Feuille de TD n^{o}2

Applications (suite)

Exercice 1
Soit E un ensemble, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'application $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & B \cap A \end{array} \right.$. Montrer que si $A \neq E$, alors f_A n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 2
Soient E un ensemble fini à n éléments et F un ensemble fini à m éléments.

1. On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Montrer que $|\mathcal{F}(E,F)| = m^n$.
2. On note $\mathcal{I}(E,F)$ l'ensemble des applications *injectives* de E dans F.
   a) Montrer que $\mathcal{I}(E,F) = \emptyset$ si $n > m$.
   b) Montrer que si $n \leqslant m$, alors $|\mathcal{I}(E,F)| = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Exercice 3 **Ensembles équipotents.**
Soient E et F deux ensembles. On définit les notions suivantes :
- E est *moins puissant* que F s'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$,
- E est *plus puissant* que F s'il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$,
- E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.

1. Si $E \neq \emptyset$, montrer que E est moins puissant que F si et seulement si F est plus puissant que E.
2. Prouver que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$, $\{n \in \mathbb{N},\ 3|n\}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents deux à deux.
3. Montrer que E est moins puissant que $\mathcal{P}(E)$.
4. Dans cette question, on montre que E est $\mathcal{P}(E)$ ne sont jamais équipotents.
   a) Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application quelconque, on pose alors $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$. Démontrer que $A \notin f(E)$.
   b) Conclure.

Exercice 4
Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$(f \text{ est injective}) \iff (f \text{ est surjective})\,.$$

Exercice 5

1. Compter les bijections f de $\{1, \ldots, 12\}$ dans lui-même vérifiant
   a) si n est pair, alors $f(n)$ est pair,
   b) si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3,
   c) les deux propriétés précédentes.
2. Même question en remplaçant « bijection » par « application ».

Relations d'ordre

Exercice 6

1. On pose $E = [0,1]^2$ et on définit une relation sur E par

$$\forall (x,y),(x',y') \in E, \qquad \big((x,y) \preceq (x',y')\big) \iff \Big(\big(x < x'\big) \quad \text{ou} \quad \big(\big(x = x'\big) \text{ et } \big(y \leqslant y'\big)\big)\Big)\,.$$

   a) Montrer que $\preceq$ définit une relation d'ordre sur E. On l'appelle l'*ordre lexicographique*.
   b) Soit $(a,b) \in E$. Représenter graphiquement les minorants et les majorants de (a,b).
   c) Cet ordre est-il total ?

2. Mêmes questions pour $E = \mathbb{R}^2$ et la relation suivante :

$$\forall (x,y),(x',y') \in E, \qquad \big((x,y) \ll (x',y')\big) \Longleftrightarrow \big(\left|x-x'\right| \leqslant y'-y\big)\,.$$

Exercice 7

Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. On définit alors les applications suivantes :

$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sup\left\{f(t,y)\,,\, y \in \mathbb{R}\right\} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \inf\left\{f(x,t)\,,\, x \in \mathbb{R}\right\} \end{array}\right. .$$

1. Montrer que g et h sont bornées.
2. Comparer $\inf g$ et $\sup h$.

Exercice 8

Soit E un ensemble ordonné dont toute partie majorée non vide admet une borne supérieure. Montrer que toute partie minorée non vide de E admet une borne inférieure.
Indication : étant donné une partie minorée non vide A de E, on pourra considérer la partie de E constituée des minorants de A.

Exercice 9

Soient X un ensemble et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. On ordonne E ainsi :

$$\forall f, g \in E, \qquad (f \leqslant g) \Longleftrightarrow (\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x))\,.$$

1. Vérifier que cela définit une relation d'ordre sur E. Cet ordre est-il total ?
2. Comparer les énoncés « f est majorée » et « $\{f\}$ est majoré ».
3. Soient I un ensemble non vide et $(f_i)_{i\in I}$ une famille majorée de E. Montrer que cette famille admet une borne supérieure.

Exercice 10 **Point fixe d'une fonction croissante.**

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application croissante. On note $A = \{x \in [0,1]\,,\, f(x) \leqslant x\}$.

1. Démontrer que A n'est pas vide.
2. Démontrer que $f(A) \subseteq A$.
3. Soit $a = \inf(A)$, montrer que $f(a)$ minore A.
4. En déduire que $f(a) = a$.
5. Les questions précédentes montrent que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même admet un point fixe, montrer que ce n'est pas le cas pour $[0,1[$.

Relations d'équivalence

Exercice 11

On fixe un entier naturel n non nul et on définit la relation binaire suivante sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \qquad (a\mathcal{R}_n b) \Longleftrightarrow (n\,|(b-a))\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Donner un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_n$.
3. Calculer le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n$.

Exercice 12

On définit une relation binaire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ par

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star, \qquad ((a,b) \sim (c,d)) \Longleftrightarrow (ad = bc)\,.$$

1. Montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$.
2. Décrire les classes d'équivalence.
3. Que peut-on dire de l'ensemble quotient ?