# Quelques paires annihilantes en analyse harmonique

Philippe Jaming

IMB- Université Bordeaux 1
avec S. Ghobber (Tunis)

Créteil, SCAM novembre 2011

## Definition

– $T$ un opérateur $L^2(\Omega) \to L^2(\hat{\Omega})$,
– $S \subset \Omega$, $\Sigma \subset \hat{\Omega}$

On dit que $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $T$ si

$$\operatorname{supp} f \subset S \ \& \ \operatorname{supp} Tf \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

On dit que $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant pour $T$ si

$$\|f\| \leq C(S, \Sigma)\Big(\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|Tf\mathbf{1}_{\hat{\Omega}\setminus\Sigma}\big\|_{L^2(\hat{\Omega})}\Big).$$

$\Leftrightarrow \forall f$ t.q. $\operatorname{supp} Tf \subset \Sigma$,

$$\|f\| \leq C'(S, \Sigma)\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

## Definition

– $T$ un opérateur $L^2(\Omega) \to L^2(\hat{\Omega})$,
– $S \subset \Omega$, $\Sigma \subset \hat{\Omega}$

On dit que $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $T$ si

$$\operatorname{supp} f \subset S \;\&\; \operatorname{supp} Tf \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

On dit que $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant pour $T$ si

$$\|f\| \leq C(S,\Sigma)\Big(\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|Tf\mathbf{1}_{\hat{\Omega}\setminus\Sigma}\big\|_{L^2(\hat{\Omega})}\Big).$$

$\Leftrightarrow \forall f$ t.q. $\operatorname{supp} Tf \subset \Sigma$,

$$\|f\| \leq C'(S,\Sigma)\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

## Definition

– $T$ un opérateur $L^2(\Omega) \to L^2(\hat{\Omega})$,
– $S \subset \Omega$, $\Sigma \subset \hat{\Omega}$
On dit que $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $T$ si

$$\mathrm{supp}\, f \subset S \ \&\ \mathrm{supp}\, Tf \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

On dit que $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant pour $T$ si

$$\|f\| \leq C(S, \Sigma)\Big(\big\|f\mathbf{1}_{\Omega \setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|Tf\mathbf{1}_{\hat{\Omega} \setminus \Sigma}\big\|_{L^2(\hat{\Omega})}\Big).$$

$\Leftrightarrow \forall f$ t.q. $\mathrm{supp}\, Tf \subset \Sigma$,

$$\|f\| \leq C'(S, \Sigma)\big\|f\mathbf{1}_{\Omega \setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

## Definition

– $T$ un opérateur $L^2(\Omega) \to L^2(\hat{\Omega})$,
– $S \subset \Omega$, $\Sigma \subset \hat{\Omega}$
On dit que $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $T$ si

$$\operatorname{supp} f \subset S \ \& \ \operatorname{supp} Tf \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

On dit que $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant pour $T$ si

$$\|f\| \leq C(S, \Sigma)\Big(\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|Tf\mathbf{1}_{\hat{\Omega}\setminus\Sigma}\big\|_{L^2(\hat{\Omega})}\Big).$$

$\Leftrightarrow \forall f$ t.q. $\operatorname{supp} Tf \subset \Sigma$,

$$\|f\| \leq C'(S, \Sigma)\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

## Definition

– $T$ un opérateur $L^2(\Omega) \to L^2(\hat{\Omega})$,
– $S \subset \Omega$, $\Sigma \subset \hat{\Omega}$

On dit que $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $T$ si

$$\operatorname{supp} f \subset S \ \& \ \operatorname{supp} Tf \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

On dit que $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant pour $T$ si

$$\|f\| \leq C(S, \Sigma)\Big(\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|Tf\mathbf{1}_{\hat{\Omega}\setminus\Sigma}\big\|_{L^2(\hat{\Omega})}\Big).$$

$\Leftrightarrow \forall f$ t.q. $\operatorname{supp} Tf \subset \Sigma$,

$$\|f\| \leq C'(S, \Sigma)\big\|f\mathbf{1}_{\Omega\setminus S}\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)**

– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

– $T = \mathcal{F}_n$ *transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

– $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, n-1\}$ *avec* $|S||\Sigma| < n$.

*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \left( \|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \Sigma)} \right).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

**Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)**

– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

– $T = \mathcal{F}_n$ *transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

– $S, \Sigma \subset \{0, \dots, n-1\}$ *avec* $|S||\Sigma| < n$.

*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \left( \|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \Sigma)} \right).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

**Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)**

– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
– $T = \mathcal{F}_n$ *transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

– $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, n-1\}$ *avec* $|S||\Sigma| < n$.
*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \Sigma)}\right).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

**Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)**

– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
– $T = \mathcal{F}_n$ *transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

– $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, n-1\}$ *avec* $|S||\Sigma| < n$.
*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \left( \|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \Sigma)} \right).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

### Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)

– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
– $T = \mathcal{F}_n$ *transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

– $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, n-1\}$ *avec* $|S||\Sigma| < n$.
*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \big(\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus\Sigma)}\big).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

**Theorem (Matolcsi-Sucks (Donoho-Stark)/ Ghobber-J.)**

*– $\Omega = \hat{\Omega} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
*– $T = \mathcal{F}_n$ transformée de Fourier discrète*

$$\mathcal{F}_n[f](k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2i\pi jk/n}$$

*– $S, \Sigma \subset \{0, \ldots, n-1\}$ avec $|S||\Sigma| < n$.*
*Alors*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \leq \frac{2}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/n}} \big(\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S)} + \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus\Sigma)}\big).$$

$S = \{0\}$, $f = \delta_0$, $\mathcal{F}_n[f](k) = 1$ montre que $|S||\Sigma| < n$ est optimal.

**Démonstration :** $E_S f(k) = f(k)\mathbf{1}_S(k)$,

$$F_\Sigma f(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[f](k) e^{2i\pi jk/n} = \mathcal{F}_n^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma \cdot \mathcal{F}_n[f]\big](j)$$

projections orthogonales.

$$\begin{aligned} F_\Sigma E_S f(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[P_S f](k) e^{2i\pi jk/n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Sigma} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_S(\ell) f(\ell) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( \mathbf{1}_S(\ell) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \right) f(\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_S(\ell) \mathcal{F}_n[\mathbf{1}_\Sigma](\ell - j)}{\sqrt{n}} f(\ell). \end{aligned}$$

**Démonstration :** $E_S f(k) = f(k)\mathbf{1}_S(k)$,

$$F_\Sigma f(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[f](k) e^{2i\pi jk/n} = \mathcal{F}_n^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma \cdot \mathcal{F}_n[f]\big](j)$$

projections orthogonales.

$$\begin{aligned} F_\Sigma E_S f(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[P_S f](k) e^{2i\pi jk/n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Sigma} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_S(\ell) f(\ell) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( \mathbf{1}_S(\ell) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \right) f(\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_S(\ell) \mathcal{F}_n[\mathbf{1}_\Sigma](\ell-j)}{\sqrt{n}} f(\ell). \end{aligned}$$

**Démonstration :** $E_S f(k) = f(k)\mathbf{1}_S(k)$,

$$F_\Sigma f(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[f](k) e^{2i\pi jk/n} = \mathcal{F}_n^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma \cdot \mathcal{F}_n[f]\big](j)$$

projections orthogonales.

$$\begin{aligned}
F_\Sigma E_S f(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[P_S f](k) e^{2i\pi jk/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Sigma} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_S(\ell) f(\ell) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( \mathbf{1}_S(\ell) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \right) f(\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_S(\ell)\mathcal{F}_n[\mathbf{1}_\Sigma](\ell - j)}{\sqrt{n}} f(\ell).
\end{aligned}$$

**Démonstration :** $E_S f(k) = f(k)\mathbf{1}_S(k)$,

$$F_\Sigma f(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[f](k) e^{2i\pi jk/n} = \mathcal{F}_n^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma \cdot \mathcal{F}_n[f]\big](j)$$

projections orthogonales.

$$\begin{aligned}
F_\Sigma E_S f(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[P_S f](k) e^{2i\pi jk/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Sigma} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_S(\ell) f(\ell) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( \mathbf{1}_S(\ell) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \right) f(\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_S(\ell)\mathcal{F}_n[\mathbf{1}_\Sigma](\ell-j)}{\sqrt{n}} f(\ell).
\end{aligned}$$

**Démonstration :** $E_S f(k) = f(k)\mathbf{1}_S(k)$,

$$F_\Sigma f(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[f](k) e^{2i\pi jk/n} = \mathcal{F}_n^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma \cdot \mathcal{F}_n[f]\big](j)$$

projections orthogonales.

$$\begin{aligned}
F_\Sigma E_S f(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\in\Sigma} \mathcal{F}_n[P_S f](k) e^{2i\pi jk/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Sigma} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_S(\ell) f(\ell) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( \mathbf{1}_S(\ell) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) e^{2i\pi k(j-\ell)/n} \right) f(\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_S(\ell) \mathcal{F}_n[\mathbf{1}_\Sigma](\ell-j)}{\sqrt{n}} f(\ell).
\end{aligned}$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\begin{aligned}\|f\| &\leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}E_S f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\\ &\leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c}f)\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\\ &\leq \tfrac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\end{aligned}$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\begin{aligned}\|f\| &\leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} E_S f\| + \|E_{S^c} f\|\Big) \\ &\leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c} f)\| + \|E_{S^c} f\|\Big) \\ &\leq \tfrac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\end{aligned}$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\|f\| \leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} E_S f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)$$

$$\leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c} f)\| + \|E_{S^c} f\|\Big)$$

$$\leq \frac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\begin{aligned}\|f\| &\leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}E_S f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\\ &\leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c}f)\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\\ &\leq \frac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)\end{aligned}$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\|f\| \leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}E_S f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)$$

$$\leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c}f)\| + \|E_{S^c}f\|\Big)$$

$$\leq \frac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}f\| + \|E_{S^c}f\|\Big)$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \leq \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\begin{aligned}\|f\| &\leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} E_S f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\\ &\leq \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c} f)\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\\ &\leq \tfrac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\end{aligned}$$

$$\|F_\Sigma E_S\| \le \|\mathbb{F}_\Sigma P_S\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/n} < 1$$

$\Rightarrow T = I - F_\Sigma E_S$ est inversible avec

$$\left\|T^{-1}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|F_\Sigma E_S\|^k \le \frac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}.$$

$I = E_S + E_{S^c} = F_\Sigma E_S + F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ donc $T = F_{\Sigma^c} E_S + E_{S^c}$ et

$$\begin{aligned}\|f\| &\le \|T^{-1}\|\|Tf\| \le \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} E_S f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\\ &\le \tfrac{1}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c} f)\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\\ &\le \tfrac{2}{1-\sqrt{|S||\Sigma|/n}}\Big(\|F_{\Sigma^c} f\| + \|E_{S^c} f\|\Big)\end{aligned}$$

**Definition**

$f$ is $(C,\alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

**Corollary**

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1)^{\alpha-1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C,\alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$1 \leq \dfrac{4}{1 - k/\sqrt{n}} \dfrac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$ et on minimise sur $k$.

**Definition**

$f$ is $(C, \alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

**Corollary**

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1)^{\alpha - 1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C, \alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$$1 \leq \frac{4}{1 - k/\sqrt{n}} \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$$ et on minimise sur $k$.

## Definition

$f$ is $(C,\alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

## Corollary

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{([\sqrt{n}]-1)^{\alpha-1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C,\alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$$1 \leq \frac{4}{1-k/\sqrt{n}}\frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$$ et on minimise sur $k$.

### Definition

$f$ is $(C,\alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

### Corollary

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{([\sqrt{n}]-1)^{\alpha-1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C,\alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$$1 \leq \frac{4}{1-k/\sqrt{n}} \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$$ et on minimise sur $k$.

## Definition

$f$ is $(C,\alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

## Corollary

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{([\sqrt{n}]-1)^{\alpha-1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C,\alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$$1 \leq \frac{4}{1-k/\sqrt{n}}\frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$$ et on minimise sur $k$.

## Definition

$f$ is $(C,\alpha)$ compressible, if $f^*(k) \leq C/(1+k)^\alpha$

## Corollary

*$n \geq 4$, $\alpha > 1/2$, $C < \frac{([\sqrt{n}]-1)^{\alpha-1/2}}{4\sqrt{n}}$, si $f$ et $\mathcal{F}_n[f]$ sont $(C,\alpha)$-compressibles alors $f = 0$.*

**Démo** $\|f\| = 1$, $S_k = \{j : |f(j)| \geq f^*(k)\}$ les $k$ + grands coeff de $f$, $\Sigma_k$ idem pour $\mathcal{F}_n[f]$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus S_k)}, \|\mathcal{F}_n[f]\|_{L^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus \Sigma_k)} \leq \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$.

$1 \leq \dfrac{4}{1-k/\sqrt{n}} \dfrac{C^2}{k^{2\alpha-1}}$ et on minimise sur $k$.

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

**Theorem**

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*

*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*

*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\right)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*

*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists \gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma |B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

## Theorem

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*

*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*

*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\right)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*

*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists \gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma |B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

**Theorem**

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\right)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*
*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists \gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma |B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

**Theorem**

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\big(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\big)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*
*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists\gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma|B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

**Theorem**

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\right)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*
*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists \gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma |B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

$\mathcal{F}$ transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

**Theorem**

*– Si $S, \Sigma$ sont compacts, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– (Benedicks/Amrein-Berthier) Si $S, \Sigma$ sont de mesure finie, alors $(S, \Sigma)$ est annihilant pour $\mathcal{F}$.*
*– ($d = 1$, Nazarov — $d \geq 1$, J.) de plus*

$$\|f\| \leq Ce^{C|S||\Sigma|}\left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\Sigma^c)}\right)$$

*Optimal conjecturé : $Ce^{C|S||\Sigma|^{1/d}}$, vérifié si $S$ ou $\Sigma$ convexe.*
*– (Logvinenko-Sereda/Paneah/Kovrijkine) si $\Sigma$ est compact, alors $(S, \Sigma)$ est fortement annihilant $\Leftrightarrow \exists \gamma, r\ \forall x$ $|(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(x, r)| \geq \gamma |B(x, r)|$ + estimée de la constante.*

**Démo de $(S, \Sigma)$ faiblement annihilant (Benedicks).**
Sinon, $\exists f \in L^2$, $\|f\| = 1$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.

$\forall \xi \in (0,1)$, $(\xi + \mathbb{Z}) \cap \Sigma$ fini car $|\Sigma| = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_\Sigma(\xi + k)\,\mathrm{d}\xi$.

En dilatant, $|S| < 1$. Alors, $\exists E \subset (0,1)$, $|E| > 0$,
$x \in E \Rightarrow (x + \mathbb{Z}) \cap S = \emptyset$
et
Formule sommatoire de Poisson

$$e^{-2i\pi x\xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{2i\pi k\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](\xi + j) e^{2i\pi jx}$$

membre de droite = polynôme trigonométrique en $x$
membre de gauche $= 0$ pour $x \in E$.

**Démo de $(S, \Sigma)$ faiblement annihilant (Benedicks).**
Sinon, $\exists f \in L^2$, $\|f\| = 1$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
$\forall \xi \in (0,1)$, $(\xi + \mathbb{Z}) \cap \Sigma$ fini car $|\Sigma| = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_\Sigma(\xi + k)\,\mathrm{d}\xi$.
En dilatant, $|S| < 1$. Alors, $\exists E \subset (0,1)$, $|E| > 0$,
$x \in E \Rightarrow (x + \mathbb{Z}) \cap S = \emptyset$
et
Formule sommatoire de Poisson

$$e^{-2i\pi x\xi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) e^{2i\pi k\xi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](\xi + j) e^{2i\pi jx}$$

membre de droite = polynôme trigonométrique en $x$
membre de gauche $= 0$ pour $x \in E$.

**Démo de $(S, \Sigma)$ faiblement annihilant (Benedicks).**
Sinon, $\exists f \in L^2$, $\|f\| = 1$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.

$\forall \xi \in (0,1)$, $(\xi + \mathbb{Z}) \cap \Sigma$ fini car $|\Sigma| = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_\Sigma(\xi + k)\,\mathrm{d}\xi$.

En dilatant, $|S| < 1$. Alors, $\exists E \subset (0,1)$, $|E| > 0$,
$x \in E \Rightarrow (x + \mathbb{Z}) \cap S = \emptyset$
et
Formule sommatoire de Poisson

$$e^{-2i\pi x\xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{2i\pi k\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](\xi + j) e^{2i\pi jx}$$

membre de droite = polynôme trigonométrique en $x$
membre de gauche $= 0$ pour $x \in E$.

**Démo de $(S, \Sigma)$ faiblement annihilant (Benedicks).**
Sinon, $\exists f \in L^2$, $\|f\| = 1$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
$\forall \xi \in (0,1)$, $(\xi + \mathbb{Z}) \cap \Sigma$ fini car $|\Sigma| = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_\Sigma(\xi + k)\,\mathrm{d}\xi$.
En dilatant, $|S| < 1$. Alors, $\exists E \subset (0,1)$, $|E| > 0$,
$x \in E \Rightarrow (x + \mathbb{Z}) \cap S = \emptyset$
et
Formule sommatoire de Poisson

$$e^{-2i\pi x\xi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) e^{2i\pi k\xi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](\xi + j) e^{2i\pi jx}$$

membre de droite = polynôme trigonométrique en $x$
membre de gauche $= 0$ pour $x \in E$.

**Démo de $(S, \Sigma)$ faiblement annihilant (Benedicks).**
Sinon, $\exists f \in L^2$, $\|f\| = 1$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
$\forall \xi \in (0,1)$, $(\xi + \mathbb{Z}) \cap \Sigma$ fini car $|\Sigma| = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_\Sigma(\xi + k)\,\mathrm{d}\xi$.
En dilatant, $|S| < 1$. Alors, $\exists E \subset (0,1)$, $|E| > 0$,
$x \in E \Rightarrow (x + \mathbb{Z}) \cap S = \emptyset$
et
Formule sommatoire de Poisson

$$e^{-2i\pi x\xi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) e^{2i\pi k\xi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](\xi + j) e^{2i\pi jx}$$

membre de droite = polynôme trigonométrique en $x$
membre de gauche $= 0$ pour $x \in E$.

## Lemma

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi \cdot (x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S, \subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

## Lemma

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi \cdot (x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S, \subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

**Lemma**

*$(S,\Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi\cdot(x)} \rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

## Lemma

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi\cdot(x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f \mathbf{1}_S$ et $\|f \mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f \mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

**Lemma**

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi\cdot(x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

**Lemma**

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi \cdot (x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f \mathbf{1}_S$ et $\|f \mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f \mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

### Lemma

*$(S, \Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi\cdot(x)} \right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

**Lemma**

*$(S,\Sigma)$ de mesure finie. Comme c'est une paire faiblement annihilant, c'est aussi fortement annihilant.*

**En effet :** sinon $\exists f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f_n] \subset \Sigma$,
$1 = \|f_n\| \geq n\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus S)}$, i.e. $f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S} \to 0$.
$\|f_n \mathbf{1}_S\|^2 = \|f_n\|^2 - \left\|f_n \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus S}\right\|^2 \to 1$.
On peut supposer que $\mathcal{F}[f_n]$ est faiblement cvg vers $\widehat{f}$ avec $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$. Alors $f_n(x) = \left\langle \mathcal{F}[f_n], \mathbf{1}_\Sigma e^{-2i\pi\cdot(x)}\right\rangle$ converge vers $f(x)$ ponctuellement.
Comme $|f_n| \leq |\Sigma|^{1/2}$, $f_n \mathbf{1}_S$ cvg dans $L^2$ (cvg dominée) vers $f\mathbf{1}_S$ et $\|f\mathbf{1}_S\| = 1 = \|f\|$ i.e. $f\mathbf{1}_S = f$ et $\operatorname{supp} f \subset S$.
$f_n \to f$ fortement donc $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$, $\operatorname{supp} f \subset S$, $\subset \mathcal{F}[f] \subset \Sigma$.
Benedicks nous donne la contradiction.

## Corollary

*Si $s, \beta > 0$, alors il existe $C$ tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C \||x|^s f\|^{2\beta} \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq C\left(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\right)\\ &\leq C\left(\||x|^s f\|_{L^2(B^c)} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2(B^c)}\right)\\ &\leq C\left(\||x|^s f\|_{L^2} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

## Corollary

*Si $s, \beta > 0$, alors il existe $C$ tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C \left\| |x|^s f \right\|^{2\beta} \left\| |\xi|^\beta \mathcal{F}[f] \right\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq C\left(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\right) \\ &\leq C\left(\left\| |x|^s f\right\|_{L^2(B^c)} + \left\| |\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2(B^c)}\right) \\ &\leq C\left(\left\| |x|^s f\right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2}\right) \end{aligned}$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

## Corollary

*Si $s, \beta > 0$, alors il existe $C$ tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C \big\| |x|^s f \big\|^{2\beta} \Big\| |\xi|^\beta \mathcal{F}[f] \Big\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\|f\|^2 \leq C\big(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\big)$$
$$\leq C\big(\big\||x|^s f\big\|_{L^2(B^c)} + \big\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\big\|_{L^2(B^c)}\big)$$
$$\leq C\big(\big\||x|^s f\big\|_{L^2} + \big\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\big\|_{L^2}\big)$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

## Corollary

*Si $s, \beta > 0$, alors il existe $C$ tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C\big\||x|^s f\big\|^{2\beta}\Big\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\Big\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq C\big(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2(B^c)} + \||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2} + \||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\|_{L^2}\big)\end{aligned}$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

## Corollary

*Si $s, \beta > 0$, alors il existe $C$ tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C \||x|^s f\|^{2\beta} \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq C\big(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2(B^c)} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2}\big)\end{aligned}$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

## Corollary

*Si* $s, \beta > 0$*, alors il existe* $C$ *tel que*

$$\|f\|^{s+\beta} \leq C \||x|^s f\|^{2\beta} \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|^{2s}.$$

**Démo :** $S = \Sigma = B := B(0,1)$, $\exists C$ t.q.

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq C\big(\|f\|_{L^2(B^c)} + \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2(B^c)} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2(B^c)}\big)\\ &\leq C\big(\||x|^s f\|_{L^2} + \left\||\xi|^\beta \mathcal{F}[f]\right\|_{L^2}\big)\end{aligned}$$

On applique aux dilatées $f(\lambda x)$ de $f$ et on minimise sur $\lambda$.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x$$

où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^\lambda \Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^\lambda} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

$\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite
$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\, \mathrm{d}x$$
2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP
$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\, \mathrm{d}x$$
où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$
3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)
$$K(x,\xi) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{\lambda}} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$
$\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\, \mathrm{d}x$$

où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{\lambda}} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

$\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\, \mathrm{d}x$$

où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{\lambda}} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

$\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x$$

   où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{\lambda}} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

   $\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x$$

   où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^\lambda \Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^\lambda} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

   $\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\, \mathrm{d}x$$

   où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^\lambda \Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^\lambda} C_k(\langle \eta, \zeta\rangle)$$

   $\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

1. Opérateur intégral avec noyau explicite

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. O.I. avec noyau satisfaisant un système EDP

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{R^d} K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x$$

   où $K$ vérifie $\partial_{\xi_j} K(x,\xi) = -iK(x,\xi)$

3. Calcul fonctionnel $\mathcal{F} = e^{i\pi d/4} e^{\frac{i\pi}{4}\left(\Delta - |x|^2\right)}$
4. Opérateur diagonal $\mathcal{F}[f] = \sum_k i^{-k}\langle f, h_k\rangle h_k$, $h_k$ Hermite.
5. Noyau donné par une série (Formule de Hecke-Funk)

$$K(x,\xi) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(-i)^k \frac{J_{k+\lambda}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{\lambda}} C_k(\langle\eta,\zeta\rangle)$$

   $\eta = x/|x|$, $\zeta = \xi/|\xi|$, $\lambda = (d-2)/2$, $J_\nu$ fonction de Bessel et $C_k$ polynôme de Gegenbauer.

Autres cas :
– Fourier-Bessel (cas particulier : Fourier restreint aux fonctions radiales)
– Fourier-Dunkl : $\partial_{x_j}$ remplacé par un opérateur différence-différentiel
– Fourier-Clifford : analyse à valeur dans une algèbre de Clifford (de dim finie)
Les translations sont remplacées par des opérateurs qui ne préservent pas la localisation du support.
Pas de formule de bonne Poisson.

Autres cas :
– Fourier-Bessel (cas particulier : Fourier restreint aux fonctions radiales)
– Fourier-Dunkl : $\partial_{x_j}$ remplacé par un opérateur différence-différentiel
– Fourier-Clifford : analyse à valeur dans une algèbre de Clifford (de dim finie)
Les translations sont remplacées par des opérateurs qui ne préservent pas la localisation du support.
Pas de formule de bonne Poisson.

Autres cas :
– Fourier-Bessel (cas particulier : Fourier restreint aux fonctions radiales)
– Fourier-Dunkl : $\partial_{x_j}$ remplacé par un opérateur différence-différentiel
– Fourier-Clifford : analyse à valeur dans une algèbre de Clifford (de dim finie)
Les translations sont remplacées par des opérateurs qui ne préservent pas la localisation du support.
Pas de formule de bonne Poisson.

Autres cas :
– Fourier-Bessel (cas particulier : Fourier restreint aux fonctions radiales)
– Fourier-Dunkl : $\partial_{x_j}$ remplacé par un opérateur différence-différentiel
– Fourier-Clifford : analyse à valeur dans une algèbre de Clifford (de dim finie)
Les translations sont remplacées par des opérateurs qui ne préservent pas la localisation du support.
Pas de formule de bonne Poisson.

Autres cas :
– Fourier-Bessel (cas particulier : Fourier restreint aux fonctions radiales)
– Fourier-Dunkl : $\partial_{x_j}$ remplacé par un opérateur différence-différentiel
– Fourier-Clifford : analyse à valeur dans une algèbre de Clifford (de dim finie)
Les translations sont remplacées par des opérateurs qui ne préservent pas la localisation du support.
Pas de formule de bonne Poisson.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K\ : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K\ : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

## Cadre général

Un espace mesuré : $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{R}^d_+$) muni d'une mesure $\mu$ – avec une décomposition radiale $\mathrm{d}\mu(r\zeta) = r^{2a-1}\mathrm{d}r\, Q(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ –

$$\int_\Omega f(x/\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda^{2a}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On note $D_\lambda f(x) = \lambda^{-a} f(x/\lambda)$.

un noyau : $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ continu,
homogène $K(\lambda x, \xi) = K(x, \lambda\xi)$,
à croissance polynômiale $|K(x,\xi)| \leq c_T(1+|x|)^m(1+|\xi|)^m$.
On note $\mathrm{d}\mu_{2m}(x) = (1+|x|)^{2m}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

– un opérateur :

$$T(f)(\xi) = \int_\Omega K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On demande de plus

1. $T$ a une formule d'inversion : si $f, Tf \in L^1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$, alors

$$f(x) = \int_\Omega T(f)(\eta)\overline{K(x,\eta)}\,\mathrm{d}\mu(\eta)$$

2. $T$ vérifie Plancherel $\|T(f)\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \|f\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)}$.

– un opérateur :

$$T(f)(\xi) = \int_\Omega K(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

On demande de plus

1. $T$ a une formule d'inversion : si $f, Tf \in L^1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$, alors

$$f(x) = \int_\Omega T(f)(\eta)\overline{K(x,\eta)}\,\mathrm{d}\mu(\eta)$$

2. $T$ vérifie Plancherel $\|T(f)\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \|f\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)}$.

– un opérateur :

$$T(f)(\xi) = \int_\Omega K(x,\xi) f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

On demande de plus

1. $T$ a une formule d'inversion : si $f, Tf \in L^1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$, alors

$$f(x) = \int_\Omega T(f)(\eta) \overline{K(x,\eta)} \, \mathrm{d}\mu(\eta)$$

2. $T$ vérifie Plancherel $\|T(f)\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \|f\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)}$.

– un opérateur :

$$T(f)(\xi) = \int_\Omega K(x,\xi) f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

On demande de plus

1. $T$ a une formule d'inversion : si $f, Tf \in L^1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$, alors

$$f(x) = \int_\Omega T(f)(\eta)\overline{K(x,\eta)}\, \mathrm{d}\mu(\eta)$$

2. $T$ vérifie Plancherel $\|T(f)\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \|f\|_{L^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)}$.

**Theorem**

*Soient* $S, \Sigma \subset \Omega$ *avec* $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. *Alors* $(S, \Sigma)$ *est une paire fortement annihilante pour* $T$.

*Si* $\alpha, \beta > 0$ *alors*

$$\left\| |x|^s f \right\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \left\| |\xi|^\beta T(f) \right\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta} \left\| f \right\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right]}(x).$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

## Theorem

*Soient $S, \Sigma \subset \Omega$ avec $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. Alors $(S, \Sigma)$ est une paire fortement annihilante pour $T$.*

*Si $\alpha, \beta > 0$ alors*

$$\big\| |x|^s f \big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \big\| |\xi|^\beta T(f) \big\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta} \big\| f \big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.

$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.

$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

## Theorem

*Soient* $S, \Sigma \subset \Omega$ *avec* $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. *Alors* $(S, \Sigma)$ *est une paire fortement annihilante pour* $T$.
*Si* $\alpha, \beta > 0$ *alors*

$$\big\||x|^s f\big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \big\||\xi|^\beta T(f)\big\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta}\big\|f\big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

**Theorem**

*Soient* $S, \Sigma \subset \Omega$ *avec* $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. *Alors* $(S, \Sigma)$ *est une paire fortement annihilante pour* $T$.
*Si* $\alpha, \beta > 0$ *alors*

$$\big\||x|^s f\big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \big\||\xi|^\beta T(f)\big\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta}\big\|f\big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

**Theorem**

*Soient* $S, \Sigma \subset \Omega$ *avec* $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. *Alors* $(S, \Sigma)$ *est une paire fortement annihilante pour* $T$.
*Si* $\alpha, \beta > 0$ *alors*

$$\left\| |x|^s f \right\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \left\| |\xi|^\beta T(f) \right\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta} \left\| f \right\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x, y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y, \cdot)\right](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|^2_{HS} = \|N\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

**Theorem**

*Soient $S,\Sigma\subset\Omega$ avec $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)<+\infty$. Alors $(S,\Sigma)$ est une paire fortement annihilante pour $T$.*
*Si $\alpha,\beta>0$ alors*

$$\big\||x|^s f\big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}}\big\||\xi|^\beta T(f)\big\|^{\frac{2s}{s+\beta}}\geq C_{s,\beta}\big\|f\big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f=\mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma=T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y)=\mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\big[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\big](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2=\|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2\leq c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)<1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

## Theorem

*Soient $S, \Sigma \subset \Omega$ avec $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. Alors $(S, \Sigma)$ est une paire fortement annihilante pour $T$.*
*Si $\alpha, \beta > 0$ alors*

$$\big\||x|^s f\big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \big\||\xi|^\beta T(f)\big\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta}\big\|f\big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right](x)}.$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

**Theorem**

*Soient $S, \Sigma \subset \Omega$ avec $\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < +\infty$. Alors $(S, \Sigma)$ est une paire fortement annihilante pour $T$.*
*Si $\alpha, \beta > 0$ alors*

$$\big\| |x|^s f \big\|^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \big\| |\xi|^\beta T(f) \big\|^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta} \big\| f \big\|.$$

**Démo :** Il suffit de montrer que c'est faiblement annihilant.
$E_S f = \mathbf{1}_S f$, $F_\Sigma = T^{-1}\mathbf{1}_\Sigma T$.
$E_S F_\Sigma$ est un opérateur de noyau

$$N(x,y) = \mathbf{1}_S(y)\overline{T^{-1}\left[\mathbf{1}_\Sigma(\cdot)K(y,\cdot)\right]}(x).$$

Ce noyau est de norme $L^2$

$$\|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 = \|N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma).$$

Si $c_T^2\mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma) < 1$ on finit comme dans le cas de Fourier discret.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \mathrm{supp}\, f_0$ et $\Sigma_0 := \mathrm{supp}\, T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1}\right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1}\Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$

Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \mathrm{supp}\, f_j \subset S \\ \mathrm{supp}\, T(f_j) = \mathrm{supp}\, D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.

Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \mathrm{supp}\, f_0$ et $\Sigma_0 := \mathrm{supp}\, T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1}\right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1}\Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$
Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \mathrm{supp}\, f_j \subset S \\ \mathrm{supp}\, T(f_j) = \mathrm{supp}\, D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.
Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\,E_s \cap Im\,F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\,E_s \cap Im\,F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \mathrm{supp}\, f_0$ et $\Sigma_0 := \mathrm{supp}\, T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1} \right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1} \Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\,E_s \cap Im\,F_\Sigma) < +\infty$
Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \mathrm{supp}\, f_j \subset S \\ \mathrm{supp}\, T(f_j) = \mathrm{supp}\, D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.
Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \operatorname{supp} f_0$ et $\Sigma_0 := \operatorname{supp} T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1} \right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1} \Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$

Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \operatorname{supp} f_j \subset S \\ \operatorname{supp} T(f_j) = \operatorname{supp} D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.

Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \operatorname{supp} f_0$ et $\Sigma_0 := \operatorname{supp} T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1}\right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1}\Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$

Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \operatorname{supp} f_j \subset S \\ \operatorname{supp} T(f_j) = \operatorname{supp} D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.

Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \mathrm{supp}\, f_0$ et $\Sigma_0 := \mathrm{supp}\, T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1} \right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1}\Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$

Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \mathrm{supp}\, f_j \subset S \\ \mathrm{supp}\, T(f_j) = \mathrm{supp}\, D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.

Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

$E_S \cap F_\Sigma$ proj $\perp$ sur $Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma$. Alors

$\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq c_T^2 \mu_{2m}(S)\mu_{2m}(\Sigma)$.

Supposons que $\exists f_0 \neq 0$ t.q. $S_0 := \mathrm{supp}\, f_0$ et $\Sigma_0 := \mathrm{supp}\, T(f_0)$ soient de mesure finie $\mu_{2m}(S_0), \mu_{2m}(\Sigma_0) < +\infty$.
Si $S_1$ a $\mu_{2m}(S_1) < +\infty$ alors

$$\mu_{2m}(S_1 \cup \lambda S_0) = \left\|\mathbf{1}_{\lambda S_0} - \mathbf{1}_{S_1}\right\|_{L^2(\mu_{2m})}^2 + \left\langle \mathbf{1}_{\lambda S_0}, \mathbf{1}_{S_1} \right\rangle$$

est continue.
$\exists \lambda_n$ avec $\lambda_0 = 1$ t.q. $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j^{-1} \Sigma_0$ vérifient

$$\mu_{2m}(S) < 2\mu_{2m}(S_0) \quad et \quad \mu_{2m}(\Sigma) < 2\mu_{2m}(\Sigma_0)$$

donc $\dim(Im\, E_s \cap Im\, F_\Sigma) < +\infty$

Soit $f_j = D_{\lambda_j} f$, alors $\begin{cases} \mathrm{supp}\, f_j \subset S \\ \mathrm{supp}\, T(f_j) = \mathrm{supp}\, D_{1/\lambda_j} T(f_0) \subset \Sigma \end{cases}$.

Les $f_j$ sont linéairement indépendants.

**Lemma**

*Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ avec $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

*Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

*Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est de support de mesure finie, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

**Démo :** $g(x) = f(e^x)$, $g$ continue, bornée, $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (et a une limite en $-\infty$).

on veut m.q. $\{x \to g(x + \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ est linéairement indépendante.

**Lemma**

*Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ avec $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

*Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

*Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est de support de mesure finie, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

**Démo :** $g(x) = f(e^x)$, $g$ continue, bornée, $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (et a une limite en $-\infty$).

on veut m.q. $\{x \to g(x + \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ est linéairement indépendante.

**Lemma**

*Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ avec $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*
*Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*
*Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est de support de mesure finie, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

**Démo :** $g(x) = f(e^x)$, $g$ continue, bornée, $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (et a une limite en $-\infty$).
on veut m.q. $\{x \to g(x + \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ est linéairement indépendante.

**Lemma**

*Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ *avec* $f(x) \to 0$ *quand* $x \to +\infty$*, alors la famille* $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ *est linéairement indépendante.*
*Si* $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$*, alors la famille* $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ *est linéairement indépendante.*
*Si* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *est de support de mesure finie, alors la famille* $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ *est linéairement indépendante.*

**Démo :** $g(x) = f(e^x)$, $g$ continue, bornée, $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (et a une limite en $-\infty$).
on veut m.q. $\{x \to g(x+\mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ est linéairement indépendante.

## Lemma

*Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ avec $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*
*Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*
*Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est de support de mesure finie, alors la famille $\{x \to f(\lambda x), \lambda > 0\}$ est linéairement indépendante.*

**Démo :** $g(x) = f(e^x)$, $g$ continue, bornée, $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (et a une limite en $-\infty$).
on veut m.q. $\{x \to g(x + \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ est linéairement indépendante.

On suppose que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x+\mu_j) = 0 \qquad (1)$$

$\hat{g}$ transformée de Fourier de $g$ au sens des distributions : $\hat{g}$ distribution tempérée d'ordre 0. On prend la transformée de Fourier de (1) :

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}\right) \widehat{g}(\xi) = 0$$

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}$ est une fonction entière : ses zéros sont discrets donc le support de $\widehat{g}$ aussi.
$s_0 \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi = 1$ au voisinnage de $s_0$ et $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\widehat{g} = \{s_0\}$. Alors $\varphi\widehat{g}$ est une distribution d'ordre fini de support $\{s_0\}$ donc $\varphi\widehat{g} = \sum_{finie} c_k \delta_{s_0}^{(k)} = \widehat{P}$, $P$ polynôme.
Mais alors $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g = P$. Mais $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g(x) \to 0$ et $P = 0$.

On suppose que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x + \mu_j) = 0 \tag{1}$$

$\hat{g}$ transformée de Fourier de $g$ au sens des distributions : $\hat{g}$ distribution tempérée d'ordre 0. On prend la transformée de Fourier de (1) :

$$\left( \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi} \right) \widehat{g}(\xi) = 0$$

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}$ est une fonction entière : ses zéros sont discrets donc le support de $\widehat{g}$ aussi.

$s_0 \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi = 1$ au voisinnage de $s_0$ et $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \widehat{g} = \{s_0\}$. Alors $\varphi\widehat{g}$ est une distribution d'ordre fini de support $\{s_0\}$ donc $\varphi\widehat{g} = \sum_{finie} c_k \delta_{s_0}^{(k)} = \widehat{P}$, $P$ polynôme.
Mais alors $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g = P$. Mais $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g(x) \to 0$ et $P = 0$.

On suppose que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x+\mu_j) = 0 \tag{1}$$

$\hat{g}$ transformée de Fourier de $g$ au sens des distributions : $\hat{g}$ distribution tempérée d'ordre 0. On prend la transformée de Fourier de (1) :

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}\right) \widehat{g}(\xi) = 0$$

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}$ est une fonction entière : ses zéros sont discrets donc le support de $\widehat{g}$ aussi.

$s_0 \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi = 1$ au voisinnage de $s_0$ et $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \widehat{g} = \{s_0\}$. Alors $\varphi\widehat{g}$ est une distribution d'ordre fini de support $\{s_0\}$ donc $\varphi\widehat{g} = \sum_{finie} c_k \delta_{s_0}^{(k)} = \widehat{P}$, $P$ polynôme. Mais alors $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g = P$. Mais $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g(x) \to 0$ et $P = 0$.

On suppose que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x+\mu_j) = 0 \qquad (1)$$

$\hat{g}$ transformée de Fourier de $g$ au sens des distributions : $\hat{g}$ distribution tempérée d'ordre 0. On prend la transformée de Fourier de (1) :

$$\left( \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi} \right) \widehat{g}(\xi) = 0$$

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}$ est une fonction entière : ses zéros sont discrets donc le support de $\widehat{g}$ aussi.
$s_0 \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi = 1$ au voisinnage de $s_0$ et $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \widehat{g} = \{s_0\}$. Alors $\varphi\widehat{g}$ est une distribution d'ordre fini de support $\{s_0\}$ donc $\varphi\widehat{g} = \sum_{finie} c_k \delta_{s_0}^{(k)} = \widehat{P}$, $P$ polynôme.
Mais alors $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g = P$. Mais $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$ donc $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g(x) \to 0$ et $P = 0$.

On suppose que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x+\mu_j) = 0 \tag{1}$$

$\hat{g}$ transformée de Fourier de $g$ au sens des distributions : $\hat{g}$ distribution tempérée d'ordre 0. On prend la transformée de Fourier de (1) :

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}\right) \widehat{g}(\xi) = 0$$

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{2i\pi\mu_j\xi}$ est une fonction entière : ses zéros sont discrets donc le support de $\widehat{g}$ aussi.
$s_0 \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi = 1$ au voisinnage de $s_0$ et $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \widehat{g} = \{s_0\}$. Alors $\varphi\widehat{g}$ est une distribution d'ordre fini de support $\{s_0\}$ donc $\varphi\widehat{g} = \sum_{finie} c_k \delta_{s_0}^{(k)} = \widehat{P}$, $P$ polynôme.
Mais alors $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g = P$. Mais $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] * g(x) \to 0$ et $P = 0$.

# Références

W. O. Amrein & A. M. Berthier *On support properties of $L^p$-functions and their Fourier transforms.* J. Funct. Anal. **24** (1977), 258-267.

M. Benedicks *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure.* J. Math. Anal. Appl. **106** (1985), 180-183.

A. Bonami & B. Demange *A survey on uncertainty principles related to quadratic forms.* Collect. Math. **2** (2006) Vol. Extra, 1-36.

D. L. Donoho & P. B. Stark *Uncertainty principles and signal recovery.* SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 906–931.

G. B. Folland & A. Sitaram *The uncertainty principle : A mathematical survey*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 207–238.

S. Ghobber & Ph. Jaming *Strong annihilating pairs for the Fourier-Bessel transform.* J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 501-515.

# Références

V. Havin & B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Ph. Jaming *Nazarov's Uncertainty Principles in Higher Dimension.* J. Approx. Theory. **149** (2007), 30-41.

O. Kovrizhkin *Some results related to the Logvinenko-Sereda Theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3037–3047.

T. Matolcsi & J. Szucs, *Intersection des mesures spectrales conjugées.* C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **277** (1973), 841-843.

F. L. Nazarov *Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. (Russian)* Algebra i Analiz **5** (1993), 3-66 ; translation in St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 663-717.

C. Shubin, R. Vakilian & T. Wolff *Some Harmonic Analysis Questions Suggested By Anderson-Bernoulli Models*. GAFA, Geom. funct. anal. **8** (1998) 932–964.