MASTER THCS
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Master 1
Année 2010/2011

Analyse de base

Philippe Jaming
Philippe.Jaming@math.u-bordeaux1.fr

Contents

CHAPÎTRE 1

Transformée de Fourier discrète

1. La transformée de Fourier discrète

Dans toute ce chapître, N sera un entier $N \geq 1$. On notera $\omega = e^{2i\pi/N}$.

On considère $\mathbb{C}^N$ muni de son produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \overline{v_k}.$$

La norme associée est notée $\|.\|_2$. Plus généralement, pour $1 \leq p \leq \infty$, si $u = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on note

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{k=0,\ldots,N-1} |u_k|.$$

Rappelons que si $(e_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ est une base orthonormée, alors tout vecteur $u \in \mathbb{C}^N$ s'écrit

$$u = \sum_{k=0}^{N-1} \langle u, e_k\rangle e_k, \text{ et de plus } \|u\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{N-1} |\langle u, e_j\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

On commence les indices à 0 car on identifie $\mathbb{C}^N$ avec l'ensemble des suites $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de période* N. Cet ensemble est alors noté $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ —où $\mathbb{Z}_N$ est $\{0, \ldots, N-1\}$ muni de l'addition modulo N.

Exercice 1.1.
Soit $(f_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{C}^N$ définie par $f_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{2i\pi jk/N}$ – la k-ième coordonée du j-ième vecteur. Montrer que (f_j) est une base orthonormée.

Cette base est appelée *base de Fourier* de $\mathbb{C}^N$.

Définition 1. Pour $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, on notera $\mathcal{F}_N[u]$ la suite des coefficients de u dans la base de Fourier, renormalisé par $\sqrt{N}$. Plus précisément, si $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, alors

$$\mathcal{F}_N[u](j) = \left\langle u, \sqrt{N} f_j\right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega^{-jk} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2ijk\pi/N}.$$

On appelle $\mathcal{F}_N u$ la *transformée de Fourier discrète* de u. On notera encore $\widehat{u}_j = \mathcal{F}_N u(j)$.

Remarque 1.1. Certains auteurs préfèrent définir la transformée de Fourier discrète comme

$$\tilde{\mathcal{F}}_N[u](k) = \langle u, f_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega^{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2ijk\pi/N}.$$

Toutes les propriétés ennoncées ici s'adaptent à cette normalisation.

Lemme 1.2 (Linéarité).
La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N$ est linéaire i.e. $\mathcal{F}_N[\lambda u + \mu v] = \lambda \mathcal{F}_N[u] + \mu \mathcal{F}_N[v]$

Proof. Le produit scalaire est linéaire dans la première variable! □

Exercice 1.2.

(1) Montrer que $\mathcal{F}_N[u]$ est N-périodique.

(2) Déterminer $\mathcal{F}_N[\delta_\ell]$ avec δ_ℓ le ℓ-ème vecteur de la base canonique. On note $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, détermine $\mathcal{F}_N[\mathbf{1}]$.
(3) Supposons que $N = pq$ et soit $\delta_{p\mathbb{Z}_N}$ défini par $\delta_{p\mathbb{Z}_N}(k) = 1$ si k est un mutliple de p, $k = \ell p$, $\ell = 0, \dots, q-1$ et $\delta_{p\mathbb{Z}_N}(k) = 0$ sinon. Montrer que $\mathcal{F}_N[\delta_{p\mathbb{Z}_N}] = q\delta_{q\mathbb{Z}_N}$ ($\delta_{q\mathbb{Z}_N}$ défini de manière similaire).
(4) Montrer que si u est N-périodique, alors $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{N-1+\ell} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k$
(5) Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et $a \in \{0, \dots, N-1\}$. On définit $v = T_a u$ par $v_j = u_{j-a}$ – où l'addition est modulo N, c'est-à-dire qu'on considère u et v comme des suties N-périodiques– et $w = M_a u$ par $w_j = e^{2i\pi a j} u_j$. Déterminer $\mathcal{F}_N[v]$ et $\mathcal{F}_N[w]$ en fonction de $\mathcal{F}_N[u]$.
(6) Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et définissons $v = Zu$ par $v_j = u_{-j}$. Déterminer $\mathcal{F}_N[v]$ en fonction de $\mathcal{F}_N[u]$.
Que peut-on dire si u est *réelle paire* (On calculera $\overline{\mathcal{F}_N[u]}$ en fonction de $\mathcal{F}_N[u]$).
(7) Soit $N > a > 0$ des entiers tels que $N \neq 2a$. On considère les deux suites (u_k) et (v_k) définies par

$$u_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = N-a \\ -\frac{1}{2} & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = N-a \text{ ou } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que

$$\mathcal{F}_N u(j) = i \sin \frac{2\pi a j}{N} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_N v(j) = \cos \frac{2\pi a j}{N}.$$

THÉORÈME 1.3. *La transformée de Fourier discrète vérifie les propriétés suivantes:*
(1) **Inversion.** *Pour* $j = 0, \dots, N-1$, *on a*

$$u_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{u}_k \omega^{-jk}.$$

(2) **Parseval.** $\frac{1}{N}\langle \mathcal{F}_N[u], \mathcal{F}_N[v] \rangle = \langle u, v \rangle$, *c'est-à-dire*

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \overline{v_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_N[u](j) \overline{\mathcal{F}_N[v](j)}.$$

(3) $\|\mathcal{F}_N[u]\|_2 = \sqrt{N}\|u\|_2$ *(Plancherel),* $\|\mathcal{F}_N[u]\|_\infty \leq \|u\|_1$ *et* $\|u\|_\infty \leq N^{-1}\|\mathcal{F}_N[u]\|_1$.
(4) **Convolution.** *Pour* $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, *on définit la convolution* $u * v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *par*

$$u * v(j) = \sum_{k=0}^{N} u_k v_{j-k}.$$

Alors $\mathcal{F}_N[u * v](j) = \mathcal{F}_N[u](j)\mathcal{F}_N[v](j)$.

DÉMONSTRATION. **1.** Le plus simple est d'utiliser l'exercice 1.1: on écrit la décomposition de u dans la base orthonormée $(f_j)_{j=0,\dots,N-1}$, $u = \sum_{j=0}^{N-1} \langle u, f_j \rangle f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_N[u](j) f_j$ et comme $f_j(k) = f_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi jk/N}$, on retrouve bien

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_N[u](j) f_j(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_N[u](j) e^{2i\pi jk/N}.$$

2. Le plus simple est d'encore utiliser l'exercice 1.1: on écrit les décompositions de u et de v dans la base orthonormée $(f_j)_{j=0,\dots,N-1}$, et alors

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, f_j \rangle \overline{\langle v, f_j \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{F}_N[u](j) \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{F}_N[v](j)}.$$

3. Pour la norme $\|.\|_2$, c'est $u = v$ dans Parseval. $\|\mathcal{F}_N[u]\|_\infty \leq \|u\|_1$ est l'inégalité triangulaire et $\|u\|_\infty \leq N^{-1}\|\mathcal{F}_N[u]\|_1$ est l'inégalité triangulaire appliquée à la formule d'inversion.

4. Il s'agît simplement du calcul suivant

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_N[u*v](j) &= \sum_{k=0}^{N-1} u*v(k)e^{-2i\pi jk/N} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell v_{k-\ell}\right)e^{-2i\pi jk/N} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell \left(\sum_{k=0}^{N-1} v_{k-\ell}e^{-2i\pi jk/N}\right) = \sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell \sum_{k=\ell}^{N-1+\ell} v_k e^{-2i\pi j(k+\ell)/N} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell e^{-2i\pi j\ell/N} \underbrace{\sum_{k=\ell}^{N-1+\ell} v_k e^{-2i\pi jk/N}}_{N-\text{périodique}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell e^{-2i\pi j\ell/N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-2i\pi jk/N}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 1.3.
Redémontrer ce théorème à l'aide des propriétés des suites géométriques.

Remarque 1.4. Le point (1) du théorème fait qu'on note parfois $\mathcal{F}_N^{-1} = \mathcal{F}_{-N}$. Cela montre aussi que $\mathcal{F}_N$ est une *bijection.*

Exercice 1.4.
Á l'aide de l'inégalité de Hölder

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k\right| \leq \|a\|_p \|b\|_{p'} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

montrer que

$$N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_q \leq \|\mathcal{F}_N[u]\|_p \leq N^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_q$$

Exercice 1.5. **Principe d'incertitude**
Pour $a = (a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^N$ on note $\operatorname{supp} a = \{k : a_k \neq 0\}$ son support et $\|a\|_0 = |\operatorname{supp} a| = \#\{k : a_k \neq 0\}$ le nombre de coordonées non nulles.

(1) Montrer que $\|u\|_0 \|\mathcal{F}_N[u]\|_0 \geq N$.

Indication: On montra que $|\mathcal{F}_N[u](j)| \leq \left(\frac{\|u\|_0\|\mathcal{F}_N[u]\|_0}{N}\right)^{1/2} |\mathcal{F}_N[u]\|_\infty$ à l'aide de Cauchy-Schwarz et de Plancherel-Parseval.

(2) Pour une application linéaire $T : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ on notera encore $T = [t_{i,j}]$ sa matrice dans la base canonique. Sa norme de Froebinius (ou de Hilbert-Schmidt) est la norme ℓ^2 de la matrice, c'est-à dire

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i,j=0}^{N-1} |t_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j,k=0}^{N-1} |\langle T\delta_j, \delta_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $(\delta_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$.

(a) Montrer que si $(e_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ et $(f_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ sont des bases orthonormées, alors

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i,j=0}^{N-1} |\langle Te_i, f_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Montrer que $\|T\| \leq \|T\|_2$.
Indication: prendre e_0 un vecteur tel que $\|Te_0\|_2 = \|T\|$ et compléter en une base orthonormée $(e_j)_{j=0,N-1}$.

(3) Soient $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, N-1\}$ tels que $|S||\Sigma| < N$. On note P_S la projection définie par $(P_S u)_k = u_k$ si $k \in S$ et $(P_S u)_k = 0$ si $k \notin S$. Montrer que $\|P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S\| \leq \sqrt{|S||\Sigma|}$.

(4) On note S^c le complémentaire de l'ensemble S. En déduire que, si $\operatorname{supp} u \subset S$, alors $\|P_\Sigma \mathcal{F}_N[u]\|_2^2 \leq C(S,\Sigma)\|P_{\Sigma^c}\widehat{u}\|_2^2$ —on précisera $C(S,\Sigma)$.

(5) En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{C}^N$,

$$\|u\|_2 \leq D(S,\Sigma)\left(\|P_{S^c}u\|_2 + \|P_{\Sigma^c}\widehat{u}\|_2\right).$$

Indication: Utiliser le fait que $u = P_S u + P_{S^c} u$ et montrer d'abord que $\|u\| \leq (1 + C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{S^c}u\|$.

2. La transformée de Fourier rapide

Une estimation rapide montre que le calcul de la transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur N nécessite $(N-1)^2$ multiplications (complexes) et $N(N-1)$ additions.

L'algorithme de Cooley et Tuckey est basé sur une factorisation de $\mathcal{F}_N$ lorsque N est pair.

Écrivons donc $N = 2m$, $\omega_N = e^{2i\pi/N}$ et notons que $\omega_N^2 = \omega_m$. On remarque alors que

$$\mathcal{F}_{2m}[y](k) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \omega_N^{-jk} = \sum_{j=0,\ldots,2m-1 j \text{ pair}} y_j \omega_N^{-jk} + \sum_{j=0,\ldots,2m-1 j \text{ impair}} y_j \omega_N^{-jk} \tag{1}$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l}\omega_N^{-2lk} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1}\omega_N^{-(2l+1)k} = \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l}\omega_m^{-lk} + \omega_N^{-k}\sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1}\omega_m^{-lk} \tag{2}$$

$$= \mathcal{F}_m[y_p](k) + \omega_N^{-k}\mathcal{F}_m[y_i](k) \tag{3}$$

où y_p et y_i sont les sous-suites de y des termes d'indice pair et impair, c'est-à-dire

$$y_p = (y_0, y_2, \ldots, y_{2m-2}) \quad \text{et} \quad y_i = (y_1, y_3, \ldots, y_{2m-1}).$$

Notons que $P_k = \mathcal{F}_m[y_p](k)$ et $\mathcal{F}_m[y_i](k)$ sont m périodiques, et qu'il suffit de les calculer pour $k = 0, \ldots, m-1$. On effectue alors les m multiplications $I_k := \omega_N^{-k}\mathcal{F}_m[y_i](k)$ et on remarque que, pour $k = 0, \ldots, m-1$, $\mathcal{F}_{2m}[y](k) = P_k + I_k$ et $\mathcal{F}_{2m}[y](k+m) = P_k - I_k$.

La transformée de Fourier d'ordre pair N se calcule donc à l'aide de deux transformée de Fourier d'ordre $N/2$ et de N additions et $N/2$ multiplications. Le nombre d'opérations est donc

$$\underbrace{2\big((N/2-1)^2 + N/2(N/2-1)\big)}_{\text{les 2 } \mathcal{F}_{N/2}} + \underbrace{N/2 + N}_{+ \text{ et x}} \simeq N^2/2.$$

On divise donc le nombre d'opérations par environ 2.

Le gain devient plus important si m est à son tour pair. Dans ce cas, on peut recommencer et on divise à nouveau le nombre d'opération par 2.

L'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform) fait précisément cela, il divise le nombre d'opérations par 2 tant que possible. L'idéal étant que N soit une puissance de 2, $N = 2^p$. Dans ce cas, le nombre d'opérations est de l'ordre de $p \times N = N \log N$. En général, si $N = 2^p m$, le nombre d'opérations est de l'ordre de $p2^p m^2$.

La commande `matlab` correspondante est `fft`. Pour un signal `x` de longueur N, la commande `fft(x)` calcule $\mathcal{F}_N[x](k-1)$ en utilisant l'algorithme de Colley-Tuckey. Notez que l'indexage des signaux en matlab commence à 1 et non à 0, ce qui explique le -1 dans la formule.

Notez que cette commande permet, en option, de calculer $\mathcal{F}_m[x]$ avec m pas nécessairement la longueur du signal. Ainsi si x est de longueur N et

— si $m < N$ alors `fft(x,m)` calcule $\mathcal{F}_m[\tilde{x}]$ où $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ la troncature de x à m termes

— si $m > N$ alors `fft(x,m)` calcule $\mathcal{F}_m[\tilde{x}]$ où $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0)$ le prolongement de x par des 0 jusqu'à obtenir un signal de longueur N (0-padding en anglais).

Cette option est pratique si N est grand mais pas une puissance de 2 puisqu'elle permet d'utiliser l'algorithme de Cooley-Tuckey optimal en prenant $m = 2^p$ avec p bien choisi (en général on prend le premier $m = 2^p \geq N$).

3. Quelques solutions

3.1. Exercice 1.1.
Notons que

$$\langle f_j, f_{j'} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_{j,k}\overline{f_{j',k}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi(j-j')k/N}.$$

Si $j = j'$, $e^{2i\pi(j-j')k/N} = 1$ donc $\langle f_j, f_j \rangle = 1$. Si $j \neq j'$, on somme une suite géométrique de raison $e^{2i(j-j')\pi/N} \neq 1$ car $j - j' \in \{-N+1, \dots, N-1\} \setminus \{0\}$. Par suite

$$\langle f_j, f_{j'} \rangle = \frac{1 - e^{2i\pi(j-j')N/N}}{1 - e^{2i\pi(j-j')\pi/N}} = 0$$

puisque $e^{2i\pi\ell} = 1$ si (et seulement si) ℓ est un entier.

3.2. Exercice 1.2.

1. Il suffit de remarquer que $j \to e^{2i\pi jk/N}$ est N-périodique, ce qui résulte du fait que $e^{2i\pi k} = 1$.
2. $\mathcal{F}_N[\delta_\ell](j) = \sqrt{N}\langle \delta_\ell, f_j \rangle = \sqrt{N}\overline{f_{j,\ell}}$ donc $\mathcal{F}_N[\delta_\ell] = \sqrt{N}\,\overline{f_\ell} = (1, e^{-2i\pi\ell/N}, \dots, e^{-2i\pi\ell(N-1)/N}) = \sqrt{N}f_{-\ell}$ (avec un abus de notation).

En utilisant à nouveau la sommation de la série géométrique, $\mathcal{F}_N[\mathbf{1}](j) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi jk/N} = \begin{cases} N & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = N\delta_0$.

3. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N[\delta_{p\mathbb{Z}_N}](\ell) &= \sum_{k=0}^{pq-1} \delta_{p\mathbb{Z}_N}(k) e^{-2i\pi\ell k/pq} = \sum_{k=0}^{q-1} e^{-2i\pi\ell kp/pq} = \sum_{k=0}^{q-1} e^{-2i\pi\ell k/q} = \mathcal{F}_q[\mathbf{1}](k) \\ &= \begin{cases} q & \text{si } k = jq \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = q\delta_{q\mathbb{Z}_N}(k) \end{aligned}$$

où on a utilisé la question précédente pour $k = 0, \dots, q-1$ et la q-périodicité de $\mathcal{F}_q$.

4. Cela résulte du calcul suivant (prendre $j = 0$ pour commencer): on note j tel que $jN \leq \ell \leq (j+1)N - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=\ell}^{N-1+\ell} u_k &= \sum_{k=\ell}^{(j+1)N-1} u_k + \sum_{k=(j+1)N}^{N-1+\ell} u_k \\ &= \sum_{k=\ell-jN}^{(j+1)N-1-jN} u_{k+jN} + \sum_{k=(j+1)N-(j+1)N}^{N-1+\ell-(j+1)N} u_{k+(j+1)N} \\ &= \sum_{k=\ell-jN}^{N-1} u_k + \sum_{k=0}^{\ell-jN} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \end{aligned}$$

avec la périodicité.

5. D'une part

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N[T_a u](j) &= \sum_{k=0}^{N-1} u_{k-a} e^{-2i\pi jk/N} = \sum_{k=a}^{N-1+a} \underbrace{u_k e^{-2i\pi j(k+a)/N}}_{N-\text{périodique}} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} u_k e^{-2i\pi j(k+a)/N} = e^{-2i\pi ja} \mathcal{F}_N[u](j)\end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}_N[T_a u] = M_{-a}\mathcal{F}_N[u]$. Ensuite

$$\mathcal{F}_N[M_a u](j)) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2i\pi ja/N} e^{-2i\pi jk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2i\pi(j-a)k/N} = \mathcal{F}_N[u](j-a).$$

En d'autres termes $\mathcal{F}_N[M_a u] = T_a \mathcal{F}_N[u]$.

6. En utilisant la N-périodicité,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N[Zu](j) &= \sum_{k=0}^{N-1} u_{-k} e^{-2i\pi jk/N} = u_0 + \sum_{k=1}^{N-1} u_{N-k} e^{-2i\pi j(k-N)/N} = u_0 + \sum_{\ell=1}^{N-1} u_\ell e^{2i\pi j\ell/N} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_\ell e^{-2i\pi(-j)\ell/N} = \mathcal{F}_N[u](-j).\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\overline{\mathcal{F}_N[u]}(j) = \overline{\sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2i\pi jk/N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u_k} e^{2i\pi jk/N} = \mathcal{F}_N[\overline{u}](-j).$$

Donc, si u est réelle paire, $\overline{u} = u = Zu$, $\overline{\mathcal{F}_N[u]}(j) = \mathcal{F}_N[u](-j) = \mathcal{F}_N[Zu](j) = \mathcal{F}_N[u](j)$ donc $\mathcal{F}_N[u]$ est réelle paire.

Si u est réelle impaire, $\overline{u} = u = -Zu$, $\overline{\mathcal{F}_N[u]}(j) = \mathcal{F}_N[u](-j) = \mathcal{F}_N[Zu](j) = -\mathcal{F}_N[u](j)$ donc $\mathcal{F}_N[u]$ est imaginaire pure et impaire.

7. Il suffit de constater que $u = \frac{1}{2}(\delta_{N-a} - \delta_a)$ et que $v = \frac{1}{2}(\delta_{N-a} + \delta_a)$ puis d'utiliser la question 2.

3.3. Exercice 1.4.

L'inégalité de Hölder implique ($1/q' = 1 - 1/q$)

$$\|a\|_1 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| 1 \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} 1|a_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 1^{q'}\right)^{1-1/q} = N^{1-1/q}\|a\|_q.$$

Par ailleurs, $\|a\|_p \leq N^{1/p}\|a\|_\infty$. Ainsi

$$\|\mathcal{F}_N[u]\|_p \leq N^{1/p}\|\mathcal{F}_N[u]\|_\infty \leq N^{1/p}\|u\|_1 \leq N^{1+1/p-1/q}\|u\|_q.$$

D'autre part

$$\|u\|_q \leq N^{1/q}\|u\|_\infty \leq N^{1/q-1}\|\mathcal{F}_N[u]\|_1 \leq N^{1/q-1/p}\|\mathcal{F}_N[u]\|_p.$$

Notez qu'on peut légèrement améliorer ceci pour $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$. Alors en prenant $r = 2/q \in [1, \infty]$, Hölder donne

$$\|a\|_q^q = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^q \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^{qr}\right)^{1/r} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 1\right)^{1-1/r} = N^{\frac{q-2}{2}}\|a\|_2^q$$

soit $\|a\|_q \leq N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|a\|_2$. En prenant $s = p/2 \in [1, \infty]$, Hölder donne

$$\|a\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^{2s}\right)^{1/s} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 1\right)^{1-1/s} = N^{\frac{p-2}{p}}\|a\|_p^2$$

soit $\|a\|_2 \leq N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|a\|_p$. Ainsi

$$\|\mathcal{F}_N[u]\|_q \leq N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\mathcal{F}_N[u]\|_2 = N^{1-\frac{1}{q}}\|u\|_2 \leq N^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_p$$

et

$$\|u\|_q \leq N^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\mathcal{F}_N[u]\|_p$$

qui dans les cas $p=q=2$ redonnent Parseval.

Les constantes optimales dans ces inégalités ne sont connues que depuis peu.[1]

3.4. Exercice 1.5.

1. On utilise Cauchy-Schwarz (=Hölder pour $p=2$) comme dans l'exercice précédent, mais en utilisant qu'on ne somme que sur les j dans le support!

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_N[u](j)| &\leq \sum_{k=0}^{N-1}|u_k| = \sum_{k\in\operatorname{supp} u}|u_k| \\
&\leq |\operatorname{supp} u|^{1/2}\left(\sum_{k\in\operatorname{supp} u}|u_k|^2\right)^{1/2} \qquad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&= |\operatorname{supp} u|^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|^2\right)^{1/2} = \frac{|\operatorname{supp} u|^{1/2}}{\sqrt{N}}\left(\sum_{k=0}^{N-1}|\mathcal{F}_N[u](k)|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

avec Parseval. Ensuite

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_N[u](j)| &\leq \frac{|\operatorname{supp} u|^{1/2}}{\sqrt{N}}\left(\sum_{k\in\operatorname{supp}\mathcal{F}_N[u]}|\mathcal{F}_N[u](k)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{|\operatorname{supp} u|^{1/2}}{\sqrt{N}}\left(\sum_{j\in\operatorname{supp}\mathcal{F}_N[u]}1\right)^{1/2}\max_{k\in\operatorname{supp}\mathcal{F}_N[u]}|\mathcal{F}_N[u]| \\
&= \left(\frac{\|u\|_0\|\mathcal{F}_N[u]\|_0}{N}\right)^{1/2}|\mathcal{F}_N[u]\|_\infty
\end{aligned}$$

2. On utilise simplement que

$$\|a\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}|\langle a,\alpha_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}|\langle a,\beta_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}|\langle \alpha_j,a\rangle|^2$$

si (α_j) et (β_j) sont deux bases orthonormées. Donc

$$\begin{aligned}
\|T\|_2^2 &= \sum_{j,k}|\langle T\delta_j,\delta_k\rangle|^2 = \sum_j\|T\delta_j\|^2 = \sum_{j,k}|\langle T\delta_j,f_k\rangle|^2 \\
&= \sum_{j,k}|\langle\delta_j,T^*f_k\rangle|^2 = \sum_k\|T^*f_k\|^2 \\
&= \sum_{j,k}|\langle e_j,T^*f_k\rangle|^2 = \sum_{j,k}|\langle Te_j,f_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

[1] J. Gilbert & Z. Rzeszotnik *The norm of the fourier transform on finite abelian groups.* Ann. Inst. Fourier, sous presse.

En prenant e_0 tel que $\|Te_0\| = \max_{x\,:\|x\|=1}\|Tx\| = \|T\|$ (on utilise ici la compacité de $\{x : \|x\| = 1\}$, puis en complétant par en une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$, on trouve

$$\|T\|_2 = \sum_{j,k} |\langle Te_j, f_k\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \|Te_j\|^2 \geq \|Te_0\|^2 = \|T\|^2.$$

3. Le plus simple est de remarquer que $\langle \mathcal{F}_N[\delta_j], \delta_k\rangle = |f_{j,k}|$ *i.e.* que la matrice de la transformée de Fourier discrète est donnée par

$$\mathcal{F}_N = [\omega^{-jk}]_{j,k=1,\ldots,N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

(Notez que Parseval s'écrit $\mathcal{F}_N\mathcal{F}_N^* = NI$). Alors

$$\begin{aligned} \|P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S\| &\leq \|P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S\|_2 = \left(\sum_{j,k=0}^{N-1} |\langle P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S \delta_j, \delta_k\rangle|^2\right)^2 \\ &= \left(\sum_{j,k=0}^{N-1} |\langle \mathcal{F}_N P_S \delta_j, P_\Sigma \delta_k\rangle|^2\right)^2 = \left(\sum_{j\in S}\sum k\in\Sigma |\langle \mathcal{F}_N \delta_j, \delta_k\rangle|^2\right)^2 \\ &= \sqrt{|S||\Sigma|}. \end{aligned}$$

4. Si $\operatorname{supp} u \subset S$ alors $P_S u = S$ donc

$$\begin{aligned} \|P_\Sigma \mathcal{F}_N[u]\| &= \|P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S u\| \leq \|P_\Sigma \mathcal{F}_N P_S\|\|u\| \leq \sqrt{|S||\Sigma|}\|u\| \\ &= \left(\frac{|S||\Sigma|}{N}\right)^{1/2} \|\mathcal{F}_N[u]\| = \left(\frac{|S||\Sigma|}{N}\right)^{1/2} \|P_\Sigma \mathcal{F}_N[u] + P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\| \\ &\leq \left(\frac{|S||\Sigma|}{N}\right)^{1/2} \big(\|P_\Sigma \mathcal{F}_N[u]\| + \|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\|\big). \end{aligned}$$

Comme on a supposé que $|S||\Sigma| < N$, on en déduit que

$$\|P_\Sigma \mathcal{F}_N[u]\| \leq \frac{\left(\frac{|S||\Sigma|}{N}\right)^{1/2}}{1 - \left(\frac{|S||\Sigma|}{N}\right)^{1/2}} \|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\| \leq \frac{N}{N - |S||\Sigma|}\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\|.$$

5. Notons $C = \dfrac{N}{N - |S||\Sigma|}$. Notons que $\operatorname{supp} P_S u \subset S$ donc, pour tout u, $\|P_\Sigma \mathcal{F}_N[P_S u]\| \leq C\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_S u]\|$. Alors

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|P_S u + P_{S^c}u\| \leq \|P_S u\| + \|P_{S^c}u\| = \|\mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{S^c}u\| \qquad \text{(Parseval)} \\ &\leq \|P_\Sigma \mathcal{F}_N[P_S u] + P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{S^c}u\| \leq \|P_\Sigma \mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{S^c}u\| \\ &\leq (1+C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_S u]\| + \|P_{S^c}u\| \end{aligned}$$

avec la question précédente. Enfin

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq (1+C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u - P_{S^c}u]\| + \|P_{S^c}u\| \leq (1+C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\| + (1+C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[P_{S^c}u]\| + \|P_{S^c}u\| \\ &\leq (1+C)\|P_{\Sigma^c}\mathcal{F}_N[u]\| + \big((1+C)\sqrt{N}+1\big)\|P_{S^c}u\| \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|P_{\Sigma^c}v\| \leq \|v\|$ et Plancherel.

CHAPÎTRE 2

Séries de Fourier et transformée de Fourier à temps discret

1. Fonctions 1-périodiques, convolution

Dans ce chapître, nous allons fréquemment intégrer des fonctions périodiques. Commençons donc par l'exercice suivant:

Exercice 2.1.
Soit f une fonction T-périodique. Montrer que $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a.

Dans ce chapître, nous noterons

$$L^p(\mathbb{T}) = \begin{cases} \left\{ f \text{ 1-périodique sur } \mathbb{R} \,:\, \|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right) < +\infty \right\} & \text{pour } 1 \le p < \infty \\ \{ f \text{ 1-périodique sur } \mathbb{R} \,:\, \|f\|_\infty := \sup\operatorname{ess}|f(t)| < +\infty \} \end{cases}$$

Enfin, on note

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{T})$.

Exercice 2.2. À l'aide de l'inégalité de Hölder:

$$\left|\int fg\right| \le \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |f|^{p'}\right)^{1/p'} \qquad 1 \le p, p' \le \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

montrer que $L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T})$ si $p \ge q$.

Donner un exemple de fonction qui soit dans $L^q(\mathbb{T})$ mais dans aucun espace $L^p(\mathbb{T})$, $p > q$. Ainsi $L^p(\mathbb{T}) \subsetneq L^q(\mathbb{T})$ si $p > q$.

La convolution de deux fonctions continues 1-périodiques est définie par

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.3.
Montrer que $f * g$ est continue et 1-périodique et que $f * g = g * f$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^l$ et g de classe $\mathcal{C}^k$ alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+l}$ et $(f*g)^{(k+l)} = f^{(l)} * g^{(k)}$.

Théorème 2.1 (Inégalité de Young).
Soient p, q, r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1 + \frac{1}{r}$, alors pour toutes fonctions continues 1-périodiques, f, g, on a $\|f * g\|_r \le \|f\|\|g\|$. En particulier, L'application $(f,g) \to f * g$ se prolonge en une application bilinéaire symétrique de $L^p \times L^q \to L^r$.

Si $r = +\infty$ et si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f * g$ est une fonction continue.

Démonstration. Admettons ce théorème dans sa généralité – la démonstration est la même que dans $L^p(\mathbb{R}^d)$–, mais notons que

– si $p = q = 1$, c'est Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\int_0^1 f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x &\le \int_0^1\int_0^1 |f(t)||g(x-t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(t)| \left(\int_0^1 |g(x-t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |f(t)| \int_{-t}^{-t+1} |g(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

avec l'exercice 2.1.

– si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ c'est Hölder:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |g(x-t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_{x-1}^x |g(s)|^q\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} = \|f\|_p\|g\|_q\end{aligned}$$

à nouveau avec l'exercice 2.1.

Enfin, avec l'exercice 3, si on sait le montrer quand $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$ et si $r'\leq r$ donc $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1+\frac{1}{r'}$, alors $\|f*g\|_{r'}\leq\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$. □

2. Séries de Fourier des fonctions 1-périodiques (principaux résultats)

Définition 2.

Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$ (donc f est 1-périodique). Pour $k\in\mathbb{Z}$, le k-ième coefficient de Fourier est donné par

$$c_k(f)=\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $N\in\mathbb{N}$, la N-ième somme partielle de f est donnée par

$$S_N(f)(t)=\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{2i\pi kt}.$$

Enfin, la série de Fourier de f est donnée par

$$S(f)(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kt}.$$

Notez qu'on ne dit rien (pour l'instant) de la convergence de $S(f)$.

Exercice 2.4.

(1) Montrer que $f\to c_k(f)$ est linéaire.
(2) Soit $0<a<b<1$ et $f=\chi_{[a,b]}$. Déterminer $c_k(f)$.
(3) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $j\in\mathbb{Z}$, $T_af(t)=f(t-a)$ et $M_jf(t)=e^{2i\pi jt}f(t)$ (notez que ces nouvelles fonctions sont encore 1-périodiques). Déterminer $c_k(T_af)$ et $c_k(M_jf)$ en fonction de $c_k(f)$.

Lemme 2.2 (Riemann-Lebesgue). *Si $f\in L^1(\mathbb{T})$, alors $\|c_k(f)\|_\infty\leq\|f\|_1$ et $c_k(f)\to 0$ quand $k\to\pm\infty$. En d'autres termes $\big(c_k(f)\big)\in c_0(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Le premier point est simplement l'inégalité triangulaire:

$$|c_k(f)|=\left|\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 |f(t)e^{-2i\pi kt}|\,\mathrm{d}t=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t=\|f\|_1.$$

Dans l'exerercice précédent, on a remarqué que si $f=\chi_{[a,b]}$ alors $c_k(f)\to 0$. Mais, par linéarité, si $f=\sum_{j=1}^N\lambda_j\chi_{[a_j,b_j]}$, alors

$$c_k(f)=\sum_{j=1}^N\lambda_jc_k(\chi_{[a_j,b_j]})\to 0.$$

Enfin, soit $f\in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\varepsilon>0$. Il existe f_ε de la forme $f_\varepsilon=\sum_{j=1}^N\lambda_j\chi_{[a_j,b_j]}$ tel que $\|f-f_\varepsilon\|\leq\varepsilon/2$. Par ailleurs, il existe K tel que, si $|k|\geq K$ alors $|c_k(f_\varepsilon)|\leq\varepsilon/2$. Enfin

$$|c_k(f)|=|c_k(f-f_\varepsilon+f_\varepsilon)|=|c_k(f-f_\varepsilon)+c_k(f_\varepsilon)|\leq|c_k(f-f_\varepsilon)|+|c_k(f_\varepsilon)|\leq\|f-f_\varepsilon\|_1+|c_k(f_\varepsilon)|\leq\varepsilon$$

ce qui montre bien que $c_k(f)\to 0$. □

NOTATION 1. On note e_k la fonction $e_k(t) = e^{2i\pi kt}$. On note $\mathcal{P}_N(t)$ l'espace des *polynômes trigonométriques* de degré $\leq N$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_N = \operatorname{Vect}\{e_k,\ k=-N,\dots,N\} = \left\{\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2i\pi kt},\ a_j\in\mathbb{C}\right\}.$$

Notez que $c_k(f) = \langle f, e_k\rangle$.

EXERCICE 2.5.
Montrer que $\{e_k,\ k=-N,\dots,N\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_N$.

Notez que ceci implique que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_N$.

THÉORÈME 2.3.
La suite $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier $S_N(f)\to f$ dans $L^2(\mathbb{T})$, ce que nous écrirons

$$f(t) = S(f)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kt}\ \text{ dans } L^2(\mathbb{T}).$$

De plus, on a l'identité de Plancherel

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$$

et de Parseval

$$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

Enfin $f\to(c_k(f))$ est une bijection linéaire continue de $L^2(\mathbb{T})\to\ell^2(\mathbb{Z})$.

Ceci résulte de l'exercice précédent et de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(\mathbb{T})$, fait que nous admettrons (provisoirement).

Rappelons que si une suite f_n converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$ alors une sous-suite de (f_n) converge presque partout vers f. Pour les séries de Fourier, on a mieux

THÉORÈME 2.4 (Carleson-Hunt).
Pour $1<p<\infty$, si $f\in L^p(\mathbb{T})$ alors $S_N(f)\to f$ presque partout.

Ce résultat est faux dans $L^1(\mathbb{T})$.

EXERCICE 2.6.

(1) Calculer $f * e_k$.

(2) En déduire que $S_N(f) = f * D_N$ avec $D_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e_k(t)$.

(3) Montrer que $D_N(t) = \dfrac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}$.

DÉFINITION 3.
$D_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e_k(t) = \dfrac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin\pi t}$ est appelé le *noyau de Dirichlet*.

Notons que $\int_0^1 D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et que, pour $t\in[0,1]$, $D_N(t)$ n'a pas de limite quand $n\to+\infty$.

THÉORÈME 2.5.

(1) *Il existe C tel que, pour tout $N\geq 2$ $C^{-1}\ln N \leq \|D_N\|_1 \leq C\ln N$.*
(2) *Il existe une fonction $f\in L^1(\mathbb{T})$ tel que $S_N(f)$ ne converge pas vers f dans $L^1(\mathbb{T})$*

DÉMONSTRATION. Regardons D_N de plus près: c'est une fonction paire, qui a un maximum en 0, $D_N(0) = 2N+1$ et est de signe $(-1)^k$ sur l'intervalle $[k/(2N+1), (k+1)/(2N+1)]$. Pour calculer $\|D_N\|_p^p = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} |D_N(t)|^p \,\mathrm{d}t$, on utilise la parité pour se ramener à $[0, 1/2]$ et ensuite on découpe $[0, 1/2]$ en intervalles sur lesquels D_N est de signe constant. Le premier interval $[0, 1/(2N+1)]$ est un peu particulier car $\sin \pi t$ s'annule sur cet interval, et le dernier interval n'est que de longueur moitié des autres $[N/(2N+1), (N+1/2)/(2N+1)]$. Pour simplifier les notations, posons $M = 2N+1$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= 2\int_0^{1/2} |D_N(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1/M} \left|\frac{\sin M\pi t}{\sin \pi t}\right| \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k/M}^{(k+1)/M} \left|\frac{\sin M\pi t}{\sin \pi t}\right| \mathrm{d}t + \int_{N/M}^{1/2} \left|\frac{\sin M\pi t}{\sin \pi t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \left|\frac{\sin \pi t}{\sin \pi t/M}\right| \mathrm{d}t + \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \left|\frac{\sin \pi t}{\sin \pi t/M}\right| \mathrm{d}t + \varepsilon_N
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N &= \int_{N/M}^{1/2} \left|\frac{\sin M\pi t}{\sin \pi t}\right| \mathrm{d}t \begin{cases} \leq \dfrac{1}{|\sin \pi N/(2N+1)|} \displaystyle\int_{N/(2N+1)}^{1/2} |\sin M\pi t| \,\mathrm{d}t \\ \geq \displaystyle\int_{N/M}^{1/2} |\sin M\pi t| \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{(2N+1)} \displaystyle\int_N^{N+1/2} |\sin \pi t| \,\mathrm{d}t \end{cases} \\
&\begin{cases} \leq \dfrac{1/2 - N/(2N+1)}{|\sin \pi N/(2N+1)|} \to 0 \\ \geq \dfrac{1}{(2N+1)} \displaystyle\int_0^{1/2} |\sin \pi t| \,\mathrm{d}t \to 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $s \in [0, \pi/2]$ $\frac{2}{\pi}s \leq \sin s \leq s$ donc pour $N \geq 1$ (*i.e.* $M \geq 3$ et $0 \leq \pi t/M \leq \pi/3$ pour la première intégrale)

$$\frac{1}{M}\int_0^1 \left|\frac{\sin \pi t}{\sin \pi t/M}\right| \mathrm{d}t \begin{cases} \leq \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin \pi t}{3t/2}\right| \mathrm{d}t \\ \geq \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin \pi t}{t}\right| \mathrm{d}t \end{cases}.$$

Il reste donc à voir que la somme des autres termes a un comportement en $\ln M$. Mais

$$\frac{1}{M}\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin \pi t}{\sin \pi t/M}\right| \mathrm{d}t \begin{cases} \leq \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{(-1)^k \sin \pi t}{\sin \pi k/M} \mathrm{d}t = \dfrac{1}{M\pi \sin \pi k/M} \leq \dfrac{1}{M\pi \sin \pi k/M} \leq \dfrac{1}{2k} \\ \geq \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{(-1)^k \sin \pi t}{\sin \pi(k+1)/M} \mathrm{d}t = \dfrac{1}{M\pi \sin \pi(k+1)/M} \geq \dfrac{1}{\pi^2(k+1)} \end{cases}.$$

On conclut alors en remarquant que, d'une part

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi^2(k+1)} \geq \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N-1}\int_{k+1}^{k+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{\pi^2}\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln(N+1)/2}{\pi^2}$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2k} \leq \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{2x} = \frac{1}{2}\ln N.$$

La deuxième partie du théorème provient du fait que l'application $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ $f \to D_N * f$ a pour norme $\|D_N\|_1$.

Un théorème de S. Banach permet de conclure. Ce fait est admis ici.

$\square$

Enfin, Rappelons qu'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est dite *Césaro-convergente* si ses *moyennes de Césaro* $c_n := \dfrac{a_0+\cdots+a_n}{n+1}$ convergent.

Lemme 2.6.
Une suite convergente est Césaro-convergente vers la même limite, mais la réciproque est fausse.

Démonstration. Supposons que $a_n \to \ell$, en particulier (a_n) est bornée, disons $|a_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe N tel que, si $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Mais alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1} - \ell\right| &= \left|\frac{a_0-\ell+\cdots+a_n-\ell}{n+1}\right| \leq \frac{|a_0-\ell|+\cdots+|a_{N-1}-\ell|+|a_N-\ell|+\cdots+|a_n-\ell|}{n+1} \\ &\leq \frac{NM}{n} + \frac{n-N+1}{2n}\varepsilon.\end{aligned}$$

Mais, si $K \geq 2NM/\varepsilon$ et si $n \geq K$ alors $NM/n \leq \varepsilon/2$ donc

$$\left|\frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

La suite $(-1)^n$ fournit un contre-exemple à la réciproque. □

Regardons maintenant les moyennes de Césaro des sommes partielles d'une série de Fourier.

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} f * D_k = f * \left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k\right).$$

Mais

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=-k}^{k} e^{2i\pi jt} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j} \chi_{\{-k,\ldots,k\}}(j)e^{2i\pi jt}$$

puis on fait une intervertion des sommes

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{\chi_{\{-k,\ldots,k\}(j)}}{N+1} e^{2i\pi jt} = \sum_{j}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)_+ e^{2i\pi jt}$$

où $a_+ = \max(a, 0)$, en remarquant que $k \in \{0, \ldots, \mathbb{N}$ et $j \in \{-k, \ldots, -k\}$ équivaut à $|j| \in \{k, \ldots, N\}$. Notons que la sommation porte uniquement sur les $j \in \{-N, \ldots, N\}$.

Comme pour le noyau de Dirichlet, cette somme se calcule. Pour $t \neq 0$, on se ramène à une somme de série géométrique:

$$\begin{aligned}F_N &:= \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}\frac{\sin(2j+1)\pi t}{\sin \pi t} = \frac{1}{(N+1)\sin \pi t}\sum_{j=0}^{N} \operatorname{Im} e^{(2j+1)i\pi t} \\ &= \frac{1}{(N+1)\sin \pi t}\operatorname{Im}\sum_{j=0}^{N} e^{(2j+1)i\pi t} = \frac{1}{(N+1)\sin \pi t}\operatorname{Im}\frac{e^{i\pi t} - e^{(2N+3)i\pi t}}{1 - e^{2i\pi t}} \\ &= \frac{1}{(N+1)\sin \pi t}\operatorname{Im}\frac{1 - e^{(2N+2)i\pi t}}{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}} = \frac{1}{(N+1)\sin \pi t}\operatorname{Im} e^{(N+1)i\pi t}\frac{e^{-(N+1)i\pi t} - e^{(N+1)i\pi t}}{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}} \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2.\end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on utilise à nouveau le fait que F_N est un polynôme trigonométrique et est donc continu. L'expression obtenue se prolonge bien par continuité en 0 et $F_N(0) = N + 1$.

Définition 4. Les moyennes de Césaro des sommes partielles de la série de Fourier sont appelées *Sommes de Fejer* de f. Le noyau

$$F_N = \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)_+ e^{2i\pi jt} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2$$

est appelé *noyau de Fejer.*

THÉORÈME 2.7 (Fejer).
Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < +\infty$, alors $F_N * f \to f$ dans L^p. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors $F_N * f \to f$ uniformément.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant que nous admettrons.

LEMME 2.8.
Soit $1 \le p < +\infty$ et soit $f \in L^p(\mathbb{T})$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, notons $\tau_x f$ la fonction de $L^p(\mathbb{T})$ définie par $\tau_x f(t) = f(t-x)$. Alors l'application $\begin{matrix} \mathbb{R}^d & sto & L^p(\mathbb{T}) \\ x & \mapsto & \tau_x f \end{matrix}$ est continue.

Pour $p = +\infty$ ce résultat est faux, à moins de remplacer $L^\infty(\mathbb{T})$ par $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

DÉMONSTRATION. Il faut remarquer que $\int_0^1 F_N(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{F_N}(0) = 1$ donc

$$F_N * f(x) - f(x) = \int_0^1 F_N(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F_N(t)\,\mathrm{d}t f(x) = \int_0^1 F_N(t)\big(\tau_t f(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite (pour $p = 1$, c'est l'inégalité triangulaire),

$$\|F_N * f - f\|_p \le \int_0^1 \big\|F_N(t)\big(\tau_t f(x) - f(x)\big)\big\|_{L^p_x}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} F_N(t)\|\tau_t f - f\|_{L^p}\,\mathrm{d}t$$

où on a utilisé la périodicité de f et de F_N et le fait que $F_N \ge 0$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Notons d'abord qu'il existe $\delta > 0$, tel que, si $|t| < \delta$, $\|\tau_t f - f\|_{L^p} \le \varepsilon$.

Mais, pour $\delta > 0$ fixé, en écrivant $\sin^2(N+1)\pi t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^{2i\pi(N+1)t} + e^{-2i\pi(N+1)t})$

$$\begin{aligned} \int_{\delta \le |t| \le 1/2} F_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{N+1}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\chi_{\delta \le |t| \le 1/2}}{\sin^2 \pi t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^{2i\pi(N+1)t} + e^{-2i\pi(N+1)t})\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{c_0(\varphi)}{2(N+1)} - \frac{c_{N+1}(\varphi) + c_{-N-1}(\varphi)}{4(N+1)} \end{aligned}$$

où $\varphi(t) = \dfrac{\chi_{\delta \le |t| \le 1/2}}{\sin^2 \pi t}$. Notons que φ est bornée (avec une borne dépendant de δ), donc $c_{\pm(N+1)}(\varphi) \to 0$ ainsi, il existe N_0 tel que, si $N \ge N_0$, alors

$$\int_{\delta \le |t| \le 1/2} F_N(t)\,\mathrm{d}t \le \varepsilon.$$

Enfin, notons que $\|\tau_t f - f\|_p \le \|\tau_t f\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|F_N * f - f\|_p &\le \int_{|t| \le \delta} F_N(t)\|\tau_t f - f\|_{L^p}\,\mathrm{d}t + \int_{\delta \le |t| \le 1/2} F_N(t)\|\tau_t f - f\|_{L^p}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{|t| \le \delta} F_N(t)\,\mathrm{d}t\varepsilon + 2\varepsilon\|f\|_p \\ &\le (1 + 2\|f\|_p)\varepsilon \end{aligned}$$

puisque $F_N \ge 0$. □

COROLLAIRE 2.9.
– L'application $f \to (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est injective sur $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < +\infty$ et sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
– Les polynômes trigonométriques sont danses dans $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < +\infty$ et dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

DÉMONSTRATION. Si $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout k, alors $F_N * f = F_N * g$ pour tout N. En passant à la limite, on obtient $f = g$.

Notons enfin que $F_N * f$ est un polynôme trigonométrique. □

THÉORÈME 2.10 (Dirichlet).
– Soit f une fonction bornée, 1-périodique et supposons que f ait une limite à gauche et à droite en un point t_0, $f(t_0^\pm)$ et que de plus elle ait des dérivées à gauche et à droite en ce point $f'(t_0^\pm)$, c'est-à-dire

$$f'(t_0^\pm) = \lim_{t \to t_0^\pm} \frac{f(t) - f(t_0^\pm)}{t - t_0}.$$

Alors la série de Fourier de f converge (ponctuellement) en t_0:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kt} = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}.$$

– Soit f une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

EXERCICE 2.7.
Soit f une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, montrer que $c_k(f') = 2i\pi k c_k(f)$.

DÉMONSTRATION. Commençons par la deuxième partie du théorème. Il suffit de voir que f est uniformément de Cauchy, donc convergente. D'après le théorème de Fejer, sa limite ne peut être que f. Mais, comme $c_k(f') = 2i\pi k c_k(f)$, pour $k \neq 0$, $c_k(f) = \frac{1}{2i\pi k} c_k(f')$ donc pour $p, q \geq 1$ ou $p, q \leq 1$

$$\left| \sum_{k=p}^{q} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |c_k(f)| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{q} \frac{|c_k(f')|}{k} \leq \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=p}^{q} |c_k(f')|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}$$

avec Cauchy-Schwarz. Comme f' est continue, $f' \in L^2(\mathbb{T})$ donc avec Parseval $\sum |c_k(f')|^2$ converge et est donc de Cauchy. De plus $\sum k^{-2}$ converge aussi, on en déduit immédiatement que la série de Fourier de f est uniformément de Cauchy.

La première partie est plus subtile. D'abord, quitte à remplacer f par $f(t - t_0)$, on peut supposer que $t_0 = 0$. Ensuite, en remarquant que D_N est paire d'intégrale 1,

$$\int_{-1/2}^{0} D_N(t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{1/2} D_N(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
S_N f(0) - \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} &= D_N * f(0) - \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} \\
&= \int_{-1/2}^{0} D_N(t) f(-t) \, \mathrm{d}t - f(0^+) \int_{-1/2}^{0} D_N(t) \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{0}^{1/2} D_N(t) f(-t) \, \mathrm{d}t - f(0^-) \int_{0}^{1/2} D_N(t) \, \mathrm{d}t \\
&:= A_N + B_N.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que

$$\begin{aligned}
A_N &:= \int_{-1/2}^{0} D_N(t) f(-t) \, \mathrm{d}t - f(0^+) \int_{-1/2}^{0} D_N(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{0} D_N(t) \big(f(-t) - f(0^+) \big) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \chi_{[-1/2,0]} D_N(t) \big(f(-t) - f(0^+) \big) \, \mathrm{d}t \to 0
\end{aligned}$$

et de même pour B_N. Mais

$$\begin{aligned}
D_N(t) \big(f(-t) - f(0^+) \big) \chi_{[-1/2,0]} &= \frac{f(-t) - f(0^+)}{t} \frac{t}{\sin \pi t} \chi_{[-1/2,0]} \sin(2N+1)\pi t \\
&= \frac{f(-t) - f(0^+)}{t} \frac{t}{\sin \pi t} \chi_{[-1/2,0]} \frac{e^{i\pi t} e^{2i\pi Nt} - e^{-i\pi t} e^{2i\pi Nt}}{2i} \\
&:= g_+(t) e^{2i\pi Nt} - g_- e^{2i\pi Nt}
\end{aligned}$$

donc $A_N = c_N(g_+) - c_N(g_-)$. Ainsi, si $g_\pm$ est bornée, le Lemme de Riemann-Lebesgue implique que $A_N \to 0$.

Il n'est pas difficile de voir que $\dfrac{te^{i\pi t}}{2i\sin\pi t}$ est une fonction continue (donc bornée) sur $[-1/2, 1/2]$. Par ailleurs, il existe $\eta > 0$ tel que , pour $-\eta < t \leq 0$, $\left|\dfrac{f(-t) - f(0^+)}{t} - f'(0^+)\right| \leq 1$, en particulier, $\dfrac{f(-t) - f(0^+)}{t}$ est bornée sur $[-\eta, 0]$. Elle est évidemment bornée sur $[-1/2, \eta]$ puisque f est bornée donc $\dfrac{f(-t) - f(0^+)}{t}\chi_{[-1/2,0]}$ est également bornée. Comme

$$g_+(t) = \frac{f(-t) - f(0^+)}{t}\chi_{[-1/2,0]}\frac{te^{i\pi t}}{2i\sin\pi t}$$

on conclue poour g_+. On traite g_- de la même façon.

□

3. Compléments

3.1. Comparaison entre coefficients de Fourier et transformée de Fourier discrète. Soit f une fonction continue 1-périodique et notons

$$y_j = f\left(\frac{j}{N}\right) \qquad j = 0, \ldots, N$$

(où N est un entier). Les coefficients de Fourier de f sont donnés par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

Si on approche ces coefficients par la formule des trapèzes alors, en notant $\omega = e^{2i\pi/N}$,

$$c_k(f) \simeq c_k^t(f) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right)e^{-2i\pi jk/N}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j\omega^{-kj}$$

donc $c_k(f) \simeq \frac{1}{N}\mathcal{F}_N[y](k)$.

Il faut toutefois être prudent: $c_k(f) \to 0$ alors que $\frac{1}{N}\mathcal{F}_N[y](k)$ est N-périodique. Cette approximation ne peut donc être bonne pour tout k, ce qui peut être vu en estimant le reste dans la formule des trapèzes.

Une façon plus directe de voir cette qualité d'approximation est la suivante: Nous allons chercher à approcher f de deux façons distinctes à l'aide d'un polynôme trigonométrique à N termes (et de degré $\leq N/2$).

Commençons par traiter le cas N pair, donc $N/2$ est un entier.

$$f \simeq \sum_{-N/2+1}^{N/2} \alpha_k e^{2i\pi kt}.$$

Une première façon de faire est de prendre la série de Fourier et de la tronquer:

$$f \simeq \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} c_k(f)e^{2i\pi kt}.$$

On obtient ainsi une approximation optimale au sens L^2.

Une seconde façon de faire consiste à chercher un polynôme trigonométrique qui *interpole* f en N points. Nous choisissons ici les points k/N, $k = 0, \ldots, N-1$. On veut donc trouver les α_k tels que

$$f\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \alpha_k e^{2i\pi kj/N}$$

ou encore, en utilisant la N-périodicité du membre de droite

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \omega^{kj}$$

avec $\beta_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{pour } k = 0, \dots, N/2 \\ \alpha_{k-N} & \text{pour } k = N/2+1, \dots, N-1 \end{cases}$ On reconnaît une transformée de Fourier discrète inverse $y = N\mathcal{F}_N^{-1}[\beta]$ donc $\beta = \dfrac{1}{N}\mathcal{F}_N[y]$.

Les deux approximations sont très proches l'une de l'autre si f est un peu régulière, donc $\alpha_k \simeq c_k(f)$ pour $k = -N/2+1, \dots, N/2$. On retrouve donc

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}_N[y](k) \simeq \begin{cases} c_k(f) & \text{pour } k = 0, \dots, N/2 \\ c_{k-N}(f) & \text{pour } k = N/2+1, \dots, N-1 \end{cases}.$$

Notez qu'il y a une légère disymétrie entre les indices positifs et les négatifs: on approxime c_0, les $N/2$ termes $c_1, \dots, c_{N/2}$ et les $N/2-1$ terms $c_{-1}, \dots, c_{-N/2+1}$.

Traitons maintenant le cas N impair, donc $N = 2M+1$ (donc $M = [N/2]$). On peut toujours approcher f d'une part par une somme partielle de sa série de Fourier

$$f \simeq \sum_{k=-M}^{M} c_k(f) e^{2i\pi kt}.$$

Notez que cette somme a exactement $2M+1 = N$ termes. D'autre part, on cherche toujours un polynôme trigonométrique qui interpole f en j/N, $j = 0, \dots, N-1$. On veut donc

$$y_j := f\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2i\pi kj/N}$$

ou encore

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k e^{2i\pi kj/N}$$

avec $\beta_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{pour } k = 0, \dots, M \\ \alpha_{k-N} & \text{pour } k = M+1, \dots, N-1 \end{cases}$. À nouveau, $y = N\mathcal{F}_N^{-1}[\beta]$ donc $\beta = \dfrac{1}{N}\mathcal{F}_N[y]$. Les polynômes sont proches l'un de l'autre donc On retrouve donc

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}_N[y](k) \simeq \begin{cases} c_k(f) & \text{pour } k = 0, \dots, M \\ c_{k-N}(f) & \text{pour } k = M+1, \dots, N-1 = 2M \end{cases}.$$

Notez que cette fois-ci on approxime autant de termes d'indice positif $(c_1, \dots, c_M)$ que négatifs $(c_{-1}, \dots, c_{-M})$.

Exercice 2.8. Supposons que f soit un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{-2i\pi kt}.$$

Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f\left(\frac{j}{N+1}\right).$$

En déduire que $c_k = \dfrac{1}{2N+1}\mathcal{F}_{2N+1}[y](k)$ où y est la suite $y = (f(0), f(1/(2N+1)), \dots, f(2N/(2N+1)))$.

Remarque 2.11. En `Matlab` la commande `fftshift` permet de reclasser les coefficients d'une suite (obtenue par une FFT) de sorte qu'elle soit classée de la même façon que les coefficients de Fourier qu'ils approchent.

Plus précisément (en supposant N impair $N = 2M + 1$ pour fixer les idées) si

$$x = [f(1/N)\ f(2/N)\ \dots\ f\big((N-1)/N\big)]$$

et `y=fft(x)` alors $y = [y_1\ \dots y_N]$ où

$$y_k \simeq \begin{cases} \frac{1}{N} c_{k-1}(f) & k = 1, \dots, M+1 \\ \frac{1}{N} c_{k-2M-2}(f) & k = M+2, \dots, 2M+1. \end{cases}$$

Alors `z=fftshift(y)` est la suite

$$z = [y_{M+2}\ \dots\ y_{2M+1}\ y_1\ \dots\ y_{M+1}]$$

de sorte que $z_k \simeq \dfrac{1}{N} c_{k-M-2}(f)$.

La commande `ifftshift` effectue la permutation inverse.

3.2. Fonctions T-périodiques.

Nous nous sommes restreints aux fonctions 1-périodiques par comodité. Les résultats de ce chapître s'adaptent sans peine aux fonctions T-périodiques si on remarque que f est T-périodique si et seulement si $f_T(t) = f(tT)$ est 1-périodique.

Les coefficients de Fourier sont alors définis par

$$c_k^T(f) = c_k(f_T) = \int_0^1 f(tT) e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(s) e^{-2i\pi ks/T}\,\mathrm{d}s$$

et la série de Fourier de f est alors donnée par

$$S(f)(t) = S(f_T)(t/T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_T) e^{2i\pi kt/T} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^T(f) e^{2i\pi kt/T}.$$

Une alternative est d'utiliser la définition des séries de Fourier comme projection orthogonale des fonctions sur l'espace des polynômes trigonométriques. Pour cela, remarquons d'abord que $e^{2i\pi\lambda t}$ est T-périodique si et seulement si $\lambda = k/T$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus $\{e^{2i\pi kt/T}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un système (une base) orthonormé de $L^2([0,T])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

(notez qu'on prend une *moyenne*, ceci permet de prendre le coefficient de Fourier d'indice 0 comme étant la *moyenne* de f). Donc le k-ième coefficient de Fourier est donné par

$$c_k^T(f) = \left\langle f, e^{2i\pi kt/T}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-2i\pi kt/T}\,\mathrm{d}t$$

la série de Fourier est donnée par

$$S(f)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{2i\pi kt/T}\right\rangle e^{2i\pi kt/T} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^T(f) e^{2i\pi kt/T}$$

et Parseval s'écrit

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

Les résultats de convergence sont inchangés.

4. Solutions des exercices

4.1. Exercice 2.1. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(k-1)T \leq a \leq kT$. Il suffit alors d'écrire

$$\begin{aligned}\int_a^{T+a} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{kT} f(t)\,\mathrm{d}t \int_{kT}^{T+a} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a-(k-1)T}^{kT-(k-1)T} f\big(t+(k-1)T\big)\,\mathrm{d}t + \int_{kT-kT}^{T+a-kT} f(t+kT)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a-(k-1)T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-(k-1)T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

4.2. Exercice 2.2. Il suffit de remarquer que $\frac{p}{q} > 1$, on peut donc appliquer Hölder (avec l' indice $s = p/q$ au lieu de p)

$$\int_0^1 |f(t)|^q\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|^q 1\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^{q\times\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}t\right)^{q/p}\left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}t\right)^{1-q/p} = \left(\int_0^1 |f(t)|^{q\times\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}t\right)^{q/p}.$$

Notez que dans ce cas, $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ si $q < p$.

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique, positive, telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^q\,\mathrm{d}x < +\infty$ mais, si $p > q$, $\int_0^1 f(x)^p\,\mathrm{d}x = +\infty$. Il suffit évidemment de définir $f = f_0$ sur $[0,1)$ puis de le prolonger par 1-périodicité à $\mathbb{R}$, ce qui se fait en posant $f(x) = f_0(x - \lfloor x \rfloor])$, $\lfloor x\rfloor$ le plus grand entier $\leq x$.

Rappelons que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+|\ln x|)^\beta} < +\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ (ce dernier cas ce voit par changement de variable $t = \ln x$).

Ainsi, il suffit de prendre $f_0(x) = \frac{1}{x^{1/q}(1+|\ln x|)^2}$.

4.3. Exercice 2.3. On fait le changement de variable $s = x - t$, $t = x - s$:

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 g(s)f(x-s)\,\mathrm{d}s = g * f(x)$$

en utilisant l'exercice 2.1.

$F : (x,t) \to f(t)g(x-t)$ est continue, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre donne la continuité de $f * g$. De plus, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ alors F admet k-dérivées partielles par rapport à x continues $\partial_x^k F(x,t) = f(t)g^{(k)}(x-t)$, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre montre que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $(f*g)^{(k)}(x) = \int_0^1 \partial_x^k F(x,t)\,\mathrm{d}t = f * g^{(k)}$. Comme $f*g = g*f$, si f est de classe $\mathcal{C}^l$ alors $f*g$ aussi et $(f*g)^{(l)} = (g*f)^{(l)} = g*f^{(l)} = f^{(l)}*g$. Donc si f est de classe $\mathcal{C}^l$ et g de classe $\mathcal{C}^k$, alors $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+l}$ avec

$$(f*g)^{(k+l)} = \big((f*g)^{(l)}\big)^{(k)} = (f^{(l)}*g)^{(k)} = f^{(l)} * g^{(k)}.$$

Enfin

$$f * g(x+1) = \int_0^1 f(t)g(x+1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = f * g(x)$$

par 1-périodicité de g.

4.4. Exercice 2.4. La linéarité résulte directement de la linéarité de l'intégrale.

Soit $0 < a < b < 1$ et $f = \chi_{[a,b]}$. Alors

$$c_k(f) = \int_a^b e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-2i\pi kb} - e^{-2i\pi ka}}{-2i\pi k} = e^{-i\pi k(a+b)}\frac{e^{-i\pi(b-a)k} - e^{i\pi(b-a)k}}{-2i\pi k} = \frac{e^{-i\pi k(a+b)}}{k\pi}\sin\pi(b-a)k.$$

Remarquez que $c_k(f) \to 0$.

Enfin

$$c_k(T_a f) = \int_0^1 f(t-a)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+1} f(t)e^{-2i\pi k(t+a)}\,\mathrm{d}t = e^{-2i\pi ka}c_k(f)$$

avec l'exercice 2.1 alors que

$$c_k(M_j f) = \int_0^1 f(t)e^{2i\pi jt}e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi(k-j)t}\,\mathrm{d}t = c_{k-j}(f).$$

4.5. Exercice 2.5. Comme on a $2N+1$ vecteurs dans un espace de dimension $2N+1$, il suffit de vérifier que ce système est orthonormé. Mais

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int_0^1 e^{2i\pi jt}e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2i\pi(j-k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{si } j=k\\ \frac{e^{2i\pi(j-k)}-1}{2i\pi(j-k)} = 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

4.6. Exercice 2.6. D'abord

$$f * e_k(x) = \int_0^1 f(t)e^{2i\pi k(x-t)}\,\mathrm{d}t = e^{2i\pi kx}\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = c_k(f)e_k(x)$$

en remarquant que $e^{2i\pi\ell} = 1$ si $\ell \in \mathbb{Z}$.

Mais alors

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} f * e_k = f * \left(\sum_{k=-N}^{N} e_k\right) = f * D_N$$

par linéarité du produit de convolution.

Enfin, D_N s'obtient à l'aide d'une sommation de suite géométrique: pour $t \neq 0$

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2i\pi kt} = \frac{e^{-2i\pi Nt} - e^{2i\pi(N+1)t}}{1 - e^{2i\pi t}} = \frac{e^{i\pi t}}{e^{i\pi t}}\,\frac{e^{-2i\pi(N+1/2)t} - e^{2i\pi(N+1/2)t}}{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

4.7. Solution de l'exercice 2.8. Soit $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré N, $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}\,\{e^{2i\pi kt}, k = -N, \ldots, N\}$. Comme $f \to \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f \to \displaystyle\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} f\left(\frac{j}{N+1}\right)$ sont toutes deux linéaires, il suffit de vérifier que ces deux applications coincident pour $e^{2i\pi kt}$, $k = -N, \ldots, N$.

Mais $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = \delta_{k,0}$ et en sommant la série géométrique de raison $e^{2i\pi k/(N+1)} \neq 1$ pour $k = -N, \ldots, -1$ et pour $k = 1, \ldots, N$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} e^{2i\pi kj/(N+1)} = \begin{cases}\frac{1-e^{2i\pi k(N+1)/(N+1)}}{1-e^{2i\pi k/(N+1)}} = 0 & \text{si } k \neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Pour la seconde partie, $c_k(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t$ est obtenue en intégrant sur $[0,1]$ un polynôme trigonométrique de degré $N + |k| \leq 2N$. Donc

$$c_k(f) = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} f\left(\frac{j}{2N+1}\right)e^{-2i\pi kj/(2N+1)} = \frac{1}{2N+1}\mathcal{F}_{2N+1}[y](k)$$

avec $y = (f(0), f(1/(2N+1)), \ldots, f(2N/(2N+1)))$.

CHAPÎTRE 3

Théorèmes d'échantillonage

Le principe général est de reconstruire une fonction ou une approximation d'une fonction dont on connaît certaines propriétés à partir de certaines de ses valeurs (un *échantillon*).

Par exemple, si on sait qu'une fonction est un polynome de degré n, alors on peut la reconstruire à partir de ses valeurs en $n+1$ points. Il en va de même pour les polynômes trigonométriques.

Nous allons ici établir un résultat similaire pour des fonctions dont la transformée de Fourier est à spectre compact.

1. Quelques rappels d'analyse de Fourier

Dans ce chapitre nous utiliserons la normalisation suivante pour la tranformée de Fourier des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\widehat{f}(\xi) := \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2i\pi\langle t,\xi\rangle}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \check{f}(t) := \mathcal{F}^{-1}[f](t) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{2i\pi\langle t,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi.$$

Voici quelques propriétés él'ementaires (leurs démonstrations sont laissées en exercice):

(i) La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse sont linéaires.

(ii) Notons $\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Alors

$$\mathcal{F}[\chi_{[-1/2,1/2]}](\xi) = \operatorname{sinc} \pi\xi.$$

(iii) $\|\mathcal{F}[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(iv) $\mathcal{F}[f](\xi) \to 0$ quand $\xi \to \pm\infty$
Indication: Commencer par le faire pour $f = \chi_{[a,b]}$ puis pour les fonctions simples.

(v) Si $T_a f(t) = f(t-a)$ et $M_a f(t) = e^{2i\pi\langle a,\xi\rangle} f(t)$ alors $\mathcal{F}[T_a f](\xi) = e^{-2i\pi\langle a,\xi\rangle}\mathcal{F}[f](\xi) = M_{-a}\mathcal{F}[f]$ et $\mathcal{F}[M_a f](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi - a) = T_a\mathcal{F}[f][xi)$.

(vi) Si $f, t_i f(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\dfrac{\partial \mathcal{F}[f]}{\partial \xi_i}(\xi) = \mathcal{F}[-2i\pi t_i f](\xi)$

(vii) Si $f, \partial_{t_i} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}[\partial_{t_i} f](\xi) = 2i\pi\xi_i \mathcal{F}[f](\xi)$.

(viii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[f]\big] = f$.

(ix) $f \to \mathcal{F}[f]$ est injective, non surjective.

(x) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

En particulier, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer cela à f et $g = \mathcal{F}^{-1}[\overline{f}] = \overline{\mathcal{F}[f]}$. On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \quad \text{puis} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

On peut alors étendre la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Notons que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier est une *limite dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ (et non directement une intégrale comme ci-dessus), par exemple

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{|t|\leq R} f(t) e^{-2i\pi\langle t,\xi\rangle}\,\mathrm{d}t.$$

On peut montrer que $\mathcal{F}$ est une *bijection* linéaire $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ dont l'inverse est l'extension de $\mathcal{F}^{-1}$.

La convolution de deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = g * f(x)$$

et alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Enfin, le support d'une fonction *continue* est d'efinie comme

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x\ :\ f(x) \neq 0\}} = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \{\Omega, :\ \Omega \text{ ouvert (borné) },\ f(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega\}.$$

Notons que si Ω est un ouvert borné tel que $f(x) = 0$ sur Ω, et si g est une fonction bornée telle que $g(x) = 0$ si $x \notin \Omega$, alors $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Inversement, si $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction g bornée telle que $g(x) = 0$ si $x \notin \Omega$ (donc en particulier pour $g = e^{i\arg f}\chi_\Omega$) alors $f = 0$ sur Ω. Ainsi

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \{\Omega, : \Omega \text{ ouvert borné},\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0\ \forall g \text{ bornée},\ g(x) = 0 \text{ pour } x \notin \Omega\}.$$

Notons que cette définition ne nécessite plus la continuité de f et s'applique dès que f est intégrable sur les ouverts bornés, par exemple si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous la prendrons donc comme définition du support.

Le spectre d'une fonction et $\operatorname{spec} f = \operatorname{supp} \widehat{f}$.

2. Théorème de Shannon

Lemme 3.1.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction à spectre compact. Alors f est développable en série entière (en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Démonstration. Notons d'abord que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc si $\hat{f}$ est à support compact, donc inclus dans une boule $B(0,R)$ alors, avec Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \int_{B(0,R)} |\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leq \left(\int_{B(0,R)} 1\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2} \left(\int_{B(0,R)} |\hat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2} < +\infty.$$

Donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et alors la formule d'inversion de Fourier montre que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi = \int_{B(0,R)} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi.$$

En particulier, f est continue. Mais

$$e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2i\pi)^k}{k!}\langle x,\xi\rangle^k.$$

Il suffit de voir qu'on peut échanger sommation et intégration à l'aide du théorème de Fubini. Prenons $d = 1$ pour simplifier:

$$f(x) = \int_{[-R,R]} \hat{f}(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2i\pi)^k}{k!}(x\xi)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(2i\pi)^k}{k!}\int_{[-R,R]} \xi^k\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)x^k.$$

Pour cela, il suffit de voir que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{[-R,R]}\left|\frac{(2i\pi)^k}{k!}\xi^k\hat{f}(\xi)x^k\right|\mathrm{d}\xi \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{[-R,R]}\frac{(2\pi|x|R)^k}{k!}|\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = e^{2\pi R|x|}\left\|\hat{f}\right\|_1 < +\infty.$$

Notons que $\left\|\hat{f}\right\|_1 \leq \sqrt{2R}\left\|\hat{f}\right\|_2 = \sqrt{2R}\|f\|_2$ donc $f(x) \leq \sqrt{2R}e^{2\pi R|x|}\|f\|_2$ pour $x \in \mathbb{C}$. $\square$

THÉORÈME 3.2 (Théorème d'échantillonage de Shannon).
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à spectre $[-b,b]^d$ et soit $h \leq \frac{1}{b}$. Alors f est déterminée uniquement à partir de ses valeurs $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Plus précisément

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right) \operatorname{sinc} \frac{2\pi}{h}\left(x - \frac{hk}{2}\right) \tag{4}$$

et cette série converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{h}{2}\right)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right) e^{-i\pi h\langle k,\xi\rangle} \tag{5}$$

dans $L^2([-\pi/h,\pi/h])$.

Enfin, si g est aussi à spectre $[-b,b]^n$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx = \left(\frac{h}{2}\right)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right) g\left(\frac{hk}{2}\right) \tag{6}$$

REMARQUE 3.3.

(1) Le lemme 3.1 montre que $f(hk/2)$ a bien un sens.
(2) Le terme
$$(h/2)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(hk/2)g(hk/2)$$
de la formule (6) est l'approximation de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
par la méthode du trapèze. Le théorème de Shannon dit donc que, dans le cas des fonctions à spectre compact, la méthode du trapèze donne un résultat exact pour le calcul des intégrales (à condition évidemment de prendre un pas suffisament petit).

Ceci est heuristiquement interprété comme suit: une fonction à spectre $[-b,b]$ ne contient aucun détail de résolution $< 1/2b$.
(3) Notons

$$f *_h g(x) = \left(\frac{h}{2}\right)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\left(x - \frac{hk}{2}\right) g\left(\frac{hk}{2}\right). \tag{7}$$

Comme $f_x(t) = f(x-t)$ est également à spectre $[-b,b]$, on peut appliquer (6) à f_x et g. On obtient alors $f * g = f *_h g$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, nous ne ferons la démonstration qu'en dimension 1.

Comme $\widehat{f} = 0$ hors de $[-1/h,1/h] \supset [-b,b]$, on considère d'abord f comme une fonction sur $[-1/h,1/h]$ seulement. Écrivons alors sa série de Fourier : pour $\xi \in [-1/h,1/h]$, $\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\widehat{f})e^{i\pi hk\xi}$ et cette série converge dans $L^2([-1/h,1/h])$. Pour obtenir (5), il suffit alors de calculer les coefficients de Fourier :

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{h}{2}\int_{-1/h}^{1/h} \widehat{f}(\xi)e^{-i\pi hk\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{h}{2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi(-hk/2)\xi}\mathrm{d}\xi$$

car $\widehat{f} = 0$ en dehors de $[-1/h,1/h]$. Le théorème d'inversion de Fourier donne donc

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{h}{2}f(-hk/2).$$

La formule (6) est simplement l'application de la formule de Parseval pour la transformée de Fourier puis pour les séries de Fourier:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{[-1/h,1/h]} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2}{h}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\widehat{f})\overline{c_k(\widehat{g})} = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-hk/2)\overline{g(-hk/2)} \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(hk/2)\overline{g(hk/2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(-\frac{hk}{2}\right)e^{i\pi hk\xi} = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{hk}{2}\right)e^{-i\pi hk\xi}$$

dans $L^2([-1/h,1/h])$. Notons que le membre de droite de cette identité est une fonction $2/h$-périodique, alors que le membre de gauche n'est pas périodique, mais la restriction de cette fonction périodique à la période $[-1/h,1/h]$. Ainsi

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{hk}{2}\right)e^{-i\pi hk\xi}\chi_{[-1/h,1/h]}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. L'inversion de Fourier étant continue sur L^2, on peut intervertir la sommation et l'intégration:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{hk}{2}\right)\mathcal{F}^{-1}[e^{-i\pi hk\xi}\chi_{[-1/h,1/h]}] \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{hk}{2}\right)\int_{-1/h}^{1/h} e^{-i\pi hk\xi}e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{hk}{2}\right)\frac{h}{2}\int_{-1/h}^{1/h} e^{2i\pi(x-hk/2)\xi}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\frac{h}{2}\int_{-1/h}^{1/h} e^{2i\pi(x-hk/2)\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{h}{2}\left[\frac{e^{2i\pi(x-hk/2)\xi}}{2i\pi(x-hk/2)}\right]_{-1/h}^{1/h} = \operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right).$$

On retrouve donc bien la formule (4). □

Remarque 3.4. Soit $(a_n)\in\ell^2(\mathbb{Z})$ et soit $\varphi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ih\pi k\xi}$. Cette série converge dans $L^2([-1/h,1/h])$ est d éfinit donc une fonction de cet espace. On peut donc définir $f\in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f}(\xi)=\begin{cases}\varphi(\xi) & \text{si } \xi\in[-1/h,1/h]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ (qui est dans $L^2(\mathbb{R})$ et à support compact donc dans $L^1(\mathbb{R})$; f est donc la transformée de Fourier de cette fonction). La démonstration ci-dessus montre que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right) = f(x)$$

et cette série converge dans $L^2(\mathbb{R})$ (et même mieux, voir plus bas).

Le théorème de Shannon permet donc à la fois de convertir un signal continu (à spectre compact) en un signal à temps discret et vice versa.

Proposition 3.5.
La série (4) *converge uniformément vers* f.

Démonstration. Faisons la pour $d = 1$ pour simplifier. Il suffit de montrer que la série (4) est uniformément de Cauchy. Elle sera donc uniformément convergente et comme sa limte au sens de $L^2(\mathbb{R})$ est f, sa limite uniforme aussi. Mais

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} &\left|\sum_{k=p}^{q} f\left(\frac{hk}{2}\right)\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right| \\ &\leq \left(\sum_{k=p}^{q}\left|f\left(\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sum_{k=p}^{q}\left|\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=p}^{q}\left|f\left(\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la démonstration du théorème de Shannon, $f(hk/2)$ est le k-ième coefficient de Fourier de $\hat{f}$ vu comme fonction de $L^2([-1/h, 1/h])$. D'après Parseval, $\sum |f(hk/2|^2 < +\infty$, il existe donc N tel que, si $p, q \geq N$ (ou si $p, q \leq -N$) alors

$$\left(\sum_{k=p}^{q}\left|f\left(\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, si on montre qu'il existe C tel que

$$S(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi}{h}x-k\pi\right)\right|^2 \leq C$$

alors (8) montre que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sum_{k=p}^{q}\left|\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right|^2\right)^{1/2} \leq C\varepsilon,$$

donc (4) est bien uniformément de Cauchy.

Mais $S(x)$ est $2/h$-périodique et paire, il suffit donc de montrer que S est bornée sur $[0, 1/h]$. Par ailleurs,

$$|\operatorname{sinc} x| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Ainsi, en posant $X = \frac{2\pi}{h}x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\operatorname{sinc}(X-k\pi)|^2 &= 5 + \sum_{|k|\geq 3}\frac{1}{|X-k\pi|^2} \\ &\leq 5 + \sum_{|k|\geq 3}\frac{1}{(|k|-2)2\pi^2} := C < +\infty \end{aligned}$$

puisque $|X - k\pi| \geq |k|\pi - |X| \geq |k|\pi - 2\pi = (|k| - 2)\pi$. □

Exercice 3.1.

(1) Montrer que la dérivée k-ième de sinc est de la forme

$$\operatorname{sinc}^{(k)} x = \frac{P_k(x)\sin x + Q_k(x)\cos x}{x^{k+1}}$$

avec P_k, Q_k des polynômes de degré au plus k.

(2) En déduire qu'il existe une constante C_k telle que $\operatorname{sinc}^{k}(k)x \leq \dfrac{C_k}{1+|x|}$.

(3) En déduire que les séries dérivées de (4) convergent également uniformément.

3. Suréchantillonage

Dans le théorème précédent, on peut se contenter de prendre le *taux d'échantillonage* $h = \pi/b$ ce qui permet de reconstruire f à partir du minimum possible de valeurs. La convergence de la série (4) est au sens L^2 et même uniformément, mais cette série est très sensible au bruit: une petite perturbation de l'échantillon $\{f(hk/2)\}_k$ peut entraîner une grande erreur dans la sommation, voire une série divergente!

Nous allons maintenant voir comment, en suréchantillonant, c'est à dire en prenant $h < \pi/b$, on peut accélerer la convegence.

THÉORÈME 3.6. *Soit f à spectre $[-b,b]^d$ et soit $h < 1/b$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive, telle que $\gamma(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$ et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \gamma(\xi)d\xi = 1.$$

Alors

$$f(x) = \left(\frac{1+bh}{2}\right)^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right)\widehat{\gamma}\left(\frac{1-bh}{2h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right)\operatorname{sinc}\frac{(1+bh)\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right). \tag{9}$$

REMARQUE 3.7. (1) Comme γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, $\check{\gamma} \in \mathcal{S}$, en particulier, pour tout k, il existe C_k telle que $|\check{\gamma}(x)| \leq \frac{C_k}{(1+|x|)^k}$. Comme $f(hk/2)$ et $\operatorname{sinc}\frac{\pi}{h}(x-hk)$ sont bornés, la série (9) converge très rapidement.

(2) Quitte à perdre un peu de régularité de γ et donc de décroissance de $\widehat{\gamma}$, on peut rendre cette dernière explicite. Plus précisément, soit ℓ un entier, alors $\gamma = \left(\frac{2}{\ell}\right)^\ell \chi_{[-1/\ell,1/\ell]} * \chi_{[-1/\ell,1/\ell]} * \cdots * \chi_{[-1/\ell,1/\ell]}$ ($k-1$ convolutions) est à support $[-1,1]$, positive, paire, de classe $\mathcal{C}^{\ell-1}$, d'intégrale 1 et $\widehat{\gamma}(\xi) = (\operatorname{sinc} 2\pi\xi/\ell)^\ell$ donc décroit à l'infini en $|\xi|^{-\ell}$.

(3) Cette formule est aussi plus *stable* que la précédente. Imaginons que chaque $f(hk)$ soit mesurée avec une erreur ε_k, alors l'erreur commise en reconstruisant f à l'aide de ces mesures est

$$\left|\frac{1+bh}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varepsilon_k\widehat{\gamma}\left(\frac{1-bh}{2h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right)\operatorname{sinc}\frac{(1+bh)\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right|$$

qu'on majore par

$$\frac{1+bh}{2}\max|\varepsilon_k|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|\widehat{\gamma}\left(\frac{1-bh}{2h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)\right)\right|$$

qui peut être controlée et est en général très petite. Par exemple, si on prend $\ell \geq 2$ dans la construction précédente, on voit sans peine que $\widehat{\gamma}(\xi) \leq \ell^\ell(1+|\xi|)^{-\ell}$. L'erreur est alors approximativement $\frac{1-(bh)^2}{h}\ell^{\ell-1}\max|\varepsilon_k|$

Sans ce facteur $\widehat{\gamma}$, il est possible que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varepsilon_k\operatorname{sinc}\frac{2\pi}{h}\left(x-\frac{hk}{2}\right)$$

diverge !

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, nous ne ferons la démonstration qu'en dimension 1.

Reprenons la formule (5), pour $\xi \in [-1/h, 1/h]$,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{h}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right)e^{-i\pi hk\xi}. \tag{5}$$

Soit alors ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-b,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1/h,1/h] \end{cases}.$$

Comme $\widehat{f}(\xi)$ est à support $[-b, b]$, en multipliant (5) par ψ, on obtient

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{h}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{hk}{2}\right) e^{-i\pi hk\xi} \psi(\xi). \tag{10}$$

Pour obtenir la formule (9), nous allons construire ψ de la façon suivante :

Soit $c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + b\right)$ et $d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} - b\right)$. Soit γ la fonction donnée dans l'ennoncé du théorème et définissions γ_d par $\gamma_d(x) = \frac{1}{d}\gamma\left(\frac{x}{d}\right)$. Notons que γ_d est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support $[-d, d]$, positive, paire, et $\int_{\mathbb{R}} \gamma_d(x)\,\mathrm{d}x = 1$. De plus $\widehat{\gamma_d}(\xi) = \widehat{\gamma}(d\xi)$.

Soit alors $\psi = \gamma_d * \chi_{[-c,c]}$. Comme γ_d est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\chi_{[-c,c]} \in L^1(\mathbb{R})$, ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-c,c]}(t)\gamma\left(\frac{x-t}{d}\right)\,\mathrm{d}t = \int_{-c}^{c} \gamma\left(\frac{x-t}{d}\right)\,\mathrm{d}t$$

on remarque que $\psi \geq 0$, si $|x| > c + d$ et $t \in [-c, c]$ alors $|x - t|/d > 1$ donc $\gamma\left(\frac{x-t}{d}\right) = 0$ et $\psi(x) = 0$. Enfin, soit $|x| < b = c - d$. Alors, si $|t| > c$, $|x - t| > c - (c - d) = d$, donc $\gamma\left(\frac{x-t}{d}\right) = 0$. Ainsi $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_d(x - t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour conclure, notons que $\check{\psi}(x) = \widehat{\psi}(x) = 2c\widehat{\gamma}(dx)\mathrm{sinc}\, 2\pi cx$.

Comme dans la démonstration précédente, il suffit alors d'appliquer la formule d'inversion de Fourier terme à terme dans (10). $\square$

En pratique, les fonctions ne sont pas à spectre compact. Elle sont même souvent à support compact et une telle fonction ne peut pas avoir un spectre compact. Toutefois, il arrive souvent que l'essentiel de la masse de $\widehat{f}$ soit contenue dans un compact. Il est alors raisonnable de vouloir approcher f par

$$S_h f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(hk) \mathrm{sinc}\, \frac{\pi}{h}(x - hk).$$

Notons qu'il faut donner un sens à $f(hk)$, ce qui n'est pas possible pour une fonction $f \in L^2$ sans supposer des propriétés supplémentaires. Nous allons ici nous contenter de supposer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nous aurons besoin de résultat suivant, que nous laissons en exercice:

Exercice 3.2 (Formule sommatoire de Poisson).
Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h} l\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} h^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(hk) e^{-ih\langle k, \xi\rangle}. \tag{11}$$

Indication. Le membre de gauche est une fonction $2\pi/h$-périodique en chaque variable, il suffit donc de la regarder sur $[-\pi/h, \pi/h]^d$ et de la développer en série de Fourier. Le calcul est essentiellement le même que pour la formule (5).

Nous pouvons maintenant obtenir l'erreur d'approximation de f par $S_h f$.

Théorème 3.8. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et soit $h > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une fonction $\chi_x \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $|\chi_x| \leq 1$ telle que*

$$(S_h f - f)(x) = \frac{2}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d \setminus [-\pi/h, \pi/h]^d} \chi_x(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Par ailleurs,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} h^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(hk) e^{-ih\langle \xi, k\rangle} - \sum_{l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h} l\right). \tag{13}$$

Enfin, pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\widehat{f *_h g}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi) + (2\pi)^{d/2} \widehat{f}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \widehat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h} k\right). \tag{14}$$

REMARQUE 3.9. Si h est choisi tel que $\int_{|\xi|>\pi/h}|\widehat{f}(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq \varepsilon$ alors $|S_h f - f| \leq \dfrac{2\varepsilon}{(2\pi)^{d/2}}$.

DÉMONSTRATION. Le formule (13) s'obtient simplement en séparant le terme $l = 0$ dans la formule sommatoire de Poisson.

La série définissant $f *_h g$ converge dans L^2, on peut donc prendre la transformée de Fourier terme-à-terme:

$$\widehat{f *_h g}(\xi) = h^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\xi)e^{-ih\langle\xi,k\rangle}g(hk) = (2\pi)^{d/2}\widehat{f}(\xi)\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\widehat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right)$$

avec la formule de Poisson. En séparant le terme $l = 0$ dans cette dernière somme et en notant que $(2\pi)^{d/2}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi)$, on obtient (14).

Soit

$$F(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}h^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(hk)e^{-ih\langle k,\xi\rangle}$$

avec la formule de Poisson. Comme dans la démonstration du théorème de Shannon, on en déduit immédiatement que $\widehat{S_h f}(\xi) = F(\xi)\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d}$. Écrivons alors

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) + a(\xi)$$

où $a(\xi) = \displaystyle\sum_{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right)$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\widehat{S_h f}(\xi) - \widehat{f}(\xi) &= F(\xi)\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d} - \widehat{f}(\xi) = \big(\widehat{f}(\xi) + a(\xi)\big)\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d} - \widehat{f}(\xi) \\
&= \big(\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d} - 1\big)\widehat{f}(\xi) + \chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d}a(\xi).
\end{aligned}$$

Par inversion de Fourier, on a alors

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{d/2}(S_h f - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{S_h f - f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\big(\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d} - 1\big)\widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d}a(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi\notin[-\pi/h,\pi/h]^d} -\widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \sum_{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{[-\pi/h,\pi/h]^d}\widehat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi\notin[-\pi/h,\pi/h]^d} -\widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \sum_{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\int_{\xi\in[-\pi/h,\pi/h]^d+l}\widehat{f}(\xi)e^{i\left\langle x,\xi+\frac{2\pi}{h}l\right\rangle}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Soit alors $\xi \notin [-\pi/h,\pi/h]^d$, il existe un unique $l \in \mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ tel que $\xi \in [-\pi/h,\pi/h]^d + l$ et on définit alors

$$\chi_x(\xi) = \frac{e^{i\left\langle x,\xi+\frac{2\pi}{h}l\right\rangle} - e^{i\langle x,\xi\rangle}}{2}.$$

Notons enfin que si $\xi \in [-\pi/h,\pi/h]^d + l$ avec $l \in \mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ alors $\xi \notin [-\pi/h,\pi/h]^d$. □

EXERCICE 3.3 (Formule de Quadrature).
Montrer que si P est un polynôme trigonométrique sur $[0,a]$ de degré $< p$, i.e. si $P(x) = \sum_{k=-p+1}^{p-1} c_k e^{ikx/a}$, alors

$$\int_0^a P(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{p}\sum_{k=0}^{p-1}P\left(k\frac{a}{p}\right). \tag{15}$$

CHAPÎTRE 4

Filtres

1. Définitions

Un *système* est un appareil dans lequel on peut distinguer une entrée (input) et une sortie (output). C'est donc une application $\mathcal{A} \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{Y} \\ x & \mapsto & y \end{array}$ où $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) est l'espace des entrées (resp. sorties) possibles.

On dit que c'est un système MIMO s'il y a des entrées multiples $x_1, \ldots, x_n$ et des sorties multiples $y_1, \ldots, y_m$. Mathématiquement, cela revient à définir les entrées et les sorties comme des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Un système est dit *analogique* ou *à temps continu* si les entrées sont des signaux dépendant d'une variable "continue" (dans $\mathbb{R}^d$ ou plus généralement un ouvert Ω –ou sa fermeture $\bar{\Omega}$– de $\mathbb{R}^d$). Il est dit à *temps discret* (parfois numérique) si les entrées sont des signaux dépendant d'une variable discrète (*i.e.* indexées par $\mathbb{Z}^d$).

Un système est *instantanné* ou *sans mémoire* si la sortie à un instant donné ne dépend que de l'entrée à cet instant. Mathématiquement, cela peut s'écrire $\mathcal{A}x(t) = \mathcal{A}\big(x(t)\big)$. C'est par exemple le cas d'un circuit électrique fait uniquement de résistances.

On dit qu'un système vérife le *principe de superposition* si $\mathcal{A}$ est linéaire. Tous les systèmes que nous considérons dans ce cours seront de ce type.

Un système est *réalisable* ou *causal* si la sortie à un instant t_0 ne dépend que de l'entrée avant cet instant. Mathématiquement, cela s'écrit: *pour tout t_0, si $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \leq t_0$, alors $\mathcal{A}x_1(t_0) = \mathcal{A}x_2(t_0)$.*

Pour $a > 0$, notons $\tau_a x$ le signal $\tau_a x(t) = x(t-a)$, c'est-à-dire le décallage d'un temps a du signal. Un système est *invariant* ou *stationnaire* si, pour tout $a > 0$, $\mathcal{A}\tau_a x = \tau_a \mathcal{A}x$. En d'autres termes, un retard à l'entrée provoque le même retard à la sortie.

Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces de fonctions (de suites) muni d'une norme (typiquement un espace L^p ou ℓ^p ou $\mathcal{C}^k$), on dira qu'un système est *continu* si $x_k \to x$ dans $\mathcal{X}$ implique $\mathcal{A}x_k \to \mathcal{A}x$ dans $\mathcal{Y}$.

Exercice 4.1. On considère les systèmes suivants:

(1) L'amplificateur idéal: $y(t) = kx(t)$, $k > 1$;
(2) La ligne de retard: $y(t) = x(t-a)$, $a > 0$;
(3) Le système dérivateur: $y(t) = x'(t)$.

Quelles propriétés sont vérifiées par ces systèmes.

Exemple 4.1. On considère le circuit RC. La sortie vérifie $RCy'(t) + y(t) = x(t)$. Si le condensateur est initialement déchargé, on peut supposer que $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ (ou plus simplement $x(t) = y(t) = 0$ pour $t \leq t_0$).

La solution générale de l'équation différentielle $RCy'(t) + y(t) = x(t)$ s'obitent à l'aide de la méthode de la variation de la constante:

– l'équation homogène associée a pour solution $y(t) = \lambda e^{-t/RC}$.

– On cherche une solution sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-t/RC}$ ce qui conduit à $RC\lambda'(t)e^{-t/RC} = x(t)$ donc

$$y(t) = \left(\kappa + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} x(s)e^{s/RC}\,\mathrm{d}s\right)e^{-t/RC}.$$

– La condition initiale implique que $\kappa = 0$ donc

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)e^{(s-t)/RC}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} x(s)\chi_{[0,+\infty)}(t-s)e^{-(t-s)/RC}\,\mathrm{d}s = h * x(t)$$

avec $h(x) = \dfrac{1}{RC}\chi_{[0,+\infty)}(x)e^{-x/RC}$.

Notez que $h \in L^1$ avec $\|h\|_1 = RC$ donc si $x \in L^p$ alors $y \in L^p$ avec $\|y\|_p \leq \|h\|_1\|x\|_p = RC\|x\|_p$. Si $p \neq 1$, comme on a aussi $h \in L^{p'}$ avec $1/p + 1/p' = 1$ on a de plus $y \in \mathcal{C}_0$.

On voit sans peine que ce système n'est pas instantané, est causal et stationnaire. Ce dernier fait est une conséquence directe du fait qu'il s'écrive à l'aide d'une convolution.

2. Filtres

Nous allons maintenant nous intéresser à des systèmes à *noyau*, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{A}x(t) = \int_{\Omega} h(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{16}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ou, dans le cas des systèmes à temps discret,

$$\mathcal{A}x(k) = \sum_{j\in\Omega} h(j,k)x(j) \tag{17}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$. Dans ce cas, h est appelé la *réponse impulsionnelle* du système.

Pour que ceci ait un sens, il faut faire un minimum d'hypothèses sur la réponse impulsionnelle et/ou l'entrée x.

Notons que (16) est définie si

– soit pour (presque) tout t, $s \to h(s,t)$ est localement intégrable, c'est-à-dire pour tout K borné, $\int_K |h(s,t)|\,\mathrm{d}s < +\infty$ et x est bornée à support borné

– soit pour (presque) tout t, $s \to h(s,t)$ est localement bornée, c'est-à-dire pour tout K borné, $\sup_{s\in K} |h(s,t)| < +\infty$, et x est intégrable à support borné,

– soit h est borné et $x \in L^1$.

La deuxième condition permet de définir $\mathcal{A}x$ dès que $x \in L^p$ à support compact. Si on sait que $\mathcal{A}$ est continue sur L^p, cela permet alors d'étendre la définition de $\mathcal{A}$ à tout L^p. Mais en général, $\mathcal{A}$ n'est plus donné par (16) mais par

$$\mathcal{A}x(t) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Omega\cap B(0,R)} h(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

où $B(0,R)$ est la boule de centre 0 de rayon R.

Pour (17), il suffit de remplacer les intégrales par des sommes.

Expliquons maintenant le terme "réponse impulsionnelle":

– dans le cas discret, prenons pour x la suite $x = \delta_{j_0}$ définie par $\delta_{j_0} = (\delta_{j_0,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ avec $\delta_{j_0,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (le symbole de Kronecker). Ainsi x est une "impulsion" et alors

$$\mathcal{A}x(k) = \sum_{j\in\Omega} h(j,k)\delta_{j_0,j} = h(j_0,k).$$

Le noyau impulsionnel est donc la réponse à une impulsion.

– dans le cas continu, on peut faire le même calcul *formellement*. Pour le justifier, il faut un peu de continuité, par exemple si on suppose que $h \in L^\infty$ (donc $\mathcal{A} : L^1 \to L^1$). On peut alors prendre une approximation de l'unité en t_0, *i.e.* une suite $x_k \in L^1$ telle que, quel que soit $\varphi \in L^\infty$, $\int x_k(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \to \varphi(x)$ pour presque tout x. Alors $\mathcal{A}\big(x_k(x-\cdot)\big) = \int h(s,t)x_k(x-s)\,\mathrm{d}s \to h(x,t)$ pour presque tout x.

Il est important de noter que le noyau est déterminé par le système:

LEMME 4.2. *Si un système a un noyau impulsionnel, alors ce noyau est unique.*

DÉMONSTRATION. Ceci provient du fait que, si pour tout f à support borné, $\int h(s)f(s)\,\mathrm{d}s = 0$ alors $h = 0$ (ce qui est encore vrai si on remplace l'intégrale par une somme).

Donc si $\int h(s,t)x(s)\mathrm{d}s = \int \tilde{h}(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$ alors

$$\int \big(h(s,t) - \tilde{h}(s,t)\big)x(s)\mathrm{d}s = 0$$

donc $\tilde{h} = h$. □

La stationarité du système implique:

PROPOSITION 4.3. *Si $\mathcal{A}$ a un noyau impulsionnel, alors $\mathcal{A}$ est stationnaire si et seulement si ce noyau est de la forme $h(s,t) = \tilde{h}(t-s)$ i.e. si $\mathcal{A}x(t) = \tilde{h} * x(t)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{A}$ soit stationaire. Alors $\mathcal{A}$ s'applique soit à des signaux périodiques, soit à des signaux définis sur $\mathbb{R}^d$ en entier, soit à $\mathbb{Z}^d$. Supposons que ce soit $\mathbb{R}^d$, les autres cas étant similaires. Alors

$$\mathcal{A}(\tau_a x)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(s,t)x(s-a)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}^d} h(s,t)x(s-a)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}^d} h(s+a,t)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

D'autre part,

$$\tau_a\mathcal{A}(x)(t) = \mathcal{A}(x)(t-a) = \int_{\mathbb{R}^d} h(s,t-a)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Donc pour (presque) tout (s,t) et tout a, $h(s+a,t) = h(s,t-a)$. Pour simplifier, ne tenons pas compte du "presque". Alors $h(s,t) = h(s-t+t,t) = h(s-t,t-t) = h(s-t,0)$. Donc en notant $\tilde{h}(x) = h(-x,0) = h(0,x)$, on a bien $h(s,t) = \tilde{h}(t-s)$.[1]

Inversement, un tel système est stationnaire:

$$\tau_a(\tilde{h} * x)(t) = h * f(x-a) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(x-a-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(x-t)f(t-a)\,\mathrm{d}t = \tilde{h} * (\tau_a f)(t).$$

□

DÉFINITION 5. Un *filtre* $\mathcal{A}$ (linéaire) est un système linéaire continu stationnaire et causal.
Il est dit stable si $\mathcal{A} : L^\infty \to L^\infty$ continûment.

Pour qu'un filtre soit stable, il suffit que son noyau soit dans L^1.

Notons e_λ la fonction $e_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}$ et soit $f_\lambda = \mathcal{A}e_\lambda$. Notons que $\tau_a e_\lambda = \overline{e_\lambda(a)}e_\lambda$. Donc si $\mathcal{A}$ est stationnaire, alors

$$f_\lambda(t-a) = \tau_a f_\lambda(t) = \mathcal{A}(\tau_a e_\lambda) = \mathcal{A}(\overline{e_\lambda(a)}e_\lambda) = \overline{e_\lambda(a)}\mathcal{A}(e_\lambda).$$

Si f_λ est *continue*, on peut prendre $t = 0$ et $x = -a$, on trouve $f_\lambda(x) = f_\lambda(0)e_\lambda(x)$. Donc e_λ est un vecteur propre de $\mathcal{A}$ pour la valeur propre $f_\lambda(0)$.

En général, on a $f_\lambda(t-a) = \overline{e_\lambda(a)}f_\lambda(t)$ pour presque tout t. Si on prend t_0 un point pour lequel ceci est vrai et $x = t_0 - a$, $a \in \mathbb{R}$, (donc $a = t_0 - x$) alors $f_\lambda(x) = f_\lambda(t_0)\overline{e_\lambda(t_0)}e_\lambda(x)$. Donc e_λ est encore un vecteur propre de $\mathcal{A}$ pour la valeur propre $f_\lambda(t_0)\overline{e_\lambda(t_0)}$.

On a donc montré la proposition suivante :

PROPOSITION 4.4. *Soit $\mathcal{A}$ un filtre stable et stationnaire alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, e_λ est un vecteur propre de $\mathcal{A}$. La valeur propre associée est appelée* fonction de transfert *du filtre.*

Les deux propositions sont évidemment liées: si h est le noyau impulsionnel d'un filtre et H sa fonction de transfert, alors $H = \mathcal{F}[h]$. Formellement, avec les notations précédentes, $f_\lambda = h * e_\lambda = \mathcal{F}[h](\lambda)e_\lambda$. Ce calcul se justifie si $h \in L^1$. Ainsi $\mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[h * x] = \mathcal{F}[h]\mathcal{F}[x]$ ou encore $\mathcal{F}[y] = H\mathcal{F}[x]$.

[1] En général $h(s,t) = h(s-(t-t')+t-t',t) = h(s-t+t',t-t+t') = h(s-t+t',t')$ ce qui permet de choisir un t' tel que $\tilde{h}(x) = h(-x+t',t')$ a un sens pour presque tout x et $h(s,t) = \tilde{h}(t-s)$.

Notons enfin que, formellement, $x = \sum c_n e_{n\lambda}$ et alors
$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum c_n e_{n\lambda}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathcal{A}(e_{n\lambda}).$$
Ce calcul peut se justifier si on suppose un peu plus de continuité, par exemple que $x \in L^2([0,T])$ $(\lambda = 1/T)$ et que $\mathcal{A} : L^2([0,T]) \to L^2$ continûment.

Définition 6. Soit $\mathcal{A}$ un filtre stable et stationnaire et H sa fonction de transfert. Le *gain* du filtre (exprimé en décibels, dB) est défini par
$$G(\lambda) = 20\log|H(\lambda)|.$$
La *largeur de bande* du filtre est la bande fréquentielle
$$\left\{\lambda : |H(\lambda)|^2 \geq \frac{\sup|H(\xi)|^2}{2}\right\}.$$

Le *gain* d'un filtre est la constante $K = H(0) = \hat{h}(0) = \lim_{t\to+\infty} h_1(t)$ où $h_1(t) = u * h(t) = \int_{-\infty}^t h(s)\,\mathrm{d}s$ $(u = \chi_{[0,+\infty)}$ fonction de Heaviside) est appelé la *réponse indicielle* du filtre.

Le *temps de réponse* du filtre est le temps que met la réponse indicielle pour atteindre un certain pourcentage de sa valeur maximale, 95% en général: t_r est tel que, si $t > t_r$ alors $\left|\dfrac{h_1(t) - K}{K}\right| \geq \dfrac{95}{100}$.

Notons que si $|H(\lambda)|^2 \geq \frac{\sup|H(\xi)|^2}{2}$ alors $2G(\lambda) \geq 2|G_{\max}(\lambda)| - 20\log 2$ et $-20\log 2 = -3,46dB$. La largeur de bande d'un filtre est donc la bande dans laquelle l'atténuation d'un filtre est inférieure à 3dB.

Exercice 4.2. Déterminer la fonction de transfert du filtre RC.

Exercice 4.3. Dans un filtre RLC, la tension de sortie est reliée à la tension d'entrée par l'́quation différentielle
$$LCy'' + RCy' + y = x.$$
Déterminer la fonction de transfert de ce filtre.

3. Filtres déterminé par des équations différentielles

3.1. La classe de Schwartz.

Définition 7. La classe de Schwarz est l'ensemble
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ t.q. } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ et } \forall k,l \in \mathbb{N}, (1+|x|)^k|\partial^l f(x)| \to_{x\to\pm\infty} 0\}.$$

En prenant $k = 2$, on obtient $\partial^l f = o\big((1+|x|)^{-2}\big)$ donc $\partial^l f \in L^1(\mathbb{R})$. Notons aussi qu'on peut se contenter de demander que $x^k\partial^l f(x) \to 0$ pour tout k (en développant $(1+x)^k$).

Lemme 4.5.
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et si P est un polynôme, alors $fP \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Plus généralement, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, P, Q des polynômes tel que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors $\frac{P}{Q}f \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Comme Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{P}{Q}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{(l)} = \dfrac{P_l}{Q^l}$ avec P_l un polynôme. La formule de Leibnitz dit alors que
$$x^k\left(\frac{P}{Q}f\right)^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} C_j^l \frac{x^k P_j f^{(l-j)}}{Q^j} \to 0$$
puisque $1/Q^j$ est bornée (Q est un polynôme qui ne s'annule pas) et $x^k P_j f^{(l-j)} \to 0$. □

Notons qu'on peut remplacer P/Q par toute fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées croissent au plus polynômialement, $|g^{(j)}(x)| \leq C_j(1+|x|)^{k_j}$, en particulier par $g \in \mathcal{C}_c^\infty$.

PROPOSITION 4.6.
La transformée de Fourier est une bijection $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, notons que $\mathcal{F}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$: Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t.$$

Mais $F(t,\xi) := f(t)e^{-2i\pi t\xi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^l F}{\partial \xi^l}(t,\xi)\right| &= \left|(-2i\pi t)^l f(t)e^{-2i\pi t\xi}\right| = (2\pi|t|)^l|f(t)| \\ &= \underbrace{(1+|t|)^{-2}}_{\in L^1}\underbrace{(1+|t|)^2(2\pi|t|)^l|f(t)|}_{\to 0} \in L^1(\mathbb{R})\end{aligned}$$

et indépendant de ξ. Le théorème de Lebesgue de différentiation des intégrales montre donc que $\mathcal{F}[f](\xi) = \int F(t,\xi)\,\mathrm{d}t$ est k-fois différentiable et que

$$\frac{\partial^l \mathcal{F}[f]}{\partial \xi^l}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^l F}{\partial \xi^l}(t,\xi)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)^l f(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}[(-2i\pi t)^l f](\xi).$$

Montrons maintenant que $\xi^k\partial^l\mathcal{F}[f](\xi) \to 0$ ou, de façon équivalente,

$$(2i\pi\xi)^k\partial^l\mathcal{F}[f](\xi) = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}[(-2i\pi t)^l f](\xi) \to 0.$$

Notons $g_l = (-2i\pi t)^l f \in \mathcal{S}(R)$ d'après le lemme précédent. Mais alors, une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_l'](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g_l'(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = [g_l(t)e^{-2i\pi t\xi}]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\xi\int_R g_l e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to+\infty} g_l(t)e^{-2i\pi t\xi} - \lim_{t\to-\infty} g_l(t)e^{-2i\pi t\xi} + 2i\pi\xi\mathcal{F}[g_l](\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}[g_l](\xi).\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que $(2i\pi\xi)^k\mathcal{F}[(-2i\pi t)^l f](\xi) = \mathcal{F}\big[\partial^k\big((-2i\pi t)^l f\big)\big](\xi) \to 0$ avec Riemann-Lebesgue, puisque $\partial^k\big((-2i\pi t)^l f\big) \in \mathcal{S} \subset L^1$ (formule de Leibniz).

Le fait que la transformée de Fourier soit bijective est une conséquence directe de la formule d'inversion de Fourier: si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule s'applique donc à $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

REMARQUE 4.7. Au cours de la démonstration, nous avons établi que, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[\partial f](\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}[f](\xi) \quad \text{et} \quad \partial_\xi\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[-2i\pi t f](\xi).$$

Ces formules restent valables avec la même démonstration si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et respectivement $\partial f \in L^1$ et $tf \in L^1(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 4.8.
Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{C}$. Si le polynôme $Q(x) := \sum_{j=0}^n q_j x^j$ n'a pas de racine imaginaire pure, alors l'équation différentielle

$$\sum_{j=0}^n q_j \frac{\partial y}{\partial t^j} = g$$

a une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cette solution est donnée par

$$\mathcal{F}[y](\xi) = \frac{\mathcal{F}[g](\xi)}{Q(2i\pi\xi)}.$$

REMARQUE 4.9. Notons que le fait d'imposer à la solution d'être dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique qu'on impose une condition initiale $\partial^j y \to 0$ en $\pm\infty$ pour tout j.

Démonstration. Si une telle solution y existe, alors elle admet une transformée de Fourier ainsi que toutes ses dérivées. De plus (voir la remarque 4.7) $\mathcal{F}[\partial^j y](\xi) = (2i\pi\xi)^j \mathcal{F}[y](\xi)$. Ainsi, si une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ existe, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g] &= \mathcal{F}\left[\sum_{j=0}^n q_j \frac{\partial y}{\partial t^j}\right] = \sum_{j=0}^n q_j \mathcal{F}\left[\frac{\partial y}{\partial t^j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^n q_j (2i\pi\xi)^j \mathcal{F}[y](\xi) = Q(2i\pi\xi)\mathcal{F}[y](\xi)\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{F}[y](\xi) = \frac{\mathcal{F}[g](\xi)}{Q(2i\pi\xi)}.$$

Il suffit donc de vérifier que ceci définit bien une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour inverser le calcul et obtenir une solution. Mais ceci résulte directement du lemme 4.5 qui implique que $\mathcal{F}[y] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ puis invoquer le fait que la transformée de Fourier (inverse) envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Enfin, nous avons

Théorème 4.10. *Soit $\mathcal{A}$ le filtre défini par $\mathcal{A}x = y$ où y vérifie l'équation différentielle*

$$y^{(n)} + q_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + q_1 y' + q_0 y = p_m x^{(m)} + p_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + c_1 x' + c_0 x. \tag{18}$$

Soient P et Q les polynômes $P(x) = \sum_{j=0}^m p_j x^j$ et $Q(x) = \sum_{j=0}^n q_j x^j$.

Supposons que $\deg P \leq \deg Q$ *et que Q n'ait pas de racine imaginaire pure, alors $\mathcal{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, est stationnaire, et sa fonction de transfert est donnée par $H(\xi) = \dfrac{P(2i\pi\xi)}{Q(2i\pi\xi)}$.*

Démonstration. Remarquons que si $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $g := p_m x^{(m)} + p_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + c_1 x' + c_0 x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de plus $\mathcal{F}[g] = P(2i\pi\xi)\mathcal{F}[x]$. La première partie du théorème est donc un corollaire immédiat de la proposition précédente. Pour la deuxième partie, il suffit de remarquer que si y est une solution de (18), alors

$$\begin{aligned}&(\tau_a y)^{(n)}(t) + q_{n-1}(\tau_a y)^{(n-1)}(t) + \cdots + q_1(\tau_a y)'(t) + q_0(\tau_a y)(t) \\ &= y^{(n)}(t-a) + q_{n-1}y^{(n-1)}(t-a) + \cdots + q_1 y'(t-a) + q_0 y(t-a) \\ &= p_m x^{(m)}(t-a) + p_{m-1}x^{(m-1)}(t-a) + \cdots + c_1 x'(t-a) + c_0 x(t-a) \\ &= p_m(\tau_a x)^{(m)}(t) + p_{m-1}(\tau_a x)^{(m-1)}(t) + \cdots + c_1(\tau_a x)'(t) + c_0(\tau_a x)(t).\end{aligned}$$

On a donc bien $\tau_a \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\tau_a)(x)$ d'où la stationnarité. □

3.2. Réduction des fractions rationnelles en éléments simples.

Théorème 4.11.
Soient P et Q deux polynômes et soit $F = \dfrac{P}{Q}$ la fraction rationnelle associée. On peut donc supposer que le terme de plus haut degré de Q est x^n et écrire $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_l)^{k_l}$. Alors on peut écrire de manière unique

$$F(x) = E(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}$$

avec $A_{j,k} \in \mathbb{C}$ et E un polynôme de degré $\deg P - \deg Q$, *appelé la partie entière de F. Les racines $a_1, \ldots, a_l$ de Q sont appelées les* pôles *de F et*

$$\sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}$$

la partie polaire *de F associée au pôle a_j.*

PROOF. Si $\deg P \geq \deg Q$, en faisant la division euclidienne de P par Q, on écrit $P = EQ + R$ et alors $F = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$ et (sans racine commune).

Il suffit donc de savoir exprimer $\dfrac{R}{Q} = \dfrac{R}{(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_l)^{k_l}}$ sous la forme

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}.$$

Cela se fait par une récurrence sur le nombre de racines de Q.

Si Q n'a qu'une seule racine, $Q(x) = (x-a_1)^{k_1}$ il suffit d'exprimer $R(x)$ dans la base $1, (x-a_1), \dots, (x-a_1)^{k_1-1}$,

$$R(x) = \sum_{k=1}^{k_1} A_{1,k}(x-a_1)^k$$

pour obtenir le résultat pour R/Q.

Si Q a au moins deux racines, $Q(x) = Q_1(x)(x-a_l)^{k_l}$ avec $Q_1(x)$ et $(x-a_l)^{k_l}$ sans racine commune. Ils sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes C, D tels que $C(x)Q_1(x) + D(x)(x-a_l)^{k_l} = 1$, donc $C(x)R(x)Q_1(x) + D(x)R(x)(x-a_l)^{k_l} = R(x)$. Mais alors

$$\frac{R}{Q}(x) = \frac{C(x)R(x)Q_1(x) + D(x)R(x)(x-a_l)^{k_l}}{Q_1(x)(x-a_l)^{k_l}} = \frac{C(x)R(x)}{(x-a_l)^{k_l}} + \frac{D(x)R(x)}{Q_1(x)}.$$

À nouveau, on fait une division euclidienne de CR par $(x-a_l)^{k_l}$ et de DR par Q_1 pour se ramener à des fracion rationelles dont le numérateur est de degré inférieur au dénominateur et on applique l'hypothèse de récurrence. $\square$

EXEMPLE 4.12. La démonstration du théorème montre comment décomposer une fraction rationnelle qui n'a qu'un seul pôle et comment obtenir la partie entière.

Si a est un pôle simple: $F(x) = \dfrac{R(x)}{(x-a)Q_1(x)}$ avec $Q_1(a) \neq 0$, alors la décomposition s'écrit $F(x) = \dfrac{\lambda}{x-a} + \dfrac{\tilde{R}(x)}{Q_1(x)}$.

De plus, on a alors

$$\frac{R(x)}{Q_1(x)} = F(x)(x-a) = \lambda + \frac{\tilde{R}(x)}{Q_1(x)}(x-a)$$

et en prenant $x = a$ on trouve $\lambda = \dfrac{R(a)}{Q_1(a)}$.

EXERCICE 4.4.

Soit u la fonction de Heaviside, $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) > 0$ et soit $f_\pm$ définis par $f_+(x) = e^{-ax}u(x)$ et $f_-(x) = e^{ax}u(x) = f_+(-x)$.

(1) Montrer que $f_\pm \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et calculer leurs transformée de Fourier.
(2) En déduire la transformée de Fourier de $\varphi_\pm = \dfrac{1}{a \pm 2i\pi x}$ puis celle de $\dfrac{1}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$.
(3) Calculer la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{a \pm 2i\pi x}$. Quelle est sa transformée de Fourier?

On montre ainsi que, pour $\Re a > 0$,

$$\frac{1}{(a+2i\pi\xi)^k} = \mathcal{F}\left[\frac{(-1)^k}{k!}x^k e^{-ax}u\right](\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{(a-2i\pi t)^k}\right](\xi) = \frac{(-1)^k}{k!}\xi^k e^{a\xi}u(-\xi)$$

et

$$\frac{k!}{(2i\pi\xi + a)^k} = \mathcal{F}[t^k e^{-at}u(t)](\xi) \quad \text{et} \quad \frac{k!}{(2i\pi t - a)^k} = -\mathcal{F}[t^k e^{at}u(-t)]$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant:

Proposition 4.13. *Soit $\mathcal{A}$ le filtre défini par $\mathcal{A}x = y$ où y vérifie l'équation différentielle* (18). *Soient P et Q les polynômes $P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} p_j x^j$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} q_j x^j$.*

Supposons que $\deg P \leq \deg Q$ *et que Q n'ait pas de racine imaginaire pure. Alors*

— *$\mathcal{A}$ est stable et continu $L^p \to L^p$ pour tout $p \geq 1$*

— *$\mathcal{A}$ est réalisable si et seulement si toutes les racines de Q ont une partie réelle négative.*

Démonstration. Dans ce cas, la partie entière de P/Q est une constante, éventuellement nulle. Écrivons comme la décomposition en éléments simples de P/Q

$$\frac{P(2i\pi\xi)}{Q(2i\pi\xi)} = E + \sum_{j\in J_-}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{j,k}k!}{(2i\pi\xi - a_j)^k} - \sum_{j\in J_+}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{j,k}k!}{(2i\pi\xi - a_j)^k}$$

où E est une constante, $\Re a_j > 0$ si $j \in J_+$ et $\Re a_j < 0$ si $j \in J_-$. En écrivant $b_j = -a_j$ si $j \in J_-$, nn peut donc réécrire

$$\frac{P(2i\pi\xi)}{Q(2i\pi\xi)} = E + \sum_{j\in J_-} \mathcal{F}\left[\left(\sum_{k=1}^{k_j} A_{j,k}t^k\right) e^{-b_j t}u(t)\right](\xi) + \sum_{j\in J_-} \mathcal{F}\left[\left(\sum_{k=1}^{k_j} A_{j,k}t^k\right) e^{a_j t}u(-t)\right](\xi).$$

Ainsi $\frac{P(2i\pi\xi)}{Q(2i\pi\xi)} = E + \mathcal{F}[h_+] + \mathcal{F}[h_-]$ où E est une constante, h_+ (resp. h_-) correspond aux racines de Q à partie réelle négative (resp. positives) et a son support dans $[0, +\infty)$ (resp. $(-\infty, 0]$).

On voit aussi facilement que $h_+, h_- \in L^1(\mathbb{R})$ puisque ces fonctions ont une décroissance exponentielle en l'infini.

Ainsi, le filtre $\mathcal{A}$ s'écrit $\mathcal{A}(x) = Ex + h_+ * x + h_- * x$.

Ce filtre est causal si et seulement si $h_- = 0$. Il est stable et continue $L^p \to L^p$ pour tout $p \geq 1$ puisque $\|h_\pm * x\|_p \leq \|h_\pm\|_1 \|x\|_p$. □

3.3. Les filtres de Butterworth et de Tchebichev. Les filtres de Butterworth sont les filtres donnés par une fraction rationnelle, qui sont causals, stables, et tels que

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n}}, \quad \lambda_c > 0.$$

Cherchons les racines de $1 + \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n} = 0$: on veut $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n} = e^{i\pi}$ donc $\lambda = \lambda_c e^{i\theta}$ avec $2n\theta = \pi + 2j\pi$ soit $\theta = (2j+1)\pi/2n$, $j = 0, \ldots, 2n-1$. Les racines de $1 + \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n} = 0$ sont donc $\lambda = \lambda_c e^{2i\pi(j+1/2)/2n}$, $j = 0,_l\, dots, 2n-1$. Il en résulte que

$$H(\lambda)\overline{H(\lambda)} = |H(\lambda)|^2 = \prod_{j=0}^{2n-1} \frac{1}{\lambda - \lambda_c e^{i\pi(2j+1)/2n}} \prod_{j=0}^{2n-1} \frac{2i\pi}{2i\pi\lambda - 2i\pi\lambda_c e^{i\pi(2j+1)/2n}}.$$

On veut écrire H sous la forme $H(\lambda) = P(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$. La forme de H nous indique qu'on peut prendre P constant. Comme nous n'imposons qu'une condition sur le module de P/Q, on peut commencer par chercher Q réel: $Q(t) = \sum q_k t^k$ avec $q_k \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overline{H(\lambda)} = \overline{P}/\overline{Q(2i\pi\lambda)} = \overline{P}/Q(-2i\pi\lambda)$. On veut donc $P\overline{P} = 1$ on prend $P = 1$ et

$$Q(2i\pi\lambda)Q(-2i\pi\lambda) = \prod_{j=0}^{2n-1} \frac{2i\pi\lambda - 2i\pi\lambda_c e^{i\pi(2j+1)/2n}}{2i\pi}.$$

Pour les filtres de Tchebychev, on demande

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 T_n^2(\lambda)}, \quad \lambda_a > 0,$$

où $T_n(x)$ est l'unique polynôme de degré n $T_n(\cos x) = \cos nx$. Un calcul montre que

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

EXERCICE 4.5. Déterminer les racines de T_n.

4. Solution de l'exercice 4.4

Pour $p > 1$ f_+^p (resp. f_-^p) décroissent exponentiellement en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et est continue sur son support $[0, +\infty)$ (resp. $(-\infty, 0]$) donc $\int f_\pm^p < +\infty$ *i.e.* f_+ et f_- sont dans tous les espaces L^p.

$$\mathcal{F}[f_+](\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-(a+2i\pi\xi)t}}{a+2i\pi\xi}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi\xi} = \varphi_+(\xi)$$

puisque $e^{-(a+2i\pi\xi)t} \to 0$ quand $t \to +\infty$. De même

$$\mathcal{F}[f_-](\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-2i\pi\xi)t}}{a-2i\pi\xi}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-2i\pi\xi} = \varphi_-(\xi).$$

La transformée de Fourier est une bijection $L^2 \to L^2$ et son inverse est $\mathcal{F}^{-1} = Z\mathcal{F}$ où $Z\varphi(t) = \varphi(-t)$. En d'autres termes $\mathcal{F} = Z\mathcal{F}^{-1}$ donc $\mathcal{F}[\varphi_\pm](\xi) = Z\mathcal{F}^{-1}[\varphi_\pm](\xi) = Zf_\pm(\xi) = f_\pm(-\xi) = f_\mp(\xi)$.

On a $\dfrac{1}{a^2+4\pi^2x^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{a+2i\pi x} + \dfrac{1}{a-2i\pi x}\right) = \dfrac{1}{2a}\big(\varphi_+(x) + \varphi_-(x)\big)$ donc

$$\mathcal{F}[[]\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}](\xi) = \frac{1}{2a}\big(\mathcal{F}[\varphi_+](\xi) + \mathcal{F}[\varphi_-](\xi)\big) = \frac{1}{2a}\big(e^{-a\xi}u(\xi) + e^{a\xi}u(-\xi)\big) = \frac{e^{-a|\xi|}}{2a}.$$

Un calcul simple (par récurrence) donne

$$\varphi_+^{(k)} = (-1)^k\frac{k!(2i\pi)^k}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}} = \mathcal{F}[(-2i\pi t)^k f_+](\xi) \quad \text{et} \quad \varphi_-^{(k)} = \frac{k!(2i\pi)^k}{(a-2i\pi\xi)^{k+1}} = \mathcal{F}[(-2i\pi t)^k f_-](\xi).$$

Mais $\mathcal{F}[\varphi_+^{(k)}] = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}[\varphi_+](\xi)$ et $\mathcal{F}[\varphi_-^{(k)}] = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}[\varphi_-](\xi)$ donc

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}}\right] = \frac{(-1)^k}{k!}\xi^k e^{-a\xi}u(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{(a-2i\pi\xi)^{k+1}}\right] = \frac{1}{k!}\xi^k e^{a\xi}u(-\xi)$$

Notez que cette formule *n'est pas justifiée* correctement si $k = 1$ car $\varphi_\pm \notin L^1$. Elle est néanmoins vraie comme une simple intégration par parties de la transformée de Fourier inverse du membre de droite le montre.

Notons enfin qu'on peut parfaitement supposer que $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re a > 0$ sans rien changer au résultat.

CHAPÎTRE 5

Fonctions holomorphes

1. Préliminaires

1.1. Domaines.

Nous noterons I un interval de $\mathbb{R}$, borné ou non, ouvert à droite/à gauche ou non $I = (-\infty, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$, $(-\infty, \beta]$, $(-\alpha, \beta]$... $\dot{I}$ désignera l'interval ouvert correspondant.

Un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (*i.e.* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ avec x, y des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles) telle que, de plus $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ pour $t \neq t' \in \dot{I}$.

Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ nous dirons que le chemin est fermé.

On notera $\operatorname{Im}\gamma = \{\gamma(t) \ \ t \in [\alpha, \beta]\}$ l'image de γ.

La dérivée de γ est $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ et, si $\gamma'(t) \neq 0$, c'est le vecteur directeur de la tangeante à $\operatorname{Im}\gamma$ au point $\gamma(t)$ et $i\gamma'(t)$ est le vecteur normal à $\operatorname{Im}\gamma$ en ce point.

Rappelons qu'une partie E de $\mathbb{C}$ est connexe si on ne peut pas écrire $E = E_1 \cup E_2$ avec $E_i = E \cap O_i$, O_1, O_2 deux ouverts distincts non vides. En d'autres termes, E est connexe si les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés dans E sont $\emptyset$ et E.

Une composante connexe d'un ensemble E est une partie de $C \subset E$ qui est connexe et tel que si $C \subset C' \subset E$ avec C' connexe alors $C = C'$.

En d'autres termes, un ensemble est connexe s'il est d'un seul tenant et une composante connexe est un morceau d'un seul tenant de E.

Dans tout ce chapître, nous dénoterons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que, de plus, le bord $\partial\Omega$ de Ω soit constitué d'un nombre fini de chemins de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, ces chemins seront deux types:

— soit ils sont fermés, ils délimiteront alors une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ et seront dits *intérieurs*;

— soit ils ne sont par bornés, ils délimiteront alors une composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ et seront dits *extérieurs*.

Un exemple simple est le disque $\Omega = D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < R\}$.

1.2. Intégration le long d'un chemin.

DÉFINITION 8.
Soit γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction définie sur l'image de γ. L'intégrale de f le long de γ est définie par

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_I f\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}\gamma(t) = \int_I f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

à condition bien sûr que cette dernière intégrale soit bien définie *i.e.* que $|f \circ \gamma.\gamma'| \in L^1(I)$.

EXEMPLE 5.1.
Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ le cercle unité. Une paramtrisation du cercle unité est donnée par $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors $\gamma'(t) = ie^{it}$ et

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\,\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Une autre paramétrisation est donnée par $\gamma(t) = \begin{cases} t + i\sqrt{1-t^2} & \text{si } t \in [-1,1] \\ t-2-i\sqrt{1-(t-2)^2} & \text{si } t \in [2,4] \end{cases}$. Alors $\gamma'(t) = \begin{cases} \frac{-it}{\sqrt{1-t^2}} & \text{si } t \in [-1,1] \\ \frac{i(t-2)}{\sqrt{1-(t-2)^2}} & \text{si } t \in [2,4] \end{cases}$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\int_0^2 f(t+i\sqrt{1-t^2})\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + i\int_2^4 f(t-2+i\sqrt{1-(t-2)^2})\frac{t-2}{\sqrt{1-(t-2)^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Le lecteur courrageux pourra vérifier à l'aide d'un changement de variable bien choisi que ces deux expressions coincident. C'est un fait général qui résulte directement de la formule du changement de variables:

Théorème 5.2.
La formule (19) *définissant* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *ne dépend que de* $\operatorname{Im}\gamma$ *et pas de* γ *lui-même.*

Exercice 5.1.
Soit P un polynôme et $\gamma = \mathbb{T}$, déterminer $\int_{\mathbb{T}} P(z)\,\mathrm{d}z$ et $\int_{\mathbb{T}} \frac{P(z)}{z}\,\mathrm{d}z$.

Définition 9.
Soit Ω un ouvert ayant les propriétés définies en section 1.1. Soit $\gamma_1^e,\ldots,\gamma_m^e$ les chemins extérieurs et $\gamma_1^i,\ldots,\gamma_n^i$ les chemins intérieurs. Alors

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k^e} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{\ell=1}^n \int_{\gamma_\ell^i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Le signe $-$ pour les chemins intérieurs s'interprête comme suit: supposons que toutes les paramétrisations des chemins soient telles que ces chemins soient parcourus dans le sens trigonométrique. Alors les normales $i\gamma'(t)$ sont dirigés vers l'intérieur de Ω pour les chemins extérieurs mais vers l'extérieur pour les chemins intérieurs. Le signe $-$ permet d'inverser cela.

1.3. Dérivation sur $\mathbb{C}$.

Une fonction f sur $\mathbb{C}$ peut être identifiée à une fonction F sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $F(x,y) = f(x+iy)$. Nous noterons alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial F}{\partial y}(y).$$

En notant $z = x+iy$ (donc $\bar z = x - iy$), on a $x = \dfrac{z+\bar z}{2}$ et $y = \dfrac{z-\bar z}{2i}$. On peut donc voir z et $\bar z$ comme deux variables indépendantes (de même que x et y) et on a alors $f(z) = F\left(\dfrac{z+\bar z}{2}, \dfrac{z-\bar z}{2i}\right)$.

En prenant ce point de vue,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) + \frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right]$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right].$$

Exercice 5.2.
Calculer

$$\frac{\partial z^j}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z^j}{\partial \bar z}.$$

2. Fonctions holomorphes

2.1. Généralités.

Définition 10.
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est dite holomorphe en $z_0 \in \Omega$ si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existe. Dans ce cas $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$.

Démonstration. Nous allons supposer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ pour simplifier. Alors, en notant $F(x,y) = f(z_0+x+iy)$ et $h = x+iy$

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+x+iy)-f(z_0)}{x+iy} &= \frac{F(x,y)-F(0,0)}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y + O(x^2+y^2)\right) \\
&= \frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y\right) + O(x+iy)
\end{aligned}$$

puisque $x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$. On veut donc que

$$\frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y\right)$$

ait une limite quand $(x,y)\to(0,0)$. En prenant $y = x \to 0$, cette limite vaut

$$\frac{1}{1+i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

alors qu'en prenant $y = -x \to 0$, cette limite vaut

$$\frac{1}{1-i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Ces deux quantités doivent être égale, un calcul simple montre que ceci implique $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = 0$. La limite vaut alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

comme annoncé. On utilise ici le fait que si $a = b$, alors $a = (a+b)/2$. □

On verra plus tard que la réciproque est vraie aussi.

Exercice 5.3.
Montrer que les combinaisons linéaires et les produits de fonctions holomorphes sont encore holomorphes.

2.2. Formule de Cauchy-Pompéiu.

Une bonne partie de la suite de ce chapître repose sur la formule suivante que nous admettrons:

Théorème 5.3 (Formule de Cauchy-Pompéiu).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ à bord régulier (ayant les propriétés définies dans la section 1.1) et soit $\Omega' \supset \overline{\Omega}$ un autre ouvert. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' (i.e. f de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinnage de $\overline{\Omega}$). Soit $a \in \Omega$, alors

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\frac{\mathrm{d}m(z)}{z-a}$$

où $\mathrm{d}m(z)$ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

En particulier, si f est holomorphe sur Ω alors on a la Formule de Cauchy

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Cette formule a d'importantes conséquences. En premier lieu, on a le résultat suivant:

Théorème 5.4.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) *f est holomorphe sur Ω;*
(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ *sur Ω;*
(3) *f est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω.*

En particulier, une fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. On a déjà vu que si f est holomorphe sur Ω, alors $\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ sur Ω.

Supposons maintenant que $\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ sur Ω.

Soit $a\in\Omega$, comme Ω est ouvert, il existe $R>0$ tel que $D(a,R)\subset\Omega$. Soit $0<r<R$. Définissons une nouvelle fonction g sur $D(0,R/r)$ par $g(z)=f(a+rz)$. On vérifie sans peine que $\dfrac{\partial g}{\partial\bar z}=0$ sur $D(0,R/r)\supset\overline{D(0,1)}$. De plus, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, g aussi, en particulier, g est bornée sur $\overline{D(0,1)}$. D'après la formule de Cauchy, pour $z\in D(0,1)$,

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,1)}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}z}\,\mathrm{d}\theta. \qquad (20)\end{aligned}$$

Mais, comme $|ze^{-i\theta}|=|z|<1$, on a

$$\frac{1}{1-e^{-i\theta}z}=\sum_{k=0}^{+\infty}\big(e^{-i\theta}z\big)^k. \qquad (21)$$

De plus cette série est normalement convergente en θ (à z fixé) puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sup_\theta\big|\big(e^{-i\theta}z\big)^k\big|=\sum_{k=0}^{+\infty}|z|^k<+\infty.$$

On peut donc introduire (21) dans (20) et échanger la sommation et l'intégration:

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})\sum_{k=0}^{+\infty}\big(e^{-i\theta}z\big)^k\,\mathrm{d}\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)z^k\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\hat g(k)z^k\end{aligned}$$

où

$$\hat g(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

est le k-ième coefficient de Fourier de la fonction $\theta\to g(e^{i\theta})=f(a+re^{i\theta})$. Comme $f(z)=g\big((z-a)/r\big)$, on en déduit que

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\hat g(k)}{r^k}(z-a)^k$$

et f est bien développable en série entière au voisinage de a. Notons que, comme g est bornée, $\hat g$ aussi, le rayon de convergence de cette série est donc $\geq r$.

On sait maintenant que f est développable en série entière au voisinage de a: $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z-a)^k$ avec un rayon de convergence $R > 0$ (et nécessairement $f_0 = f(a)$). Donc cette série converge (uniformément) sur $\overline{D(a,r)}$ pour tout $r < R$. Ainsi si $|h| \leq h$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k h^k \to f_1 \quad \text{quand } h \to 0.$$

Ainsi f est bien holomorphe et $f_1 = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$. □

En utilisant les propriétés des fonctions développable en série entière, on en déduit tout de suite le résultat suivant

Corollaire 5.5.
Les combinaisons linéaires, les produits, les quotients, les composées, les dérivées, les primitives des fonctions holomorphes sont encore holomorphes.

(Pour le quotient et les composées, il vaut mieux utiliser la caractérisation à l'aide de la dérivation par rapport à $\bar{z}$).

3. Quelques propriétés des fonctions holomorphes

Revenons un moment sur la démonstration du théorème 5.4. En utilisant la convergence uniforme de la série $\sum f_k(z-a)^k$ sur $\overline{D(0,r)}$ ainsi que de ses séries dérivées, on peut dériver sous le signe $\sum$ et obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \frac{\partial (z-a)^k}{\partial z} = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k (z-a)^{k-1}.$$

En particulier $2f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$. On peut réitérer ce raisonnement et obtenir $k! f_k = \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a)$ d'où

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} \tag{22}$$

sur $\overline{D(0,r)}$.

Proposition 5.6.
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω connexe. *S'il existe $a \in \Omega$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) = 0$, alors $f = 0$ sur Ω.*

Démonstration. Soit $Z = \left\{ z \in \Omega \ : \ \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = 0 \ \forall k \right\}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $Z_k := \left\{ z \in \Omega \ : \ \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = 0 \right\}$ est fermé donc $Z = \bigcap Z_k$ est fermé.

Par ailleurs, si $a \in Z$, alors (22) montre que $f(z) = 0$ au voisinnage de a, donc sur ce voisinnage, $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = 0$ pour tout k. Ainsi Z est ouvert, il est aussi fermé, non vide, dans Ω connexe, donc $Z = \Omega$. □

Corollaire 5.7 (Prolongement analytique).
Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts tel que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ soit connexe. Soit f_1 une fonction holomoprhe dans Ω_1 et f_2 une fonction holomorphe sur Ω_2. Supposons qu'il existe $a \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ tel que, pour tout k, $\frac{\partial^k f_1}{\partial z^k}(a) = \frac{\partial^k f_2}{\partial z^k}(a)$, — par exemple si $f_1 = f_2$ dans un ouvert $\omega \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. Alors il existe une unique fonction holomorphe f dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$ telle que $f = f_1$ dans Ω_1 et $f = f_2$ dans Ω_2

Démonstration. En effet, $f_1 = f_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ d'après la proposition précédente. □

Corollaire 5.8.
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert. Soit les zéros de f sont isolés, soit f est identiquement nulle sur la composante connexe de Ω contenant un zéro.

Démonstration. Il suffit de restreindre f à une composante connexe et de montrer que si f n'est pas nulle sur un ouvert connexe, alors ses zéros sont isolés.

Soit donc a tel que $f(a) = 0$ et supposons que $f \neq 0$ sur Ω.

Il exsite R tel que $D(a, R) \subset \Omega$. On peut alors écrire le développement en série entière de f

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe n tel que

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \cdots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0$$

mais

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(a) \neq 0.$$

On dit que a est un zéro d'ordre n de f. Mais alors

$$f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} = (z-a)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^{k-n}}{k!} = (z-a)^n g(z)$$

avec $g(z) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^{k-n}}{k!}$. Cette série entière est encore convergente dans $D(a, R)$ donc g est encore une fonction holomorphe, en particulier g est continue. Mais $g(a) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}(a) \neq 0$ donc g ne s'annule pas sur un voisinnage V de a. Comme $(z-a)^n$ ne s'annule qu'en a, f ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Ce zéro est donc bien isolé. □

4. Formule de la moyenne

Revenons aux conséquences de la formule de Cauchy.

Proposition 5.9.
Soit Ω un ouvert et γ un chemin fermé qui soit le bord d'un ouvert $\omega \subset \Omega$. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Inversément, si une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie $\int_\gamma f = 0$ pour tout chemin fermé de la forme ci-dessus, alors f est holomorphe.

Démonstration. On considère $g(z) = (z-a)f(z)$ de sorte que g est également holomorphe sur Ω. Comme $\omega \subset \Omega$, g est holomorphe donc $\mathcal{C}^1$ au voisinage de ω. On peut donc appliquer la formule de Cauchy pour obtenir

$$0 = g(a) = \int_{\partial\omega} \frac{g(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

La récirpoque est admise. □

Exemple 5.10. Cette formule est très utile pour calculer certaines intégrales. Par exemple, on trouve fréquemment le raisonnement suivant pour calculer la transformée de Fourier d'une gaussienne $g(t) = e^{-\pi t^2}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2}\,\mathrm{d}s = e^{-\pi\xi^2}.
\end{aligned}$$

On peut justifier ce raisonnement de la façon suivante: d'abord
$$\widehat{g}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} e^{-\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,\mathrm{d}t.$$
On considère alors le contour $\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ avec

— $\gamma_1 = \{t,\ t\in[-R,R]\}$ et pour cette paramétrisation, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ donc
$$\int_{\gamma_1} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t \to_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$
— $\gamma_2 = \{R+it,\ t\in[0,\xi]\}$ et pour cette paramétrisation, $\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t$ donc
$$\int_{\gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+it)^2}\,\mathrm{d}t.$$
Mais alors
$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^{|\xi|} e^{-\pi(R^2-t^2)}\,\mathrm{d}t \to_{R\to+\infty} 0.$$
— $\gamma_3 = \{t+i\xi,\ t\in[R,-R]\}$ et pour cette paramétrisation, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ donc
$$\int_{\gamma_3} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,\mathrm{d}t \to_{R\to+\infty} -\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,\mathrm{d}t = -e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi).$$
— $\gamma_4 = \{-R+it,\ t\in[\xi,0]\}$ et pour cette paramétrisation, $\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t$ donc
$$\int_{\gamma_4} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\xi}^{0} e^{-\pi(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t \to_{R\to+\infty} 0.$$
Enfin,
$$0 = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z \to_{R\to+\infty} 1 + 0 - e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi) + 0.$$
On trouve donc bien $\widehat{g}(\xi) = e^{\pi\xi^2}$.

Notons qu'on a utiliser une courbe γ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (plutôt que $\mathcal{C}^1$). La formule de Cauchy-Pompéiu est encore valable dans ce cas, donc ces corrolaires aussi.

Théorème 5.11 (Formule de la moyenne).
Soit $\Omega = D(a,r)$ un disque de centre $a\in\mathbb{C}$ et de rayon $r>0$. Si f est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ alors
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

Démonstration. Soit g définie sur $\overline{D(0,1)}$ par $g(z) = f(a+rz)$. Alors g est holomorphe sur $D(0,1)$ et continue sur $\overline{D(0,1)}$. Soit ensuite $0<t<1$ et $g_t(z) = g(tz)$ de sorte que g soit holomorphe sur $D(0,1/t)\supset D(0,1)$. En particulier g_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $D(0,1)$. On peut donc lui appliquer la formule de Cauchy:
$$\begin{aligned} f(a) &= g(0) = g_t(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,1)} \frac{g_t(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g_t(e^{it})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_t(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+rte^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$
Mais f est continue sur $\overline{D(0,1)}$ donc bornée donc $|f(a+rte^{i\theta})| \leq M \in L^1(0,2\pi)$ uniformément en t,θ et, quand $t\to 1$, $f(a+rte^{i\theta}) \to f(a+re^{i\theta})$ pour tout θ. Le théorème de convergence dominée implique que
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+rte^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$
quand $t\to 1$. □

THÉORÈME 5.12 (Principe du maximum).
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$. Si $|f|$ atteint son maximum dans Ω alors f est constante. En d'autres termes, $|f|$ ne peut atteindre son maximum que sur $\partial\Omega$.

DÉMONSTRATION. Soit $M = \{z \in \Omega \ : \ |f(z)| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|\}$. Supposons que $M \neq \emptyset$ et soit $a \in M$. Ainsi, pour tout $z \in \overline{\Omega}$, $|f(z)| \leq |f(a)|$.

Si $f(a) = 0$ alors $f = 0$. Supposons donc que $f(a) \neq 0$. Alors, quitte à multiplier f par $\theta = \dfrac{\overline{f(a)}}{|f(a)|^2}$, on peut supposer que $f(a) = 1$.

Comme $M = f^{-1}\big(\{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ |\zeta| = f(a)\}\big) = f^{-1}(\mathbb{T})$ est l'image réciproque d'un fermé par f continue, M est fermé.

Puisque $a \in \Omega$ ouvert, il existe un disque $D(a, R) \subset \Omega$. On peut alors appliquer la formule de la moyenne sur $D(a, r)$, $r < R$:

$$1 = f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme on a aussi $1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$, on en déduit que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 1 - f(a + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 0$, ce qui implique

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 - \mathrm{Re} f(a + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 0. \tag{23}$$

Mais $|\Re f(z)| \leq |f(z)| \leq 1$ donc $1 - \mathrm{Re} f(a + re^{i\theta}) \geq 0$ et (23) implique alors que $\mathrm{Re} f(a + re^{i\theta}) = 1$ et par suite, en utilisant encore que $|\Re f(z)| \leq |f(z)| \leq 1$, $|f(a + re^{i\theta})| = 1$ pour tout $r < R$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$. Enfin $\mathrm{Re} f(a + re^{i\theta}) = 1$ et $|f(a + re^{i\theta})| = 1$ impliquent $f(a + re^{i\theta}) = 1$.

En d'autres termes, $f(z) = 1$ sur $D(a, R)$ donc $D(a, R) \subset M \cap \Omega$ donc M est ouvert, comme il est aussi fermé, M est une composante connexe de Ω qui est connexe, donc $M = \Omega$. □

5. Transformée de Laplace

DÉFINITION 11. Soit f un signal dépendant d'une variable $t \in \mathbb{R}$. On appelle *transformée de Laplace* de f la fonction de la variable complexe z donnée par

$$\mathcal{L}f(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge *i.e.* tel que $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|e^{-\Re(z)t} \in L^1(\mathbb{R})$.

LEMME 5.13.
Le domaine de la transformée de Laplace de f est une bande $\{\sigma_- < \Re(z) < \sigma_+\}$. Chacune des deux inégalités stricte $<$ est éventuellement large $\leq$ et ce domaine est éventuellement vide.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est causal i.e. si $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty)$ *alors ce domaine contient tout le demi-plan $\Re(z) \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. Pour le premier point, écrivons

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$

Supposons qu'il existe z_1, z_2 avec $\Re(z_1) \leq \Re(z_2)$ et $|f(t)e^{-z_1 t}| = |f(t)e^{-\Re(z_1)t}| \in L^1(\mathbb{R})$ et $|f(t)e^{-z_2 t}| = |f(t)e^{-\Re(z_2)t}| \in L^1(\mathbb{R})$ alors

– pour $\Re(z) \geq \Re(z_1)$ et $t > 0$, $-\Re(z)t \leq -\Re(z_0)t$ donc $|f(t)e^{-zt}| \leq |f(t)e^{-z_1 t}|$ et $|f(t)e^{-zt}| \in L^1(\mathbb{R})$.

– pour $\Re(z) \leq \Re(z_2)$ et $t < 0$, $|f(t)e^{-zt}| \leq |f(t)e^{-z_2 t}|$ et $|f(t)e^{-zt}| \in L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi, pour $\Re(z_1) \leq \Re(z) \leq \Re(z_2)$, $\mathcal{L}f(z)$ est bien définie. Il suffit donc de prendre $\sigma_- = \inf\{\sigma \ : |f(t)|e^{-\sigma t} \in L^1(\mathbb{R})\}$ et $\sigma_+ = \sup\{\sigma \ : |f(t)|e^{-\sigma t} \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Enfin, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty)$ alors
$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$
Mais, si $\Re(z) \geq 0$ et $t \geq 0$, $|f(t)e^{-zt}| \leq |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{L}f(z)$ est bien défini. □

Notons que si $z = 2i\pi\xi$, $\mathcal{L}f(2i\pi\xi) = \widehat{f}(\xi)$ la transformée de Fourier de f. Plus généralement, $\mathcal{L}f(a + 2i\pi\xi) = \widehat{e^{-at}f}(\xi)$. On en déduit que

Corollaire 5.14.
La transformée de Laplace est injective.

Proposition 5.15.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ à bord régulier et $(\Omega', \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.
Soit F une fonction sur $\Omega' \times \Omega$ telle que
— pour presque tout $t \in \Omega'$, $z \to F(t, z)$ est holomorphe dans Ω
— il existe $\varphi \in L^1(\Omega')$ tel que pour tout $(t, z) \in \Omega' \times \Omega$, $|F(t, z)| \leq \varphi(t)$.
Alors la fonction f définie sur Ω par
$$f(z) = \int_{\Omega'} F(t, z)\, dt$$
est holomorphe sur Ω.

Démonstration. On utilise la formule de Cauchy: pour $z \in \Omega$, il existe $D(z, r_z) \subset \Omega$ et alors
$$F(t, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,r_z)} \frac{F(t, \zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$
Mais, si $\zeta \in \partial D(z, r_z)$, $t \in \Omega'$, $\left|\frac{F(t,\zeta)}{\zeta - z}\right| \leq \frac{\varphi(t)}{r_z}$, donc avec Fubini,
$$f(z) = \int_{\Omega'} F(t, \zeta)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega'} \int_{\partial D(z,r_z)} \frac{F(t, \zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}t.$$
Mais alors, si $\zeta \in \partial D(z, r_z)$, $t \in \Omega'$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(t,\zeta)}{\zeta - x - iy}\right| = \left|\frac{F(t,\zeta)}{(\zeta - x - iy)^2}\right| \leq \frac{\varphi(t)}{r_z^2}$ et $\left|\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(t,\zeta)}{\zeta - x - iy}\right| = \left|\frac{F(t,\zeta)}{(\zeta - x - iy)^2}\right| \leq \frac{\varphi(t)}{r_z^2}$. Ainsi, on peut dériver sous les intégrales et obtenir
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega'} \int_{\partial D(z,r_z)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{F(t, \zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$
Donc f est bien holomorphe. □

Corollaire 5.16.
Soit f une fonction de la variable réelle $\mathbb{R}$. Si la transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ de f est définie sur $\Omega = \{\sigma_- < \Re(z) < \sigma_+\}$, alors f est holomorphe sur Ω.

Cela résulte directement de la proposition précédente et de la démonstration du lemme 5.13.

Exercice 5.4. Soient f, g deux fonctions de la variable réelle et soit $\Omega_f = \{\sigma_-^f < \Re(z) < \sigma_+^f\}$ (resp. $\Omega_g = \{\sigma_-^g < \Re(z) < \sigma_+^g\}$) le domaine de $\mathcal{L}f$ (resp. $\mathcal{L}g$). Montrer que
1. pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}[\lambda f + \mu g](z) = \lambda\mathcal{L}f(z) + \mu\mathcal{L}g(z)$ pour $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$.
2. Si $f_\tau(t) = f(t + \tau)$ alors pour $z \in \Omega_f$, $\mathcal{L}f_\tau(z) = e^{\tau z}\mathcal{L}f(z)$.
3. Si $f_\leftarrow(t) = f(-t)$ alors pour $z \in -\Omega_f = \{-\sigma_+^f < \Re(z) < -\sigma_-^f\}$, $\mathcal{L}f_\leftarrow(z) = \mathcal{L}f(-z)$.
4. Pour $z \in \Omega_f$, $\mathcal{L}\overline{f}(z) = \overline{\mathcal{L}f(\overline{z})}$.
5. Pour $z \in \Omega_f$, $\mathcal{L}f'(z) = z\mathcal{L}f(z)$.
6. Soit $t_0 \in \mathbb{C}$, alors pour $z \in \Omega_f + z_0 = \{\sigma_-^f + \Re(z_0) < \Re(z) < \sigma_+^f + \Re(z_0)\}$, $\mathcal{L}[e^{z_0 t}f](z) = \mathcal{L}f(z - z_0)$.

(7) Soit $a > 0$, alors pour $z \in \Omega_f$, $\mathcal{L}[f(at)](z) = a^{-1}\mathcal{L}f(z/a)$.
(8) Pour $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$, $\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z)$.

6. Séries de Laurent, transformée en z

Une série de Laurent est une série de la forme $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$.

Définition 12.
Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe. La transformée en Z de a est définie par

$$\mathcal{Z}a(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k.$$

Comme pour la transformée de Laplace, écrivons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

On reconnaît donc deux séries entières $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ qui converge pour $|z| < R_+$ (éventuellement $R_+ = 0$) et $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} Z^k$ $(Z = 1/z)$ qui converge pour $|Z| < \rho$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k$ converge pour $|z| > R_- = 1/\rho$.

Enfin, notons que si $z = re^{2i\pi t}$ alors $Za(z) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k r^k e^{2i\pi kt}$ est la transformée de Fourier à temps discret (*i.e.* la somme de la série de Fourier) de la suite $(a_k r^k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Ainsi on a

Lemme 5.17.
Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe. Alors la transformée en Z de a est une fonction holomorphe sur un anneau $\{R_- < |z| < R_+\}$.

L'application $a \to \mathcal{Z}a$ est injective.

Enfin, si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est causal, i.e. si $a_k = 0$ pour $k < 0$, alors a est holomorphe sur un disque $\{|z| < R\}$.

Il faut prendre garde à ne pas se méprendre sur l'injectivité. Celle-ci signifie que si $Za(z) = Zb(z)$ *sur un même anneau* $\{R_- < |z| < R_+\}$ alors $a = b$. Ceci provient directement de l'injectivité de la transformée de Fourier à temps discret.

Afin de montrer l'importance du domaine, cherchons les suites donc la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ est la transformée en z. Comme f a un pôle en α, on voit que pour que $f(z) = Za(z)$ sur un anneau $\{R_- < |z| < R_+\}$, cet anneau est soit entièrement inclus dans $\{|z| < |\alpha|\}$, soit entièrement inclus dans $\{|z| > |\alpha|\}$.

Mais, pour $|z| < |\alpha|$,

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{-1}{\alpha}\frac{1}{1-z/\alpha} = \frac{-1}{\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^k = Za(z)$$

avec $a_k = 0$ pour $k < 0$ et $a_k = -1/\alpha^{k+1}$ pour $k \geq 0$.

Par ailleurs, pour $|z| > |\alpha|$,

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\alpha/z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^k = Zb(z)$$

avec $b_k = 0$ pour $k \geq 0$ et $b_k = \alpha^{-k+1}$ pour $k < 0$.

Exercice 5.5. Soient $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}, b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites complexes et soit $\Omega_a = \{R_-^a < |z| < R_+^a\}$ (resp. $\Omega_b = \{R_-^b < |z| < R_+^b\}$) le domaine de $\mathcal{Z}a$ (resp. $\mathcal{Z}b$). Montrer que

(1) pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) = \lambda\mathcal{Z}a(z) + \mu\mathcal{Z}b(z)$ pour $z \in \Omega_a \cap \Omega_b$.

(2) Si $a_n(k) = a(k+n)$ alors pour $z \in \Omega_a \setminus \{0\}$, $\mathcal{Z}a_n(z) = z^n \mathcal{Z}a(z)$.
(3) Si $a_{\leftarrow}(k) = a(-k)$ alors pour $z \in 1/\Omega_f = \{R_+^{-1} < |z| < R_-^{-1}\}$, $\mathcal{Z}a_{\leftarrow}(z) = \mathcal{Z}a(1/z)$.
(4) Pour $z \in \Omega_a$, $\mathcal{Z}\overline{a}(z) = \overline{\mathcal{Z}a(\overline{z})}$.
(5) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors pour $z \in \alpha\Omega_a = \{\alpha R_- < |z| < \alpha R_+\}$, $\mathcal{Z}[(\alpha^k a_k)](z) = \mathcal{Z}a(z/\alpha)$.
(6) Pour $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$, $\mathcal{Z}[a * b](z) = \mathcal{Z}a(z)\mathcal{Z}b(z)$.

Lemme 5.18.
Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $f(z) = \mathcal{Z}a(z)$ pour $z \in \{R_- < |z| < R_+\}$ (qu'on suppose non-vide), alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et pour tout $R_- < r < R_+$

$$a_k = \frac{1}{2i\pi}\int_{r\mathbb{T}} f(z)z^{-k-1}\,dz = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}\,dt$$

avec la paramétrisation $r\mathbb{T} = \{re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$.

Inversement, si f est holomorphe sur $\{R_- < |z| < R_+\}$, alors il existe a tel que $f = \mathcal{Z}a$ sur $\{R_- < |z| < R_+\}$.

Démonstration. Une série entière est uniformément convergente à l'intérieur de son domaine de convergence, on peut donc échanger intégration et sommation sur $\{R_- < |z| < R_+\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r^j e^{ijt}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r^j \int_0^{2\pi} e^{ijt}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = a_k r^k.\end{aligned}$$

Pour la seconde partie, on définit évidemment $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ par

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $t \to f(re^{it})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de Dirichlet, $a_k r^k \in \ell^1(\mathbb{Z})$ pour tout $R_- < r < R_+$. Donc la transformée en Z de a, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ est définie pour $R_- < |z| < R_+$, elle y est donc aussi holomorphe et est égale à f sur chaque $r\mathbb{T}$, $R_- < r < R_+$, *i.e.* $f = \mathcal{Z}a$ sur $R_- < |z| < R_+$. □

7. Calcul des résidus

Soit f soit une fonction holomorphe sur un anneau $D(a, R_-, R_+) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : R_- < |z-a| < R_+\}$, alors en appliquant le lemme 5.18 à $g(z) = f(a+z)$, f admet un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$$

sur un anneau $\{z \in \mathbb{C} : R_- < |z-a| < R_+\}$.

De plus, toujours avec le lemme 5.18, pour $R_- < r < R_+$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1},$$

en particulier, cette intégrale ne dépend pas de r.

Définition 13.
Soit f une fonction holomorphe sur un anneau $D(a, R_-, R_+) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : R_- < |z-a| < R_+\}$. On appelle *résidu* de f en a le coefficient d'indice -1 de son développement en série de Laurent en a et on le note $\mathrm{Res}(f, a)$. Ainsi

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

pour tout $R_- < r < R_+$.

Soit Ω un ouvert à bord régulier et soit $\{a_1,\ldots,a_n\}$ un ensemble fini de points de Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Pour chaque a_j, il existe r_j tel que $D(a_j,r_j)\subset\Omega$. De plus, en prenant les r_j assez petits, les $D(a_j,r_j)$ ne s'intersectent pas. Soit alors $\tilde\Omega=\Omega\setminus\bigcup\overline{D(a_j,r_j)}$ de sorte que f soit holomorphe donc $\mathcal{C}^1$ au voisinnage de $\tilde\Omega$. En prenant $a\in\tilde\Omega$ et en appliquant le théorème de Cauchy-Pompéiu à $(z-a)f(z)$ (c'est-à-dire essentiellement la proposition 5.9) $\displaystyle\int_{\partial\tilde\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z=0$. Mais

$$\int_{\partial\tilde\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\partial\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{i=1}^n\int_{\partial D(a_i,r_i)}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\partial\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z-2i\pi\sum_{i=1}^n\mathrm{Res}\,(f,a_i)$$

d'après les calculs précédents. On a ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème 5.19 (Formule des résidus). *Soit Ω un ouvert à bord régulier et $a_1,\ldots,a_n$ n points distincts de Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$, alors*

$$\int_{\partial\Omega}f(z)\,dz=2i\pi\sum_{i=1}^n\mathrm{Res}\,(f,a_i).$$

Exemple 5.20. À nouveau, ce théorème est très utile pour le calcul de nombre d'intégrales. Par exemple, pour calculer

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+i)(t-i)}\,\mathrm{d}t=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R\frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+i)(t-i)}\,\mathrm{d}t.$$

Fixons x et soit donc $F(t)=\dfrac{e^{-2i\pi xt}}{(t+i)(t-i)}$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. On prend alors $R>1$ et $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ avec $\gamma_1=\{t,t\in[-R,R]\}$ — un segment de droite — et $\gamma_2=\{R\cos\theta+i\sin\theta,\ \theta\in[0,\pi]\}$ — un arc de cercle. Ainsi γ est une courbe fermée, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Comme $R>1$, γ est le bord d'un domaine qui contient i, un pôle de F. Donc

$$\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z=2i\pi\mathrm{Res}\,(F,i).$$

Mais, d'une part

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+i)(t-i)}=\frac{i}{2}e^{-2i\pi x(t-i+i)}\left(\frac{1}{t+i}-\frac{1}{t-i}\right)\\&=\frac{ie^{2\pi x}}{2}e^{-2i\pi x(t-i)}\left(\frac{1}{t-i+2i}-\frac{1}{t-i}\right)\\&=\frac{ie^{2\pi x}}{2}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{(-2i\pi x)^k}{k!}(t-i)^k\right)\left(\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t-i)^k}{(2i)^k}-\frac{1}{t-i}\right)\\&=\frac{e^{2\pi x}}{2i}\frac{1}{t-i}+\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(t-i)^k\end{aligned}$$

avec des c_k qu'on ne cherchera pas à calculer. Il en résulte que

$$2i\pi\mathrm{Res}\,(F,i)=\pi e^{2\pi x}.$$

Notez qu'il est plus simple de remarquer que $G(t)=(t-i)F(t)$ est continue (*i.e.* que le pôle i est simple) donc $\mathrm{Res}(F,i)=G(i)$. La calcul ci-dessus explique comment obtenir le développement en série de Laurent en entier.

D'autre part,

$$\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}F(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^R F(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}F(R\cos\theta+iR\sin\theta)(-R\sin\theta+iR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

La première intégrale
$$\int_{-R}^{R} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2i\pi xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
puisque $|F(t)| = \dfrac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Ensuite, en remarquant que
$$|1+(R\cos\theta+i\sin\theta)^2| = |1+R^2e^{2i\theta}| \geq |R^2e^{2i\theta}|-1 = R^2-1,$$
que $|-R\sin\theta+iR\cos\theta| = R$ et que
$$|e^{-2i\pi x(R\cos\theta+i\sin\theta)}| = |e^{-2i\pi xR\cos\theta}e^{2\pi xR\sin\theta}| = e^{2\pi xR\sin\theta}$$
on obtient
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} F(R\cos\theta+iR\sin\theta)(-R\sin\theta+iR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| &\leq R\int_0^{2\pi}|F(R\cos\theta+iR\sin\theta)|\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2R}{R^2-1}\int_0^{2\pi} e^{2\pi xR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$
Mais, si $x\leq 0$, $e^{2\pi xR\sin\theta}\leq 1$ pour $\theta\in[0,2\pi]$ donc
$$\left|R\int_0^{2\pi} F(R\cos\theta+iR\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{4\pi R}{R^2-1} \to_{R\to+\infty} 0.$$
(Ceci est faux pour $x>0$ pour lequel cette limite est $+\infty$). Ainsi
$$\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
si $x<0$ d'où
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \pi e^{2\pi x} = \pi e^{-2\pi|x|}.$$

Pour $x>0$, on peut soit remplacer γ_2 par le demi-cercle (exercice), soit utiliser la parité pour obtenir $\tilde{\gamma}_2 = \{R\cos\theta+i\sin\theta,\ \theta\in[0,\pi]\}$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \pi e^{-2\pi x} = \pi e^{-2\pi|x|}.$$

8. Solutions des exercices

8.1. Exercice 5.1. On veut déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} P(z)\,\mathrm{d}z$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{P(z)}{z}$ lorsque P est un polynôme. Par linéarité, il suffit de le faire lorsque $P(z)=z^k$. Mais alors, en paramétrant $\mathbb{T}$ par e^{it} comme dans l'exemple 19.
$$\int_{\mathbb{T}} z^k\,\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i(k+1)t}}{k+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$
alors que
$$\int_{\mathbb{T}} \frac{z^k}{z}\,\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}\left[\frac{e^{ikt}}{k}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k\neq 0\\ 2i\pi & \text{sinon}\end{cases}.$$
En écrivant $P(z) = a_0+a_1z+\cdots+a_Nz^N$ on trouve $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} P(z)\,\mathrm{d}z = 0$ et
$$\int_{\mathbb{T}} \frac{P(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=0}^{N}\int_{\mathbb{T}} \frac{z^j}{z}\,\mathrm{d}z = 2i\pi a_0 = 2i\pi P(0).$$

8.2. Exercice 5.2. On a $\dfrac{\partial(x+iy)^j}{\partial x} = j(x+iy)^{j-1}$ et $\dfrac{\partial(x+iy)^j}{\partial y} = ij(x+iy)^{j-1}$ donc

$$\frac{\partial z^j}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z^j}{\partial x} - i\frac{\partial z^j}{\partial y}\right] = \frac{j(x+iy)^{j-1} - i^2 j(x+iy)^{j-1}}{2} = jz^j$$

alors que

$$\frac{\partial z^j}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial z^j}{\partial x} + i\frac{\partial z^j}{\partial y}\right] = \frac{j(x+iy)^{j-1} + i^2 j(x+iy)^{j-1}}{2i} = 0.$$

8.3. Exercice 5.3. Pour les combinaison linéaire, c'est simplement la linéarité de la limite. Pour les produits, pour que f soit holomorphe, il faut que $f(z_0+h) \to f(z_0)$. Mais alors

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0)g(z_0)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0+h)g(z_0) + f(z_0+h)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)}{h} \\
&\qquad = f(z_0+h)\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} + \frac{f(z_0+h) - f(z_0)g}{h}g(z_0) \\
&\qquad \to\ f(z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0).
\end{aligned}$$

Notons qu'au passage, on retrouve la formule

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0).$$

APPENDICE A

Espaces de Hilbert

1. Définitions et exemples

Dans ce cours, $\mathcal{H}$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la mesure du possible, nous ne distinguerons pas les deux cas. Dans les formules ci-dessous, il suffira en effet de considérer que, si $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, alors $\bar{a} = a$ et $\mathrm{Re}\, a = a$.

Définition 14.
Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle \,:\, \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire si

(1) $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ est *sesqui-linéaire*, c'est-à-dire si, pour tous $x, y, z \in \mathcal{H}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z\rangle &= \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle; \\ \langle x, \lambda y + \mu z\rangle &= \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\langle x, z\rangle. \end{aligned} \tag{24}$$

(2) $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ est *symétrique*, c'est-à-dire si, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}. \tag{25}$$

(3) La forme quadratique associée $x \to \langle x, x\rangle$ est *définie positive*, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque A.1.
Dans la pratique, on ne vérifie que (24), (25), que $\langle x, x\rangle \geq 0$ et que $\langle x, x\rangle = 0$ implique $x = 0$. Les autres propriétés s'en déduisent automatiquement.

Exemple A.2.

(i) On peut munir $\ell^2_n = \{(x_i)_{i=0\ldots,n-1} \in \mathbb{K}^n\}$ du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \overline{y_i}.$$

(ii) Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et

$$L^2(\Omega, \mu) = \left\{ f \,:\, \Omega \to \mathbb{K} \text{ telles que } \int_\Omega |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}.$$

On munit $L^2(\Omega, \mu)$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

qui est bien définie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2}.$$

(iii) Dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{Z}^d$ muni de la mesure de comptage on obtient l'espace

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \,:\text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^d,\ a_k \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k|^2 < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire
$$\langle a, b\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \overline{b_k}.$$

Notation 2.
On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Nous alons démontrer que ceci définit bien une norme, qu'on appelle la *norme associé* au produit scalaire.

La norme et le produit scalaire sont liés par les formules suivantes:

Proposition A.3.
Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle. \tag{26}$$

Inversement,

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) & si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{4} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2 & si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}. \tag{27}$$

Cette dernière formule est appelé la polarisation *de la norme.*

Démonstration. Pour (26), il suffit de développer
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$
et de remarquer que $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$.

On remplace alors y par $-y$ dans (26) et on obtient
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$
Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de (27) d'obtient alors en sommant les deux identités (dans ce cas, $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$). Pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on remplace également y par $\pm iy$ dans (26) et on obtient
$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Im}\langle x, y\rangle$$
$$\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Im}\langle x, y\rangle.$$
(27) s'obtient en sommant les 4 identités ainsi obtenues. □

Théorème A.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$,
$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$
Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Enfin $x \to \|x\|$ est une norme.

Exercice A.1.
Déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ est continue de $\mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{K}$ où $\mathcal{H}$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

Démonstration. Notons d'abord que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathcal{H}$,
$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\|x\|^2} = |\lambda|\|x\|.$$
Par ailleurs, $\|x\| \ge 0$ est trivial et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ est une re-formulation de $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Pour $x = 0$ ou $y = 0$, la linéraité implique que $\langle x, y\rangle = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est triviale.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ alors, pour $t \in \mathbb{R}$, $\left\|x + te^{i\theta}y\right\|^2 \geq 0$. Mais

$$\left\|x + te^{i\theta}y\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|te^{i\theta}y\right\|^2 + 2\mathrm{Re}\left\langle x, te^{i\theta}y\right\rangle = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Re}\, e^{-i\theta}\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Mais, si un polynôme de degré 2 est de signe constant, son discriminant est négatif, donc

$$\left[\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle\right)\right]^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

En choisissant θ pour que $e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, c'est-à-dire θ l'argument de $\langle x, y\rangle$ ($e^{i\theta}$ le signe de $\langle x, y\rangle$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on en déduit

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, s'il y a égalité, il existe θ tel que le discriminant du polynôme $t \to \left\|x + te^{i\theta}y\right\|^2$ soit nul, c'est-à-dire que ce polynôme a une racine (double) t_0: $\left\|x + t_0e^{i\theta}y\right\|^2 = 0$. On en déduit que $x + t_0e^{i\theta}y = 0$, donc que x et y sont bien colinéaires.

Il reste donc l'inégalité triangulaire à démontrer. Mais

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

d'où $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ en prenant la racine carrée. □

Proposition A.5 (Identité du parallélogramme et de la médianne).
Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors

(i) Identité du parallélogramme: *pour tous $x, y \in \mathcal{H}$,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(ii) Identité de la médianne: *pour tous $x, y, z \in \mathcal{H}$,*

$$4\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2).$$

Démonstration. L'identité du parallélogramme s'obtient simplement en écrivant

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$$

et en sommant les deux.

L'identité de la médianne s'obtient en remplaçant x par $z - x$ et y par $z - y$ dans l'identité du parallélogramme. □

Exercice A.2.
Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que, pour tous $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Montrer que

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{4} i^k\left\|x + i^ky\right\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}.$$

définit un produit scalaire sur X tel que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Solution dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On définit

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

et on veut vérifier que c'est bien un produit scalaire. Pour commencer, notons que $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ est continu car la norme est continue. Notons ensuite que $\langle x, x\rangle = \dfrac{1}{4}(\|2x\|^2 + \|0\|)^2 = \|x\|^2$ car $\|\cdot\|$ est une norme. Si on montre qu'on a ainsi définit le produit scalaire, la norme $\|\cdot\|$ lui est bien associée. De plus, il n'y a plus qu'à montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique. Ce dernier point est également trivial, il faut donc montrer que $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ et $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Notons que

$$4\langle x + x', y\rangle = \|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2$$

et que

$$4(\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \|x' + y\|^2 - \|x' - y\|^2.$$

On veut donc montrer que, pour tous $x, x', y \in X$,

$$\|x + x' + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x' - y\|^2 = \|x + x' - y\|^2 + \|x + y\|^2 + \|x' + y\|^2.$$

Mais, avec l'identité de la médiane (qui résulte directement de l'identité du parallélogramme),

$$\|x - y\|^2 + \|x' - y\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|2y - (x + x')\|^2 + \|x - x'\|^2\big)$$

et

$$\|x + y\|^2 + \|x' + y\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|2y + (x + x')\|^2 + \|x - x'\|^2\big).$$

En posant $u = x + x'$, on remarque qu'on veut donc montrer que

$$2\|y + u\|^2 + \|2y - u\|^2 = 2\|y - u\|^2 + \|2y + u\|^2. \tag{28}$$

Mais, en appliquant l'identité du parallélogramme (cotés u et $2y + u$), on obtient

$$2(\|2y + u\|^2 + \|u\|^2) = \|2y\|^2 + \|2y + 2u\|^2 = 4\|y\|^2 + 4\|y + u\|^2.$$

Par suite,

$$\|2y + u\|^2 + 2\|y - u\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|y + u\|^2 + 2\|y - u\|^2 - \|u\|^2 = 6\|y\|^2 - 3\|u\|^2$$

avec l'identité du parallélogramme. Mais maintenant, le membre de droite ne change pas si on remplace u par $-u$, (28) en résulte immédiatement.

Déduisons en maintenant que $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. Pour $\lambda = 2$, c'est $\langle x + x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle$ et une récurrence immédiate montre que $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$ si $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathcal{H}$ donc aussi $\left\langle \frac{1}{n}x, y\right\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$. En combinant les deux, on obtient $\left\langle \frac{p}{q}x, y\right\rangle = \frac{p}{q}\langle x, y\rangle$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et tous $x, y \in \mathcal{H}$.

Mais alors, si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, il existe deux suites d'entiers (p_n) et (q_n) telles que $p_n/q_n \to \lambda$. Alors $\left\|\frac{p_n}{q_n}x - \lambda x\right\| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \lambda\right|\|x\| \to 0$ *i.e.* $\frac{p_n}{q_n}x \to \lambda x$ dans $\mathcal{H}$. Par continuité du "produit scalaire", on en déduit que $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x, y \in \mathcal{H}$.

Enfin, $0 = \langle 0, y\rangle = \langle x - x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$, *i.e.* $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et $x, y \in \mathcal{H}$, alors

$$\langle \lambda x, y\rangle = -\langle -\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle.$$

On a donc bien définit un produit scalaire. □

2. Projections orthogonales

Dans toute cette section, on désignera par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

2.1. Projection sur un convexe fermé.

Définition 15.
Un espace muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$ est appelé un *espace de Hilbert* s'il est complet (pour cette norme).

Exemple A.6.
ℓ^2_n, ℓ^2 et $L^2(\Omega,\mu)$ sont des espaces e Hilbert.

Définition 16.
Un ensemble $C\subset\mathcal{H}$ est *convexe* si, pour tous $x,y\in C$ et tout $\lambda\in]0,1[$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$. En particulier, tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ est convexe.

Un point $e\in C$ est dit *extrémal* si $e=\lambda x+(1-\lambda)y$ avec $x,y\in C$ et $\lambda\in]0,1[$ implique $x=y=e$.

Proposition A.7.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathbb{B}=\{x\in\mathcal{H}\,:\,\|x\|\leq 1\}$ sa boule unité (fermée). Alors $\mathbb{B}$ est convexe et l'ensemble de ses points extrémaux $\mathcal{E}xt\,\mathbb{B}$ est la sphère unité $\mathbb{S}=\{x\in\mathcal{H}\,:\,\|x\|=1\}$ de $\mathcal{H}$.

Démonstration. En fait, toute boule $B(a,r)=\{x\in X\,:\,\|x-a\|\leq r\}$ d'un espace de Banach X est convexe: si $x,y\in B(a,r)$ et $0<\lambda<1$, alors

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y-a\| &= \|\lambda(x-a)+(1-\lambda)(y-a)\|\\ &\leq \lambda\|x-a\|+(1-\lambda)\|y-a)\|\\ &\leq \lambda r+(1-\lambda)r=r.\end{aligned}$$

De plus, on a toujours $\mathcal{E}xt\,\mathbb{B}\subset\mathbb{S}$. En effet, si $x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{S}$, alors $a:=\|x\|<1$. Soit alors $u\in X$ avec $\|u\|=\dfrac{1-a}{2}$. Alors $x=\frac12(x+u)+\frac12(x-u)$ et

$$\|x\pm u\|\leq\|x\|+\|u\|=a+\frac{1-a}{2}=\frac{1+a}{2}<1$$

et $x\pm u\neq x$ car $u\neq 0$.

Le dernier point n'est pas vrai dans tout espace de Banac. Par exemple, si le support de μ n'est pas réduit à un point *i.e.* si μ n'est pas un multiple d'une masse de Dirac, alors cette propriété est vraie dans les espaces $L^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ si et seulement si $1<p<+\infty$.

Soit donc $x\in\mathbb{B}$ et supposons que $x=\lambda y+(1-\lambda)z$ avec $\|y\|,\|z\|\leq 1$ et $0<\lambda<1$. Alors, avec Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}1=\|x\|^2 &= \|\lambda y+(1-\lambda)z\|^2\\ &= \lambda^2\|y\|^2+(1-\lambda)^2\|z\|^2+2\lambda(1-\lambda)\mathrm{Re}\,\langle y,z\rangle\\ &\leq \lambda^2\|y\|^2+(1-\lambda)^2\|z\|^2+2\lambda(1-\lambda)\|y\|\|z\|\\ &\leq \big(\lambda\|y\|+(1-\lambda)\|z\|\big)^2\leq 1.\end{aligned}\tag{29}$$

Donc ces inégalités sont des égalités. Ainsi, en premier lieu, $\|y\|=\|z\|=1$, y et z ne sont donc pas nuls. Ensuite, on a égalité dans Cauchy-Schwarz, donc $z=\mu y$. Comme $\|y\|=\|z\|=1$, on a de plus $|\mu|=1$. L'identité (29) implique alors que

$$1=\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\mathrm{Re}\,\mu$$

qui implique $\mathrm{Re}\,\mu=1$ (car $\lambda\neq 0$ et $\lambda\neq 1$) et, comme $|\mu|=1$, on obtient $\mu=1$. Ainsi $z=y$, mais alors $x=\lambda y+(1-\lambda)z=y$ et x est bien extrémal. □

Exercice A.3.
(1) Détermienr les points extrémaux de la boule unité de $\ell^1_n=(\mathbb{R}^n,\|.\|_1)$ et de $\ell^\infty_n=(\mathbb{R}^n,\|.\|_\infty)$.
(2) Soient E,F deux espaces normés et $\varphi\,:\,E\mapsto F$ une bijection isométrique (linéaire). Soit C un convexe de E.
Montrer que $\varphi(C)$ est un convexe et que si ξ est un point extrémal de C, alors $\varphi(\xi)$ est un point extrémal de $\varphi(C)$.
(3) Les espaces ℓ^1_n, $\ell^2_n=(\mathbb{R}^n,\|.\|_2)$ et ℓ^∞_n sont-ils isométriques.

Théorème A.8 (Théorème de la projection).
Soit $\mathcal{C}$ *un ensemble convexe fermé dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *et soit* $x \in \mathcal{H}$*. Alors il existe un* unique $y \in C$ *tel que*

$$\|x - y\| = d(x, \mathcal{C}) := \inf\{\|x - z\|\,;\ z \in \mathcal{C}\}.$$

Ce point est appelé la projection orthogonale *de* x *sur* $\mathcal{C}$ *et noté* $y = P_{\mathcal{C}}(x)$*. C'est l'unique* $y \in \mathcal{C}$ *tel que, pour tout* $z \in \mathcal{C}$*,*

$$Re\,\langle z - y, x - y\rangle \leq 0. \tag{30}$$

Remarque A.9.
— $d(x, \mathcal{C})$ est bien défini car c'est l'infimum d'un ensemble de nombre positifs. Le théorème montre que, dans un espace de Hilbert, cet infimum est atteint en un unique point.
— Si $\mathcal{C}$ est compact, alors la distance est toujours atteinte car la distance est l'infimum d'une fonctions continue (la norme est continue) sur $\mathcal{C}$. Notons aussi que si $z_0 \in \mathcal{H}$, alors $d(x, \mathcal{C}) = d\big(x, \mathcal{C} \cap B(x, \|x - z_0\|)\big)$. On peut donc supposer que $\mathcal{C}$ est bornée. En particulier, en dimension finie, la distance est toujours atteinte. Mais, si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, le raisonnement n'est plus valable car un ensemble fermé borné n'est pas forcément compact !
— En général, si $\mathcal{H}$ n'est pas un Hilbert, l'unicité n'est pas garantie. En effet, dans ℓ^∞_2, prenons $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R}^2 \ :\ \|z\|_\infty \leq 1\}$ et $x = (2, 0)$. Alors, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\|x - (1, t)\|_\infty = \max(1, |t|) = 1 = \inf\{\|x - z\|_\infty \ :\ z \in \mathcal{C}\}.$$

— Par ailleurs, si $\mathcal{H}$ n'est pas un Hilbert et est de dimension infini, la distance peut ne pas être atteinte. Par exemple, soit $X = \ell^1 = \{(a_n)_{n\geq 1} \ :\ \sum |a_n| < +\infty\}$ muni de la norme $\|(a_n)\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et soit $\mathcal{C} := \{(a_n) \in \ell^1 \ : \sum_{n\geq 1}(1 - 2^{-n})a_n = 0\}$.

Notons que $\mathcal{C} = \ker T$ avec $T\,:\,\ell^1 \to \mathbb{C}$, $T(a_n) = \sum_{n\geq 1}(1-2^{-n})a_n$. Notons que $|T(a_n)| \leq \|(a_n)\|_1$ donc T est continue, et T est évidemment linéaire. Ainsi $\mathcal{C}$ est bien un convexe fermé.

Soit maintenant $x = (1, 0, \ldots) \in \ell^1 \setminus \mathcal{C}$. Supposons qu'il existe $a = (a_n) \in \ell^1$ telle que $\|x - a\|_1 = d(x, \mathcal{C}) := d$.

Comme $x \notin \mathcal{C}$, on a $x \neq a$ et alors $d = \|x - a\|_1 > 0$ et comme $0 = (0, 0, \ldots) \in \mathcal{C}$, $d \leq \|x - 0\|_1 = \|x\|_1 = 1$.

Montrons d'abord que $d < 1$. En effet, soit b de la forme $b = (\beta, -\gamma_1\beta, 0, 0, \ldots)$ avec $\gamma_1 = (1-1/2)/(1-1/4) \in [0, 1[$ et $\beta \in \mathbb{R}$, en particulier $b \in \mathcal{C}$. Alors $\|x - b\|_1 = |1-\beta| + \gamma_1|\beta|$. En prenant $\beta = 1$, on obtient donc $\|x - b\|_1 = \gamma_1 < 1$. Notons que $|1-\beta| + \gamma_1|\beta|$ est minimal pour $\beta = 1$ (il suffit de tracer le graphe de $\beta \to |1-\beta| + \gamma_1|\beta|$, qui est une fonction continue, affine par morceaux et donc la pente change en 0 et en 1 où sa valeur est facile à calculer).

— Premier cas, $a_1 \neq 1$. On voit immédiatement que $(a_1, 0, 0, \ldots) \notin \mathcal{C}$. Soit donc k le premier entier $k \geq 2$ tel que $a_k \neq 0$ donc $a = (a_1, 0, \ldots, 0, a_k, \ldots)$ et

$$\|x - a\|_1 = |1 - a_1| + |a_k| + \sum_{j\geq k+1} |a_j|.$$

Soit alors $b \in \mathcal{C}$ de la forme $b = (\beta, 0, \ldots, 0, -\gamma_k\beta, 0, 0, \ldots)$ avec $\gamma_k = (1-1/2)/(1-1/2^k) \in [0, 1[$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors $a + b \in \mathcal{C}$ et

$$\|x - a - b\|_1 = |1 - a_1 - \beta| + |a_k - \gamma_k\beta| + \sum_{j\geq k+1} |a_j|.$$

Mais, en choisissant $\beta = 1 - a_1$, $|1 - a_1 - \beta| + |a_k - \gamma_k\beta| = |a_k - \gamma_k(1 - a_1)| < |1 - a_1| + |a_k|$ (car $a_1 \neq 0$). Pour voir cela, il suffit de dessiner le graphe de $\varphi\,:\,\beta \to |1 - a_1 - \beta| + |a_k - \gamma_k\beta|$ qui est affine par morceaux et change de pente en a_k/γ_k et en $1 - a_1$ où elle atteint son minimum (car $0 < \gamma_k < 1$). Si $1 - a_1 \neq 0$, alors $\varphi(1 - a_1) < \varphi(0)$. On en déduit que pour le b correspondant à $\beta = 1 - a_1$,

$$\|x - a - b\|_1 < |1 - a_1| + |a_k| + \sum_{j\geq k+1} |a_j| = \|x - a\|_1.$$

Donc le minimum de $\|x-c\|$ n'est pas atteint en $c=a$.

— Dernier cas: $a_1 = 1$. À nouveau, soit k le premier entier $k \geq 2$ tel que $a_k \neq 0$ donc $a = (1, 0, \ldots, 0, a_k, \ldots)$ et soit maintenat $b \in \mathcal{C}$ de la forme $b = (0, \ldots, 0, \beta, -\delta\beta, \ldots)$ avec $\delta = (1 - 2^{-k})/(1-2^{-k-1}) \in]0,1[$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|x-a-b\|_1 = |a_k - b_k| + |a_{k+1} - \delta b_k| + |a_{k+2}| + \cdots .$$

On étudie donc $\psi : t \to |a_k - t| + |a_{k+1} - \delta t|$ qui est à nouveau continue et affine par morceau avec des changements de pente en $t = a_{k+1}/\delta$ et en $t = a_k$ où elle est minimale (car $0 < \delta < 1$). Donc $\psi(a_k) < \psi(0)$ et, en prenant $\beta = a_k$, *i.e.* $b = (0, \ldots, a_k, -\delta a_k, 0, \ldots)$, on a $a + b \in \mathcal{C}$ et

$$\|x-a-b\|_1 = \psi(a_k) + |a_{k+2}| + \cdots < \psi(0) + |a_{k+2}| + \cdots = \|x-a\|_1.$$

Donc le minimum de $\|x-c\|$ n'est pas atteint en $c=a$.

Tous les cas ayant été exclus, le minimum de $c \to \|x-c\|$ ne peut donc être atteint sur $\mathcal{C}$.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}}x = x$ et tout est trivial. Soit donc $x \notin \mathcal{C}$ et notons $d = d(x, \mathcal{C})$.

Par définition, il existe une suite $(y_n) \subset \mathcal{C}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $d^2 \leq \|x-y_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$. Montrons que cette suite (y_n) converge. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. D'après l'identité de la médianne,

$$\begin{aligned}
\|y_p - y_q\|^2 &= 2\big(\|y_p - x\|^2 + \|y_q - x\|^2\big) - 4\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2(d^2 + 1/p + d^2 + 1/q) - 4d^2 = 2/p + 2/q
\end{aligned}$$

car, par convexité de $\mathcal{C}$, $\dfrac{y_p + y_q}{2} \in \mathcal{C}$ donc $\left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\|^2 \geq d^2$. Ainsi (y_n) est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ qui est complet, donc (y_n) converge. Soit y sa limite. Comme $\mathcal{C}$ est fermé, $y \in \mathcal{C}$ et, par continuité de la norme, $\|x-y_n\| \to \|x-y\|$. On a donc bien $\|x-y\| = d$.

Supposons que y' soit un autre élément de $\mathcal{C}$ tel que $\|x-y'\| = d$. Alors, avec l'identité de la médiane

$$\|y-y'\|^2 = 2\big(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2\big) - 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 \leq 2(d^2+d^2) - 4d^2 = 0$$

donc $y = y'$.

Soit maintenant $z \in \mathcal{C}$ et $t \in]0,1[$. Soit $z_t = (1-t)y + tz \in \mathcal{C}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &\leq \|x-z_t\|^2 = \|x-y+t(y-z)\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 + t^2\|z-y\|^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle x-y, y-z\rangle.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on en déduit

$$2\mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq t\|z-y\|^2.$$

En faisant tendre $t \to 0$ on déduit immédiatement que

$$\mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq 0.$$

Inversement, si pour tout $z \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\|x-z\|^2 &= \|x-y+(y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x-y, y-z\rangle \\
&= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \geq \|x-y\|^2
\end{aligned}$$

donc $y = P_{\mathcal{C}}(z)$ par l'unicité de l'élément z de $\mathcal{C}$ qui minimise $\|x-z\|$. □

Proposition A.10.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{C}$ une partie convexe fermée de $\mathcal{H}$. Alors l'application $P_{\mathcal{C}} : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ est continue. Plus précisément, pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$,

$$\|P_{\mathcal{C}}x_1 - P_{\mathcal{C}}x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|. \tag{31}$$

DÉMONSTRATION. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ et posons $y_1 = P_{\mathcal{C}} x_1$ et $y_2 = P_{\mathcal{C}} x_2$. Si $y_1 = y_2$ alors (31) est triviale. On peut donc supposer que $\|y_1 - y_2\| \neq 0$. Alors, pour tous $z, z' \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Re}\,\langle x_1 - y_1, z - y_1\rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\,\langle x_2 - y_2, z' - y_2\rangle \leq 0.$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$ et en additionnant, il vient

$$\mathrm{Re}\,\langle x_1 - y_1 - (x_2 - y_2), y_2 - y_1\rangle \leq 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \mathrm{Re}\,\|y_1 - y_2\|^2 = \mathrm{Re}\,\langle y_1 - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - y_2, y_1 - y_2\rangle \\ &= \mathrm{Re}\,\langle y_1 - x_1 - (y_2 - x_2), y_1 - y_2\rangle + \mathrm{Re}\,\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \\ &\leq |\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle| \end{aligned}$$

avec le calcul précédent et $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ pour $z \in \mathbb{C}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\| \|y_1 - y_2\|.$$

Il suffit de simplifier les deux membres par $\|y_1 - y_2\|$ pour obtenir (31). □

2.2. Orthogonalité.

DÉFINITION 17.
Deux vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$ sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Si $\mathcal{H}$ est un espace *réel* alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $-1 \leq \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. On peut donc définir *l'angle* entre deux vecteurs $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ par $\theta(x, y) = \arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$. Dans ce cas, deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur angle est $\pi/2$, ce qui justifie la nomenclature.

LEMME A.11.
Soient $x, y \in \mathcal{H}$. Alors x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \textit{et} \quad \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{32}$$

Notons que ces deux conditions se réduisent à la première dans un espace réel.

DÉMONSTRATION. On a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$$

et

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle.$$

Donc (32) est équivalent à $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = 0$ et $\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = 0$, c'est-à-dire à l'orthogonalité de x et y. □

DÉFINITION 18.
Soit $A \subset \mathcal{H}$, son *orthogonal* est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} \,:\, \text{pour tout } y \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

LEMME A.12.
Soit $A \subset \mathcal{H}$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

DÉMONSTRATION. Si $x, x' \in A^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors, pour tout $y \in A$,

$$\langle \lambda x + \mu x', y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x', y\rangle = 0$$

donc $\lambda x + \mu x' \in A^\perp$.

Si $x_n \in A^\perp$ est une suite convergente dans $\mathcal{H}$ et x sa limite alors, pour tout $y \in A$,

$$0 = \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$$

par continuité du produit scalaire, donc $\langle x, y\rangle = 0$ et $x \in A^\perp$. □

Exercice A.4.
Soit $A \subset \mathcal{H}$. Montrer que
$$A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp} = (\mathrm{Vect}\, A)^{\perp} = (\overline{\mathrm{Vect}\, A})^{\perp}.$$

Théorème A.13 (Projection sur un sous-espace vectoriel fermé).
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$. Alors

(i) *pour tout $x \in \mathcal{H}$, $P_F x$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$;*
(ii) *P_F est une application linéaire continue.*

Démonstration. Soit d'abord $x \in \mathcal{H}$ et supposons que $y \in F$ est tel que $x - y \in F^{\perp}$. Alors, pour tout $z \in F$, $y - z \in F$ et est donc orthogonal à $y - x$. On a donc
$$\begin{aligned} d(x, F)^2 &= \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} \|x - y + y - z\|^2 \\ &= \inf_{z \in F} \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &= \|x - y\|^2. \end{aligned}$$
Pour cette dernière égalité, $d(x, F)^2 \geq \|x - y\|^2$ est trivial et on obtient $d(x, F)^2 \leq \|x - y\|^2$ en prenant $z = y$. On en déduit que $y = P_F x$ d'après l'unicité dans le théorème de projection sur les convexes fermés.

Réciproquement, $P_F(x)$ est caractérisé par la propriété d'être l'unique $y \in F$ tel que
$$\mathrm{Re}\, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } z \in F.$$
En particulier, si on prend $w \in F$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = y + e^{i\theta} w$, on obtient
$$\mathrm{Re}\, e^{-i\theta} \langle x - y, w \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } w \in F, \theta \in \mathbb{R}.$$
Mais, avec θ l'argument de $\langle x - y, w \rangle$, on obtient $|\langle x - y, w \rangle| \leq 0$ pour tout $w \in F$ donc $\langle x - y, w \rangle = 0$ pour tout $w \in F$, c'est-à-dire $x - y \in F^{\perp}$. (On pourrait aussi prendre $\theta = 0, \pi, \pi/2, -\pi/2$ ce qui montrerait que la partie réelle et la partie imaginaire de $\langle x - y, w \rangle$ sont à la fois négatives et positives donc nulles).

On a déjà vu avec la proposition A.10 que $x \to P_F x$ est continue (et même Lipschitzienne). Il reste donc à montrer la linéarité. Mais si $x, x' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors
$$\lambda P_F x + \mu P_f x' \in F$$
car F est un espace vectoriel et
$$\lambda x + \mu x' - (\lambda P_F x + \mu P_f x') = \lambda(x - P_F x) + \mu(x' - P_F x') \in F^{\perp}$$
car $F^{\perp}$ est un espace vectoriel. D'après la première partie de la démonstration,
$$\lambda P_F x + \mu P_F x' = P_F(\lambda x + \mu x').$$
□

Théorème A.14.
Soit F un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$.

C'est-à dire que tout $x \in \mathcal{H}$ s'écrit de façon unique $x = y + y^{\perp}$ avec $y \in F$ et $y^{\perp} \in F^{\perp}$ et que les applications $x \to y$ et $x \to y^{\perp}$ sont continues.

Démonstration. On a $x = P_F x + x - P_F x$ et, d'après le théorème précédent, $P_F x \in F$ et $x - P_F \in F^{\perp}$. De plus, ce théorème montre que c'est l'unique décomposition $x = y + y^{\perp}$ avec $y \in F$ et $y^{\perp} = x - y \in F^{\perp}$.

Enfin, dans les notations du théorème, $x \to y$ est P_F et $x \to y^{\perp}$ est $I - P_F$ (I l'identité $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$). Les deux sont continues. □

Corollaire A.15.
Soit $A \subset \mathcal{H}$, alors $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$.

Démonstration. On a $A^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}\, A})^\perp$ donc $(A^\perp)^\perp = \big((\overline{\mathrm{Vect}\, A})^\perp\big)^\perp$. Il suffit donc de montrer que si F est un sous-espace fermé, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Mais $F^\perp$ st l'unique sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ (somme directe topologique) et les élélements de F et ceux de $F^\perp$ sont orthogonaux. Cette propriété est symmétrique en F et $F^\perp$ donc $(F^\perp)^\perp = F$. □

Corollaire A.16.
Soit A une partie de $\mathcal{H}$. Alors A est totale dans $\mathcal{H}$ (i.e. $\mathrm{Vect}\, A$ est dense dans $\mathcal{H}$) si et seulement si $A^\perp = 0$.

Démonstration. On a $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\, A} \oplus A^\perp$ donc $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$ si et seulement si $A^\perp = 0$. □

Corollaire A.17.
L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Il suffit éviemment de montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact et à valeurs *réelles* est dense dans $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles (si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on écrit $f = f_1 + if_2$ avec $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et on approche f_1, f_2 par g_1, g_2 à valeurs réelles,... détails laissés au lecteur).

Soit $g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui soit dans $\big(\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})\big)^\perp$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{33}$$

On veut montrer que $g = 0$.

Écrivons $g = g_+ - g_-$ avec $g_+, g_- \geq 0$ et dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors (33) implique que, pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g_+(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)g_-(t)\,\mathrm{d}t. \tag{34}$$

Soit alors deux réels $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions continues telle que $0 \leq f_n \leq \chi_{[a,b]}$ et $f_n(t) \to 1$ si $a < t < b$ et $f_n(t) \to 0$ sinon. Par exemple, on peut prendre f_n continue, $f_n = 0$ en-dehors de $[a,b]$, $f_n(t) = 1$ pour $t \in [a + (b-a)/2n, b - (b-a)/2n]$ et f_n affine sur $[a, a + (b-a)/2n]$ et sur $[b - (b-a)/2n, b]$.

En écrivant (34) pour $f = f_n$ et en faisant appel au théorème de convergence dominée, on en déduit que, pour tous $a < b$,

$$\int_{[a,b]} g_+(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} g_-(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, de Cauchy-Schwarz on déduit que

$$\left|\int_{[a,b]} g_\pm(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{b-a}\left(\int_{\mathbb{R}} |g_\pm(t)|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a}\|g\|_2.$$

Donc les deux mesures $\mu = g_+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\nu = g_-(t)\,\mathrm{d}t$ sont finies et coincident sur tout interval. Elles sont donc égales partout, c'est-à-dire $g_+ = g_-$. Mais, ces deux fonctions sont de support disjoint, elles sont donc nulles partout, donc $g = 0$. □

Corollaire A.18.
L'espace $\mathcal{C}([a,b])$ est dense dans $L^2([a,b])$.

Esquisse de démonstration. Pour approcher $f \in L^2([a,b]$, on comence par prolonger f par 0 en-dehors de $[a,b]$, on approche se prolongement par ne fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors la troncature de g, $g|_{[a,b]}$ approche f sur $[a,b]$. Les détails sont laissés au lecteur. □

Notons que si $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$ pour la norme $\|.\|_\infty$, alors $\mathcal{D}$ est dense dans $L^2([a,b])$.

En effet, soit $f \in L^2([a,b])$ et $\varepsilon > 0$. Alors, par densité des fonctions continues dans L^2, il existe $f_1 \in \mathcal{C}([a,b])$ tel que $\|f - f_1\|_2 \leq \varepsilon/2$.

Il existe alors $g \in \mathcal{D}$ tel que $\|f_1 - g\|_\infty \leq \frac{1}{2(b-a)^{1/2}}\varepsilon$. Mais alors

$$\|f_1 - g\|^2_{L^2([a,b])} = \int_a^b |f_1(t) - g(t)^2| \, \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon^2}{4(b-a)^2} \int_a^b 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Par suite

$$\|f - g\|_{L^2([a,b])} \leq \|f - f_1\|_{L^2([a,b])} + \|f_1 - g\|_{L^2([a,b])} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Le critère suivant permet souvent de déterminer si une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}([a,b])$ est dense.

THÉORÈME A.19 (Citère de densité de Stone-Weierstrass).
Soit $\mathcal{K}$ un espace compact *et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{C}(\mathcal{K},\mathbb{K})$ telle que*

(i) *$\mathcal{A}$ est une "algèbre" c'est-à-dire un sous-espace vetoriel tel que de plus, si $f, g \in \mathcal{A}$ alors le produit $fg \in \mathcal{A}$;*
(ii) *$\mathcal{A}$ sépare les points de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire si $x, y \in \mathcal{K}$ alors il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$;*
(iii) *$\mathcal{A}$ contient les constantes;*
(iv) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on suppose de plus que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison: $f \in \mathcal{A}$ implique $\overline{f} \in \mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{K},\mathbb{K})$.

La condition iii sert essentiellement à éviter le cas $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{K}) \ : \ f(a) = 0\}$.

DÉMONSTRATION. Le cas complexe se déduit du cas réel car, si $f \in \mathcal{A}$, alors

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2}$$

sont toutes deux dans $\mathcal{A}$ grâce à l'hypothèse (iv). On pose alors $A_\mathbb{R} = A \cap \mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}$ qui sont à valeurs réelles. Il suffit de remarquer que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèse du cas réel du théorème de Stone-Weierstrass: $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est clairement une sous-algèbre, contient les constantes réeles et sépare les points car si $f \in \mathcal{A}$ est tel que $f(x) \neq f(y)$ alors $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ ou $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. Donc $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$

Enfin, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est donc dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R}) + i\mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{C})$.

Il suffit donc e démontrer le théorème dans le cas réel. Cette démonstration est découpée en plusieurs étape.

Étape 1. Il existe une suite de polynômes *réels $(r_n)_{n\geq 0}$ qui converge* uniformément *sur* $[0,1]$ *vers la fonction racine carrée $r : t \mapsto \sqrt{t}$.*

Définissons (r_n) par récurrence, en partant de $r_0 = 0$ et en posant

$$r_{n+1}(t) = r_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - r_n(t)^2\big).$$

Notons que r_n est définit par une formule de récurrence de la forme $r_{n+1} = f_t(r_n)$ où f a été choisie pour que

(a) $f_t(x)$ soit polynomiale en x et en t;
(b) $x \leq f_t(x) \leq \sqrt{t}$ pour $0 \leq x \leq \sqrt{t}$;
(c) le seul point fixe de f_t soit $\sqrt{t}$.

On peut vérifier que les seuls polynômes de degré ≤ 2 qui vérifient ces conditions sont de la forme $f_t(x) = x + b(t - x^2)$ avec $0 < b \leq 1/2$.

La propriété (a) implique que si r_n est un polynôme en t alors r_{n+1} aussi. La propriété (b) implique que, si $r_0 = 0$ alors (r_n) est croissante et majorée, donc convergente. Enfin (c) implique que $r_n \to \sqrt{t}$.

Il reste donc à voir que la convergence de (r_n) vers $\sqrt{t}$ est uniforme. Cela résulte du théorème de Dini:

THÉORÈME A.20 (Dini).
Soit $\mathcal{K}$ un espace compact. Si (u_n) est une suite croissante *de fonctions continues $u_n : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonctions* continue *$u : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, alors cette suite converge* uniformément *vers u.*

Reportons provisoirement la démonstration du théorème de Dini et montrons qu'on peut très bien s'en passer: posons $\varepsilon_n(t)=\sqrt{t}-r_n(t)$. Alors

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{n+1}| &= \left|\sqrt{t}-r_{n+1}(t)\right| = \left|\sqrt{t}-r_n(t)-\frac{1}{2}\big(t-r_n(t)^2\big)\right| \\ &= |\varepsilon_n(t)|\left|1-\frac{1}{2}\big(\sqrt{t}+r_n(t)\big)\right| \\ &\leq |\varepsilon_n(t)|\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\varepsilon_n(t)|\leq|\varepsilon_0(t|)\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n=\sqrt{t}\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n\leq\sup_{1/2\leq s\leq 1}2(1-s)s^n$$

en posant $s=1-\sqrt{t}/2$. Mais $(1-s)s^n$ est maximal en $n/(n+1)$, donc $|\varepsilon_n|\leq 2\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\leq \frac{2}{n+1}$.

Deuxième étape. *Si $f\in\mathcal{A}$ alors $|f|\in\overline{\mathcal{A}}$.*

On peut supposer que $f\neq 0$ et poser $a=\|f\|_\infty$.On a alors $f^2(x)/a^2\in[0,1]$ pour tout $x\in\mathcal{K}$. Comme r_n est un polynôme et que $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a $r_n(f^2/a^2)\in\mathcal{A}$ si $f\in\mathcal{A}$. An passant à la limite uniforme – c'est-à-dire dans $\mathcal{C}(\mathcal{K},\mathbb{R})$, on obtient

$$|f|=a\lim_{n\to+\infty}r_n(f^2/a^2)\in\overline{\mathcal{A}}.$$

Troisième étape. *Si $f,g\in\overline{\mathcal{A}}$ alors $\max\{f,g\}\in\overline{\mathcal{A}}$ et $\min\{f,g\}\in\overline{\mathcal{A}}$.*

Supposons d'abord que $f,g\in\mathcal{A}$. Il suffit alors de remarquer que

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$

et que

$$\min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

pour avoir le résultat.

Dans le cas général, remarquons que $\overline{\mathcal{A}}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathcal{A}$.Tout résultat vrai pour $\mathcal{A}$ l'est donc aussi pour $\overline{\mathcal{A}}$.

Enfin, notons qu'une récurrence immédite implique que si $f_1,\ldots,f_n\in\overline{\mathcal{A}}$ alors $\max\{f_1,\ldots,f_n\}\in\overline{\mathcal{A}}$ et $\max\{f_1,\ldots,f_n\}\in\overline{\mathcal{A}}$.

Quatrième étape. *Soient $x,y\in\mathcal{K}$ avec $x\neq y$. Alors, pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, il existe $h\in A$ tel que $h(x)=\alpha$ et $h(y)=\beta$.*

On a supposé que $\mathcal{A}$ sépare les points il existe donc $g\in\mathcal{A}$ tel que $g(x)\neq g(y)$. De plus, on a supposé que la fonction constante $1\in\mathcal{A}$. On pose alors

$$h=\alpha 1+\frac{\beta-\alpha}{g(y)-g(x)}(g-g(x)1)$$

qui est dans $\mathcal{A}$ et vérifie les propriétés voulues.

Cinquième étape. *Soit $f\in\mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$ et $x\in\mathcal{K}$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $g\in\overline{\mathcal{A}}$ telle que $g(x)=f(x)$ et, pour tout $y\in\mathcal{K}$,*

$$g(y)\leq f(y)-\varepsilon.$$

C'est ici que la compacité de $\mathcal{K}$ va intervenir de façon cruciale.

Pour tout $z\in\mathcal{K}$, $z\neq x$ en prenant $\alpha=f(x)$ et $\beta=f(z)$ dans l'étape 4, nous obtenons une fonction $h_z\in\mathcal{A}$ telle que $h_z(x)=f(x)$ et $h_z(z)=f(z)$. Définissons $h_x=f(x)1$ (fonction constante).

Comme f et h_z sont toutes deux continues et égales en z, il existe un voisinage ouvert V_z de z tel que, pour tout $y \in V_z$,

$$h_z(y) \le f(y) + \varepsilon.$$

Mais tout $z \in V_z$, les V_z forment donc un recouvrement ouvert de $\mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est compact, il existe un nombre fini $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tels que

$$\mathcal{K} = V(z_1) \cup V(z_2) \cup \cdots \cup V(z_n).$$

Soit alors $g = \inf\{h_{z_1}, h_{z_2}, \ldots, h_{z_n}\}$. D'après l'étape 3, $g \in \mathcal{A}$. De plus, si $y \in \mathcal{K}$, il existe k tel que $y \in V_{z_k}$ donc $g(y) \le h_{z_k}(y) \le f(y) + \varepsilon$.

Dernière étape. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$. Ainsi $f \in \overline{\bar{A}}$ donc $\bar{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$ donc A aussi.*

Soit donc $f \in \mathcal{C}(\mathcal{K};\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'étape précédente, pour chaque $x \in \mathcal{K}$, il existe une fonction g_x telle que $g_x(x) = f(x)$ et, pour tout $y \in \mathcal{K}$, $g_x(y) \le f(y) + \varepsilon$.

Comme f et g sont continues et égales en x, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de x tel que, pour tout $y \in U(x)$, $g(y) \ge f(y) - \varepsilon$. Comme $\mathcal{K}$ est compact, il existe donc un nombre fini $U(x_1), \ldots, U(x_m)$ qui recouvrent encore $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(z_m).$$

Soit alors $\varphi = \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_p}\}$. D'après l'étape 3, $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$. De plus, si $y \in \mathcal{K}$, alors il existe k tel que $y \in U(x_k)$ donc $\varphi(y) \ge g_{x_k}(y) \ge f(y) - \varepsilon$. Par ailleurs, il existe l tel que $\varphi(y) = g_l(y) \le f(y) + \varepsilon$. On a donc bien

$$f(y) - \varepsilon \le \varphi(y) \le f(y) + \varepsilon$$

pour tout $y \in \mathcal{K}$. $\square$

Démonstration du critère de Dini. Il s'agît à nouveau d'un raisonnement de compacité. Soit $\varepsilon > 0$, pour chaque $x \in \mathcal{K}$, il existe un entier $N(x)$ tel que, si $n \ge N(x)$, $0 \le u(x) - u_n(x) \le \varepsilon/3$.

Comme u et $u_{N(x)}$ sont continues, il existe un voisnage ouvert $V(x)$ de x tel que, si $y \in V(x)$, alors $|u(x) - u(y)| \le \varepsilon/3$ et $|u_{N(x)}(y) - u_{N(x)}(x)| \le \varepsilon/3$.

Enfin, comme $\mathcal{K}$ est compact, et est recouvert par les $V(x)$, on peut extraire un recouvrement fini de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_m$ tels que $K = V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_m)$. soit enfin $N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_m)\}$.

Mais alors, si $x \in \mathcal{K}$, il existe x_k tel que $x \in V(x_k)$ donc si $n \ge N$ –donc $n \ge N(x_k)$ et $u_n(x) \ge u_{N(x_k)}(x)$–

$$\begin{aligned} 0 \le u(x) - u_n(x) &\le u(x) - u_{N(x_k)}(x) \\ &\le u(x) - u(x_k) + u(x_k) - u_{N(x_k)}(x_k) + u_{N(x_k)}(x) - u_{N(x_k)}(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

avec les calculs précédents. $\square$

2.3. Bases orthonormées.

Définition 19.

— On dit qu'une suite $(e_j)_{j\in I}$ est *orthonormée* si pour tout $j, k \in I$,

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k} := \begin{cases} 0 & \text{si } j \ne k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

— On dit qu'une famille de vecteurs $(e_j)_{j\in I}$ est *totale* si $Vect\{e_j,\ j \in I\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

— On dit qu'une suite $(e_j)_{j\in I}$ est une *base orthonormée* si elle est orthonormée et totale.

Exemple A.21.

– La base canonique $(e_j)_{j\ge 0}$ –où $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ le 1 étant à la j-ième coordonnée— est orthonormée dans ℓ^2.

– la suite de fonctions $(e_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_j(t) = e^{2i\pi jt}$ est orthonormée dans $L^2(0,1)$. Nous verrons que c'est ne fait une base orthonormée.

Lemme A.22.
Toute famille orthonormée $(e_j)_{j\in J}$ est libre.

Démonstration. Écrivons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_{j_k}$. On veut montrer que si $x = 0$ alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Mais

$$\langle x, e_m\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_{j_k}, e_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_{j_k}, e_m\rangle = \begin{cases} x_m & \text{si } m \in \{j_1, \dots, j_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, si $x = 0$, alors pour tout m, $x_m = \langle x, e_m\rangle = 0$, le système est donc bien libre. □

Notons qu'au cours de la démonstration de ce lemme, nous avons établit la première partie de la proposition suivante:

Proposition A.23.
Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormée finie et soit $F = \mathrm{Vect}\,\{e_j,\ j \in J\}$. Alors tout $x \in F$ s'écrit

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

De plus,

$$\|x\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Plus généralement, si $x \in \mathcal{H}$, alors

$$P_F x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j$$

et de plus, on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour la deuxiè partie de la proposition, il suffit alors de calculer

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{k\in J} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{k\in J} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j\in J}\sum_{k\in J} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} \delta_{j,k} \\ &= \sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2. \end{aligned}$$

Pour la dernière partie, on utilise la première partie pour écrire $P_F x = \sum_{j\in J} \langle P_F x, e_j\rangle e_j$. Mais

$$\langle P_F x, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \langle P_F x - x, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$$

car $P_F x - x \in F^\perp$. L'inégalité de Bessel se déduit de $\|x\|^2 \geq \|P_F x\|^2$ et du calcul de $\|P_F x\|$ fait plus haut. □

Notons aussi que la définition d'une base orthonormée est différente de celle d'une base algébrique (sauf en dimension finie). Les deux sont libres mais, dans une base algébrique $(e_j)_{j\in I}$, tout élément $x \in \mathcal{H}$ s'écrit comme une combinaison linéaire *finie* des e_j alors que dans une base orthonormée, tout élément $x \in \mathcal{H}$ s'écrit comme une *limite* de combinaisons linéaires finies des e_j. Une base algébrique contient donc beaucoup plus d'éléments (une quantité non dénombrable en dimension infinie) qu'une base orthonormée (qui est dénombrable pour les espaces de Hilbert *séparables*, voir plus loin).

En fait, pour une base orthonormée, tout élément x de $\mathcal{H}$ s'écrit comme une série qui généralise la proposition précédente:

THÉORÈME A.24 (Parseval).
Supposons que $\mathcal{H}$ ait une base orthonormée dénombrable $(e_n)_{n\in I}$. Alors tout élément $x \in \mathcal{H}$ s'écrit

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

De plus, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a les identités de Parseval

(i) $\|x\|^2 = \sum_{n\in I} |\langle x, e_j\rangle|^2$;

(ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in I} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle}$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, notons $I = \mathbb{N}$.

Notons F_n le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,\{e_0, \ldots, e_n\}$. Soit $x \in \mathcal{H}$ et $x_n = P_{F_n} x = \sum_{j=0}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$.

Comme la famille $(e_j)_{j\geq 0}$ est totale, $\|x - x_n\| = \mathrm{dist}\,(x, F_n) \to \mathrm{dist}\,(x, \bigcup_{n\geq 0} F_n) = 0$ quand $n \to +\infty$. En d'autres termes, x est la limite de $\sum_{j=0}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ quand $n \to +\infty$ c'est-à-dire $x = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$.

Le restant s'obtient comme dans le cas des suites orthonormées finies dans la proposition A.23 en utilisant la continuité du produit scalaire pour passer des sommes finies aux séries. □

COROLLAIRE A.25.
Supposons que $\mathcal{H}$ ait une base orthonormée dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$. Alors l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \ell^2 & \to & \mathcal{H} \\ (\xi_n)_{n\geq 0} & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n \end{array}$$

est une isomorphisme *qui préserve le produit scalaire (donc aussi la norme, en particulier S est continue ainsi que son inverse).*

On peut évidemment remplacer les indices $n \geq 0$ par n'importe quel ensemble d'indices dénombrables.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que S est bien défini, c'est-à-dire que, si $(\xi_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n$ converge. Mais pour cela, il suffit de voir qu'ell est de Cauchy, ce qui résulte de la proposition A.23:

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} \xi_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=p}^{q} |\xi_n|^2.$$

De plus, on voit immédiatement que S est linéaire.

Ensuite, le calcul fait dans la démonstration du lemme A.22 montre que si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n$ alors $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$, donc S est injective.

En utilisant ce lien entre x et ξ_n, on remarque que nous avons déjà vu (avec le théorème de Parseval) que S est surjective et préserve le produit scalaire. □

Rappelons enfin qu'un espace de Banach est dit *séparable* s'il possède une famille dénombrable totale. Nous allons maintenant voir comment transformer une telle famille en une base orthonormée.

THÉORÈME A.26 (Orthonormalisation de Gramm-Schmidt).
Soit $(a_j)_{j\geq 0}$ une famille libre dénombrable. Il existe alors une famille orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$ telle que,

$$\text{(35)} \qquad \text{pour tout } k \geq 0, \qquad \mathrm{Vect}\,\{e_0, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\,\{a_0, \ldots, a_k\}.$$

Notons que (35) montre directement que si la famille de départ est totale, celle d'arrivée aussi et est donc une base orthonormée.

Avant de démontrer ce résultat, notons qu'on en déduit immédiatement avec le corollaire A.25 que:

Corollaire A.27.
Tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable possède une base hilbertienne dénombrable. En particulier, $\mathcal{H}$ est isomorphe à ℓ^2.

Construction de Gramm-Schmidt. Le principe est extrêmement simple, si $x \in \mathcal{H}$ et F est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ (par exemple de dimension finie), alors $x - P_F x$ est orthogonal à F.

On pose donc $e_0 = \dfrac{a_0}{\|a_0\|}$. On suppose alors $e_0, \ldots, e_k$ construits et on pose $F_k = \mathrm{Vect}\,\{e_0, \ldots, e_k\}$ et $\tilde{a}_{k+1} = a_{k+1} - P_{F_k} a_{k+1} \in F_k^{\perp}$. Comme $a_{k+1} \notin \mathrm{Vect}\,\{a_0, \ldots, a_k\} = \mathrm{Vect}\,\{e_0, \ldots, e_k\}$, on a $\tilde{a}_{k+1} \neq 0$ et est orthogonal à $e_0, \ldots, e_k$. Il suffit alors de poser $a_{k+1} = \dfrac{\tilde{a}_{k+1}}{\|\tilde{a}_{k+1}\|}$. □

APPENDICE B

Rappels d'intégration et espaces L^p

1. Quelques rappels sur l'intégration

Dans ce cours, tous les espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ seront supposés σ-finis, c'est-à-dire qu'il existe une famille d'ensembles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ telles que

(1) pour tout $n \geq 1$, $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$
(2) $\bigcup_{n\geq 1} \Omega_n = \Omega$
(3) $\mu(\Omega_n) < +\infty$.

Théorème B.1 (Fubini).
Soient $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis *et soit f une fonction mesurable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.*

Si $f \geq 0$, alors les trois intégrales suivantes sont égales (éventuellement toutes trois infinies)

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d\mu_1 \otimes \mu_2(x,y), \qquad \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x),$$

et

$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).$$

En particulier, les fonctions $x \to \int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ et $y \to \int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_1(x)$ sont mesurables.

Si f est à valeurs réelles ou complexes, la même chose est vraie si on suppose de plus que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|d\mu_1 \otimes \mu_2(x,y) < +\infty.$$

Dans ce cas, les trois intégrales sont évidemment finies.

Théorème B.2 (Convergence Monotone – Beppo-Levi).
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω telles que

(i) *pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $f_n(t)$ est croissante;*
(ii) *$f_n \geq 0$ μ-presque partout.*

Alors $\lim f_n$ existe μ-presque partout (on autorise $\lim f_n(t) = +\infty$) et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(t)\,d\mu(t) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,d\mu(t)$$

(en particulier, les deux membres sont finis ou infinis simultanément).

Théorème B.3 (Convergence dominée – Lebesgue).
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions mesurables sur Ω telles que

(i) *pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $f_n(t) \to f(t)$ quand $n \to +\infty$*
(ii) *il existe une fonction intégrable φ sur Ω telle que, pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$, et donc $|f(t)| \leq \varphi(t)$.*

Alors $\int_\Omega f_n(t)\,d\mu(t) \to \int_\Omega f(t)\,d\mu(t)$ quand $n \to +\infty$.

Rappelons qu'une fonction est intégrable φ au sens de Lebesgue si elle est mesurable et si $\displaystyle\int_\Omega |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$. On ne suppose plus ici que la suite de fonctions est *positive.* Cette hypothèse est remplacée par l'hypothèse de domination de la fonction par une fonction φ intégrable.

On déduit immédiatement de ce théorème les résultats suivants sur la continuité et la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Corollaire B.4 (Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre – Lebesgue). *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et (X, d) un espace métrique. Soit $F : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ une fonction telle que :*

(i) *pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto F(t, x)$ est continue;*
(ii) *il existe une fonction intégrable φ sur Ω telle que, pour tout $x \in X$ et pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $|F(t, x)| \leq |\varphi(t)|$.*

Alors $f : X \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_\Omega F(t, x)\, d\mu(t)$ est continue sur X.

Démonstration. Soient x et $x_0 \in X$. Alors

$$f(x) - f(x_0) = \int_\Omega F(t, x)\,\mathrm{d}\mu(t) - \int_\Omega F(t, x_0)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \big(F(t, x) - F(t, x_0)\big)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Mais, pour μ presque tout t, $|F(t, x) - F(t, x_0)| \leq 2\varphi(t) \in L^1$ et, par continuité de F en x_0, $F(t, x) - F(t, x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$. D'après le théorème de convergence dominée, $f(x) \to f(x_0)$ quand $x \to x_0$, donc f est continue en x_0. $\square$

Corollaire B.5 (Dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre – Lebesgue). *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ une fonction telle que :*

(i) *pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto F(t, x)$ est dérivable;*
(ii) *il existe une fonction intégrable φ sur Ω telle que, pour tout $x \in X$ et pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $|F(t, x)| \leq |\varphi(t)|$;*
(iii) *il existe une fonction intégrable ψ sur Ω telle que, pour tout $x \in X$ et pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x)\right| \leq |\psi(t)|$;*

Alors $f : X \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_\Omega F(t, x)\, d\mu(t)$ est dérivable sur X.

2. Les espaces L^p comme espace de Banach

Soit $1 \leq p < +\infty$ un nombre réel et $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie. Typiquement, on prendra :

— Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et μ la mesure de Lebesgue;
— $\Omega = \mathbb{Z}^d$ ou $\Omega = \mathbb{N}^d$ et μ la mesure de comptage *i.e.* pour tout $A \subset \Omega$, $\mu(A) = |A|$ le cardinal de A.

On définit alors

$$L^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C},\ f\ \mu-\text{mesurable},\ \int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}.$$

On munit cet espace de la "norme" définie par

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci définit une norme au sens où:

(i) Pour tout $f \in L^p(\Omega, \mu)$, on a $\|f\|_p \geq 0$ et $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.
(ii) Pour tout $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\lambda f \in L^p(\Omega, \mu)$ et $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$
(iii) Pour tous $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$, on a $f + g \in L^p(\Omega, \mu)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Démonstration. Notons que (ii) est triviale. Pour (i), on utilise le fait qu'une fonction positive d'intégrale nulle est nulle presque partout. Enfin (iii) sera démontrée plus loin. Notons toutefois que $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = 2^p\left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)$ par convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ sur $[0,+\infty)$. Donc si $f,g \in L^p(\Omega,\mu)$ alors $f+g \in L^p(\Omega,\mu)$. □

Pour $p=+\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega,\mu)=\{f\,:\Omega\to\mathbb{C},\ f\ \mu-\text{mesurable, il existe } K>0 \text{ telle que } |f(x)|\leq K,\ \mu-p.p.\}.$$

On équipe cet espace de la "norme" (au même sesn que ci-dessus)

$$\|f\|_\infty=\inf\{K\ \ |f(x)|\leq K\ \mu-p.p.\}.$$

Remarque B.6.
— On notera simplement $L^p(\Omega)=L^p(\mu)=L^p:=L^p(\Omega,\mu)$ selon que Ω,μ ou les deux sont implicites. Si μ est la mesure de comptage, on note en général $\ell^p(\Omega)=L^p(\Omega,\mu)$.
— Notons que $\|f\|_\infty$ n'est pas le suprémum de f mais le *suprémum essentiel*. Les deux peuvent différer. Par exemple, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ alors $\sup|f|=1$ alors que $\|f\|_\infty=0$ ($\mathbb{Q}$ est de mesure nulle donc $f(x)=0$ presque partout pour la mesure de Lebesgue).

La notation L^∞ est justifiée par l'exercice suivant:

Exercice B.1.
(1) Montrer que si $f\in L^q\cap L^\infty$ alors, pour tout $p>q$, $f\in L^p$.
(2) Montrer que, de plus, $\|f\|_p\to\|f\|_\infty$ si $p\to+\infty$.

Les "normes" que nous avons définies ne distinguent pas *toutes* les fonctions mesurables dans le sens que $\|f-g\|_p=0$ n'implique que $f=g$ *μ-presque* partout et non partout.

Pour contourner cette nuisance, on redéfinit $L^p(\Omega,\mu)$ de sorte que ses éléments soient des "classes d'équivalence" de fonctions. Plus précisément, si $f\in L^p(\Omega,\mu)$, on peut définir $\tilde f$ comme étant l'ensemble des fonctions h telles que $f-h=0$ μ-presque partout et on notera $h\sim f$. En particulier, $h\in L^p(\Omega,\mu)$ et $\|h\|_p=\|f\|_p$. De plus, si $f\sim h$ et $h\sim g$ alors $f\sim g$ (une réunion finie – et même dénombrable– d'ensembles de mesure nulle et encore de mesure nulle), donc $\tilde f=\tilde h$. Enfin, on définit

$$\|\tilde f\|_p=\|f\|_p$$

et on vient de voir que ceci ne dépend pas du choix de f dans $\tilde f$.

Enfin, si $\tilde f$ et $\tilde g$ sont les classes d'équivalence de f et $g\in L^p(\Omega,\mu)$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, on définit $\lambda\tilde f+\mu\tilde g=(\lambda f+\mu g)\tilde{}$ et on vérifie aisément que cela ne dépend pas du choix de f et g dans $\tilde f$ et $\tilde g$.

On a donc deux espaces vectoriels. Le premier est constitué de fonctions et le second de classes de fonctions. Dans le premier, on n'a pas une vraie norme ($\|f\|=0$ n'implique pas $f=0$) alors que dans le second si!

On notera les deux espaces $L^p(\Omega,\mu)$ et on utilisera *l'abus de language* suivant: *soit f une fonction dans $L^p(\Omega,\mu)$* pour siginifier soit $\tilde f\in L^p(\Omega,\mu)$ et soit $f\in\tilde f$. Cela est très commode, mais il faut faire attention que $f=g$ signifie alors $f=g$ μ-presque partout et que, si on prend $x_0\in\Omega$, alors $f(x_0)$ n'a pas de sens si $\mu(\{x_0\})=0$.

Évidemment, si on sait que dans $\tilde f$ il existe une (nécessairement unique) fonction continue, le $f\in\tilde f$ qu'on prend est cette fonction continue et alors $f(x_0)$ a son sens usuel.

De même, si μ est la fonction de comptage, *i.e.* dans ℓ^p, ce problème ne se pose pas car $\mu(\{x_0\})=1$.

Théorème B.7 (Inégalité de Hölder).
Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré. Soient $1\leq p,p'\leq+\infty$ avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ (avec la convention que si

$p = 1$ alors $p' = +\infty$ et vice versa). Soit $f \in L^p(\Omega,\mu)$ et $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$, alors $fg \in L^1(\Omega,\mu)$ et

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \le \int_\Omega |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

De plus, la première inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)g(x) = e^{i\theta}|f(x)g(x)|$. Si $f \neq 0$ alors la seconde inégalité est une égalité si et seulement s'il existe une constante réelle $\lambda \geq 0$ telle que

(i) *pour $1 < p < +\infty$, $|g(x)| = \lambda |f(x)|^{p-1}$ μ-presque partout;*
(ii) *pour $p = 1$, $|g(x)| \le \lambda$ μ-presque partout et $|g(x)| = \lambda$ pour μ-presque tout x tel que $f(x) \neq 0$;*
(iii) *pour $p = +\infty$, $|f(x)| \le \lambda$ μ-presque partout et $|f(x)| = \lambda$ pour μ-presque tout x tel que $g(x) \neq 0$.*

Remarque B.8.
— Si $p = 2$ alors $q = 2$ et l'inégalité de Hölder est simplement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
— La première inégalité et son cas d'égalité sont triviales.

Exercice B.2.
Montrer que, si les $1 \le p_i \le +\infty$ sont tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$, alors

$$\left|\int_\Omega \prod_{i=1}^m f_i(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}.$$

Exercice B.3.
On considère $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue dx. Pour une fonction f sur $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on défini une nouvelle fonction f_λ sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

(1) Calculer $\|f_\lambda\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$.
(2) On suppose que, pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tous $g \in L^q(\mathbb{R})$, $fg \in L^r(\mathbb{R})$ et que

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \tag{36}$$

En remplaçant f, g par f_λ, g_λ dans (36) et en faisant tendre λ vers 0 et vers $+\infty$, quelle relation obtient-t-on sur p, q, r.
(3) On suppose que p, q, r vérifient la relation obtenue à la question précédente. Démontrer (36) à l'aide de Hölder.

Démonstration. Si $f = 0$ ou si $g = 0$, alors l'inégalité de Hölder est triviale. De même, les cas $p = 1$ ou $p = +\infty$, l'inégalité est triviale (ainsi que son cas d'égalité). Supposons donc qu'on ne soit dans aucun de ces cas. On peut alors poser

$$u = \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}\right)^{p'}.$$

Comme log est concave, on voit facilement que, pour $0 < \alpha < 1$, $u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1-\alpha)v$. En particulier, si on prend $\alpha = 1/p$, on trouve

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_{p'}} \le \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

En intégrant par rapport à μ, on obtient le résultat.

Pour le cas d'égalité, on utilise le fait que log est strictement concave, ce qui entraîne que, pour $0 < \alpha < 1$, $u^\alpha v^{1-\alpha} < \alpha u + (1-\alpha)v$ à moins que $u = v$. Le résultat s'en déduit. □

Théorème B.9 (Inégalité de Jensen).
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré avec* μ *une mesure* finie. *Soit* $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe de classe* $\mathcal{C}^1$. *Pour* $f \in L^1(\Omega, \mu)$*, on note*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$$

sa moyenne *sur* Ω. *Alors*

(i) $[J \circ f]_-$*, la partie négative de* $J \circ f$ *est dans* $L^1(\Omega, \mu)$*, donc* $\displaystyle\int_\Omega J \circ f(x)\, d\mu(x)$ *est bien définie (éventuellement* $+\infty$*);*

(ii) $J(\langle f \rangle) \leq \langle J \circ f \rangle$*, c'est-à-dire*

$$J\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega J\big(f(x)\big)\, d\mu(x).$$

Démonstration. Comme J est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$, pour tous $a, t \in \mathbb{R}$,

$$J(t) \geq J(a) + J'(a)(t-a).$$

On applique ceci à $t = f(x)$ et $a = \langle f \rangle$, ce qui donne

$$J\big(f(x)\big)_+ - J\big(f(x)\big)_- = J\big(f(x)\big) \geq J(\langle f \rangle) + J'(\langle f \rangle) f(x) - J'(\langle f \rangle)\langle f \rangle. \tag{37}$$

En particulier, soit x tel que $J\big(f(x)\big)_- \neq 0$ alors $J\big(f(x)\big)_+ = 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 \leq J\big(f(x)\big)_- &\leq -J'(\langle f \rangle) f(x) + J'(\langle f \rangle)\langle f \rangle - J(\langle f \rangle) \\ &\leq |J'(\langle f \rangle)||f(x)| + |J'(\langle f \rangle)\langle f \rangle - J(\langle f \rangle)|. \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1$, $|J'(\langle f \rangle)||f(x)| \in L^1$ et comme μ est une mesure *finie*, les constantes sont intégrables, donc $|J'(\langle f \rangle)\langle f \rangle - J(\langle f \rangle)| \in L^1$. Ceci démontre le premier point.

Enfin, en intégrant (37), on trouve

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega J\big(f(x)\big)\, \mathrm{d}\mu(x) \geq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega J(\langle f \rangle)\, \mathrm{d}\mu(x) + \frac{J'(\langle f \rangle)}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x) - \langle f \rangle\, \mathrm{d}\mu(x).$$

On vérifie aisément (exercice) que

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x) - \langle f \rangle\, \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

L'inégalité de Jensen en découle. □

L'hypothèse sur J peut être adoucie. N'importe quelle fonction convexe convient, car celle-ci vérifie une inégalité de la forme $J(t) \geq J(a) + c(t-a)$, mais $c = J'(a)$ uniquement si J est dérivable en a.

Nous pouvons maintenant en déduire une seconde démonstration de Hölder:

Seconde démonstration de Hölder. Quitte à remplacer f et g par $|f|$, $|g|$, on peut supposer que $f, g \geq 0$. À nouveau, les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont triviaux, on suppose donc que $1 < p < +\infty$.

Soit $\Omega' = \{x \in \Omega \,:\, g(x) > 0\}$. Alors

$$\int_\Omega f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{\Omega \setminus \Omega'} f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \geq \int_{\Omega'} f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

alors que

$$\int_\Omega f(x)g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} f(x)g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \quad \text{et} \quad \int_\Omega g(x)^{p'}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} g(x)^{p'}\, \mathrm{d}\mu(x).$$

L'inégalité de Hölder pour une intégration sur Ω résulte donc de l'inégalité de Hölder pour l'intégration sur Ω'. On peut donc supposer $\Omega' = \Omega$, c'est-à-dire que g ne s'annule pas.

Dans ce cas, on peut définir la mesure $\mathrm{d}\nu(x) = g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)$ et $F(x) = f(x)g(x)^{p'/p}$. Notons que

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

donc ν est une mesure finie. De plus

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu(\Omega)}\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}\nu(x) &= \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}\int_\Omega f(x)g(x)^{-p'/p}g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\nu(x)\\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}\end{aligned}$$

puisque $-\dfrac{p'}{p} + p' = p'\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) = 1$. Enfin, l'inégalité de Jensen avec $J(t) = |t|^p$ donne

$$\left(\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}\right)^p \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)^p g(x)^{-p'} g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}$$

qui donne le résultat. □

Exercice B.4.

(1) Montrer que si J est strictement convexe, alors on a égalité dans Jensen si et seulement si f est constante.
(2) En déduire le cas d'égalité dans Hölder.

Exercice B.5. (Inclusion des espaces L^p)

(1) Soient $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. Montrer que si $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$ alors,
 (a) pour tout $p_1 < p < p_2$, $f \in L^p$,
 (b) l'application $p \mapsto \log \int |f|^p$ est convexe sur $[p_1, p_2]$.
(2) Pour chaque $p \in [1, \infty]$, trouver $f \in L^p(\mathbb{R})$ tel que $f \notin L^q(\mathbb{R})$ pour $q \in [1, \infty]$, $q \neq p$.
(3) À quelle condition sur p, q a-t-on $\ell^p \subset \ell^q$?
(4) Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que, pour $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $m_f(t) \leq \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.

Théorème B.10 (Inégalité de Minkowski).
Soient $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et $(\Gamma, \tilde{\mathcal{B}}, \gamma)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors, pour toute fonction f $\gamma \otimes \mu$-mesurable,

$$\left(\int_\Gamma \left(\int_\Omega |f(x,y)|\,d\mu(y)\right)^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_\Omega \left(\int_\Gamma |f(x,y)|^p\,d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(y). \tag{38}$$

En particulier, si le membre de droite est fini, celui de gauche aussi. De plus, on a égalité si et seulement si f est de la forme $f(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$.

En d'autres termes

$$\left\|x \to \int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right\|_p \leq \int_\Omega \|x \to f(x,y)\|_p\,\mathrm{d}\mu(y),$$

ce qui généralise $\left|\displaystyle\int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right| \leq \displaystyle\int_\Omega |f(t)|\,\mathrm{d}\mu(t)$ (qui est le cas Γ un singleton muni de la mesure de comptage).

Démonstration. Il suffit évidemment de supposer que $f \geq 0$ et que $f > 0$ sur un ensemble de mesure positive.

Notons aussi que le théorème de Fubini implique que $y \to \int f(x,y)^p \,\mathrm{d}\gamma(x)$ et $H : x \to \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ sont mesurables.

On suppose que le membre de droite est fini, sans quoi l'inégalité est triviale.

Soit $f_n = f\chi_{E_n}$ avec $E_n = F_n \cap \{(x,y) \in \Gamma \times \Omega : |f(x,y)| \leq n\}$ et F_n une suite croissante de parties de $\Gamma \times \Omega$ de mesure finie telle que $\bigcup F_n = \Gamma \times \Omega$. Pour f_n, le membre de gauche de (38),

$$\left(\int_\Gamma \left(\int_\Omega |f_n(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^p \mathrm{d}\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

est fini. Par ailleurs, d'après le théorème de convergence monotone, ceci converge vers

$$\left(\int_\Gamma \left(\int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^p \mathrm{d}\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On peut donc supposer que cette quantité est également finie.

D'après Fubini "positif",

$$\begin{aligned}\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x) &= \int_\Gamma \left(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x)\\ &= \int_\Omega \int_\Gamma f(x,y)H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

Mais, avec Hölder ($1/p + 1/p' = 1$),

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(x,y)H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x) &\leq \left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p} \left(\int_\Gamma H(x)^{(p-1)p'}\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p'}\\ &= \left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p} \left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x) \leq \int_\Omega \left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p} \mathrm{d}\mu(y) \left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}.$$

Comme on a supposé que $\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x) \neq 0, +\infty$, on peut simplifier les deux membres par $\left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}$ et on obtient le résultat. □

Corollaire B.11 (Inégalité triangulaire pour la norme L^p).
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie. Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. Alors

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

et on a égalité si et seulement si $g = \lambda f$ avec $\lambda \geq 0$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\Gamma = \{1, 2\}$ avec la mesure de comptage et de définir $F(1,y) = f(y)$, $F(2,y) = g(y)$ dans l'inégalité de Minkowski. □

Seconde démonstration. On peut aussi utiliser l'argument plus simple suivant:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\quad + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ donc $p'=\frac{p}{p-1}$) donne alors

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \le \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'autre terme se traite de même. Il en résulte que

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) \le \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)$$

et on conclue en simplifiant par $\|f+g\|_p^p$, à condition de vérifier au préalable que $\|f+g\|_p^p \neq 0$ (mais ce cas est trivial) et que $\|f+g\|_p^p < +\infty$ (ce qu'on a déjà fait). □

Montrons enfin que L^p est complet. Plus précisément :

THÉORÈME B.12 (L^p est complet).
Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré avec μ σ-finie. Soit $1\le p\le+\infty$. Alors $L^p(\Omega,\mu)$ est complet.

Plus précisément, si (f_k) est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega,\mu)$ (i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N>0$ tel que si $k,n\ge N$, alors $\|f_k-f_n\|_p<\varepsilon$), alors il existe $f\in L^p(\Omega,\mu)$ telle que $f_k\to f$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ –i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N>0$ tel que si $k\ge N$, alors $\|f_k-f\|_p<\varepsilon$.

De plus, il existe une sous-suite $(f_{k_j})_j$ et F dans $L^p(\Omega,\mu)$ tels que

(i) *pour tout $j\ge1$, $|f_{k_j}(x)|\le F(x)$ pour μ-presque tout $x\in\Omega$;*
(ii) *pour μ-presque tout $x\in\Omega$, $f_{k_j}(x)\to f(x)$ quand $j\to+\infty$.*

REMARQUE B.13.
C'est une propriété fondamentale des espaces L^p car elle permet de définir un objet comme limite d'une suite, puisqu'il suffit de savoir qu'une suite est de Cauchy pour en déduire qu'elle converge. Notez que pour montrer qu'une suite converge, il faut connaître sa limite potentielle.

DÉMONSTRATION. On se contente de $1\le p<+\infty$. Le cas $p=+\infty$ étant essentiellement la complétude de $\mathbb{C}$ et est laissée en exercice.

Tout d'abord, notons que la deuxième partie du théorème implique la première. Notons ensuite qu'on a aussi $|f(x)|\le F(x)$ μ-presque partout: ici on utilise qu'une réunion dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle. Alors, pour tous $x\in\Omega\setminus E$ avec $\mu(E)=0$, on a, pour tous $j\ge1$, $|f_{k_j}(x)|\le F(x)$ et $f_{k_j}(x)\to f(x)$ donc $|f(x)|\le F(x)$. En particulier, $f\in L^p$ et $|f_{k_j}(x)-f(x)|^p\le[2F(x)]^p\in L^1$ et $|f_{k_j}(x)-f(x)|^p\to0$ presque partout. Le théorème de convergence dominée implique donc que $\left\|f_{k_j}-f\right\|_p^p=\int_\Omega|f_{k_j}(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\to0$.

On utilise ensuite le fait standard que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors la suite elle-même est convergente: soit $\varepsilon>0$, il existe alors N tel que, si $k,l\ge N$, $\|f_k-f_l\|_p\le\varepsilon/2$. Il existe alors L tel que, si $j\ge L$, $k_j\ge N$ (la suite $k_j\to\infty$ par définition d'une suite extraite) et $\left\|f_{k_j}-f\right\|_p\le\varepsilon/2$. Mais alors $\|f_k-f\|_p\le\left\|f_k-f_{k_j}\right\|_p+\left\|f_{k_j}-f\right\|_p\le\varepsilon$.

Il nous reste donc à démontrer le deuxième point, ce qui suit un processus assez usuel.

Tout d'abord, il existe i_1 tel que, si $n\ge i_1$, $\|f_{i_1}-f_n\|_p\le1/2$ ($\varepsilon=1/2$ dans la définition d'une suite de Cauchy!). Il existe $i_2>i_1$ tel que, si $n\ge i_2$, $\|f_{i_2}-f_n\|_p\le1/2^2$... et plus généralement, il existe $i_k>i_{k-1}$ tel que, si $n\ge i_k$, $\|f_{i_k}-f_n\|_p\le1/2^k$.

Considérons alors la suite *croissante positive* définie par

$$F_l(x)=|f_{i_1}(x)|+\sum_{k=1}^{l}|f_{i_{k+1}}(x)-f_{i_k}(x)|.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|F_l\|_p\le\|f_{i_1}\|_p+\sum_{k=1}^{l}\left\|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}\right\|_p\le\|f_{i_1}\|_p+\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}=1+\|f_{i_1}\|_p<+\infty.$$

Le théorème de convergence monotone implique alors que F_l converge presque partout vers une fonction $F \in L^p$. En particulier, $F(x)$ est fini pour μ-presque tout $x \in \Omega$. Pour un tel x, la série

$$f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{l} \big(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x)\big)$$

est absolument convergente, donc convergente. Mais un calcul simple de série téléscopique montre que

$$f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{l} \big(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x)\big) = f_{i_{l+1}}(x).$$

Ainsi $f_{i_{l+1}}$ est convergente et, avec l'inégalité triangulaire, $|f_{i_{l+1}}| \leq F_l \leq F$ ce qui termine la démonstration. $\square$

Soit maintenant $1 \leq p \leq +\infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et soit $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$. Alors, d'après l'inégalité de Hölder, l'application

$$\Phi_g : \begin{array}{ccc} L^p(\Omega,\mu) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega, \mu)$, de norme $\|g\|_{p'}$. Le théorème suivant, que nous admettrons, montre que pour $1 \leq p < +\infty$, la réciproque est vraie:

Théorème B.14 (Dualité des espaces L^p).
Soit $1 \leq p < +\infty$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega, \mu)$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ telle que, pour tout $f \in L^p(\Omega, \mu)$,

$$\Phi(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\, d\mu(x).$$

De plus, $\|g\|_{p'} = \|\Phi\|$.

En d'autres termes, le dual de L^p s'identifie isométriquement à $L^{p'}$.

Nous admettrons provisoirement le théorème suivant:

Théorème B.15 (Densité des fonctions régulières).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit p un réel, $1 \leq p < +\infty$. Alors $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega, \mathrm{d}x)$.

On peut toutefois démontrer un résultat un peu plus faible:

Théorème B.16 ($L^p \cap L^q$ est dense dans L^p et L^q).
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Alors, quelque soit $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions bornées à support de mesure finie est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.

En particulier, quelque soient $1 \leq p, q < +\infty$, $L^p(\Omega, \mu) \cap L^q(\Omega, \mu)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$ et dans $L^q(\Omega, \mu)$.

Proof. La deuxième partie du théorème résulte immédiatement de la première car les fonctions bornées à support de mesure finie sont dans $L^p \cap L^q$ et sont denses dans L^p et dans L^q.

Montrons donc la première. Écrivons $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$ avec $\mu(\Omega_n) < +\infty$ et $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$.

Soit alors $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et soit $E_n = \Omega_n \cap \{x \in \Omega \ :\ f(x)| \leq n\}$. E_n est mesurable et comme $E_n \subset \Omega_n$, E_n est de mesure finie. Soit alors $f_n = f\chi_{E_n}$ qui est donc de support de mesure finie et, par définition de E_n, $|f_n| \leq n$.

De plus, pour presque tout $x \in \Omega$, $f_n(x) \to f(x)$: à x fixé, pour n assez grand, $x \in \Omega_n$ et, si $|f(x)| < +\infty$, $|f(x)| \leq n$ donc $x \in E_n$ et alors $f_n(x) = f(x)$.

Enfin, $|f_n| \leq |f|$ donc $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p|f|^p$ qui est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) \to 0.$$

On a donc bien trouvé une suite de fonctions bornées de support de mesure finie qui converge vers f dans L^p. $\square$

Exercice B.6. (Dualité de Young)
Soit m une fonction continue, positive, croissante sur $[0,+\infty)$ et soit m^{-1} sa fonction réciproque.

On pose $M(x) = \displaystyle\int_0^x m(t)dt$ et $M^*(y) = \displaystyle\int_0^y m^{-1}(s)ds$. On prolonge ensuite M et M^* à $\mathbb{R}$ par parité.

(1) Montrer l'inégalité de Young : $|xy| \leq M(x) + M^*(y)$ (*Indication :* géométrie).
(2) Calculer M et M^* lorsque $m(t) = t^{p-1}$.
(3) En déduire l'inégalité de Hölder (*Indication :* homogénité).

Exercice B.7. (Espace L^p faible)
Soit (X,μ) un espace mesuré. Pour f une fonction mesurable sur X, on note $m_f(t) = \mu\big(\{|f| > t\}\big)$ la fonction de répartition de f.

(1) Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in L^p(\mu)$. Montrer que $m_f(t) \leq \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.
(2) Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in L^p(\mu)$. Montrer que
$$\int |f|^p d\mu = p\int_0^{+\infty} t^{p-1} m_f(t)dt$$
(3) On appelle *espace L^p faible* l'ensemble L^p_f des fonctions mesurables f telles quil existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $m_f(t) \leq \dfrac{C}{t^p}$.
Montrer que $L^p \subset L^p_f$ mais que l'inclusion est stricte.

Exercice B.8.
Soient p et r tels que $1 \leq r < p \leq +\infty$ et soit g une fonction mesurable telle que, pour tout $f \in L^p$, $fg \in L^r$.

(1) Démontrer que l'application $\Gamma : f \mapsto fg$ est continue de L^p dans L^r.
Indication : Si ce n'est pas le cas, construire une suite (f_n) de fonctions positives de L^p avec $\|f_n\|_p \leq 1$ et $\|f_n g\|_r \geq n$. Considérer ensuite $h = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f_n$ et montrer que $h \in L^{p/r}$ mais que $h^{1/r} g \notin L^r$.
(2) En déduire que $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Indication : Considérer $g_n = \min(|g|, n)\mathbf{1}_{|x|\leq n}$ et montrer que
$$\left(\int g_n^q dm\right)^{1/r} \leq \|\Gamma\| \left(\int g_n^q dm\right)^{1/p}.$$

3. Convolution

3.1. Principe de prolongement des applications linéaires.

Nous utiliserons dans la section suivante une généralisation du principe suivante :
— X et Y sont des espaces de Banach et $\mathcal{D}$ est un sous-espace (vectoriel) dense dans X;
— T est une application linéaire sur $\mathcal{D} \to Y$;
— T est bornée sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il existe $C \geq 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Alors T se prolonge en une application linéaire qu'on note encore $T : X \to Y$ qui est continue avec, pour tout $x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Démonstration. Commençons par prolonger T:
Soit $x \in X$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans X, il existe une suite $(x_n)_n \subset \mathcal{D}$ qui converge vers x dans X. En particulier, cette suite est de Cauchy. Montrons que son image $(Tx_n)_n$ par T est également de

Cauchy. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que si $p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\|_X \leq \varepsilon$. Mais alors,

$$\|Tx_p - Tx_q\|_Y = \|T(x_p - x_q)\|_Y \leq C\|x_p - x_q\|_X \leq C\epsilon$$

où on a successivement utilisé le fait que T est linéaire sur $\mathcal{D}$ et que T est bornée sur X. Il en résulte que $(Tx_n)_n$ est de Cauchy dans Y. Cet espace est supposé complet, la suite $(Tx_n)_n$ est donc convergente. Notons a sa limite.

La difficulté qui survient maintenant est que la suite $(x_n)_n$ qui approche x n'est pas unique. Soit donc $(y_n)_n$ une autre suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x dans X. On vient de voir qu'alors Ty_n a une limite dans Y que nous noterons b. Mais, comme ci-dessus, $Tx_n \to a$, $Ty_n \to b$ et

$$\|Tx_n - Ty_n\|_Y = \|T(x_n - y_n)\|_Y \leq C\|x_n - y_n\|_X \to C\|x - y\| = 0.$$

Par ailleurs, $Tx_n \to a$ et $Ty_n \to b$. Par continuité de la norme, il en résulte que $\|Tx_n - Ty_n\|_Y \to \|a - b\|_Y$. Ainsi $\|a - b\|_Y = 0$ donc $a = b$ *i.e.* la limite ne dépend pas du choix de (x_n). Nous noterons donc Tx la limite commune à tous les $(Tx_n)_n$ avec $(x_n)_n \subset \mathcal{D}$ et $x_n \to x$.

Il faut maintenant montrer que l'application $X \to Y$, $x \mapsto Tx$ a les propriétés voulues.

Tout d'abord, si $x \in \mathcal{D}$, on définit la suite $x_n = x$ pour tout n qui converge vers x et $Tx_n = Tx$ (le T défini à l'origine). Le nouveau T prolonge donc bien l'ancien.

Ensuite, T est linéaire. En effet, prenons $x, y \in X$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ si les espaces sont réels). Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans $\mathcal{D}$ qui convergent respectivement vers x et y. Mais $\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda x + \mu y$ donc $T(\lambda x_n + \mu y_n) \to T(\lambda x + \mu y)$. D'autre part, par linéarité de T sur $\mathcal{D}$, $T(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda T x_n + \mu T y_n \to \lambda T x + \mu T y$, donc

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T x + \mu T y.$$

Enfin, si $x \in X$ et $(x_n)_n \subset \mathcal{D}$ converge vers x, alors $Tx_n \to Tx$ dans Y et $\|Tx_n\|_Y \leq C\|x_n\|_X$. Par continuité des normes, $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$. Ainsi T est continue. □

3.2. Inégalité de Young.

Proposition B.17.
Pour $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à support compact, on définit, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x - t)\, dt.$$

Alors $f * g$ est une fonction continue à support compact. De plus, si $\operatorname{supp} f \subset A$, $\operatorname{supp} g \subset B$ *alors* $\operatorname{supp} f * g \subset A + B := \{a + b \ : \ a \in A,\ b \in B\}$.

Enfin, $f * g = g * f$.

Démonstration. Comme f est à support compact il existe T tel que, si $|t| > T$, $f(t) = 0$ et de plus $f \in L^1([-T, T])$. Comme g est à support compact, g est bornée. Mais alors

$$f * g(x) = \int_{[-T,T]} f(t) g(x - t)\, \mathrm{d}t = \int_{[-T,T]} F(x, t)\, \mathrm{d}t$$

avec $F(x, t) = f(t) g(x - t)$. Mais $|F(x, t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)| \in L^1([-T, T])$ et pour (presque) tout t, $x \to F(x, t)$ est continue. D'après le théorème de Lebesgue, $f * g$ est donc continue.

Notons qu'on peut se passer du théorème de Lebesgue et utiliser les résultat de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre des intégrales de Riemann (voir cours de L2).

Montrons maintenant que $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Mais, pour que $f * g(x) \neq 0$, il faut qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) g(x - t) \neq 0$ donc $t \in A$ et $x - t \in B$. Mais alors, $x = t + x - t \in A + B$. On vérifiera (exercice) que si A et B sont compacts, alors $A + B$ aussi.

Le dernier point provient d'un changement de variable $s = x - t$ dans la définition de $f * g$. □

Rappelons qu'une fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. La première partie du théorème suivant a donc un sens.

THÉORÈME B.18 (Inégalité de Young).
Soient $1 \leq p,q,r \leq +\infty$ *trois réels tels que* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1+\dfrac{1}{r}$. *Alors, pour tous* $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q. \tag{39}$$

Il en résulte qu'on peut prolonger $(f,g)\to f*g$ *de* $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ *en une application bilinéaire symétrique continue de* $L^p(\mathbb{R}^d)\times L^q(\mathbb{R}^d)\to L^r(\mathbb{R}^d)$.

DÉMONSTRATION. Commençons par démontrer (39).

Avant toute chose, éliminons les cas les plus simples. Si $r=+\infty$, alors $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et il suffit d'appliquer Hölder:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p\|g\|_q$$

avec un changement de variable $t-x\to s$.

Si $p=1$, cela résulte directement de l'inégalité de Minkowski :

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(\cdot-t)\,\mathrm{d}t\right\|_r \leq \int_{\mathbb{R}^d}|f(t)|\|g(\cdot-t)\|_r\,\mathrm{d}t = \|f\|_1\|g\|_r.$$

Avec $g*f=f*g$, la même chose est vraie si $q=1$.

Si $r=1$, alors $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$ et comme $p,q\geq 1$ $p=q=1$. L'inégalité de Young résulte alors directement du théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(t)|\int_{\mathbb{R}^d}|g(x-t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

Notons enfin que si $1\leq p,q,r\leq+\infty$ alors $1+1/r\geq 1\geq 1/q$ donc le cas $p=+\infty$ (resp. $q=+\infty$), et $1+1/r=1/q$ implique $r=+\infty$ et $q=1$ (resp. $p=1$).

On peut donc supposer $1<p,q,r<+\infty$. Notons que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$ implique $r>p,q$. Nous allons utiliser le fait simple suivant: *si* $\varphi\in L^r$ *alors*

$$\|\varphi\|_r = \sup\{\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\psi(x)\,dx\ :\ \psi\in L^{r'}, \|\psi\|_{r'}=1\}$$

avec $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Ceci découle immédiatement de l'inégalité de Hölder et de son cas d'égalité.

Mais, si $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\subset L^r$. Soit donc $h\in L^{r'}$ avec $r'=\frac{r}{r-1}$. On veut évaluer

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f*g(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d}|f*g(x)|h(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f|(t)|g|(x-t)|h|(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

avec Fubini. On peut donc supposer $f,g,h\geq 0$. On veut montrer que cette quantité est $\leq \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}$.

On écrit alors

$$f(t)g(x-t)h(x) = f(t)^{p/r}g(x-t)^{q/r}\times f(t)^{1-p/r}g(x-t)^{1-q/r}h(x)$$

et appliquer l'inégalité de Hölder avec $r'=\frac{r}{r-1}$ (donc $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p g(x-t)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\times\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^{(1-p/r)r'}g(x-t)^{(1-q/r)r'}h(x)^{r'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned}\tag{40}$$

Le premier terme est assez simple: avec Fubini, on intègre d'abord en x,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p g(x-t)^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\frac{p}{r}} \|g\|_q^{\frac{q}{r}}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Pour le second terme, on remarque d'abord que $\left(1-\frac{p}{r}\right)r' = \frac{r-p}{r}\frac{r}{r-1} = \frac{r-p}{r-1}$ et $\left(1-\frac{q}{r}\right)r' = \frac{r-q}{r-1}$. Avec Fubini,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^{(1-p/r)r'} g(x-t)^{(1-q/r)r'} h(x)^{r'} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^{\frac{r-p}{r-1}} * g^{\frac{r-q}{r-1}}(x) h(x)^{r'} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}} \leq \left\| f^{\frac{r-p}{r-1}} * g^{\frac{r-q}{r-1}} \right\|_\infty^{\frac{1}{r'}} \|h\|_{r'}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Enfin, on utilise l'inégalité $\|\varphi * \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_s \|\psi\|_{s'}$ si $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$ que nous avons démontrée plus haut (s à choisir). On obtient ainsi

$$
\left\| f^{\frac{r-p}{r-1}} * g^{\frac{r-q}{r-1}} \right\|_\infty \leq \left\| f^{\frac{r-p}{r-1}} \right\|_s \left\| g^{\frac{r-q}{r-1}} \right\|_{s'} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^{\frac{r-p}{r-1}s}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g^{\frac{r-q}{r-1}s'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}.
$$

On choisit donc s pour que $\frac{r-p}{r-1}s = p$, c'est-à-dire $s = \frac{r-1}{r-p}p$ et $s' = \frac{s}{s-1} = \frac{r-1}{p-1}p$. Rappelons que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$ qu'on peut réécrire $1-\frac{1}{p} = \frac{1}{q}-\frac{1}{r}$ c'est-à-dire $\frac{p-1}{p} = \frac{r-q}{qr}$. On en déduit que $s' = \frac{r-1}{r-q}q$. On en déduit donc que

$$
\left\| f^{\frac{r-p}{r-1}} * g^{\frac{r-q}{r-1}} \right\|_\infty \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{sp}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{qs'}} = \|f\|_p^{\frac{p}{s}} \|g\|_q^{\frac{q}{s'}}.
\tag{43}
$$

En regroupant (40) à (43), on obtient

$$
\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_p^{p\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r's}\right)} \|g\|_q^{q\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r's'}\right)} \|h\|_{r'}.
$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$
\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\frac{1}{s} = \frac{1}{r}+\frac{r-1}{r}\frac{r-p}{(r-1)p} = \frac{p+r-p}{rp} = \frac{1}{p}
$$

et que $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\frac{1}{s'} = \frac{1}{q}$. Au final, on a bien

$$
\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_{r'}
$$

pour tout $h \in L^{r'}$ et donc, pour tous $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$
\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.
$$

Montrons maintenant comment cela permet de définir $f*g$ sur $L^p(\mathbb{R}^d)\times L^q(\mathbb{R}^d)$ tout entier. Il s'agît évidemment d'adapter le principe d'extension des applications linéaire aux applications bi-linéaires.[1]

Soient donc $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que si $p=+\infty$ (resp. $q=+\infty$) alors $\frac{1}{p} = 1+\frac{1}{r}$ et $1 \leq p, r \leq +\infty$ implique que $p=r=1$ (resp. $q=r=1$). La définition

$$
f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t
$$

[1] On pourrait également faire appel deux fois au principe d'extension des applications linéaire. Une première fois pour prolonger la définition de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à $L^p(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ puis pour prolonger cette définition de $L^p(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à $L^p(\mathbb{R}^d)\times L^q(\mathbb{R}^d)$.

a parfaitement un sens (on intègre une fonction de L^1) et on définit donc la convolution par cette formule. On suppose donc $p, q \neq +\infty$. Il existe alors deux suites (f_k) et (g_k) de fonctions continues à support compact telles que $\|f_k - f\|_p \leq 1/k$ et $\|g_k - g\|_q \leq 1/k$. En particulier, $f_k * g_k$ est parfaitement bien défini. Montrons que $(f_k * g_k)$ est une suite de Cauchy dans L^r:

$$\begin{aligned}
\|f_k * g_k - f_l * g_l\|_r &= \|f_k * g_k - f_k * g_l + f_k * g_l - f_l * g_l\|_r \\
&= \|f_k * (g_k - g_l) + (f_k - f_l) * g_l\|_r \\
&\leq \|f_k\|_p \|g_k - g_l\|_q + \|f_k - f_l\|_p \|g_l\|_q \\
&\leq (\|f\|_p + \|g\|_q + 2)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)
\end{aligned}$$

car $\|f_k\|_p \leq \|f_k - f\|_p + \|f\|_p$ et $\|f_k - f_l\|_q \leq \|f_k - f\|_q + \|f - f_l\|_q$.

Ainsi $\|f_k * g_k - f_l * g_l\|_r$ est de Cauchy dans L^r qui est complet donc cette suite est convergente. On vérifie aisément que sa limite a ne dépend pas de (f_k) et de (g_k): si $(\tilde{f}_k)$ et $(\tilde{g}_k)$ sont deux autres suites ayant les mêmes propriétés, et si on note $\tilde{a}$ la limite correspondante, alors un calcul similaire au précédent donne

$$\left\|\tilde{f}_k * \tilde{g}_k - f_k * g_k\right\|_r \leq \left\|\tilde{f}_k\right\|_p \|\tilde{g}_k - g_k\|_q + \left\|\tilde{f}_k - f_k\right\|_p \|g_k\|_q \to 0$$

mais $\tilde{f}_k * \tilde{g}_k \to \tilde{a}$ et $f_k * g_k \to a$ donc $\left\|\tilde{f}_k * \tilde{g}_k - f_k * g_k\right\|_r \to \|\tilde{a} - a\|_r$ qui vaut donc 0 d'où $a = \tilde{a}$.

Enfin, il est facile de voir que $(f, g) \to f * g$ est bilinéaire (linéarité de la limite) symétrique (car $f_k * g_k = g_k * f_k$) et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ pour tout $f \in L^p$ et $g \in L^q$ (continuité de la norme). $\square$

Remarque B.19.
Si $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (*i.e.* $q = p'$) alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité de Hölder implique que, pour x fixé, $t \to f(t)g(x-t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En particulier, on peut définir

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, Hölder implique que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Si de plus $1 < p, q < +\infty$, alors on a défini $f * g$ comme étant la limite commune à toutes les suites $(f_k * g_k)$ avec (f_k), (g_k) continues à support compact qui convergent vers f et g respectivement dans L^p et dans L^q. Évidemment, les deux définitions coïncident: pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f_k * g_k(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t) - f_k(t)g_k(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(t) - f_k(t)\big)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^d} f_k(t)\big(g(x-t) - g_k(x-t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \|f - f_k\|_p \|g\|_q + \|f_k\|_p \|g - g_k\|_q \to 0
\end{aligned}$$

en appliquant Hölder.

Nous venons en particulier de voir que si $q = p'$ (*i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on peut définir $f * g(x)$ pour tout x et pas seulement pour presque tout x comme dans le cas général (où $f * g$ est une fonction de L^r, et n'est donc a priori pas défini partout!). En fait, dans le cas $q = p'$, on a même mieux :

Proposition B.20.
Soient $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration. Soient (f_k), (g_k) des suites de fonctions continues à support compact qui convergent vers f et g respectivement dans L^p et dans L^q. Alors $f_k * g_k$ est une fonction continue à support compact. Par ailleurs, rappelons que la convergence dans L^∞ est la convergence *uniforme.*

Une suite de fonctions continue (resp. qui tendent vers 0 à l'infini, par exemple de fonctions à support compact) qui converge uniformément, a pour limite une fonction continue (resp. qui tend vers 0 à l'infini). □

Lemme B.21.
Soit $1 \leq p < +\infty$ *et soit* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Pour* $x \in \mathbb{R}^d$, *notons* $\tau_x f$ *la fonction de* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *définie par* $\tau_x f(t) = f(t-x)$. *Alors l'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ x & \mapsto & \tau_x f \end{array}$ *est continue.*

Démonstration. Soit d'abord $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et soit T tel que $\operatorname{supp} f \subset [-T,T]$. Rappelons aussi que f est bornée, en particulier, $|f| \leq \|f\|_\infty \chi_{B(0,R)}$ ($\chi_{B(a,r)}$ désigne la fonction caractéristique de la boule de centre a de rayon r, c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 sur la boule et 0 ailleurs). On veut vérifier que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_p \to 0$ quand $x \to x_0$. Mais

$$\|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t-x) - f(t-x_0)|^p \,\mathrm{d}t.$$

Pour $|x - x_0| < 1$,

$$|f(t-x) - f(t-x_0)|^p \leq \left(\|f\|_\infty \chi_{B(x,R)} + \|f\|_\infty \chi_{B(x_0,R)}\right)^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p \chi_{B(x_0,R+1)}$$

qui est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Par ailleurs, comme f est continue, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $f(t-x) - f(t-x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$. Le théorème de convergence dominée implique donc que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(t-x) - f(t-x_0)|^p \,\mathrm{d}t \to 0$$

quand $x \to x_0$.

Démontrons maintenant le cas général. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $p \neq +\infty$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon/3$. On vérifie aisément que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|\tau_x f - \tau_x f_\varepsilon\|_p < \varepsilon/3$. Mais alors,

$$\|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x f_\varepsilon\|_p + \|\tau_x f_\varepsilon - \tau_{x_0} f_\varepsilon\|_p + \|\tau_{x_0} f_\varepsilon - \tau_{x_0} f\|_p.$$

Enfin, comme $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, nous venons de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x - x_0| \leq \eta$, alors $\|\tau_x f_\varepsilon - \tau_{x_0} f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon/3$. On obtient donc $\|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_p \leq \varepsilon$. □

Remarque B.22.
Notez que pour $p = +\infty$, ce théorème est faux. Par exemple, si on prend $f = \chi_{B(0,1)}$ alors, pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}^d$ avec $x \neq x_0$,

$$\left\|\tau_x \chi_{B(0,1)} - \tau_{x_0} \chi_{B(0,1)}\right\|_\infty = 1.$$

Théorème B.23 (Approximation de l'unité).
Soit $1 \leq p < +\infty$ *et* $0 \leq k \leq +\infty$ *un entier. Soit* j *une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *à support compact, positive, qui vérifie* $\int_{\mathbb{R}^d} j(t)\,dt = 1$. *Pour* $s > 0$, *notons* j_s *la fonction positive de classe* $\mathcal{C}^k$ *à support compact définie par* $j_s(t) = s^{-d} j(t/s)$.

Alors, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $j_s * f$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *et* $j_s * f \to f$ *dans* L^p *quand* $s \to 0$.

Démonstration. Démontrons d'abord la deuxième partie : remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}^d} j_s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} j(t/s)\, s^{-d} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} j(r)\,\mathrm{d}r = 1$$

avec le changement de variable $r = t/s$. Soit R tel que $\operatorname{supp} j \subset B(0,R)$ de sorte que $\operatorname{supp} j_s \subset B(0,Rs)$. De plus, j_s étant continue à support compact, elle est dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donc

$$j_s * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} j_s(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite

$$\begin{aligned} f(x) - j_s * f(x) &= f(x)\int_{\mathbb{R}^d} j_s(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^d} j_s(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} j_s(t)\big(f(x) - f(x-t)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, on en déduit que

$$\|f - j_s * f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} j_s(t)\|f - \tau_t f\|_p\,\mathrm{d}t = \int_{B(0,Rs)} j_s(t)\|f - \tau_t f\|_p\,\mathrm{d}t.$$

Mais, d'après le lemme précédent, $\|f - \tau_t f\|_p \to 0$ quand $t \to 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|t| < \eta$, $\|f - \tau_t f\|_p \leq \varepsilon$. Par suite, si $s < \eta/R$,

$$\|f - j_s * f\|_p \leq \varepsilon \int_{B(0,Rs)} j_s(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon..$$

Il nous reste à voir que $j_s * f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si j est de classe $\mathcal{C}^k$. Notons d'abord que $j_s * f = f * j_s$ et comme $j_s \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$,

$$j_s * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) j_s(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Fixons maintenant $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Comme j est à support $B(0,R)$, j_s est à support $B(0,Rs)$. Mais alors, pour $x \in B(x_0,1)$, $t \mapsto j_s(x-t)$ est à support $B(0,Rs+1)$. Par suite

$$j_s * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) j_s(x-t)\chi_{B(x_0,Rs+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} g(t) j_s(x-t)\,\mathrm{d}t$$

avec $g = f\chi_{B(x_0,Rs+1)}$. Comme $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité de Hölder imlique que $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit alors G définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par $G(x,t) = g(t)j_s(x-t)$. Alors

(i) pour presque tout t, $x \to G(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$

(ii) pour tout $k \geq 0$, et tout $x \in B(x_0,1)$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = |g(t) j_s^{(k)}(x-t)| \leq \left\|j_s^{(k)}\right\|_\infty |g(t)| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi, avec le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, $x \to \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $B(x_0,1)$.

Comme $j_s * f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,\mathrm{d}t$ sur $B(x_0,1)$, $j_s * f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $B(x_0,1)$. Comme x_0 est arbitraire, $j_s * f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$. □

Remarque B.24.
Nous n'avons pas démontré la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ car nous avons utilisé cette propriété pour démontrer la continuité des translations.

Exercice B.9.
Montrer que si f et g sont radiales, alors $f * g$ aussi.

Exercice B.10.
Calculer $f * g$ avec f, g définies sur $\mathbb{R}$ par

(1) $f(t) = \chi_{[a,b]}$, $g(t) = \chi_{[c,d]}$;
(2) $f(t) = e^{-a|t|}$, $g(t) = e^{-b|t|}$;
(3) $f(t) = e^{-at^2}$, $g(t) = e^{-bt^2}$.

Exercice B.11.
Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$. Pour $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$, on définit $f_\lambda, g_\lambda \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ par $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ et $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$.

(1) Déterminer $\|f_\lambda\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$.

(2) Déterminer $f_\lambda * g_\lambda$ en fonction de $f * g$.
(3) En déduire que s'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f * g\|_r \leq C\|f\|_p\|g\|_q \tag{44}$$

alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.
Indication: Appliquer (44) à f_λ, g_λ et faire tendre λ vers 0 et vers $+\infty$.

4. Exercices

Exercice B.12. (Semi-groupe de convolution)
On considère une famille $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ positifs non nuls telle que

(i) pour tout $t > 0$, $\int p_t(x)dx = 1$,
(ii) pour tous $t, s > 0$, $p_{t+s} = p_t * p_s$,
(iii) pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} p_t(x) = 0.$$

(1) Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit, pour tout $f \in L^p$, $P_t f = p_t * f$. Démontrer les propriétés suivantes :
  (a) pour tout $t > 0$, P_t est une application linéaire continue de norme 1 de L^p dans L^p;
  (b) pour tous $s, t > 0$, $P_s P_t = P_{s+t}$;
  (c) Pour tout $f \in L^p$, $\lim_{t\to 0} P_t f = f$ dans L^p;
  (d) Pour tout $f \in L^p$, l'application $t \mapsto P_t f$ est continue de R_+^* dans L^p.
(2) *semi-groupe de Gauss.* On pose maintenant $p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}$.
  (a) Montrer que p_t vérifie les propriétés indiquées.
  (b) Vérifier que p_t vérifie l'équation de la chaleur : $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right) p_t = 0$.
  (c) Conclusion.

Exercice B.13. (Inégalité de Hardy)
On suppose $1 < p < \infty$ et $f \in L^p = L^p\big((0, +\infty)\big)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad 0 < x < +\infty.$$

(1) Démontrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

qui montrer que $f \mapsto F$ est continue $L^p \mapsto L^p$.
Indication. Supposez d'abord que $f \geq 0, f \in \mathcal{C}_c\big((0, +\infty)\big)$. Une intégration par partie montre que

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)dx.$$

Noter que $xF' = f - F$ et utiliser Hölder.
(2) Montrer qu'on a égalité uniquement si $f = 0$.
(3) Montrer que la constante $\dfrac{p}{p-1}$ est optimale *i.e.* ne peut être remplacée par une constante plus petite.
Indication. Considérer $f(x) = x^{-1/p}$ sur $[0, A]$ et $f(x) = 0$.
(4) Si $f > 0$ et $f \in L^1$, montrer que $F \notin L^1$.