

DE L'ANALYSE DE FOURIER AUX ONDELETTES
JOURNÉES DES MATHÉMATIQUES, IREM D'ORLÉANS,

PHILIPPE JAMING

RÉSUMÉ. Dans cet exposé, nous montrerons comment les idées de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur ont progressivement évolué pour donner naissance à la théorie des ondelettes et comment cette théorie s'applique au traitement du signal.

1. SÉRIES DE FOURIER

Question initiale: On considère une barre métallique dont on veut étudier la température $T(x, t)$ connaissant la température initiale $T(x, 0) = T_0(x)$.

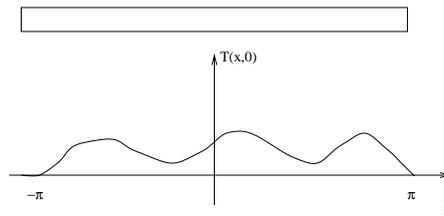


FIGURE 1. barre métallique

Celle-ci vérifie l'équation de la chaleur :

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = C \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Les deux idées clé de Fourier sont les suivantes :

Idée 1. On regarde ce qui se passe quand T_0 est très simple.

On prend par exemple $T_0(x) = a \cos k\pi x$ et on cherche des solutions de la forme $T(x, t) = a(t) \cos kx$. Ainsi, $a(t)$ doit vérifier $a'(t) = -Ck^2 a(t)$ d'où $a(t) = ae^{-Ck^2 t}$ et la solution correspondante est

$$T(x, t) = ae^{-Ck^2 t} \cos k\pi x.$$

Idée 2. Une fonction sur $[0, 1]$ s'écrit approximativement comme une superposition de fonctions cos et sin. Ainsi

$$T_0(x) = \sum_{j \geq 0} a_j \cos jx + b_j \sin jx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

(la série de Fourier de T_0). Par le principe de superposition, on a alors

$$T(x, t) = \sum_{k \geq 0} a_k e^{-Ck^2 t} \cos kx + b_j e^{-Cj^2 t} \sin kx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-Ck^2 t} e^{ikx}.$$

Les questions que posent cette méthode sont multiples (et pour certaines pas encore complètement résolues). Sitons :

- a) Comment calculer les coefficients c_k ?
 b) Le résultat obtenu approche-t-il bien la fonction d'origine? Quel sens donner à la formule de reconstruction :

$$T_0(x) = \sum_{j \geq 0} a_j \cos jx + b_j \sin jx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} ?$$

Pour le calcul des coefficients, la théorie moderne procède comme suit : on utilise

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

qui est une relation d'orthogonalité des $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Alors, si $T_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_0(x) e^{-ilx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} e^{-ilx} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx \\ &= c_l \end{aligned}$$

pour peu qu'on arrive à justifier l'interversion de \sum et \int .

Ce calcul montre essentiellement que c_l est le "poids" de e^{ilx} dans T_0 .

L'aspect qualitatif de l'approximation n'était pas une préoccupation de Fourier mais a occupé bon nombre de mathématiciens par la suite. Voici un petit résumé des principaux résultats :

— Si T_0 est un peu régulière (disons de classe \mathcal{C}^1), alors sa série de Fourier converge bien (=uniformément).

— Si T_0 est d'énergie finie ($\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_0(x)|^2 dx < +\infty$), alors sa série de Fourier converge en moyenne quadratique

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| T_0(x) - \sum_{|k| < N} c_k e^{ikx} \right|^2 \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0.$$

— Si T_0 est d'énergie finie, alors sa série de Fourier converge presque partout vers T_0 .

Toutefois, un certain nombre de résultats sont venus troubler ce tableau :

— il existe T_0 dont la série de Fourier diverge partout !

— on peut vouloir sommer une série de Fourier en ne gardant que les coefficients qu'on pense être significatifs, c'est-à-dire dépassant un certain seuil :

$$T_\lambda(x) = \sum_{k: |c_k| \geq \lambda} c_k e^{ikx}$$

mais il existe T_0 continu tel que T_λ ne converge nulle part vers T_0 quand $\lambda \rightarrow 0$!

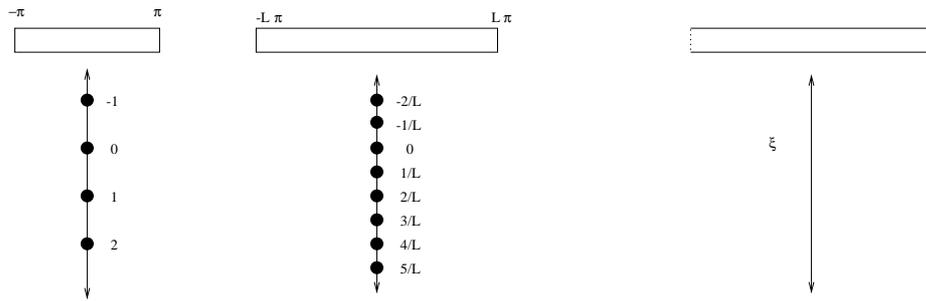
Ceci rend très difficile l'utilisation de séries de Fourier dans un calcul numérique explicite.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Quand on allonge la barre de $[-\pi, \pi]$ à $[-L\pi, L\pi]$, les exponentielles qu'on utilise deviennent $e^{-i\frac{k}{L}x}$ et si on continue, on finit par avoir besoin de toutes les exponentielles $e^{-i\xi x}$.

Les coefficients de Fourier deviennent donc $\frac{1}{2L\pi} \int_{-L\pi}^{L\pi} T_0(x) e^{i\frac{k}{L}x} dx$ puis

$$c(\xi) = \int_{\mathbb{R}} T_0(x) e^{-i\xi x} dx := \hat{T}_0(\xi)$$



qui mesure le poids de la fréquence ξ dans T_0 . La formule de reconstruction devient

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{T}_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Les questions qui se posent sont essentiellement les mêmes (quel sens donner à cette formule de reconstruction ?..) et les réponses sont également similaires. Mais deux problèmes supplémentaires se posent :

1. Il faut un continuum d'information pour reconstruire la fonction : peut-on se contenter d'un ensemble discret (échantillonnage)? Ce continuum est mal adapté au calcul numérique si la réponse à la question précédente est non.
2. Soit la fonction soit sa transformée de Fourier est toujours mal localisée. On a le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$(2) \quad \int |x|^2 |T_0(x)|^2 dx \int |\xi|^2 |\hat{T}_0(\xi)|^2 d\xi \geq C \int |T_0(x)|^2 dx.$$

Les fonctions les mieux localisées (qui réalisent l'égalité dans (2)) sont les gaussiennes $T_0(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ et alors $\hat{T}_0(\xi) = ce^{-\xi^2/4a}$.

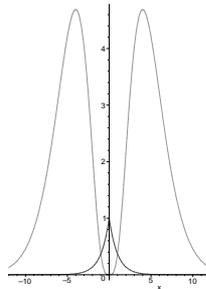
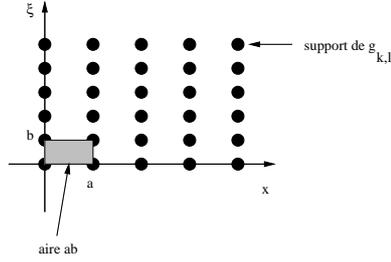


FIGURE 2. Une fonction f et $x^2 f$.

3. ANALYSE DE GABOR

Idée. Ne garder qu'une partie discrète des x ou des ξ ne suffit pas en général. Au lieu de cela, on va discrétiser le plan temps-fréquence $x - \xi$.

Autour de chaque point du réseau ainsi obtenu, on place ensuite un "atome" (de préférence simple) aussi localisé que possible. Concrètement, l'idée de Gabor est de faire jouer le rôle de e^{ikx} des



séries de Fourier aux gaussiennes: $g_{k,l}(x) = e^{-(x-ka)^2/2} e^{2ilb\pi x}$ dont la transformée de Fourier est $\widehat{g_{k,l}}(\xi) = e^{-(\xi-lb)^2/2} e^{ika\xi}$.

On a alors une décomposition

$$c_{k,l} = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_{k,l}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-(x-ka)^2/2} e^{ilb\pi x} dx$$

et la reconstruction s'écrira

$$f(x) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} \tilde{g}_{k,l}(x) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} \tilde{g}(x-ka) e^{ilb\pi x}$$

ou \tilde{g} est une fonction qu'on peut calculer. On espère avoir une bonne qualité d'approximation. Par ailleurs, on veut que ces formules soient stables, c'est-à-dire que de petites variations sur f doivent entraîner de petites variations sur les coefficients et vice-versa. Mathématiquement, cela se traduit par

$$\frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

La difficulté ici vient du fait suivant (le premier est un théorème de Daubechies et le second de Balian et Low):

- soit il faut un maillage assez fin du plan temps-fréquence ($ab < 1$),
- soit la fonction g de base (ici $g(x) = e^{-x^2/2}$) ne doit pas être localisée soit en temps soit en fréquence:

$$\int |x|^2 |g(x)|^2 dx \int |\xi|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = +\infty$$

(ce qui n'est pas le cas ici).

4. LES ONDELETTES

4.1. Principe. On cherche maintenant à faire quelque chose où on garde tous les éléments intéressants des objets précédents, à savoir:

1. la décomposition doit se faire dans des atomes $g_{k,l}$ qui s'obtiennent de façon simple à partir de une (quelques) fonction(s) simple(s) g ($g^{(1)}, g^{(2)}, \dots$).
2. La décomposition et la reconstruction doivent être stable. Plus précisément si on note $\langle f, g_{k,l} \rangle = \int f(x) g_{k,l}(x) dx$, on veut

$$(3) \quad \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{k,l} \rangle|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$

3. Les atomes de base doivent être à la fois bien localisés (ex à support $[-a, a]$) et régulier (ex de classe \mathcal{C}^k).
4. La convergence de la formule de reconstruction doit être bonne.
5. Enfin, on aimerait que les propriétés des fonctions se reflètent dans des propriétés des coefficients.

Une première famille d'atomes qui vérifient (presque toutes) ses propriétés est la famille de Haar : on prend $g(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2]} - \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ et $g_{k,l} = 2^{-k/2}g(2^{-k}x - l)$.

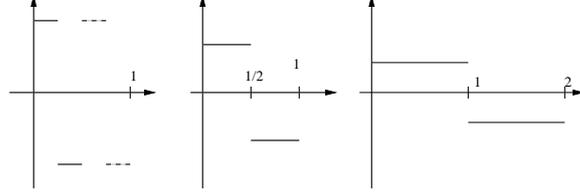


FIGURE 3. Quelques fonctions de Haar pour $k = -1, 0, 1$

Définition. Une ondelette est une fonction g telle que $g_{k,l} = 2^{-k/2}g(2^{-k}x - l)$ fournit une décomposition stable (3) des fonctions d'énergie finie.

Leur seul défaut de l'ondelette de Haar est le manque de régularité. Pour l'obtenir, il faut augmenter un peu le "support" (ce sont les ondelettes de Daubechies). Notez qu'on peut avoir des ondelettes "orthogonales" pour lesquelles (3) est exacte :

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{k,l} \rangle|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$

et qu'alors

$$f(x) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{k,l} \rangle g_{k,l}(x)$$

au sens de la convergence en moyenne quadratique.

Les propriétés de convergence sont souvent bien meilleures. Par exemple, si on ne garde que les coefficients dépassant un certain seuil s :

$$\sum_{k,l : |\langle f, g_{k,l} \rangle| \geq s} \langle f, g_{k,l} \rangle g_{k,l}(x)$$

et qu'on fait tendre s vers 0, on récupère f . Ceci est important pour les applications, puisque les petits coefficients peuvent être négligés.

Enfin, la régularité des fonctions se reflète sur la décroissance des coefficients d'ondelette (à condition que g soit assez régulière).

4.2. Construction des ondelettes. La première étape consiste à décomposer l'espace des fonctions à énergie finie en partie prenant en compte ce qui se passe à une échelle donnée (garder en tête l'exemple des ondelettes de Haar).

Définition. Une famille $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$ est une analyse multirésolution si

1. $f(t) \in V_0$ si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f(t - j) \in V_0$;
2. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j+1} \subset V_j$;
3. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f(t) \in V_j$ si et seulement si $f(t/2) \in V_{j+1}$;
4. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\}$.
5. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$.
6. Il existe une fonction $\theta \in V_0$ telle que $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ permet de reconstruire de façon stable les fonctions de V_0 .

Remarque : Les condition 1 et 3 sont impliquent la condition $f \in V_j$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(t - 2^j k) \in V_j$.

La condition 6 implique la condition 1.

Explications :

— V_j est une “grille de lecture” du signal de taille 2^j .

— 2 dit qu’une approximation à la résolution 2^{-j} contient toute l’information nécessaire pour calculer l’approximation plus grossière à la résolution 2^{-j-1} .

— Si on dilate une fonction par 2, les détails sont deux fois plus gros. La condition 3 dit que la même chose est vraie pour les approximations. En d’autres termes, calculer l’approximation à l’ordre $j + 1$ (moitié moins bonne que l’approximation à l’ordre j), il suffit de prendre un signal moitié moins bon et l’approcher à l’ordre j .

— 4 dit que si on fait tendre la résolution 2^{-j} vers 0, on perd tout détail de f .

— à l’inverse, 5 dit que si on fait tendre la résolution vers $+\infty$, on retrouve tous les détails de f .

La deuxième étape consiste ensuite, à partir de la fonction θ , de construire une fonction Φ (appelée “fonction d’échelle”) telle que $\Phi(x - n)$ donne une décomposition “orthogonale” des fonctions de V_0 .

La construction de la fonction g se fait ensuite de la façon suivante :

1. D’après la condition 3 $\Phi(x/2) \in V_1$ et avec 2, $\Phi(x/2) \in V_0$.

2. On peut donc reconstruire $\Phi(x/2)$ à partir de $\Phi(x - n)$:

$$\Phi(x/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \Phi(x - n).$$

C’est cette suite a_n qui va déterminer une bonne partie des propriétés de l’ondelette (en particulier son support) ainsi que les formules de reconstruction.

3. On prend alors la série de Fourier

$$\tilde{g}(\xi) = e^{-i\xi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n e^{-in(\xi + \pi)}.$$

4. Enfin l’ondelette g est définie par sa transformée de Fourier

$$g(\xi) = \tilde{g}(\xi/2) \hat{\Phi}(\xi/2).$$

Par exemple, l’ondelette de Daubechies d’ordre k est celle où la suite a_n a le plus petit support possible et telle que la fonction g vérifie

$$\int x^j g(x) dx = 0 \quad \text{pour } j = 0, \dots, k.$$

On peut montrer que cette condition implique que g ait un certain degré de régularité et qu’une telle condition est aussi nécessaire pour avoir de la régularité. On peut aussi montrer qu’une ondelette est à support compact si et seulement si la suite a_n n’a qu’un nombre fini de coefficients non nuls.

Par exemple, l’ondelette de Daubechies d’ordre 4 est l’ondelette de plus petit support qui soit dérivable. Les fonctions Φ et l’ondelette de Daubechies correspondante d’ordre 2, 3 et 4 sont données par

4.3. Utilisation. On peut montrer que la régularité se reflète sur la décroissance des coefficients. Ceci permet de détecter des bords dans des images, que ceci soient nets (discontinuités) ou non (effets d’ombres = changement de régularité plus fine). Voici un exemple où on détecte les singularités d’un signal test :

On peut analyser des signaux bien plus irréguliers. Par exemple, on peut déterminer la dimension de l’ensemble où une fonction est de régularité α (pas forcément des entiers!), ainsi, pour l’escalier du diable :

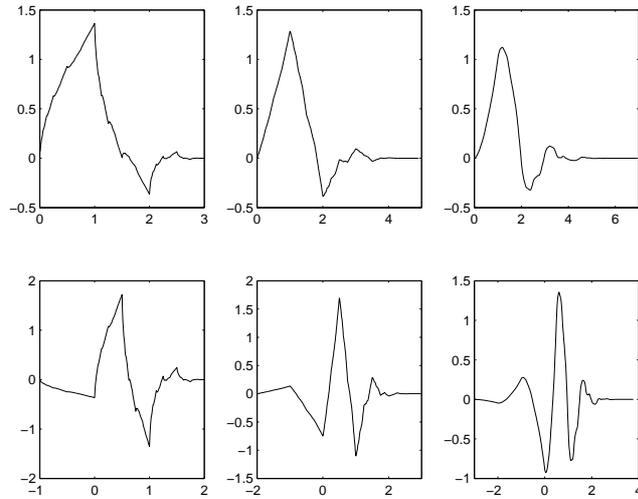


FIGURE 4. Ondelette de Daubechies pour $k = 2, 3$ et 4 (fonction Φ en haut et ondelette g associée en bas)

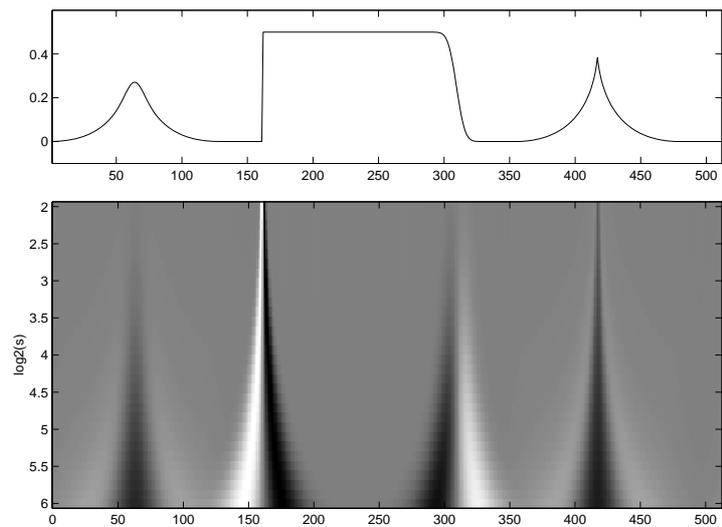


FIGURE 5. Singularité d'un signal test

Le débruitage est une autre application possible : on utilise le fait que le seuillage approxime bien le signal. Supposons que celui-ci est bruité : $f(t) = s(t) + b(t)$ où $s(t)$ est le signal qu'on veut mesurer, $b(t)$ un bruit et $f(t)$ le signal qu'on mesure effectivement. On décompose f en ondelette et on ne garde que les coefficients qui dépassent un certain seuil $|c_{k,l}| > s$. Ainsi, on considère que tout ce qui provient des coefficients trop petits n'est que du bruit. Enfin, sur les coefficients qu'on garde, il faut enlever le bruit : on les approche simplement de s de 0. Ainsi $c_{k,l}$ est transformé en $D(c_{k,l})$ où D est la fonction de graphe

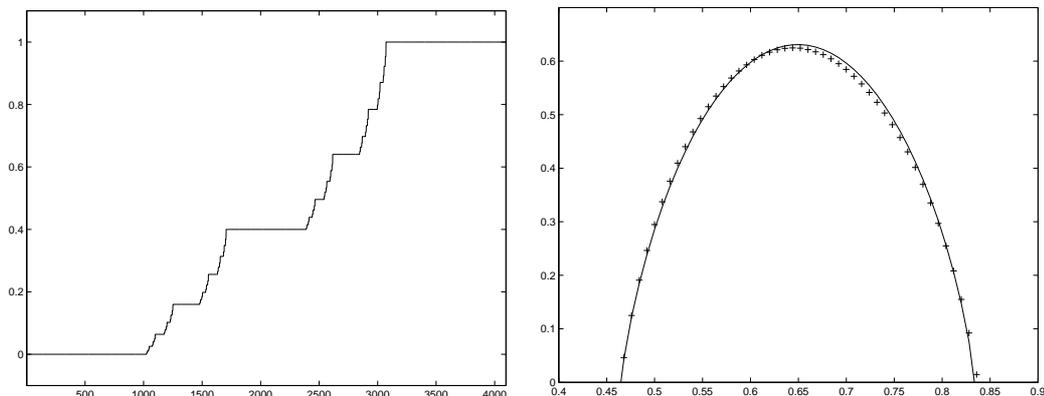


FIGURE 6. Escalier du diable et dimension de l'ensemble où celui-ci a pour régularité α (la ligne pleine est la courbe théorique et les croix ce qu'on obtient par calcul numérique)

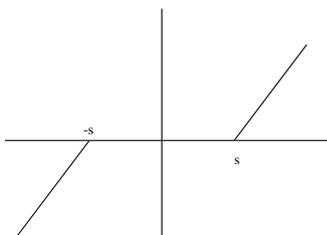


FIGURE 7. Graphe de D

D'autres fonctions d'un style similaire peuvent être utilisées. La difficulté est de déterminer un seuil correct dans lequel on retrouve suffisamment du signal non bruité. Voici le résultat sur un signal test :

et ici sur un signal sonore

Enfin, la compression d'image peut elle aussi utiliser le seuillage (c'est le cas de la norme JPEG2000). Comme un signal s'approche bien à partir des coefficients les plus gros, il suffit de ne garder (et transmettre) qu'eux! Mais les ondelettes ne sont qu'un des ingrédients d'une bonne compression. Voici toutefois un exemple sur une image :

RÉFÉRENCES

- [1] B. BURKE HUBBARD Ondes et ondelettes. La Saga d'un outil mathématique *Pour la science* 2000
- [2] C. GASQUET ET P. WITOMSKI Analyse de Fourier et applications *Masson*
- [3] J.-P. KAHANE ET P.G. LEMARIÉ-RIEUSSET Séries de Fourier et ondelettes *Cassini* 1998
- [4] S. MALLAT Une exploration des signaux en ondelettes *Éditions de l'école polytechnique* 2000

Les figures 4.2, 5, 6, 8, 4.3 et 10 ont été réalisées avec MATLAB et le package wavelab disponible (gratuitement) à

<http://www-stat.stanford.edu/wavelab/>

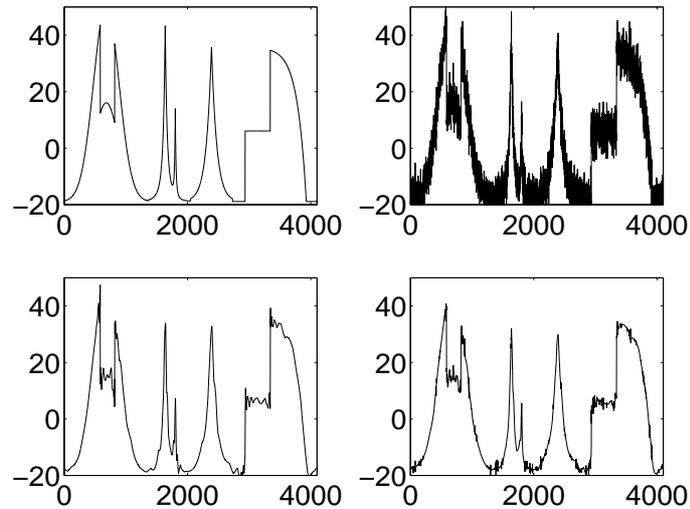


FIGURE 8. Signal d'origine et bruité (en haut) et deux méthodes de débruitage par ondelette (en bas)

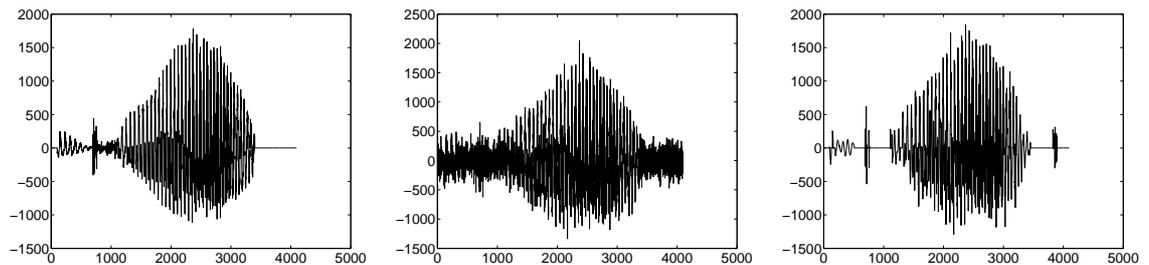


FIGURE 9. Débruitage du son "Grih"

PROGRAMME MAPLE POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

On considère $T_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ dont la série de Fourier est

$$T_0(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \cos kx.$$

La solution de l'équation de la chaleur est alors

$$T(x, t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \cos kx.$$

Une autre solution s'obtient en utilisant la transformée de Fourier (on considère alors la barre métallique comme infinie) :

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-(x-y)^2/(4t)} dy.$$

En MAPLE, on peut représenter ces trois fonctions de la façon suivante :



FIGURE 10. Une image et sa version compressée de 15%

```
> plot(0.25+sum(sin(k*Pi/4)*cos(k*x)/k,k=1..50)*2/Pi,x=-Pi..Pi);
> plot3d(0.25+sum(exp(-k^2*t)*sin(k*Pi/4)*cos(k*x)/k,k=1..50)*2/Pi,x=-3.14..3.14
,t=0..1,orientation=[-54,81]);
> plot3d(int(exp(-(x-y)^2/(4*t)),y=-Pi/4..Pi/4)/(2*sqrt(Pi*t)),x=-Pi..Pi
,t=0.001..2,orientation=[-54,81]);
```

Voici le programme (plus lent) pour calculer les coefficients de n'importe quelle fonction (ici paire) :

```
> f:=x->piecewise(abs(x)<Pi/4,1);
> plot3d(int(f(y)*exp(-(x-y)^2/(4*t)),y=-Pi..Pi)/(2*sqrt(Pi*t)),x=-Pi..Pi
,t=0.001..1,orientation=[-54,81]);
> a[0]:=int(f(x),x=0..Pi)/Pi;
> a[k]:=int(f(x)*cos(k*x),x=0..Pi)*2/Pi;
> plot(a[0]+sum(a[k]*cos(k*x),k=1..50),x=-Pi..Pi);
> plot3d(a[0]+sum(a[k]*exp(-k^2*t)*cos(k*x),k=1..50),x=-Pi..Pi
,t=0..1,orientation=[-54,81]);
```

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BP 6759, F 45067 ORLEANS
CEDEX 2, FRANCE,

E-mail address: jaming@labomath.univ-orleans.fr

<http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/membres/jaming>