8 . La valeur absolue du terme général de la série est borné par $\frac{8}{16^n}$ donc la série est bien convergente.

La clé de cette formule est d'écrire cette série comme une intégrale d'une fraction rationnelle, puis de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples et de la calculer.

Pour cela, on observe que

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8} dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{k-1+8n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2^{-1/2}} x^{k-1+8n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-(k+8n)/2}}{k+8n} \\ &= \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}. \end{aligned}$$

Ici, on utilise que la série entière $\sum x^{k-1+8n}$ a pour rayon de convergence $R = 1 > 2^{-1/2}$ pour intervertir sommation et intégration et que $2^{4n} = 16^n$ pour conclure le calcul.

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \\ = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4 \times \sqrt{2}(1-x^4) - 8(x^3+x^5)}{1-x^8} dx \\ = 4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^4} - 4 \int_0^{1/2} \frac{t+t^2}{1-t^4} dt \end{aligned}$$

où on a factorisé le numérateur et le dénominateur par $1-x^4$ dans la première intégrale et fait un changement de variable $t = x^2$ dans la seconde. On a donc deux décompositions en éléments simples à faire.

Pour la première, on factorise

$$x^4 + 1 = (x - e^{i\pi/4})(x - e^{-i\pi/4})(x - e^{3i\pi/4})(x - e^{-3i\pi/4})$$

d'où on déduit la décomposition

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{a}{x - e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{a}}{x - e^{-i\pi/4}} + \frac{b}{x - e^{3i\pi/4}} + \frac{\bar{b}}{x - e^{-3i\pi/4}}.$$

On multiplie par $x - e^{i\pi/4}$ et on fait $x = e^{i\pi/4}$ pour obtenir

$$a = \frac{1}{(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{-3i\pi/4})} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

et on multiplie par $x - e^{3i\pi/4}$ et on fait $x = e^{3i\pi/4}$ pour obtenir

$$b = \frac{1}{(e^{3i\pi/4} - e^{i\pi/4})(e^{3i\pi/4} - e^{-i\pi/4})(e^{3i\pi/4} - e^{-3i\pi/4})} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{-1-i}{x - e^{i\pi/4}} + \frac{-1+i}{x - e^{-i\pi/4}} + \frac{1-i}{x - e^{3i\pi/4}} + \frac{1+i}{x - e^{-3i\pi/4}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right) \end{aligned}$$

en regroupant les termes par deux. On écrit ensuite

$$\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = -\frac{1}{2} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}(x-1/\sqrt{2}))^2+1}$$

et

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}(x+1/\sqrt{2}))^2+1}.$$

En intégrant ces termes, on aura un logarithme pour les 2 premiers et pour les seconds termes

$$\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \arctan(\sqrt{2}x + 1).$$

Ce terme vaut $\arctan \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$ à une constante près, on en déduit

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + 2 \arctan \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right) + C$$

et enfin

$$4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4 + 1} = \ln 5 + 2 \arctan 2.$$

On évalue maintenant la seconde intégrale. Comme

$$1 - t^4 = (1 - t^2)(1 + t^2) = (1 - t)(1 + t)(1 + t^2),$$

on peut écrire

$$\frac{t + t^2}{1 - t^4} = \frac{t}{(1 - t)(1 + t^2)} = \frac{a}{1 - t} + \frac{c + dt}{1 + t^2}.$$

On multiplie par $1 - t$ et on fait $t = 1$ pour obtenir $a = \frac{1}{2}$, on prend ensuite $t = 0$ pour obtenir $a + c = 0$ donc $c = -a$ et enfin on multiplie par t et on fait tendre t vers l'infini pour obtenir $-a + d = 0$ donc $d = a$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{1/2} \frac{t + t^2}{1 - t^4} dt &= \int_0^{1/2} \frac{dt}{1 - t} - \int_0^{1/2} \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{2t dt}{1 + t^2} \\ &= \ln 2 - \arctan \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} \\ &= -\arctan \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 5. \end{aligned}$$

Au final, on a donc

$$4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1 + x^4} - 4 \int_0^{1/2} \frac{t + t^2}{1 - t^4} dt = 2 \left(\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} \right) = \pi$$

en vertu de la formule $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ quand $x > 0$. Rappelons qu'on montre cette formule en constatant que la dérivée du membre de droite est nulle donc ce membre est constant et la constante s'obtient en évaluant en $x = 1$. ■

Cette formule permet de calculer la décomposition de π en base 16 *i.e.* en hexadécimales.

5.2. e est irrationnel.

Théorème 5.2

Le nombre $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est irrationnel.

Il va de soi que la série $\sum \frac{1}{k!}$ converge, par exemple avec le critère de d'Alembert, (et e est par définition sa somme).

DÉMONSTRATION. Notons $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ les sommes partielles de la série. Comme la série définissant e est à termes (strictement) positifs, la suite (u_n) est strictement croissante et sa limite vérifie $e > u_n$.

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3)} + \cdots \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right) \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n n!}.
 \end{aligned}$$

On pose alors $v_n = u_n + \frac{1}{n n!}$ de sorte que $u_n < e < v_n$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n n!} \rightarrow 0$.

Notons qu'une conséquence immédiate est que e n'est pas un entier puisque $2 < \frac{5}{2} = u_2 \leq e \leq \frac{11}{4} < 3$.

Supposons maintenant que e soit rationnel et écrivons $e = \frac{p}{q}$ la fraction réduite de e . Comme e n'est pas un entier $q > 1$. On a alors

$$n!u_n < n!e < n!v_n = n!u_n + \frac{1}{n}.$$

Mais $n!u_n$ est un entier et, en prenant $n \geq q > 1$, $\frac{1}{n}$ aussi (puisque q est un des facteurs de $n!$) et $n!u_n < n!e < n!u_n + 1$ une contradiction (un entier coincé entre deux entiers consécutifs). ■

Noter qu'on aurait aussi pu écrire $qn!u_n < n!p < qn!u_n + \frac{q}{n}$ et à nouveau $qn!u_n, n!p$ sont des entiers et $q/n < 1$ pour n assez grand, ce qui est un cas particulier du lemme suivant avec $q_n = n!$ et $p_n = n!u_n$:

Lemme 5.3

Soient p_n, q_n deux suites d'entiers et $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $0 < q_n a - p_n \rightarrow 0$ alors a est irrationnel.

DÉMONSTRATION. Si a est rationnel, $a = \frac{p}{q}$ et alors $\frac{|q_n p - p_n q|}{q} = |q_n a - p_n| > 0$. Mais alors $q_n p - p_n q$ est un entier non nul, donc $|q_n p - p_n q| \geq 1$ et on obtient la contradiction voulue

$$\frac{1}{q} \leq |q_n a - p_n| \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$. ■

5.3. π est irrationnel. Il est un peu moins commode de définir π . Une des façons de faire est de définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$ par sa série entière, puis $\cos x = \Re e^{ix}$, $\sin x = \Im e^{ix}$. On montre ensuite que $\sin$ est périodique et impaire, et on note 2π sa période puis on remarque que $\sin \pi = 0$ et enfin que $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$ et bornée par 1. Enfin, on montre que $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ et que $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. Ce sont ces propriétés que nous allons utiliser pour montrer :

Théorème 5.4

Le nombre π est irrationnel.

Il y a de nombreuses démonstrations de ce fait, par ordre chronologique, on peut mentionner Lambert, Hermite, Cartwright, Niven et Laczkovich pour les plus connues.

DÉMONSTRATION DE NIVEN. On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p, q

des entiers (strictement) positifs. On introduit ensuite $f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ et d'observer que f_n est un polynôme de degré $2n$ à des coefficients entiers divisés par $n!$. De plus, le terme de plus petit degré est x^n donc $f_n^{(j)}(0) = 0$ quand $j < n$. Quand $j \geq n$, on utilise la formule de Leibniz pour voir que

$$f_n^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{d^k x^n}{dx^k} \frac{d^{j-k} (p-qx)^n}{dx^{j-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{j}{k} \frac{d^k x^n}{dx^k} \frac{d^{j-k} (p-qx)^n}{dx^{j-k}}$$

puisque les dérivées d'ordre $\geq n+1$ de x^n sont nulles. Enfin quand on évalue en 0, on utilise $\frac{d^k x^n}{dx^k}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \end{cases}$ donc

$$f_n^{(j)}(0) = \frac{d^{j-n} (p-qx)^n}{dx^{j-n}}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, dans tous les cas $f_n^{(j)}(0)$ est un entier. Comme $f_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = f_n(x)$, la même chose est vraie en $\pi = p/q$: pour tout j , $f_n^{(j)}(0), f_n^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.

On introduit ensuite

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

qui prend des valeurs entières en 0 et en $\pi = \frac{p}{q}$. De plus

$$\frac{d}{dx} [F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x] = F_n''(x) \sin x + F_n(x) \sin x = f_n(x) \sin x.$$

Pour cette dernière expression, on remarque simplement que

$$F_n''(x) = f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots - (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

puisque $f_n^{(2n+2)} = 0$ (f_n est un polynôme de degré $2n$). Il en résulte que

$$\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = [F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x]_0^\pi = F_n(\pi) + F_n(0)$$

C'est donc un entier.

Enfin, posons $\varphi(x) = x(p-qx)$ de sorte que $\varphi'(x) = p-2qx$ donc $\varphi'(x) \geq 0$ sur $[0, p/(2q)] = [0, \pi/2]$ et $\varphi'(x) \leq 0$ sur $[\pi/2, \pi]$. Comme $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, on en déduit que sur $[0, \pi]$

$$0 \leq x(p-qx) \leq \varphi\left(\frac{p}{2q}\right) = \frac{p^2}{4q} = \frac{p\pi}{4}.$$

Il en résulte que

$$0 \leq f_n(x) \sin x \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{p\pi}{4}\right)^n.$$

Comme de plus f_n est continue et pas identiquement nulle, il en résulte que

$$0 < \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx \leq \pi \frac{1}{n!} \left(\frac{p\pi}{4}\right)^n.$$

En prenant n assez grand pour que $\pi \frac{1}{n!} \left(\frac{p\pi}{4}\right)^n < 1$, on en déduit que $\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx$ est un entier dans $]0, 1[$, une contradiction. ■

5.4. Approximation rationnelle. La construction de $\mathbb{R}$ montre que tout nombre réel s'approche par des rationnels. La question que nous nous posons ici est la vitesse à laquelle on peut approcher un nombre réel.

La première observation est qu'un rationnel s'approche mal par d'autres rationnels. En effet, si $\frac{p_0}{q_0}$ est une fraction réduite et si $\frac{p}{q}$ est une seconde fraction réduite, $\frac{p_0}{q_0} \neq \frac{p}{q}$ donc l'entier $p_0q - qp_0 \neq 0$, en particulier $|p_0q - qp_0| \geq 1$. alors

$$\left| \frac{p_0}{q_0} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{|q_0|} \frac{|p_0q - qp_0|}{|q|} \geq \frac{C}{|q|}$$

avec $C = 1/|q_0|$. En particulier, si $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ est une suite de rationnels qui converge vers $r = \frac{p_0}{q_0}$ alors $|r - r_n| \geq Cq_n^{-1}$. Nous verrons un résultat similaire pour les nombres algébriques dans la section suivante.

La situation est bien meilleure pour les irrationnels :

Théorème 5.5 (Dirichlet)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors il existe une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ telle que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Remarque 5.6 (Théorème de Hurwitz)

Ce résultat n'est pas optimal. Hurwitz a montré que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors il existe une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ telle que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}.$$

Il existe plusieurs démonstrations de ce fait, que ce soit à l'aide de suites de Farey, de fractions continues ou, de façon plus originale, de l'arbre de Stern-Brocot. La constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est optimale.

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer x par $-x$, p_n par $-p_n$ on peut supposer que $x \geq 0$.

Il suffit de montrer qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers (p, q) avec $p \geq 0$ et $q \geq 1$ tels que

$$(5.22) \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Pour un entier N , on considère alors l'ensemble de parties fractionnaires

$$\mathcal{F}_N = \{kx - [kx], k = 0, \dots, N\} \subset [0, 1[= \bigcup_{j=0}^{N-1} \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right[.$$

Il y a $N + 1$ entiers dans l'ensemble de gauche et N parties à droite. D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, l'un des intervalles $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right[$ contient donc au moins deux éléments de l'ensemble de gauche *i.e.* il existe $0 \leq k < \ell \leq N$ et $0 \leq j \leq N - 1$ tels que $kx - [kx], \ell x - [\ell x] \in \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right[$. On pose alors $q_N = \ell - k$ et $p_N = [\ell x] - [kx]$ deux entiers

avec $p_N \geq 0$ et $1 \leq q_N \leq N$. De plus

$$|q_N x - p_N| = |\ell x - [\ell x] - (kx - [kx])| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q_N}$$

ou encore $\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{1}{q_N^2}$.

Cela montre qu'il existe bien des fractions $\frac{p}{q}$ qui vérifient (5.22). S'il n'y avait qu'un nombre fini de telles fractions (réduites) $\frac{p}{q}$, il en existerait une pour laquelle $d = |qx - p|$ serait minimal. Comme $x \notin \mathbb{Q}$, $d > 0$. Il existe alors N tel que $0 < \frac{1}{N} < d$. On considère alors le couple (p_N, q_N) fourni par la construction précédente. On aurait alors $|q_N x - p_N| \leq \frac{1}{N} < d$, contredisant la minimalité de d . ■

Corollaire 5.7

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. La première est une conséquence directe d'un résultat bien connu que nous avons posé en exercice précédemment : les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont soit denses soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \geq 0$.

En effet, soit G un tel sous-groupe, si $G = \{0\}$ alors $G = 0\mathbb{Z}$. On suppose donc G que n'est pas de cette forme. Il existe alors $0 \neq x_0 \in G$ et, quitte à remplacer x_0 par $-x_0$, on peut supposer $x_0 > 0$. Alors

$$A = \{x \in G, x > 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc un inf qu'on note $a = \inf A$. On distingue deux cas

– Si $a = 0$, alors G est dense. En effet, il suffit de montrer que A est dense dans $\mathbb{R}^+$ et alors $-A$ sera dense dans $\mathbb{R}^-$. On prend donc $y > 0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\inf A = 0$, il existe $x \in A$ avec $0 < x < \varepsilon$. Il existe ensuite $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \leq y < (n+1)x < nx + \varepsilon$ donc $0 \leq y - nx < \varepsilon$. Comme $nx \in A$, on vient d'approcher y par un élément de A à ε près, montrant ainsi la densité de A dans $\mathbb{R}^+$.

– Si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$. En effet, tout d'abord $a \in G$ car sinon, il existe une suite (a_n) d'éléments de G tels que $a_{n+1} < a_n$ et $a_n \rightarrow a$. Mais alors $0 < a_n - a_{n+1} \rightarrow 0$ et ainsi, il existe n tel que $0 < a_n - a_{n+1} < a$ et comme $a_n - a_{n+1} \in G$, cela contredit la définition de G . Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na \in A$ et, s'il existait $b \in A$ qui n'était pas de cette forme, alors il existerait $n \in \mathbb{N}$ tel que $na < b < (n+1)a$ et donc $0 < (n+1)a - b < a$ alors que $(n+1)a - b \in A$. Cela contredit à nouveau la définition de a . Ainsi $A = a\mathbb{N}^*$ et au final $G = a\mathbb{Z}$.

Comme $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Nous allons montrer la contraposée : si $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ n'est pas dense, alors $\alpha \in \mathbb{Q}$. En effet dans ce cas, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. En particulier $1 \in \mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = aq$, i.e. $q \in \mathbb{Z}^*$ et $a = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$. Ensuite $1 + \alpha \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, il existe donc p tel que $1 + \alpha = ap$ i.e. $\alpha = \frac{p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$ comme annoncé.

Ce raisonnement ne s'applique pas à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ qui n'est en général pas un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (sauf si $\alpha \in \mathbb{Z}$ auquel cas $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} = \mathbb{Z}$). On suppose maintenant que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour montrer la densité de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, il faut montrer que si $a < b \in \mathbb{R}$, avec $b - a < 1$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $a < p + q\alpha < b$. On sait déjà que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe donc $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < r + s\alpha < b - a$. Notez que $s \neq 0$ quand on suppose $b - a < 1$. Si $s > 0$ alors $x := r + s\alpha \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$. On prend ensuite $n_0 \in \mathbb{Z}$ avec $n_0 < a$ et

on considère les nombres $kx + n_0 = kr + n_0 + ks\alpha \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Notez que la présence de n_0 assure que pour $k = 0$ on a un nombre $< a$ et, comme $x > 0$ ces nombres tendent vers l'infini avec k . Mais on passe d'un nombre au suivant avec un pas $x < b - a$, la longueur de l'intervalle a, b donc forcément on rencontre $]a, b[$ i.e. $]a, b[$ contient bien un élément de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$.

On peut aussi raisonner par l'absurde et dire que si ces nombres ne rencontrent pas $]a, b[$ alors il existerait k_0 tel que $k_0x + n_0 < a < b < (k_0 + 1)x + n_0$. En particulier $x > b - a$, une contradiction.

Enfin, si $s < 0$, on raisonne de la même façon en prenant $n_0 > b$ et en considérant $n_0 - kx$. ■

Exemple 5.8 (Densité de $\sin n$ dans $[-1, 1]$)

Pour tout n_0 , $\{\sin n, n \geq n_0\}$ est dense dans $[-1, 1]$ donc tous les nombres entre -1 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n \geq 0}$.

Pour la densité, comme $\{\sin n, 0 \leq n < n_0\}$ est fini, celle-ci est équivalente à la densité de $\{\sin n, n \geq 0\}$ (nous laissons en exercice de montrer que priver une partie dense d'une partie finie ne détruit pas la densité).

Ici, on utilise que π est irrationnel donc que $\mathbb{Z} + \frac{1}{2\pi}\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme $S : x \rightarrow \sin 2\pi x$ est continue, l'image de $\mathbb{Z} + \frac{1}{2\pi}\mathbb{N}$ par S est dense dans l'image de S . Comme $\sin 2\pi \left(m + \frac{1}{2\pi}n\right) = \sin n$, on obtient bien que $\{\sin n, n \geq 0\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exemple 5.9

La $\frac{1}{n \sin n}$ n'a pas de limite.

En effet, il existe une suite d'entiers $n_k \rightarrow +\infty$ tels que $\sin n_k \rightarrow 1$ donc $\frac{1}{n_k \sin n_k} \rightarrow 0$. La seule limite possible est donc 0.

On écrit ensuite $\sin n = \sin 2\pi \frac{n}{2\pi}$. Comme $\frac{1}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, d'après Dirichlet, il existe p_k, q_k avec $q_k \rightarrow +\infty$ tels que

$$\left| \frac{1}{2\pi} - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k^2}$$

ou encore $\left| \frac{q_k}{2\pi} - p_k \right| \leq \frac{1}{q_k}$. Mais alors

$$|\sin q_k| = \left| \sin 2\pi \frac{q_k}{2\pi} \right| = \left| \sin 2\pi \left(\frac{q_k}{2\pi} - p_k \right) \right| \leq \frac{1}{q_k}$$

et finalement

$$\frac{1}{q_k |\sin q_k|} \geq 1.$$

Ainsi, la suite $\frac{1}{n \sin n}$ ne peut tendre vers 0 et n'a donc pas de limite.

5.5. Construction d'un nombre transcendant. Nous allons maintenant construire un nombre transcendant. Rappelons les définitions suivantes :

Definition 5.10 (Nombres algébriques et transcendants)

Un nombre $a \in \mathbb{R}$ est *algébrique de degré d* s'il existe un polynôme Q de degré d à coefficients rationnels tel que $Q(a) = 0$ mais que $P(a) \neq 0$ si P est de degré $< d$ à coefficients rationnels.

On dira que a est *transcendant* s'il n'est pas algébrique.

En particulier si a est algébrique de degré d et si Q est un polynôme de degré d à coefficients rationnels tel que $Q(a) = 0$ alors a est racine simple de Q puisque sinon $Q'(a) = 0$ et Q' est de degré $d - 1$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable : Un polynôme de degré d a au plus d racines. Ainsi, notons $Z_Q = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$, alors son cardinal est $|Z_Q| \leq d$. Par ailleurs $\mathbb{Q}_d[x]$, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré d , qui est en bijection avec $\mathbb{Q}^{d+1}$, est dénombrable. Ainsi

$$\mathcal{A} = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}_d[X]} Z_Q$$

(ce n'est pas une réunion disjointe) est une réunion dénombrable d'ensembles finis et est donc dénombrable. Comme $\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ n'est pas fini.

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, les nombres transcendants, *i.e.* ceux qui ne sont pas algébriques, forment un ensemble non dénombrable. Le paradoxe est qu'il est difficile d'en trouver. Avant d'en construire un, montrons une propriété d'approximation des nombres algébriques :

Lemme 5.11 (Liouville)

Soit a un nombre algébrique de degré $d \geq 2$ (donc non rationnel). Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$.

Remarque 5.12 (Théorème de Roth)

Ce résultat est souvent appelé *l'inégalité de Liouville* et elle fournit un critère de transcendance. Si on peut trouver une suite de rationnels $(p_n/q_n)_n$ (sous forme réduite) telle que $\left|a - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{d+1}}$ alors a n'est pas algébrique de degré d . Donc, si on peut faire cela pour tout d , a n'est pas algébrique donc transcendant. Certains nombres transcendants (tels que e) échappent toutefois à ce critère.

Un résultat profond de Roth (qui lui a valu la médaille Fields en 1958) dit que, si a est algébrique de degré ≥ 2 , alors pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre de fractions réduites p/q telles que

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

est fini. Cela fournit un critère de transcendance plus fort.

DÉMONSTRATION. Soit Q de degré d à coefficients rationnels tel que $Q(a) = 0$. Comme a est algébrique de degré d , a est racine simple de Q , $Q'(a) \neq 0$.

Écrivons $Q(x) = \sum_{n=0}^d \frac{a_n}{b_n} x^n$ avec a_n, b_n des entiers. Quitte à multiplier Q par $\prod_{n=0}^d b_n$, on peut supposer que $b_n = 1$ et que Q est à coefficients entiers.

Comme $Q'(a) \neq 0$, il existe donc un voisinage $]a-r, a+r[$ tel que, pour $x \in]a-r, a+r[$, $\frac{|Q'(a)|}{2} \leq |Q'(x)| \leq 2|Q'(a)|$. Mais alors, si $t \in]a-r, a+r[$, il existe $x \in]a-r, a+r[$ tel que

$$|Q(t)| = |Q(t) - Q(a)| = |Q'(x)||t-a| \begin{cases} \leq 2|Q'(a)||t-a| \\ \geq \frac{|Q'(a)|}{2}|x-a| \end{cases} \quad \text{donc } Q \text{ n'a d'autre racine que}$$

a sur $]a-r, a+r[$.

Comme on a supposé que $a \notin \mathbb{Q}$, si p, q sont des entiers tels que $q > 0$ et $\frac{p}{q} \in]a-r, a+r[$ alors

$$0 \neq \left| Q\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{\left| \sum_{n=0}^d a_n q^{d-n} p^n \right|}{q^d} \geq \frac{1}{q^d}$$

puisque $\sum_{n=0}^d a_n q^{d-n} p^n$ est un entier non-nul. On en déduit que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\left| Q\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{2|Q'(a)|} \geq \frac{1}{2|Q'(a)|q^d}.$$

Par ailleurs, si $\frac{p}{q} \notin]a-r, a+r[$ avec $q \geq 1$ alors

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq r \geq \frac{r}{q^d}.$$

Le lemme en découle en posant $C = \min(r, \frac{1}{2|Q'(a)|})$. ■

Théorème 5.13 (Liouville)

Le nombre $\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est un nombre transcendant (appelé *nombre de Liouville*).

DÉMONSTRATION. La première observation est que la série converge puisque $\frac{1}{10^{n!}} \leq \frac{1}{10^n}$. Ensuite, sa limite est irrationnelle car en posant

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{k!}}$$

et en remarquant que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \leq \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}}$$

on a $u_n < \mathcal{L} < u_n + \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}}$. On applique alors le lemme 5.3 avec $q_n = 10^{n!}$ et $p_n = q_n u_n$.

Mais de plus,

$$0 < \left| \mathcal{L} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{9} \frac{1}{q_n^{n+1}}.$$

D'après le lemme 5.11, $\mathcal{L}$ n'est pas algébrique de degré $\leq n+1$. Comme n est arbitraire, $\mathcal{L}$ est bien transcendant. ■

5.6. La somme des inverses des premiers diverge. Soit $(p_n)_{n=1, \dots}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots$ À ce stade, cette suite pourrait encore être finie (mais il est facile de montrer que cela n'est pas le cas).

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 5.14

Pour N assez grand, $\sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{2} \log \log N$. A fortiori, il y a une infinité de nombres premiers et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

DÉMONSTRATION. La seconde partie résulte évidemment de la première puisque $\ln \ln N \rightarrow +\infty$ donc la somme n'a pas un nombre fini de termes.

La seule propriété des nombres premiers que nous allons utiliser est que tout nombre entier n est produit de facteurs premiers $\leq n$. En particulier, pour tout n , on écrit

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

et cette série converge (absolument). En notant $M = \pi(N)$ le nombre d'entiers premiers plus petits que N et en utilisant le produit de Cauchy,

$$\prod_{n:p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \prod_{n=1}^M \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k_1, \dots, k_M} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_M^{k_M}}.$$

Mais, comme dit plus haut, tout entier $\leq N$ s'écrit comme produit de nombres premiers $\leq N$ donc sous la forme $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_M^{k_M}$. Il en résulte que

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} \leq \prod_{n:p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}.$$

Mais ensuite, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $-\ln(1-x) \leq \frac{x}{\ln 2} \leq 2x$ (inégalité de convexité, faire un dessin), pour $t \geq 2$, $\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1} \leq e^{2/t}$ donc

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} \leq \prod_{n:p_n \leq N} e^{1/(p_n \ln 2)} = \exp \left(\frac{1}{\ln 2} \sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} \right).$$

Il reste à comparer

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} \geq \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N$$

pour obtenir le résultat. ■

On peut faire mieux en utilisant le théorème des nombres premiers qui nous dit que

$$\pi(N) = \frac{N}{\ln N} (1 + \varepsilon_N) \quad \varepsilon_N = O\left(\frac{1}{\ln N}\right)$$

et une sommation d'Abel. En effet, il suffit de remarquer que si $p_n \leq k < p_{n+1}$ alors $\pi(k) = \pi_{p_n} = \pi(p_{n-1}) + 1$ donc $\pi(k) - \pi(k-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Mais alors (en

utilisant que $\pi(1) = 0$ et la formule asymptotique de π)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} &= \sum_{k=1}^N \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{\pi(k-1)}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\pi(k)}{k+1} \\
 &= \frac{\pi(N)}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \pi(k) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{\pi(N)}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\pi(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} + \frac{\pi(N)}{N} \\
 &= \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k \ln k} + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{\varepsilon_k}{k \ln k} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} + \frac{\pi(N)}{N}.
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{\varepsilon_k}{k \ln k} = O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$ et $\frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2 \ln k}\right)$, les séries $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k \ln k}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)}$ convergent. Leurs sommes partielles sont donc $O(1)$ tout comme $\frac{\pi(N)}{N}$. Ainsi

$$\sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} = \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k \ln k} + O(1).$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k \ln k}$ diverge et $\frac{1}{k \ln k}$ décroît, ses sommes partielles sont équivalentes à l'intégrale $\int_2^N \frac{dx}{x \ln x}$ donc

$$\sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} \sim \int_2^N \frac{dx}{x \ln x}.$$

En faisant un changement de variable $t = \ln x$ on obtient

$$\int_2^N \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln N} \ln N \frac{dt}{t} = \ln \ln N - \ln \ln 2.$$

Nous venons donc de montrer le résultat suivant :

Théorème 5.15 (Mertens)

Si (p_n) désigne la suite des nombres premiers, alors quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{n:p_n \leq N} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln N.$$

Suites dans $\mathbb{R}^d$

Avant de passer à la suite, relisez le chapitre précédent et réfléchissez aux résultats qui restent vrais pour les suites vectorielles.

1. Relations de récurrence linéaire

Les suites récurrentes linéaires à pas ≥ 2 se ramènent à des suites multiples : on considère une suite donnée par $u_0, \dots, u_{p-1}$ et une relation de la forme

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

On introduit alors une matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{p-1,1} & I_{p-1} \\ a_0 & (a_1, \dots, a_{p-1}) \end{pmatrix}.$$

de sorte que $U_{n+1} = AU_n$.

Concentrons-nous maintenant sur l'étude de suites récurrentes $U_{n+1} = AU_n$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ générale. Notez que si A est une matrice réelle, elle est ici considérée comme complexe. Nous allons utiliser le résultat suivant de votre cours d'algèbre linéaire, que nous ne démontrons pas ici :

Théorème 1.1 (Décomposition de Jordan)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, alors il existe trois matrices $D, N, P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telles que

- (i) P est inversible ;
- (ii) D est diagonale et N est triangulaire supérieure nilpotente ;
- (iii) D et N commutent, $DN = ND$;
- (iv) $A = P(D + N)P^{-1}$.

Ce résultat est aussi appelé décomposition de Chevalley ou de Dunford... Rappelons que si $N^d = 0$ et que, comme D et N commutent, pour tout k ,

$$(D + N)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^{k-j} N^j = \sum_{j=0}^{\min(k, d-1)} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j.$$

De plus, si $U_{n+1} = AU_n$, alors $U_{n+1} = P(D + N)P^{-1}U_n$ donc, en posant $V_n = P^{-1}U_n$, on a $V_{n+1} = (D + N)V_n$ et donc $V_n = (D + N)^n V_0$ et, au final $U_n = PV_n =$

$P(D+N)^n P^{-1} U_0$. Cela montre en particulier que l'espace vectoriel des suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$ est un espace vectoriel de dimension p .

Dans le cas des suites récurrentes à 2 pas, $u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}$ (avec $a \neq 0$ sinon on a une suite géométrique à partir du rang $n = 1$), on introduit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ qui vérifie $U_{n+1} = AU_n$ avec A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. La réduction de Jordan est alors de la forme $A = P(D+N)P^{-1}$ avec D la matrice des valeurs propres. Celles-ci sont racine du polynôme caractéristique

$$P_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ a & b-x \end{pmatrix} = x^2 - bx - a$$

qu'on appelle aussi le polynôme caractéristique de la suite. On regarde donc le discriminant $b^2 + 4a$. Il y a alors 2 cas :

– Soit $b^2 + 4a \neq 0$ et le polynôme caractéristique a 2 racines distinctes λ_1, λ_2 . Par suite, la matrice A est diagonalisable. Dans la décomposition de Jordan, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

et $N = 0$. Il en résulte immédiatement que $U_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} U_0$. Cela montre que $u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

– Soit $b^2 + 4a = 0$ et le polynôme caractéristique a une racine double λ_0 . Notons que $\lambda_0 \neq 0$ puisqu'on a supposé que $a \neq 0$. Dans ce cas A n'est pas diagonalisable puisque sinon $A = P\lambda_0 I P^{-1} = \lambda_0 I$ ce qui n'est clairement pas le cas. Ainsi $D = \lambda_0 I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais alors $N^2 = 0$ donc, pour $n \geq 1$

$$(D+N)^n = \sum_{j=0}^1 \binom{n}{j} (\lambda_0 I_0)^{n-j} N^j = \lambda_0 I_0^n + n \lambda_0 I_0^{n-1} N.$$

On peut écrire cela $(D+N)^n = n \lambda_0 I_0^{n-1} (D+N) + (1-n) \lambda_0 I_0^n$ donc $A^n = P(D+N)^n P^{-1} = n \lambda_0 I_0^{n-1} A + (1-n) \lambda_0 I_0^n$ et enfin

$$U_n = A^n U_0 = n \lambda_0 I_0^{n-1} A U_0 + (1-n) \lambda_0 I_0^n U_0 = n \lambda_0 I_0^{n-1} U_1 + (1-n) \lambda_0 I_0^n U_0.$$

La première ligne donne $u_n = \lambda_0 I_0^{n-1} u_1 + (1-n) \lambda_0 I_0^n u_0 = u_0 \lambda_0 I_0^n + \left(\frac{u_1}{\lambda_0 I_0} - u_0 \right) n \lambda_0 I_0^n /$

En particulier, cela montre que $u_n = (\alpha + \beta n) \lambda_0^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Enfin, supposons que a, b, u_0, u_1 soient réels. Une récurrence immédiate montre alors que si $u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}$ alors u_n est réel pour tout n . On voudrait alors ré-écrire directement les formules précédentes pour que tout soit réel. Cela se fait comme suit :

– Si le discriminant $b^2 + 4a > 0$ alors les deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont réelles. On a toujours $u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cela se voit tout de suite puisque $\alpha = \frac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$

et $\beta = \frac{\lambda_1 u_1 - u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

– Si le discriminant $b^2 + 4a = 0$, alors $\lambda_0 = b/2 \in \mathbb{R}$ et $u_n = (\alpha + \beta n) \lambda_0^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. À nouveau, le fait que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$ se voit en les écrivant en fonction de u_0, u_1 .

– Si le discriminant $b^2 + 4a < 0$, alors les deux valeurs propres sont des complexes conjugués, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. On les écrit alors sous forme polaire $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$ (sinon les racines seraient réelles). Ainsi

$$u_n = \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta} = (\alpha + \beta) \rho^n \cos n\theta + i(\alpha - \beta) \rho^n \sin n\theta.$$

Ainsi, on peut écrire $u_n = \rho^n(a \cos n\theta + b \sin n\theta)$ avec $a = u_0 \in \mathbb{R}$ et $b = \frac{u_1}{\rho \sin \theta} - u_0 \cotan \theta$ donc $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Application à l'inversion numérique de matrices

2.1. Le rayon spectral d'une matrice.

Lemme 2.1 (Gelfand)

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$) alors pour toute matrice A , $\rho(A) = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe, ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Cette quantité est appelée le *rayon spectral* de la matrice. Lorsque la norme est subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$, alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Remarque 2.2

L'inégalité $\rho(A) \leq \|A\|$ n'est pas vraie pour toutes les normes (pour voir cela, il suffit de la remplacer la norme par un petit multiple). Elle est également vraie pour toute norme plus grande qu'une norme matricielle telle que la norme de Frobenius

$$(\text{Hilbert-Schmidt}) \text{ i.e. } \|[a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que la norme est de la forme $\|A\| = |||A|||$ où $|||\cdot|||$ est une norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$. Tout d'abord, il n'y a rien à faire quand A est nilpotente puisqu'il existe alors n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $A^n = 0$ donc $|||A^n|||^{1/n} = 0$ pour n assez grand et alors $\rho(A) = 0$. On suppose donc que A n'est pas nilpotente donc $|||A^n||| \neq 0$ pour tout n . On pose alors $u_n = \ln |||A^n|||$ et, puisque la norme est subordonnée, $|||A^{n+m}||| \leq |||A^n||| |||A^m|||$, de sorte que

$$u_{n+m} = \ln |||A^{n+m}||| \leq \ln |||A^n||| + \ln |||A^m||| = u_n + u_m.$$

Ainsi (u_n) est sous-additive donc $\lim \frac{u_n}{n}$ existe donc $\lim |||A^n|||^{\frac{1}{n}} = \lim \exp \frac{u_n}{n}$ aussi. Notez que $\lim \frac{u_n}{n} = \inf \frac{u_n}{n} \leq u_1$ implique $\rho(A) \leq \|A\|$.

Dans le cas général, il existe C tel que $\frac{1}{C} |||A||| \leq \|A\| \leq C |||A|||$ Alors

$$\frac{1}{C^{1/n}} |||A^n|||^{1/n} \leq \|A^n\|^{1/n} \leq C^{1/n} |||A^n|||^{1/n}.$$

Le membre de droite et celui de gauche tendent tous deux vers $\rho(A)$ donc $\lim \|A^n\|^{1/n}$ aussi, en particulier, cette limite ne dépend pas de la norme choisie.

Supposons maintenant que A soit une matrice complexe (si A est une matrice réelle, on considère ses valeurs propres complexes) et notons provisoirement

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Nous allons équiper $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (le contexte précisant si $\|\cdot\|$ est une norme d'une matrice ou d'un vecteur). Si λ est une valeur propre de A et si $v \neq 0$ est un vecteur propre associé alors, quitte à remplacer v par $\frac{1}{\|v\|}v$, on peut supposer que $\|v\| = 1$. De plus, v est aussi vecteur propre de $A^n v$ pour la valeur propre λ^n donc $\|A^n v\| = \|\lambda^n v\| = |\lambda|^n$. En particulier $\|A^n\| \geq |\lambda|^n$

donc $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq |\lambda|$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ on en déduit que $\rho(A) \geq |\lambda|$. Comme ceci est vrai pour toutes les valeurs propres, $\rho(A) \geq r(A)$.

Nous voulons maintenant montrer l'inégalité inverse, $\rho(A) \leq r(A)$. L'inégalité est triviale quand $\rho(A) = 0$, on peut donc supposer que $\rho(A) > 0$.

Rappelons ensuite que le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $P_A(A) = 0$ où P_A est le polynôme caractéristique de A , $P_A(x) = \det(A - xI)$. Ainsi

$$(-1)^d A^d + \sum_{j=1}^d (-1)^j \sigma_j A^{d-j} = 0$$

où $\sigma_1 = -\text{trace}(A)$, $\sigma_d = \det(A)$... et, de manière générale, les coefficients sont, au signe près, les fonctions symétriques élémentaires en les valeurs propres de la matrice (Formule de Newton). Il en résulte que

$$|\sigma_j| \leq \binom{d}{j} r(A)^j \leq \binom{d}{j} \rho(A)^j \leq \binom{d}{j} r(A) \|A\|^{j-1}.$$

Cayley-Hamilton implique alors que

$$\|A^d\| \leq \sum_{j=1}^d |\sigma_j| \|A^{d-j}\| \leq \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} r(A) \|A\|^{d-1}$$

soit finalement

$$(2.23) \quad \|A^d\| \leq (2^d - 1) r(A) \|A\|^{d-1}.$$

Remarquons ensuite que $r(A^m) = r(A)^m$ donc (2.23) appliqué à A^m donne

$$\|A^{md}\| \leq (2^d - 1) r(A)^m \|A^m\|^{d-1}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{md}$ on a donc

$$\|A^{md}\|^{\frac{1}{md}} \leq (2^d - 1)^{\frac{1}{md}} r(A)^{\frac{1}{d}} \|A^m\|^{\frac{d-1}{d} \frac{1}{m}}.$$

On fait ensuite tendre $m \rightarrow +\infty$ et on en déduit que $\rho(A) \leq r(A)^{\frac{1}{d}} \rho(A)^{\frac{d-1}{d}}$. Comme on a supposé que $\rho(A) > 0$, on peut simplifier par $\rho(A)^{\frac{d-1}{d}} = \rho(A)^{1-\frac{1}{d}}$ pour obtenir $\rho(A)^{\frac{1}{d}} \leq r(A)^{\frac{1}{d}}$ qui est l'inégalité voulue. ■

Le lemme suivant sera utile dans la prochaine section :

Lemme 2.3 (Householder)

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que la norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $\|\cdot\|$ vérifie $|||B||| < \rho(B) + \varepsilon$.

DÉMONSTRATION DU LEMME DE HOUSEHOLDER. On commence par triangulariser B : il existe une matrice T triangulaire supérieure et une matrice P inversible telle que $T = P^{-1}BP$. Notez que la diagonale de T contient les valeurs propres et qu'on peut faire cela de sorte que $|t_{j,j}| \leq |t_{n,n}| = \rho(B)$.

On considère alors $\delta > 0$ et la matrice $D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$ et $T_\delta = D_\delta^{-1}TD_\delta = (PD_\delta)^{-1}B(PD_\delta)$. Cette matrice est obtenue à partir de T en laissant la diagonale invariante, puis en multipliant la seconde diagonale par δ ... le coin supérieur droit par δ^{n-1}

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & t_{n,n} \end{pmatrix} \rightarrow T_\delta = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \delta t_{1,2} & \delta^2 t_{1,3} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \delta t_{2,3} & \cdots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On définit alors $\|x\|_\delta = \|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty$ et $|||\cdot|||_\delta$ la norme subordonnée. Par suite

$$|||B|||_\delta = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_\delta}{\|x\|_\delta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(PD_\delta)^{-1}Bx\|_\infty}{\|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|(PD_\delta)^{-1}PD_\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty}.$$

Ainsi $|||B|||_\delta = |||T_\delta|||_\infty$ où

$$\begin{aligned} |||T_\delta|||_\infty &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \|T_\delta x\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{j=1,\dots,n} \left| \sum_{k=1}^n T_\delta(j,k)x_k \right| \\ &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=j}^n |T_\delta(j,k)| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=j}^n |t_{j,k}| \delta^{k-j}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre δ suffisamment petit pour que, pour tout $j = 1, \dots, n-1$,

$$\sum_{k=j+1}^n |t_{j,k}| \delta^{k-j} \leq \varepsilon. \text{ Alors}$$

$$|||T_\delta|||_\infty \leq \max_{j=1,\dots,n} |t_{j,j}| + \varepsilon = |t_{n,n}| + \varepsilon = \rho(B) + \varepsilon$$

comme souhaité. ■

2.2. Méthodes itératives d'inversion de matrices. Nous allons maintenant utiliser les suites récurrentes pour calculer l'inverse d'une matrice (ou plus modestement la solution d'un système). Pour cela, rappelons que le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est le rayon du plus petit disque dans $\mathbb{C}$ qui contient toutes les valeurs propres (complexes) de A ou encore le maximum des modules des valeurs propres complexes de A (ou de façon équivalente des racines du polynôme caractéristique). On a montré dans le lemme 2.1 que $\rho(A) \leq \|A\|$ et que $\rho(A) = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Théorème 2.4 (Méthode itérative de résolution de système)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ un vecteur colonne. On suppose que A s'écrit sous la forme $A = M - N$ où M est également inversible. On définit alors la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0 \in \mathcal{M}_{n,1} \\ x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b. \end{cases}$$

Cette suite converge vers l'unique solution de l'équation $Ax = b$ si et seulement si le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Cette méthode n'a d'intérêt que si M est facile à inverser (et qu'on arrive facilement à montrer que A est inversible). Voici deux cas particuliers :

– *Méthode de Jacobi* : A est une matrice à diagonale $D = \text{diag } A$ strictement dominante, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. D'après le lemme de Hadamard, une telle matrice est inversible. Dans ce cas, on pose $M = D$ et donc $N = M - A$. On a alors $M^{-1}N = I - M^{-1}A$.

– *Méthode de Gauss-Seidel* : dans ce cas, on prend pour $M = D + T_{inf}$ où T_{inf} (resp. T_{sup}) est la partie triangulaire inférieure (resp. supérieure) de A (M est inversible s'il n'y a pas de zéro sur la diagonale) et pour $N = M - A = -T_{sup}$.

DÉMONSTRATION. L'idée de la méthode est que si on a une solution a , $Aa = b$ alors $Ma = Na + b$ donc $a = M^{-1}Na + M^{-1}b$ (et réciproquement) *i.e.* a est un point fixe de la fonction $f(x) = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ (et c'est le seul car A est inversible). Ce point fixe a est donc la seule limite possible de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

La suite de la méthode consiste donc à introduire $y_k = x_k - a$ alors y_k vérifie la relation de récurrence $y_{k+1} = M^{-1}Ny_k$. Par suite $y_k = (M^{-1}N)^k y_0$ et on veut montrer que y_k converge vers 0 quelle que soit la valeur initiale y_0 de la suite.

Supposons d'abord que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$. Dans ce cas, $M^{-1}N$ a un vecteur propre u ($\neq 0$) correspondant à une valeur propre λ $M^{-1}Nu = \lambda u$ avec $|\lambda| \geq 1$. Si on choisit $y_0 = u$ alors $y_k = \lambda^k u$ qui ne converge pas vers 0.

Le cas $\rho(M^{-1}N) < 1$ repose sur le lemme de Householder. On prend $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$ puis on choisit sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la norme $\|\cdot\|$ donnée par le lemme de Householder (toutes les normes étant équivalentes, on choisit celle qu'on veut). Ainsi on a toujours $\|M^{-1}N\| < 1$ et donc $\|(M^{-1}N)^k\| \leq \|M^{-1}N\|^k \rightarrow 0$ et alors $\|y_k\| = \|(M^{-1}N)^k y_0\| \leq \|(M^{-1}N)^k\| \|y_0\| \rightarrow 0$. ■

3. Application à la résolution d'équation $f(x) = 0$ en plusieurs variables.

Nous allons maintenant adapter l'algorithme de Newton au cas des fonctions de plusieurs variables :

Théorème 3.1 Algorithme de Newton en plusieurs variables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe un point $x_* \in \Omega$ tel que $f(x_*) = 0$ et $d_{x_*}f$ est inversible. Alors il existe un voisinage U de x_* tel qu'on puisse définir l'application F définie sur U par $F(x) = x - (d_x f)^{-1} f(x)$.

De plus, si $x_0 \in U$, la suite (x_n) définie à partir de x_0 par la formule de récurrence $x_{n+1} = F(x_n)$ est bien définie pour tout n , converge vers x_* et de plus la vitesse de convergence est *quadratique*, il existe $C > 0$ telle que $\|x_{n+1} - x_*\| \leq C\|x_n - x_*\|^2$.

DÉMONSTRATION. Nous allons identifier $\mathbb{R}^m$ avec les matrices colonne et que nous munissons de la norme $\|\cdot\|_2$. Les matrices (m, m) sont munies de la norme subordonnée. Pour alléger les notations, ces deux normes seront notées $\|\cdot\|$. Enfin, la différentielle est alors identifiée à la jacobienne de sorte que F s'écrit $F(x) = x - J_f(x)^{-1} f(x)$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U = B(x_*, \eta) \subset \Omega$ de x_* tel que f soit un difféomorphisme entre U et $f(U)$. De plus, f étant de classe $\mathcal{C}^2$, son inverse f^{-1} aussi. Enfin, $J_f(x)$ est inversible pour tout $x \in U$ et $J_f(x)^{-1} = [J_{f^{-1}}(f(x))]^{-1}$.

Nous allons maintenant poser $K = \bar{B}(x_*, \eta/2) \subset U$ qui est compact. De plus $t \rightarrow J_{f^{-1}}(t)$ est continue de $f(K)$ dans $GL_m(\mathbb{R})$ (les matrices inversibles) et $M \rightarrow M^{-1}$ est continue sur $GL_m(\mathbb{R})$ (et même $\mathcal{C}^1$) donc $x \rightarrow J_f(x)^{-1}$ est continue sur K donc bornée. On note

$$M = \sup_{x \in K} \|J_f(x)^{-1}\|.$$

Comme f est $\mathcal{C}^2$, $x \rightarrow J_f(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur U . Sa différentielle est donc continue sur le compact K donc bornée par un nombre $L > 0$. L'inégalité des accroissements finis implique donc que, si $x, y \in K$ alors

$$\|J_f(x) - J_f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Comme $f(x_*) = 0$, si $x \in \bar{B}(x_*, \eta/2)$, on écrit alors

$$\begin{aligned} F(x) - x_* &= x - x_* - J_f(x)^{-1} f(x) = x - x_* - J_f(x)^{-1} (f(x) - f(x_*)) \\ &= -J_f(x)^{-1} (f(x) - f(x_*) - J_f(x)(x - x_*)) \\ &= -J_f(x)^{-1} \int_0^1 [J_f(x_* + t(x - x_*)) - J_f(x)](x - x_*) dt \end{aligned}$$

où on applique le théorème fondamental de l'intégration à $\varphi(t) = f(x_* + t(x - x_*))$ i.e.

$$f(x) - f(x_*) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt.$$

Mais alors, en prenant la norme

$$\begin{aligned}
\|F(x) - x_*\| &= \left\| J_f(x)^{-1} \int_0^1 [J_f(x_* + t(x - x_*)) - J_f(x)](x - x_*) dt \right\| \\
&\leq \|J_f(x)^{-1}\| \left\| \int_0^1 [J_f(x_* + t(x - x_*)) - J_f(x)](x - x_*) dt \right\| \\
&\leq M \int_0^1 \| [J_f(x_* + t(x - x_*)) - J_f(x)](x - x_*) \| dt \\
&\leq M \int_0^1 \| J_f(x_* + t(x - x_*)) - J_f(x) \| \|x - x_*\| dt \\
&\leq LM \int_0^1 t dt \|x - x_*\|^2 = \frac{LM}{2} \|x - x_*\|^2.
\end{aligned}$$

Soit alors $r < \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{2}{LM}\right)$ et $x \in \bar{B}(x_*, r) \subset \bar{B}(x_*, \eta/2)$ on aura $\|F(x) - x_*\| \leq \frac{LM}{2} \|x - x_*\|^2 \leq \frac{LM}{2} r^2 \leq r$ par choix de r . Ainsi $\bar{B}(x_*, r)$ est stable par F . Par conséquent, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ donnée par $x_{n+1} = F(x_n)$ est bien définie dès que $x_0 \in \bar{B}(x_*, r)$. De plus, dans ce cas, le calcul précédent donne

$$\|x_{n+1} - x_*\| = \|F(x_n) - x_*\| \leq \frac{LM}{2} \|x_n - x_*\|^2.$$

Comme $\|x_n - x_*\| < r$ et $\rho := \frac{LM}{2} r < 1$, on a $\|x_{n+1} - x_*\| \leq \rho \|x_n - x_*\|$ donc $\|x_n - x_*\| \leq \rho^n \|x_0 - x_*\| \rightarrow 0$ i.e. $x_n \rightarrow x_*$. Toutefois la vitesse de convergence vers 0 est bien plus rapide. ■

Index

- Accélération de convergence
 - Aitken, [40](#)
 - Euler, [84](#)
 - Romberg-Richardson, [38](#)
- Algorithme
 - dichotomie, [35](#)
 - inversion de matrices (Gauss-Seidel), [107](#)
 - inversion de matrices (Jacobi), [107](#)
 - Newton, [36](#)
 - Newton dans $\mathbb{R}^m$, [108](#)
- Asymptotique d'Euler, [63](#)
- Bernoulli
 - nombre, [60](#)
 - polynôme, [60](#)
- Constante d'Euler, [63](#)
- Convergence
 - au sens d'Euler, [83](#)
 - produit infini, [87](#)
 - série, [41](#)
- Critère
 - de Cauchy, [47](#)
 - de condensation de Cauchy, [48](#)
 - de d'Alembert, [47](#)
 - de Gauss, [50](#)
 - de Raabe-Duhamel, [49](#)
 - des séries alternées, [66](#)
- Cycle, [28](#)
 - p -cycle, [28](#)
 - attractif, [29](#)
 - stable, [29](#)
 - super-attractif, [29](#)
- Densité
 - sin n , [98](#)
 - d'un ensemble d'entiers, [12](#)
- Formule
 - Abel, [67](#)
 - Bailey, Borwein, Plouffe, [91](#)
 - de sommation d'Euler-Mac Laurin, [61](#)
 - de Stirling, [64](#)
 - produit d'Euler, [89](#)
- Inégalité
 - Liouville, [99](#)
 - maximale de Kolmogorov, [71](#)
- Lemme
 - Abel, [67](#)
 - Césaro, [11](#)
 - Fekete, [10](#)
 - Householder, [106](#)
 - Koopman-von Neumann, [16](#)
 - Kronecker, [69](#)
 - Liouville, [99](#)
 - sous-additif, [10](#)
- lim
 - J – lim, [12](#)
 - $\mathcal{C}$ – lim, [11](#)
 - lim inf, [9](#)
 - lim sup, [9](#)
 - $\mathcal{D}$ – lim, [12](#)
- Limite
 - Césaro, [11](#)
 - en densité, [12](#)
 - Limite inférieure, [9](#)
 - Limite supérieure, [9](#)
 - selon J , [12](#)
- Matrice
 - Gelfand, [105](#)
 - rayon spectral, [105](#)
- Moyenne de Césaro, [11](#)
- Nombre
 - $\pi \notin \mathbb{Q}$, [94](#)
 - $e \notin \mathbb{Q}$, [93](#)
 - algébrique, [98](#)
 - de Bernoulli, [60](#)
 - de Liouville, [100](#)
 - transcendant, [98](#)
- Point fixe
 - attractif, [20](#)
 - parabolique, [20](#)
 - répulsif, [20](#)
- Polynôme
 - de Bernoulli, [60](#)
- Produit
 - de Cauchy, [75](#)
 - infini, [87](#)
- Rayon spectral, [105](#)
- Série
 - absolument convergente, [43](#)
 - alternée, [66](#)

- convergence, 41
- reste, 41
- semi-convergente, 43
- Suite
 - arithmético-géométrique, 2
 - arithmétique, 1
 - convergente, 5
 - de Cauchy, 5
 - géométrique, 2
 - homographique, 3
 - limite, 5
 - logistique, 26
 - sous-additive, 10
- Théorème
 - Abel-Dini-Pringsheim, 53
 - Aitken, 40
 - asymptotique d'Euler, 63
 - comparaison série-intégrale, 55
 - convergence monotone des suites, 8
 - Coppel, 30
 - critère des séries alternées, 66
 - des gendarmes, 6
 - des suites adjacentes, 7
 - Dirichlet (approximation diophantienne), 96
 - du Bois-Reymond, 51
 - Euler, 86
 - formule de sommation d'Euler-Mac Laurin, 61
 - formule de Stirling, 64
 - Heine Borel, 9
 - Keakeya, 57
 - Liouville (approximation diophantienne), 100
 - Mertens, 77, 102
 - produit de Cauchy, 75
 - Romberg-Richardson, 38
 - réarrangement de Riemann, 73
 - Sharkovsky, 33
 - taubérien, 58
- Théorème
 - Séries de Rademacher, 70
- Transformation
 - Abel, 67
 - binomiale, 84
 - Euler, 83
- Valeur d'adhérence, 8