Devoir à la maison n°1.

Pour la semaine du 28 février 2011.

Les exercices sont indépendants. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1

Soit E un ensemble. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite *idempotente* si pour tout $x \in E$, $f \circ f(x) = f(x)$. On suppose que E est fini.

1. Donner le nombre d'applications idempotentes de E lorsque $|E| = 1$ et $|E| = 2$.
2. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application idempotente. Montrer que tout point de l'image de f est un point fixe par f.
3. On suppose désormais que $|E| = n \geqslant 1$. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note
$$\mathcal{F}_k = \{f : E \longrightarrow E,\ f \text{ est idempotente et a } k \text{ points fixes}\}.$$
Soit un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Calculer $|\mathcal{F}_k|$ en fonction de n et k.
4. En déduire qu'il y a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$ applications idempotentes de E.

Exercice 2

Soit E un ensemble muni d'une loi binaire $\star$. Un élément $a \in E$ est dit *idempotent* si $a \star a = a$. La loi $\star$ est *idempotente* si tout élément de E est idempotent.

1. On suppose que la loi $\star$ est idempotente, associative et commutative. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par
$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \mathcal{R}(x, y) \Longleftrightarrow x \star y = y.$$
   a) Soit X un ensemble. Identifier $\mathcal{R}$ pour $E = \mathcal{P}(X)$ et $\star = \cup$. Même question pour $\star = \cap$.
   b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.
   c) Montrer que si $x, y \in E$, alors $x \star y$ est la borne supérieure de $\{x, y\}$ dans l'ensemble E ordonné par $\mathcal{R}$.
2. On dit qu'un ensemble ordonné $(\mathcal{T}, \leqslant)$ est un *treillis* si pour tous $x, y \in \mathcal{T}$, l'ensemble $\{x, y\}$ a une borne inférieure et une borne supérieure.
   a) Soit $\mathcal{T}$ un treillis. Pour tous $x, y \in \mathcal{T}$, on note $x \vee y = \sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Montrer que $\wedge$ et $\vee$ sont des lois de composition de $\mathcal{T}$ associatives, commutatives et idempotentes.
   b) Soit E un ensemble, montrer que $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis. Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mid)$ est un treillis (pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ signifie « a divise b »).

Exercice 3

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que $Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe abélien de G.
2. Soient un entier $n \geqslant 3$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k < n$, on pose
$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega^k z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega^k \overline{z} \end{array} \right. .$$
   a) Montrer que $G = \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.
   b) Prouver que $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$. Le groupe G est-il abélien ?
   c) Montrer que si n est impair, alors $Z(G) = \{f_0\}$ et que si n est pair, alors $Z(G) = \left\{f_0, f_{\frac{n}{2}}\right\}$.
