Contributions à l'analyse harmonique réelle et complexe et à ses applications

Philippe Jaming

MAPMO-Fédération Denis Poisson

Orléans, 2 Juillet 2007

Plan de l'exposé

Valeurs au bord de fonctions harmoniques

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X = \mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B = \mathbb{S}^{n-1}$, Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta) = \dfrac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x) = \langle \mu, \mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u = 0$ et $|u(x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et

$$F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r \to 1$?

3. F vérifie une EDO de la forme

$$F''(r) + \frac{h(r)}{1-r}F'(r) = O((1-r)^{-\alpha})$$

$\Rightarrow$ F a une limite quand $r \to 1$.

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X = \mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B = \mathbb{S}^{n-1}$, Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x) = \langle \mu, \mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u = 0$ et $|u(x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et
$$F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r \to 1$?
3. F vérifie une EDO de la forme
$$F''(r) + \frac{h(r)}{1-r}F'(r) = O((1-r)^{-\alpha})$$
$\Rightarrow$ F a une limite quand $r \to 1$.

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X = \mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B = \mathbb{S}^{n-1}$, Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x) = \langle \mu, \mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u = 0$ et $|u(x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et
$$F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r \to 1$?
3. F vérifie une EDO de la forme
$$F''(r) + \frac{h(r)}{1-r}F'(r) = O((1-r)^{-\alpha})$$
$\Rightarrow$ F a une limite quand $r \to 1$.

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X = \mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B = \mathbb{S}^{n-1}$,
Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x) = \langle \mu, \mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u = 0$ et $|u(x)| \leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et
$$F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r \to 1$?
3. F vérifie une EDO de la forme
$$F''(r) + \frac{h(r)}{1-r}F'(r) = O\big((1-r)^{-\alpha}\big)$$

$\Rightarrow$ F a une limite quand $r \to 1$.

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X=\mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B=\mathbb{S}^{n-1}$, Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta)=\frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x)=\langle\mu,\mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)|\leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u=0$ et $|u(x)|\leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et

$$F(r)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

   Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r\to 1$?
3. F vérifie une EDO de la forme

$$F''(r)+\frac{h(r)}{1-r}F'(r)=O\big((1-r)^{-\alpha}\big)$$

$\Rightarrow F$ a une limite quand $r\to 1$.

Motivation : la boule euclidienne

Exemple : $X=\mathbb{B}_n$ boule unité euclidienne, $B=\mathbb{S}^{n-1}$, Δ=Laplacien usuel, $\mathbb{P}(x,\zeta)=\frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2-2\langle x,\zeta\rangle)^{(n-1)/2}}$.

1. μ distribution, $\mathbb{P}[\mu](x)=\langle\mu,\mathbb{P}(x,\cdot)\rangle$ bien définie, harmonique, $|\mathbb{P}[\mu](x)|\leq C(1-|x|)^{-A}$.
2. Supposons $\Delta u=0$ et $|u(x)|\leq C(1-|x|)^{-A}$. Soit $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ et
$$F(r)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
Question : $F(r)$ a-t-elle une limite quand $r\to 1$?
3. F vérifie une EDO de la forme
$$F''(r)+\frac{h(r)}{1-r}F'(r)=O\big((1-r)^{-\alpha}\big)$$
$\Rightarrow$ F a une limite quand $r\to 1$.

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}} dx < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $$\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0.$$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1\right\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $\displaystyle\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0.$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1\right\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}} dx < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $\displaystyle\int f = \langle f, 1 \rangle = \int f_0.$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi \rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1 \right\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}} dx < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $$\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0.$$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1\right\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $\displaystyle\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0.$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1\right\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}} dx < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $\displaystyle\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0$.
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolables* si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \big\langle (\varphi * \check{G})F, 1 \big\rangle$

Le demi-plan supérieur

1. Sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$, le noyau de Poisson $\mathbb{P}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$, $\mathbb{P} * \nu$ n'est pas défini pour tout $\nu \in \mathcal{S}'$.
2. Si $f \in L^1_{loc}$ est t.q. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x < +\infty$ alors $\mathbb{P} * f$ est bien définie.
3. Par intégration par parties, on fait porter la condition sur les dérivées de f :
   $\mathcal{D}'_{L^1} = \{f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^1\}$ = *distributions intégrables*
   $\displaystyle\int f = \langle f, 1\rangle = \int f_0.$
4. F et G sont *$\mathcal{S}'$-convolvables* si $\forall\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$ et alors $\langle F * G, \varphi\rangle = \left\langle (\varphi * \check{G})F, 1\right\rangle$

Le demi-plan supérieur

Théorème (Alvarez, Guzmán-Partida et Pérez-Esteva)

F est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}$ si et seulement si

$$(1+|x|^2)^{(n-1)/2}F \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

Dans ce cas, on a toutes les propriétés attendues ($\mathbb{P} * F$ est une fonction, est harmonique, a une valeur au bord).

Le demi-plan supérieur

Théorème (Alvarez, Guzmán-Partida et Pérez-Esteva)

F est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}$ si et seulement si

$$(1+|x|^2)^{(n-1)/2}F \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

Dans ce cas, on a toutes les propriétés attendues ($\mathbb{P} * F$ est une fonction, est harmonique, a une valeur au bord).

Le demi-plan supérieur

Théorème (Alvarez, Guzmán-Partida et Pérez-Esteva)

F est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}$ si et seulement si

$$(1 + |x|^2)^{(n-1)/2} F \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

Dans ce cas, on a toutes les propriétés attendues ($\mathbb{P} * F$ est une fonction, est harmonique, a une valeur au bord).

Extension de rang 1 de groupes homogènes - notations

- Groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(xy' + x'y))$$

mesure de Lebesgue=mesure de Haar

- Champs de vecteurs invariants à gauche

$$\mathcal{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial t}, \; i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

- $|.|$ norme non homogène, $Q = 2n + 1$ dimension homogène
- $\mathbb{R}_+^*$ groupe de dilatations non-homogènes
$a(x, y, t) = (ax, ay, a^2 t) \quad \mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \propto \mathbb{H}^n$

Extension de rang 1 de groupes homogènes - notations

- Groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,
$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(xy' + x'y))$$
mesure de Lebesgue=mesure de Haar
- Champs de vecteurs invariants à gauche
$$\mathcal{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \; i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t}.$$
- $|.|$ norme non homogène, $Q = 2n + 1$ dimension homogène
- $\mathbb{R}_+^*$ groupe de dilatations non-homogènes $a(x, y, t) = (ax, ay, a^2t) \qquad \mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \propto \mathbb{H}^n$

Extension de rang 1 de groupes homogènes - notations

- Groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(xy' + x'y))$$

mesure de Lebesgue=mesure de Haar

- Champs de vecteurs invariants à gauche

$$\mathcal{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \; i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

- $|.|$ norme non homogène, $Q = 2n + 1$ dimension homogène
- $\mathbb{R}_+^*$ groupe de dilatations non-homogènes $a(x, y, t) = (ax, ay, a^2 t) \quad \mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \propto \mathbb{H}^n$

Extension de rang 1 de groupes homogènes - notations

- Groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

  $$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(xy' + x'y))$$

  mesure de Lebesgue=mesure de Haar
- Champs de vecteurs invariants à gauche

  $$\mathcal{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \ i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

- $|.|$ norme non homogène, $Q = 2n + 1$ dimension homogène
- $\mathbb{R}_+^*$ groupe de dilatations non-homogènes
  $a(x, y, t) = (ax, ay, a^2 t) \quad \mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \propto \mathbb{H}^n$

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a\cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1+|x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha\mathbb{P}(x)| \leq C(1+|x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k\mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1+|a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a \cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1 + |x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1 + |a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a \cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1 + |x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1 + |a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a \cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1 + |x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1 + |a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a \cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1+|x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1+|x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1+|a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - noyau

- $\mathbb{P}$ noyau sur $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{P}_a(x) = a^{-Q}\mathbb{P}(a \cdot x)$ vérifie $\mathcal{R}_\Gamma$, $\Gamma \geq 1$:
  1. $\mathbb{P}(x) \simeq (1 + |x|)^{-Q-\Gamma}$
  2. $|X^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma-d(\alpha)}$
  3. $|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-Q-k}(1 + |a.x|)^{-Q-\Gamma}$
- $\mathcal{D}'_{L^1}$ défini comme ci-dessus (avec des dérivées invariantes)
- de même que la $\mathcal{S}'$-convolution.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - résultats

Théorème (Damek, Dziubanski, J, Pérez-Esteva)

$T \in \mathcal{S}'$ est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$ pour $a > 0$ si et seulement si $T \in (1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$.

$T * \mathbb{P}_a$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (a, x) qui converge vers T dans $\mathcal{S}'$ quand $a \to 0$.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - résultats

Théorème (Damek, Dziubanski, J, Pérez-Esteva)

$T \in \mathcal{S}'$ est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$ pour $a > 0$ si et seulement si $T \in (1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$.

$T * \mathbb{P}_a$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (a,x) qui converge vers T dans $\mathcal{S}'$ quand $a \to 0$.

Extension de rang 1 de groupes homogènes - résultats

Théorème (Damek, Dziubanski, J, Pérez-Esteva)

$T \in \mathcal{S}'$ est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$ pour $a > 0$ si et seulement si $T \in (1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$.

$T * \mathbb{P}_a$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (a, x) qui converge vers T dans $\mathcal{S}'$ quand $a \to 0$.

Motivation : boules euclidiennes et hyperboliques

- $\mathbb{B}_n$ boule de $\mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $d = 1$ $\rho = \frac{n-1}{2}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $d = 2$, $\rho = n$) et $\mathbb{S}^{nd-1}$ sphère unité. $N = r\frac{\partial}{\partial r}$ dérivée normale.
- u fonction sur $\mathbb{B}_n$ a une *distribution au bord* si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$,

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \text{ existe.}$$

- Si $\Delta u = 0$ et u a une distribution au bord, alors $\forall k$, $N^k u$ aussi !
- Si $D_{\mathbb{K}} u = 0$ (D_K Laplacien hyperbolique) et u a une distribution au bord, alors $\forall k < \rho$, $N^k u$ aussi !

Motivation : boules euclidiennes et hyperboliques

- $\mathbb{B}_n$ boule de $\mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $d = 1$ $\rho = \frac{n-1}{2}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $d = 2$, $\rho = n$) et $\mathbb{S}^{nd-1}$ sphère unité. $N = r\frac{\partial}{\partial r}$ dérivée normale.
- u fonction sur $\mathbb{B}_n$ a une *distribution au bord* si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$,

$$\lim_{r\to 1} \int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \text{ existe.}$$

- Si $\Delta u = 0$ et u a une distribution au bord, alors $\forall k$, $N^k u$ aussi !
- Si $D_{\mathbb{K}} u = 0$ (D_K Laplacien hyperbolique) et u a une distribution au bord, alors $\forall k < \rho$, $N^k u$ aussi !

Motivation : boules euclidiennes et hyperboliques

- $\mathbb{B}_n$ boule de $\mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $d = 1$ $\rho = \frac{n-1}{2}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $d = 2$, $\rho = n$) et $\mathbb{S}^{nd-1}$ sphère unité. $N = r\frac{\partial}{\partial r}$ dérivée normale.
- u fonction sur $\mathbb{B}_n$ a une *distribution au bord* si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$,
$$\lim_{r\to 1} \int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \text{ existe.}$$
- Si $\Delta u = 0$ et u a une distribution au bord, alors $\forall k$, $N^k u$ aussi !
- Si $D_{\mathbb{K}} u = 0$ (D_K Laplacien hyperbolique) et u a une distribution au bord, alors $\forall k < \rho$, $N^k u$ aussi !

Motivation : boules euclidiennes et hyperboliques

- $\mathbb{B}_n$ boule de $\mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $d=1$ $\rho=\frac{n-1}{2}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $d=2$, $\rho=n$) et $\mathbb{S}^{nd-1}$ sphère unité. $N=r\frac{\partial}{\partial r}$ dérivée normale.
- u fonction sur $\mathbb{B}_n$ a une *distribution au bord* si $\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$,

$$\lim_{r\to 1}\int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \text{ existe.}$$

- Si $\Delta u=0$ et u a une distribution au bord, alors $\forall k$, $N^k u$ aussi !
- Si $D_{\mathbb{K}}u=0$ (D_K Laplacien hyperbolique) et u a une distribution au bord, alors $\forall k<\rho$, $N^k u$ aussi !

boules hyperboliques : indice critique

Théorème (Bonami-Bruna-Grellier $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, J. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Soit u t.q. $D_{\mathbb{K}}u=0$ et u a une distribution au bord. Si $N^\rho u$ a aussi une distribution au bord, alors u est pluriharmonique (=constante si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

Décomposition en harmoniques sphériques : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,

$$u(r\zeta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{{}_2F_1\left(k,1-\frac{n}{2},k+\frac{n}{2},r^2\right)}_{\text{fonction hypergéométrique de Gauss}}u_k(r\zeta).$$

boules hyperboliques : indice critique

Théorème (Bonami-Bruna-Grellier $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, J. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Soit u t.q. $D_{\mathbb{K}}u=0$ et u a une distribution au bord. Si $N^\rho u$ a aussi une distribution au bord, alors u est pluriharmonique (=constante si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

Décomposition en harmoniques sphériques : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,

$$u(r\zeta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{{}_2F_1\left(k,1-\frac{n}{2},k+\frac{n}{2},r^2\right)}_{\text{fonction hypergéométrique de Gauss}}u_k(r\zeta).$$

boules hyperboliques : indice critique

Théorème (Bonami-Bruna-Grellier $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, J. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Soit u t.q. $D_{\mathbb{K}}u=0$ et u a une distribution au bord. Si $N^\rho u$ a aussi une distribution au bord, alors u est pluriharmonique (=constante si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

Décomposition en harmoniques sphériques : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,

$$u(r\zeta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{{}_2F_1\left(k,1-\frac{n}{2},k+\frac{n}{2},r^2\right)}_{\text{fonction hypergéométrique de Gauss}}u_k(r\zeta).$$

Groupe de Heisenberg

$\mathcal{S} \simeq \mathcal{U}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \mathrm{Im}\, z_{n+1} > \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right\}$. On définit les opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}$: $j = 1, \ldots, n$

$$Z_j = a^{1/2}(\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)/2 \quad Z_{n+1} = a(T - i\partial_a)/2$$

F fonction sur $\mathcal{S}$ est

- holomorphe si $\overline{Z}_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- antiholomorphe si $Z_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- pluriharmonique si $Z_k \overline{Z}_j F = 0$ pour $1 \leq j \neq k \leq n+1$, $Z_{n+1}\overline{Z}_{n+1} F = 0$ et $(Z_k \overline{Z}_k + 2i\overline{Z}_{n+1})F = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Groupe de Heisenberg

$\mathcal{S} \simeq \mathcal{U}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \mathrm{Im}\, z_{n+1} > \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right\}$. On définit les opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}$: $j = 1, \ldots, n$

$$Z_j = a^{1/2}(\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)/2 \quad Z_{n+1} = a(T - i\partial_a)/2$$

F fonction sur $\mathcal{S}$ est

- holomorphe si $\overline{Z}_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- antiholomorphe si $Z_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- pluriharmonique si $Z_k \overline{Z}_j F = 0$ pour $1 \leq j \neq k \leq n+1$, $Z_{n+1}\overline{Z}_{n+1}F = 0$ et $(Z_k\overline{Z}_k + 2i\overline{Z}_{n+1})F = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Groupe de Heisenberg

$\mathcal{S} \simeq \mathcal{U}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \mathrm{Im}\, z_{n+1} > \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right\}$. On définit les opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}$: $j = 1, \ldots, n$

$$Z_j = a^{1/2}(\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)/2 \quad Z_{n+1} = a(T - i\partial_a)/2$$

F fonction sur $\mathcal{S}$ est

- holomorphe si $\overline{Z}_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- antiholomorphe si $Z_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- pluriharmonique si $Z_k \overline{Z}_j F = 0$ pour $1 \leq j \neq k \leq n+1$, $Z_{n+1}\overline{Z}_{n+1} F = 0$ et $(Z_k \overline{Z}_k + 2i\overline{Z}_{n+1})F = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Groupe de Heisenberg

$\mathcal{S} \simeq \mathcal{U}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \mathrm{Im}\, z_{n+1} > \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right\}$. On définit les opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}$: $j = 1, \ldots, n$

$$Z_j = a^{1/2}(\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)/2 \quad Z_{n+1} = a(T - i\partial_a)/2$$

F fonction sur $\mathcal{S}$ est

- holomorphe si $\overline{Z}_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- antiholomorphe si $Z_j F = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1$,
- pluriharmonique si $Z_k \overline{Z}_j F = 0$ pour $1 \leq j \neq k \leq n+1$, $Z_{n+1}\overline{Z}_{n+1} F = 0$ et $(Z_k \overline{Z}_k + 2i\overline{Z}_{n+1})F = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord : $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

i

ii F pluriharmonique $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = (\mathcal{L}_0^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0.$

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord $:\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

1. F holomorphe $\Leftrightarrow \mathcal{L}_n f = 0$.
2. F pluriharmonique $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = (\mathcal{L}_0^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0$.

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord $:\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega,a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

1. F anti-holomorphe $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}f = 0$.
2. F pluriharmonique $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = (\mathcal{L}_0^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0.$

valeurs au bord

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T} \quad \text{sur } \mathbb{H}_n$$

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L}_0 + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2) \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

F L_α-harmonique bornée, f sa valeur au bord $:\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to_{a\to 0} \int f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

1. F anti-holomorphe $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}f = 0$.
2. F pluriharmonique $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = (\mathcal{L}_0^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0$.

Régularité maximale

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

- $\alpha > 0$ et $k = [n\alpha] + 1$.
- F L_α-harmonique bornée.

1. Pour $0 \leq p \leq k$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$
$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$
2. si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$
$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^{k+1} F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Régularité maximale

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

- $\alpha > 0$ et $k = [n\alpha] + 1$.
- F L_α-harmonique bornée.

1. Pour $0 \leq p \leq k$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

2. si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^{k+1} F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Régularité maximale

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

- $\alpha > 0$ et $k = [n\alpha] + 1$.
- F L_α-harmonique bornée.

1. Pour $0 \leq p \leq k$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

2. si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^{k+1} F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Régularité maximale

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

- $\alpha > 0$ et $k = [n\alpha] + 1$.
- F L_α-harmonique bornée.

1. Pour $0 \leq p \leq k$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

2. si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^{k+1} F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Régularité maximale

Théorème (Bonami, Buraczewski, Damek, Hulanicki, J.)

- $\alpha > 0$ et $k = [n\alpha] + 1$.
- F L_α-harmonique bornée.

1. Pour $0 \leq p \leq k$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

2. si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$

$$\sup_{a \leq 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^{k+1} F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Principes d'incertitude

Théorème d'échantillonage de Shannon

Théorème d'échantillonage de Shannon

$f \in L^2(\mathbb{R})$ à spectre $[-\Omega, \Omega]$, $h < \pi/\Omega$

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kh)\,\mathrm{sinc}\frac{\pi}{h}(t - kh).$$

On ne mesure pas tout l'échantillon, mais seulement les $kh \in [-T, T]$.

Idéal : f à support et à spectre compact.

Théorème d'échantillonage de Shannon

Théorème d'échantillonage de Shannon

$f \in L^2(\mathbb{R})$ à spectre $[-\Omega, \Omega]$, $h < \pi/\Omega$

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \mathrm{sinc} \frac{\pi}{h}(t - kh).$$

On ne mesure pas tout l'échantillon, mais seulement les $kh \in [-T, T]$.

Idéal : f à support et à spectre compact.

Théorème d'échantillonage de Shannon

Théorème d'échantillonage de Shannon

$f \in L^2(\mathbb{R})$ à spectre $[-\Omega, \Omega]$, $h < \pi/\Omega$

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kh)\mathrm{sinc}\frac{\pi}{h}(t - kh).$$

On ne mesure pas tout l'échantillon, mais seulement les $kh \in [-T, T]$.

Idéal : f à support et à spectre compact.

Équation de Shrödinger

Équation de Shrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t v + \frac{1}{4\pi}\partial_x^2 v = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

a pour solution

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\xi^2 t + 2i\pi x\xi}\,\widehat{v_0}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \left(e^{-i\pi\xi^2 t}\,\widehat{v_0}\right)^{\vee}.$$

Principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weil

Notations. $f \in L^2$,

— $\widehat{f}$ transformée de Fourier,

— $\mu(f)$ moyenne de $|f|^2\,dx$, $\Delta(f)$ dispersion.

Principe d'incertitude de Heisenberg

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$

$= \Leftrightarrow f = \gamma$, gaussienne.

Principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weil

Notations. $f \in L^2$,

- $\widehat{f}$ transformée de Fourier,
- $\mu(f)$ moyenne de $|f|^2\,\mathrm{d}x$, $\Delta(f)$ dispersion.

Principe d'incertitude de Heisenberg

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$
$= \Leftrightarrow f = \gamma$, gaussienne.

Principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weil

Notations. $f \in L^2$,

— $\widehat{f}$ transformée de Fourier,

— $\mu(f)$ moyenne de $|f|^2\,\mathrm{d}x$, $\Delta(f)$ dispersion.

Principe d'incertitude de Heisenberg

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$

$= \Leftrightarrow f = \gamma$, gaussienne.

Principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weil

Notations. $f \in L^2$,

— $\widehat{f}$ transformée de Fourier,

— $\mu(f)$ moyenne de $|f|^2\,\mathrm{d}x$, $\Delta(f)$ dispersion.

Principe d'incertitude de Heisenberg

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$
$= \Leftrightarrow f = \gamma$, gaussienne.

Démonstration

- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$ avec $\mu(f) = \mu(\widehat{f}) = 0$
- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) = \langle Hf, f\rangle$, H opérateur de Hermite.
- $\langle Hf, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2\pi}}_{\geq 1/2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2$.

$\rightarrow h_1$ est un optimum pour $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f})$ avec $f \perp h_0$.

Démonstration

- $\Delta^2(f)+\Delta^2(\widehat{f})\geq\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$ avec $\mu(f)=\mu(\widehat{f})=0$
- $\Delta^2(f)+\Delta^2(\widehat{f})=\langle Hf,f\rangle$, H opérateur de Hermite.
- $\langle Hf,f\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{2k+1}{2\pi}}_{\geq 1/2\pi}|\langle f,h_k\rangle|^2$.

$\rightarrow$ h_1 est un optimum pour $\Delta^2(f)+\Delta^2(\widehat{f})$ avec $f\perp h_0$.

Démonstration

- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$ avec $\mu(f) = \mu(\widehat{f}) = 0$
- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) = \langle Hf, f\rangle$, H opérateur de Hermite.
- $\displaystyle \langle Hf, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2.$

$\rightarrow$ h_1 est un optimum pour $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f})$ avec $f \perp h_0$.

Démonstration

- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$ avec $\mu(f) = \mu(\widehat{f}) = 0$
- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) = \langle Hf, f\rangle$, H opérateur de Hermite.
- $\langle Hf, f\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2\pi}}_{\geq 1/2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2$.

$\rightarrow$ h_1 est un optimum pour $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f})$ avec $f \perp h_0$.

Démonstration

- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$ avec $\mu(f) = \mu(\widehat{f}) = 0$
- $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) = \langle Hf, f\rangle$, H opérateur de Hermite.
- $\langle Hf, f\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2\pi}}_{\geq 1/2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2$.

$\rightarrow$ h_1 est un optimum pour $\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f})$ avec $f \perp h_0$.

Optimalité de la base de Hermite (J.-Powell)

Théorème (J.-Powell)

- $\{e_k\}_{k\geq 0}\subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\Delta^2(e_k)+\Delta^2(\widehat{e_k})+|\mu(e_k)|^2+|\mu(\widehat{e_k})|^2\right)\geq\frac{(n+1)^2}{2\pi}.$$

- $=$ pour $k=0,\ldots,n_0\Leftrightarrow e_k=c_kh_k$, $|c_k|=1$
- $\{e_k\}_{k\in I}\subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale t.q. $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$, $|\mu(e_k)|$, $|\mu(\widehat{e_k})|\leq C\Rightarrow \#I\leq 8\pi C^2$.

Optimalité de la base de Hermite (J.-Powell)

Théorème (J.-Powell)

- $\{e_k\}_{k\geq 0}\subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\Delta^2(e_k)+\Delta^2(\widehat{e_k})+|\mu(e_k)|^2+|\mu(\widehat{e_k})|^2\right)\geq\frac{(n+1)^2}{2\pi}.$$

- $=$ pour $k=0,\ldots,n_0\Leftrightarrow e_k=c_kh_k$, $|c_k|=1$
- $\{e_k\}_{k\in I}\subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale t.q. $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$, $|\mu(e_k)|$, $|\mu(\widehat{e_k})|\leq C\Rightarrow \#I\leq 8\pi C^2$.

Optimalité de la base de Hermite (J.-Powell)

Théorème (J.-Powell)

- $\{e_k\}_{k\geq 0} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale $\Rightarrow$
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^2(e_k) + \Delta^2(\widehat{e_k}) + |\mu(e_k)|^2 + |\mu(\widehat{e_k})|^2\right) \geq \frac{(n+1)^2}{2\pi}.$$
- $=$ pour $k = 0, \ldots, n_0 \Leftrightarrow e_k = c_k h_k$, $|c_k| = 1$
- $\{e_k\}_{k\in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale t.q. $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$, $|\mu(e_k)|$, $|\mu(\widehat{e_k})| \leq C \Rightarrow \# I \leq 8\pi C^2$.

Optimalité de la base de Hermite (J.-Powell)

Théorème (J.-Powell)

- $\{e_k\}_{k\geq 0} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\Delta^2(e_k)+\Delta^2(\widehat{e_k})+|\mu(e_k)|^2+|\mu(\widehat{e_k})|^2\right) \geq \frac{(n+1)^2}{2\pi}.$$

- $=$ pour $k=0,\ldots,n_0 \Leftrightarrow e_k = c_k h_k$, $|c_k|=1$
- $\{e_k\}_{k\in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale t.q. $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$, $|\mu(e_k)|$, $|\mu(\widehat{e_k})| \leq C \Rightarrow \#I \leq 8\pi C^2$.

Décroissance rapide (Hardy 1933)

Théorème de Hardy

$f \in L^2(\mathbb{R})$ $a, b > 0$. Supposons

1. $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.

- si $ab > 1$, $f = 0$
- si $ab = 1$ $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, P polynôme.

Décroissance rapide (Hardy 1933)

Théorème de Hardy

$f \in L^2(\mathbb{R})$ $a, b > 0$. Supposons

1. $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.

- si $ab > 1$, $f = 0$
- si $ab = 1$ $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, P polynôme.

Décroissance rapide (Hardy 1933)

Théorème de Hardy

$f \in L^2(\mathbb{R})$ $a, b > 0$. Supposons

1. $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.

- si $ab > 1$, $f = 0$
- si $ab = 1$ $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, P polynôme.

Décroissance rapide (Hardy 1933)

Théorème de Hardy

$f \in L^2(\mathbb{R})$ $a, b > 0$. Supposons

1. $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.

- si $ab > 1$, $f = 0$
- si $ab = 1$ $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, P polynôme.

Décroissance rapide (Hardy 1933)

Théorème de Hardy

$f \in L^2(\mathbb{R})$ $a, b > 0$. Supposons

1. $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.

- si $ab > 1$, $f = 0$
- si $ab = 1$ $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, P polynôme.

Extension

Théorème (Beurling-Hörmander)

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|x\xi|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty \Rightarrow f = 0.$$

Extension

Théorème (Bonami-Demange-J.)

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)\widehat{f}(\xi)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

$$\Rightarrow f = Pe^{-\langle Ax,x\rangle}.$$

Extension

Théorème (Demange 2004)

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ t.q. $e^{\pi|x|^2} f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $e^{\pi|\xi|^2}\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow f = P(x)e^{-\langle Ax,x\rangle}$, A matrice définie positive, P polynôme.

Thèse de B. Demange

Objectif : caractériser f t.q.

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)\widehat{f}(\xi)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

Thèse de B. Demange

Objectif : caractériser f, g t.q.

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)\widehat{g}(\xi)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)g(x)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

Thèse de B. Demange

Objectif : caractériser F t.q.

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |F(x,\xi)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\widehat{F}(x,\xi)| \frac{e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}}{(1+|x|+|\xi|)^N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty$$

Thèse de B. Demange

Objectif : caractériser F t.q.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,\xi)| \frac{e^{2\pi|Q(x,\xi)|}}{(1+|x|+|\xi|)^N} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi < +\infty$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{F}(x,\xi)| \frac{e^{2\pi|\widetilde{Q}(x,\xi)|}}{(1+|x|+|\xi|)^N} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi < +\infty$$

Théorème du parapluie

Théorème du parapluie (J.-Powell)

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. $\exists N = N(\varphi, \psi)$ t.q.

- $(e_k)_{k \in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale
- $\forall k \in I$, $|e_k| \leq \varphi$ et $|\widehat{e}_k| \leq \psi$,

alors $\# I \leq N$.

Théorème du parapluie

Théorème du parapluie (J.-Powell)

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. $\exists N = N(\varphi, \psi)$ t.q.

- $(e_k)_{k \in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale
- $\forall k \in I$, $|e_k| \leq \varphi$ et $|\widehat{e}_k| \leq \psi$,

alors $\# I \leq N$.

Théorème du parapluie

Théorème du parapluie (J.-Powell)

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. $\exists N = N(\varphi, \psi)$ t.q.

- $(e_k)_{k \in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale
- $\forall k \in I$, $|e_k| \leq \varphi$ et $|\widehat{e}_k| \leq \psi$,

alors $\# I \leq N$.

Théorème du parapluie

Théorème du parapluie (J.-Powell)

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. $\exists N = N(\varphi, \psi)$ t.q.

- $(e_k)_{k\in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale
- $\forall k \in I$, $|e_k| \leq \varphi$ et $|\widehat{e}_k| \leq \psi$,

alors $\#I \leq N$.

Théorème du parapluie

Théorème du parapluie (J.-Powell)

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. $\exists N = N(\varphi, \psi)$ t.q.

- $(e_k)_{k \in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ orthonormale
- $\forall k \in I$, $|e_k| \leq \varphi$ et $|\widehat{e}_k| \leq \psi$,

alors $\#I \leq N$.

Démonstration

- $\varepsilon > 0$ et $T, \Omega > 0$ t.q.

$$\int_{|x|>T} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon \quad , \quad \int_{|x|>\Omega} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

- Landau-Pollak-Slepian, $\exists\{\gamma_k\}$ b.o.n. $(e_k) \simeq P_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{[4T\Omega]}} e_k$
- coordonnées des e_k dans $\gamma_1, \ldots, \gamma_{[4T\Omega]} \to$ "code sphérique" dans $\mathbb{C}^{4T\Omega} \simeq \mathbb{R}^{8T\Omega}$.
- Un code sphérique est fini !

Démonstration

- $\varepsilon > 0$ et $T, \Omega > 0$ t.q.

$$\int_{|x|>T} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon \quad , \quad \int_{|x|>\Omega} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

- Landau-Pollak-Slepian, $\exists \{\gamma_k\}$ b.o.n. $(e_k) \simeq P_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{[4T\Omega]}} e_k$
- coordonnées des e_k dans $\gamma_1, \ldots, \gamma_{[4T\Omega]} \to$ "code sphérique" dans $\mathbb{C}^{4T\Omega} \simeq \mathbb{R}^{8T\Omega}$.
- Un code sphérique est fini !

Démonstration

- $\varepsilon > 0$ et $T, \Omega > 0$ t.q.

$$\int_{|x|>T} |\varphi(x)|^2 \, dx < \varepsilon \quad , \quad \int_{|x|>\Omega} |\psi(x)|^2 \, dx < \varepsilon$$

- Landau-Pollak-Slepian, $\exists \{\gamma_k\}$ b.o.n. $(e_k) \simeq P_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{[4T\Omega]}} e_k$
- coordonnées des e_k dans $\gamma_1, \ldots, \gamma_{[4T\Omega]} \to$ "code sphérique" dans $\mathbb{C}^{4T\Omega} \simeq \mathbb{R}^{8T\Omega}$.
- Un code sphérique est fini !

Démonstration

- $\varepsilon > 0$ et $T, \Omega > 0$ t.q.

$$\int_{|x|>T} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon \quad , \quad \int_{|x|>\Omega} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

- Landau-Pollak-Slepian, $\exists \{\gamma_k\}$ b.o.n. $(e_k) \simeq P_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{[4T\Omega]}} e_k$
- coordonnées des e_k dans $\gamma_1, \ldots, \gamma_{[4T\Omega]} \to$ "code sphérique" dans $\mathbb{C}^{4T\Omega} \simeq \mathbb{R}^{8T\Omega}$.
- Un code sphérique est fini !

Estimations sur les codes sphériques

$(e_1,\ldots,e_N)\in\mathbb{S}^{d-1}$ $[-\alpha,\alpha]$-code sphérique si $\langle e_i,e_j\rangle\in[-\alpha,\alpha]$.

- (indépendance linéaire) $\alpha<\frac{1}{d}\Rightarrow N\leq d$;
- (comptage de volume) $N\leq\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)^d$;
- (Delsarte-Goethals-Siedel) $\alpha<\frac{1}{\sqrt{d}}$ $N\leq\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 d}d$
- (J 20 ? ?) $\alpha=d^{(-1+\gamma)/2}/6$, $\gamma>0$ alors $N_{max}\geq e^{d^\gamma/C}$.

Estimations sur les codes sphériques

$(e_1,\dots,e_N)\in\mathbb{S}^{d-1}$ $[-\alpha,\alpha]$-code sphérique si $\langle e_i,e_j\rangle\in[-\alpha,\alpha]$.

- (indépendance linéaire) $\alpha<\frac{1}{d}\Rightarrow N\leq d$;
- (comptage de volume) $N\leq\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)^d$;
- (Delsarte-Goethals-Siedel) $\alpha<\frac{1}{\sqrt{d}}$ $N\leq\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 d}d$
- (J 20 ? ?) $\alpha=d^{(-1+\gamma)/2}/6$, $\gamma>0$ alors $N_{max}\geq e^{d^\gamma/C}$.

Estimations sur les codes sphériques

$(e_1, \ldots, e_N) \in \mathbb{S}^{d-1}$ $[-\alpha, \alpha]$-code sphérique si $\langle e_i, e_j \rangle \in [-\alpha, \alpha]$.

- (indépendance linéaire) $\alpha < \frac{1}{d} \Rightarrow N \leq d$;
- (comptage de volume) $N \leq \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)^d$;
- (Delsarte-Goethals-Siedel) $\alpha < \frac{1}{\sqrt{d}}$ $N \leq \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 d} d$
- (J 20 ? ?) $\alpha = d^{(-1+\gamma)/2}/6$, $\gamma > 0$ alors $N_{max} \geq e^{d^\gamma/C}$.

Estimations sur les codes sphériques

$(e_1, \ldots, e_N) \in \mathbb{S}^{d-1}$ $[-\alpha, \alpha]$-code sphérique si $\langle e_i, e_j \rangle \in [-\alpha, \alpha]$.

- (indépendance linéaire) $\alpha < \frac{1}{d} \Rightarrow N \leq d$;
- (comptage de volume) $N \leq \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)^d$;
- (Delsarte-Goethals-Siedel) $\alpha < \frac{1}{\sqrt{d}}$ $N \leq \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 d} d$
- (J 20 ? ?) $\alpha = d^{(-1+\gamma)/2}/6$, $\gamma > 0$ alors $N_{max} \geq e^{d^\gamma/C}$.

Reconstruction de Phase

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

(Difraction) $f = \widehat{\varphi}$, $\varphi \in L^2$ à support compact.

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

(Cristallographie) $f = \widehat{\varphi}$, $\varphi = \sum \rho_i \delta_{x_i}$.

Reconstruction de phase

Problème de la phase

Reconstruire f à partir de $|f|$

+ information a priori

(Ambiguïté Radar) $f = A(u)(x,y)$,

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t-\frac{x}{2}\right)\overline{u\left(t+\frac{x}{2}\right)}e^{2i\pi yt}\,\mathrm{d}t.$$

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$ entières de type exponentiel (Paley Wiener).

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{\varphi}(z) = \kappa z^m e^{bz} \prod \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}}$$

$\mathcal{Z}(\widehat{\varphi}) = \{z_k\}$ zéros de $\widehat{\varphi}$ (Factorisation de Hadamard).

Problème de la phase en dimension 1

Problème de la phase en dimension 1

- $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact,
- Trouver $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\psi}(\xi)| = |\widehat{\varphi}(\xi)|$.
- Solution triviale $\psi = c\varphi(\pm x - a)$, $|c| = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Théorème de Walter

$$\widehat{\psi}(z) = \kappa e^{i\alpha} z^m e^{(b+i\beta)z} \prod \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right) e^{\frac{z}{\zeta_k}}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall k,\ \zeta_k \in \{z_k, \overline{z_k}\}$

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $|\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $|\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d \ |\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $|\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $|\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Questions

- En dimension $d \geq 2$?
  - Cas radial : Lawton
  - Cas des fonctions caratéristiques de convexes :

Problème du covariogramme

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont convexes t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d \ |\mathcal{C} \cap (\mathcal{C} - x)| = |\mathcal{C}' \cap (\mathcal{C}' - x)|$, a-t-on $\mathcal{C}' = \pm\mathcal{C} - a$?

- Seconde mesure ? (ex problème de Pauli)
- Troisième mesure ?

Autre mesure : triple-corrélation

$$|\widehat{f}|^2 = \widehat{N_f^{(2)}} \text{ avec } N_f^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Problème de la triple corrélation

$f \geq 0$, $N_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-x)f(t-y)\,\mathrm{d}t$.

- A-t-on $N_g = N_f \Rightarrow g(t) = f(t-a)$?
- A-t-on $N_{\chi_F} = N_{\chi_E} \Rightarrow F = E - a$?

Autre mesure : triple-corrélation

$$|\widehat{f}|^2 = \widehat{N_f^{(2)}} \text{ avec } N_f^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Problème de la triple corrélation

$f \geq 0$, $N_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-x)f(t-y)\,\mathrm{d}t.$

- A-t-on $N_g = N_f \Rightarrow g(t) = f(t-a)$?
- A-t-on $N_{\chi_F} = N_{\chi_E} \to F = E - a$?

Autre mesure : triple-corrélation

$$|\widehat{f}|^2 = \widehat{N_f^{(2)}} \text{ avec } N_f^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Problème de la triple corrélation

$f \geq 0$, $N_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-x)f(t-y)\,\mathrm{d}t$.

- A-t-on $N_g = N_f \Rightarrow g(t) = f(t-a)$?
- A-t-on $N_{\chi_F} = N_{\chi_E} \to F = E - a$?

Autre mesure : triple-corrélation

$$|\widehat{f}|^2 = \widehat{N_f^{(2)}} \text{ avec } N_f^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Problème de la triple corrélation

$f \geq 0$, $N_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-x)f(t-y)\,\mathrm{d}t$.

- A-t-on $N_g = N_f \Rightarrow g(t) = f(t-a)$?
- A-t-on $N_{\chi_F} = N_{\chi_E} \to F = E - a$?

triple-corrélation : résultats

$\widehat{g}(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$ avec $\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
$\xi, \eta, \xi+\eta \in \operatorname{supp} \widehat{f}$

Théorème (J.-Kolountzakis)

- Si f à support compact, $g(t) = f(t-a)$.
- $\exists f$ t.q. $\exists$ une infinité de g t.q. $N_g = N_f$.
- Si $f = \chi_E$ alors $g = \chi_F$.
- Pour $E = \bigcup [k - a_k, k + a_k]$ et si $N_{\chi_F} = N_{\chi_E}$ alors $F = E - a$.

triple-corrélation : résultats

$\widehat{g}(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$ avec $\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
$\xi, \eta, \xi+\eta \in \operatorname{supp} \widehat{f}$

Théorème (J.-Kolountzakis)

- Si f à support compact, $g(t) = f(t-a)$.
- $\exists f$ t.q. $\exists$ une infinité de g t.q. $N_g = N_f$.
- Si $f = \chi_E$ alors $g = \chi_F$.
- Pour $E = \bigcup [k - a_k, k + a_k]$ et si $N_{\chi_F} = N_{\chi_E}$ alors $F = E - a$.

triple-corrélation : résultats

$$\widehat{g}(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi) \text{ avec } \varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta),$$
$$\xi, \eta, \xi+\eta \in \operatorname{supp} \widehat{f}$$

Théorème (J.-Kolountzakis)

- Si f à support compact, $g(t) = f(t-a)$.
- $\exists f$ t.q. $\exists$ une infinité de g t.q. $N_g = N_f$.
- Si $f = \chi_E$ alors $g = \chi_F$.
- Pour $E = \bigcup [k - a_k, k + a_k]$ et si $N_{\chi_F} = N_{\chi_E}$ alors $F = E - a$.

triple-corrélation : résultats

$\widehat{g}(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$ avec $\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
$\xi, \eta, \xi+\eta \in \operatorname{supp} \widehat{f}$

Théorème (J.-Kolountzakis)

- Si f à support compact, $g(t) = f(t-a)$.
- $\exists f$ t.q. $\exists$ une infinité de g t.q. $N_g = N_f$.
- Si $f = \chi_E$ alors $g = \chi_F$.
- Pour $E = \bigcup [k - a_k, k + a_k]$ et si $N_{\chi_F} = N_{\chi_E}$ alors $F = E - a$.

triple-corrélation : résultats

$\widehat{g}(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$ avec $\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
$\xi, \eta, \xi+\eta \in \operatorname{supp} \widehat{f}$

Théorème (J.-Kolountzakis)

- Si f à support compact, $g(t) = f(t-a)$.
- $\exists f$ t.q. $\exists$ une infinité de g t.q. $N_g = N_f$.
- Si $f = \chi_E$ alors $g = \chi_F$.
- Pour $E = \bigcup [k - a_k, k + a_k]$ et si $N_{\chi_F} = N_{\chi_E}$ alors $F = E - a$.

Problème d'ambiguïté radar

Problème d'ambiguïté radar

- Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ on définit la *fonction d'ambiguïté radar*

$$A(u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t - \frac{x}{2}\right) \overline{u\left(t + \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi yt} \mathrm{d}t$$

- On cherche tous les $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$|A(v)(x,y)| = |A(u)(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- v appelé *partenaire d'ambiguïté* de u

Problème d'ambiguïté radar

Problème d'ambiguïté radar

- Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ on définit la *fonction d'ambiguïté radar*

$$A(u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t - \frac{x}{2}\right) \overline{u\left(t + \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi yt} \mathrm{d}t$$

- On cherche tous les $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$|A(v)(x,y)| = |A(u)(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- v appelé *partenaire d'ambiguïté* de u

Problème d'ambiguïté radar

Problème d'ambiguïté radar

- Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ on définit la *fonction d'ambiguïté radar*

$$A(u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t - \frac{x}{2}\right) \overline{u\left(t + \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi yt} \mathrm{d}t$$

- On cherche tous les $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$|A(v)(x,y)| = |A(u)(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- v appelé *partenaire d'ambiguïté* de u

Problème d'ambiguïté radar

Problème d'ambiguïté radar

- Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ on définit la *fonction d'ambiguïté radar*

$$A(u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t - \frac{x}{2}\right) \overline{u\left(t + \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi yt} \mathrm{d}t$$

- On cherche tous les $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$|A(v)(x,y)| = |A(u)(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- v appelé *partenaire d'ambiguïté* de u

Problème d'ambiguïté radar

- Partenaires triviaux : $v(t) = ce^{2i\pi bt}u(\pm t - a)$, $|c| = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Les autres partenaires sont dits *étranges*.
- J. 1998 : caractérisation des partenaires quand u à support compact *sans zéro-flipping*

Problème d'ambiguïté radar

- Partenaires triviaux : $v(t) = ce^{2i\pi bt}u(\pm t - a)$, $|c| = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Les autres partenaires sont dits *étranges*.
- J. 1998 : caractérisation des partenaires quand u à support compact *sans zéro-flipping*

Problème d'ambiguïté radar

- Partenaires triviaux : $v(t) = ce^{2i\pi bt}u(\pm t - a)$, $|c| = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Les autres partenaires sont dits *étranges*.
- J. 1998 : caractérisation des partenaires quand u à support compact *sans zéro-flipping*

Première discrétisation - Problème

Problème d'ambiguïté pour les fonctions de Hermite

Soit $u = P(x)e^{-\pi x^2}$, P polynôme. Trouver tous les partenaires de v.

Première discrétisation - résultats

- $v = Q(x)e^{-\pi x^2}$, $d(Q) = d(P)$
- On écrit u, v dans la base de Hermite $u = \sum \alpha_j H_j$ (idem pour u), puis on leur associe $\mathcal{P} = \sum \alpha_j t^j$ (idem pour v) et alors

$$A(u)(x,y) = \sum \frac{2^{-j}}{j} \mathcal{P}^{(j)}(Z)\overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)}e^{\pi|Z|^2/4} \qquad Z = x + iy$$

Théorème (Bonami-Garrigós-J.)

- Pour presque tout et quasi tout polynôme P, $u = P(x)e^{-\pi x^2}$ n'a que des partenaires triviaux
- L'ensemble des fonctions qui n'ont pas de partenaires étranges est dense dans L^2.

Première discrétisation - résultats

- $v = Q(x)e^{-\pi x^2}$, $d(Q) = d(P)$
- On écrit u, v dans la base de Hermite $u = \sum \alpha_j H_j$ (idem pour u), puis on leur associe $\mathcal{P} = \sum \alpha_j t^j$ (idem pour v) et alors

$$A(u)(x,y) = \sum \frac{2^{-j}}{j} \mathcal{P}^{(j)}(Z)\overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)}e^{\pi |Z|^2/4} \qquad Z = x + iy$$

Théorème (Bonami-Garrigós-J.)

- Pour presque tout et quasi tout polynôme P, $u = P(x)e^{-\pi x^2}$ n'a que des partenaires triviaux
- L'ensemble des fonctions qui n'ont pas de partenaires étranges est dense dans L^2.

Première discrétisation - résultats

- $v = Q(x)e^{-\pi x^2}$, $d(Q) = d(P)$
- On écrit u, v dans la base de Hermite $u = \sum \alpha_j H_j$ (idem pour u), puis on leur associe $\mathcal{P} = \sum \alpha_j t^j$ (idem pour v) et alors

$$A(u)(x,y) = \sum \frac{2^{-j}}{j} \mathcal{P}^{(j)}(Z)\overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)}e^{\pi |Z|^2/4} \qquad Z = x + iy$$

Théorème (Bonami-Garrigós-J.)

- Pour presque tout et quasi tout polynôme P, $u = P(x)e^{-\pi x^2}$ n'a que des partenaires triviaux
- L'ensemble des fonctions qui n'ont pas de partenaires étranges est dense dans L^2.

Première discrétisation - résultats

- $v = Q(x)e^{-\pi x^2}$, $d(Q) = d(P)$
- On écrit u, v dans la base de Hermite $u = \sum \alpha_j H_j$ (idem pour u), puis on leur associe $\mathcal{P} = \sum \alpha_j t^j$ (idem pour v) et alors

$$A(u)(x,y) = \sum \frac{2^{-j}}{j} \mathcal{P}^{(j)}(Z)\overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)}e^{\pi|Z|^2/4} \qquad Z = x + iy$$

Théorème (Bonami-Garrigós-J.)

- Pour presque tout et quasi tout polynôme P, $u = P(x)e^{-\pi x^2}$ n'a que des partenaires triviaux
- L'ensemble des fonctions qui n'ont pas de partenaires étranges est dense dans L^2.

Première discrétisation - résultats

- $v = Q(x)e^{-\pi x^2}$, $d(Q) = d(P)$
- On écrit u, v dans la base de Hermite $u = \sum \alpha_j H_j$ (idem pour u), puis on leur associe $\mathcal{P} = \sum \alpha_j t^j$ (idem pour v) et alors

$$A(u)(x,y) = \sum \frac{2^{-j}}{j} \mathcal{P}^{(j)}(Z)\overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)} e^{\pi|Z|^2/4} \qquad Z = x + iy$$

Théorème (Bonami-Garrigós-J.)

- Pour presque tout et quasi tout polynôme P, $u = P(x)e^{-\pi x^2}$ n'a que des partenaires triviaux
- L'ensemble des fonctions qui n'ont pas de partenaires étranges est dense dans L^2.

Deuxième discrétisation - problème

Problème d'ambiguïté pour les trains d'onde

- Soit $u = \sum \alpha_j H(t-j)$, $H \in L^2$ à support $[0, 1/2]$ et $x \in [k - 1/2, k + 1/2]$

$$A(u)(x,y) = \underbrace{\sum_j \alpha_j \overline{\alpha_{j-k}} e^{2i\pi jy}}_{\mathcal{A}(\alpha)(k,y)} A(H)(x-k,y)$$

- Trouver β t.q. $\forall k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{T}$, $|\mathcal{A}(\beta)(k,y)| = |\mathcal{A}(\alpha)(k,y)|$
- Solutions triviales $b_j = ce^{i\omega j} a_{\pm j-k}$, $|c| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Les autres sont appelés partenaires étranges.

Deuxième discrétisation - problème

Problème d'ambiguïté pour les trains d'onde

- Soit $u = \sum \alpha_j H(t-j)$, $H \in L^2$ à support $[0,1/2]$ et $x \in [k-1/2, k+1/2]$

$$A(u)(x,y) = \underbrace{\sum_j \alpha_j \overline{\alpha_{j-k}} e^{2i\pi jy}}_{\mathcal{A}(\alpha)(k,y)} A(H)(x-k,y)$$

- Trouver β t.q. $\forall k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{T}$, $|\mathcal{A}(\beta)(k,y)| = |\mathcal{A}(\alpha)(k,y)|$
- Solutions triviales $b_j = ce^{i\omega j} a_{\pm j-k}$, $|c| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Les autres sont appelés partenaires étranges.

Deuxième discrétisation - problème

Problème d'ambiguïté pour les trains d'onde

- Soit $u = \sum \alpha_j H(t-j)$, $H \in L^2$ à support $[0, 1/2]$ et $x \in [k-1/2, k+1/2]$

$$A(u)(x,y) = \underbrace{\sum_j \alpha_j \overline{\alpha_{j-k}} e^{2i\pi jy}}_{\mathcal{A}(\alpha)(k,y)} A(H)(x-k,y)$$

- Trouver β t.q. $\forall k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{T}$, $|\mathcal{A}(\beta)(k,y)| = |\mathcal{A}(\alpha)(k,y)|$
- Solutions triviales $b_j = ce^{i\omega j} a_{\pm j-k}$, $|c| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Les autres sont appelés partenaires étranges.

Deuxième discrétisation - problème

Problème d'ambiguïté pour les trains d'onde

- Soit $u = \sum \alpha_j H(t-j)$, $H \in L^2$ à support $[0, 1/2]$ et $x \in [k-1/2, k+1/2]$

$$A(u)(x,y) = \underbrace{\sum_j \alpha_j \overline{\alpha_{j-k}} e^{2i\pi jy}}_{\mathcal{A}(\alpha)(k,y)} A(H)(x-k,y)$$

- Trouver β t.q. $\forall k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{T}$, $|\mathcal{A}(\beta)(k,y)| = |\mathcal{A}(\alpha)(k,y)|$
- Solutions triviales $b_j = ce^{i\omega j} a_{\pm j-k}$, $|c| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Les autres sont appelés partenaires étranges.

Deuxième discrétisation - problème

Problème d'ambiguïté pour les trains d'onde

- Soit $u = \sum \alpha_j H(t-j)$, $H \in L^2$ à support $[0,1/2]$ et $x \in [k-1/2, k+1/2]$

$$A(u)(x,y) = \underbrace{\sum_j \alpha_j \overline{\alpha_{j-k}} e^{2i\pi jy}}_{\mathcal{A}(\alpha)(k,y)} A(H)(x-k,y)$$

- Trouver β t.q. $\forall k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{T}$, $|\mathcal{A}(\beta)(k,y)| = |\mathcal{A}(\alpha)(k,y)|$
- Solutions triviales $b_j = ce^{i\omega j} a_{\pm j-k}$, $|c| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Les autres sont appelés partenaires étranges.

Deuxième discrétisation - reformulation

Le problème est équivalent à $\mathbb{K}_\alpha^*\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_\beta^*\mathbb{K}_\beta$ où $\mathbb{K}_\alpha = [\gamma_{j,k}]$ (*matrice d'ambiguïté* de α) avec

$$\gamma_{j,k} = \begin{cases} \alpha_{(j+k)/2}\alpha_{(j-k)/2} & j,k \text{ de même parité} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} & & & & \alpha_0^2 & & & & \\ & & & \alpha_0\alpha_1 & 0 & \alpha_0\alpha_1 & & & \\ & & \alpha_0\alpha_2 & 0 & \alpha_1^2 & 0 & \alpha_0\alpha_2 & & \\ & \alpha_0\alpha_3 & 0 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_0\alpha_3 & \\ \alpha_0\alpha_4 & 0 & \alpha_1\alpha_3 & 0 & \alpha_2^2 & 0 & \alpha_1\alpha_3 & 0 & \alpha_0\alpha_4 \\ & \alpha_1\alpha_4 & 0 & \alpha_2\alpha_3 & 0 & \alpha_2\alpha_3 & 0 & \alpha_1\alpha_4 & \\ & & \alpha_2\alpha_4 & 0 & \alpha_3^2 & 0 & \alpha_2\alpha_4 & & \\ & & & \alpha_3\alpha_4 & 0 & \alpha_3\alpha_4 & & & \\ & & & & \alpha_4^2 & & & & \end{bmatrix}$$

Deuxième discrétisation - reformulation

Le problème est équivalent à $\mathbb{K}_\alpha^*\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_\beta^*\mathbb{K}_\beta$ où $\mathbb{K}_\alpha = [\gamma_{j,k}]$ (*matrice d'ambiguïté* de α) avec

$$\gamma_{j,k} = \begin{cases} \alpha_{(j+k)/2}\alpha_{(j-k)/2} & j,k \text{ de même parité} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$K_\alpha = \begin{bmatrix}
 & & & & \alpha_0^2 & & & & \\
 & & & \alpha_0\alpha_1 & 0 & \alpha_0\alpha_1 & & & \\
 & & \alpha_0\alpha_2 & 0 & \alpha_1^2 & 0 & \alpha_0\alpha_2 & & \\
 & \alpha_0\alpha_3 & 0 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_0\alpha_3 & \\
\alpha_0\alpha_4 & 0 & \alpha_1\alpha_3 & 0 & \alpha_2^2 & 0 & \alpha_1\alpha_3 & 0 & \alpha_0\alpha_4 \\
 & \alpha_1\alpha_4 & 0 & \alpha_2\alpha_3 & 0 & \alpha_2\alpha_3 & 0 & \alpha_1\alpha_4 & \\
 & & \alpha_2\alpha_4 & 0 & \alpha_3^2 & 0 & \alpha_2\alpha_4 & & \\
 & & & \alpha_3\alpha_4 & 0 & \alpha_3\alpha_4 & & & \\
 & & & & \alpha_4^2 & & & &
\end{bmatrix}$$

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α, α') (β, β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha \otimes \beta$ et $\alpha' \otimes \beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t) = \sum \alpha_j \chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α, α') (β, β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha \otimes \beta$ et $\alpha' \otimes \beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t) = \sum \alpha_j \chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α,α') (β,β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha\otimes\beta$ et $\alpha'\otimes\beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t)=\sum \alpha_j\chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α, α') (β, β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha \otimes \beta$ et $\alpha' \otimes \beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t) = \sum \alpha_j \chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α,α') (β,β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha\otimes\beta$ et $\alpha'\otimes\beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t) = \sum \alpha_j \chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.

Deuxième discrétisation - résultats

Théorème (Bonami-Garrigós-J.-Poly)

- $\mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_{\alpha\otimes\beta}$
- (α, α') (β, β') couples de partenaires (même triviaux) $\Rightarrow \alpha \otimes \beta$ et $\alpha' \otimes \beta'$ partenaires étranges en général !
- L'ensemble des fonctions ayant des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Presque toute et quasi toute suite de longueur n n'a que des partenaires triviaux.
- Si $u(t) = \sum \alpha_j \chi_{[0,1/3]}$ alors u n'a pas que des partenaires triviaux $\Leftrightarrow \alpha$ n'a que des partenaires triviaux.