# Feuille de TD n°3

## Relations d'équivalence (suite)

**Exercice 1**
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2y + y = xy^2 + x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Décrire les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

**Exercice 2**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $P_n$ le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini de cardinal $n$. En particulier, on a $P_0 = 1$.

1. Calculer $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$.
2. Soit $n$ un entier naturel. Montrer la relation $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.
3. En déduire la formule $P_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \dfrac{k^n}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Groupes

**Exercice 3**
Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1.

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

2.

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

3.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |

**Exercice 4**
On munit l'intervalle $I = ]-1, +\infty[$ de la loi interne $\otimes$ définie par la formule

$$x \otimes y = xy + x + y.$$

1. Montrer que $(I, \otimes)$ est un groupe.
2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & e^x - 1 \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

**Exercice 5**

1. Soit $H$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. Dans les deux cas suivants, vérifier que $H$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et exprimer $a$ en fonction de $x$ et $y$ :
$$H = \left\{ux + vy,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\right\} \text{ et } H = x\mathbb{Z} \cap y\mathbb{Z}.$$

**Exercice 6**
Soient $G$ un groupe et $H$ une partie finie non vide de $G$ stable par la loi de groupe. Montrer que $H$ est un sous-groupe de $G$.

Qu'en est-il si $H$ est infini ?

**Exercice 7**
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{N}$. Quel est l'ordre de $a$ dans le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?

**Exercice 8**
Montrer qu'un groupe qui n'a qu'un nombre fini de sous-groupes est fini.

**Exercice 9**
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^2 \end{array} \right.$. Montrer que $f$ est un morphisme de groupes si et seulement si $G$ est abélien.

**Exercice 10**
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $s_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

On note $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on considère l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (s_2(x), s_6(x)) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $s$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau. Ce morphisme est-il surjectif ?
2. Déterminer les sous-groupes d'ordre 2 de $G$.
3. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $s^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient $6\mathbb{Z}$. Déterminer $s^{-1}(H)$ et $s\left(s^{-1}(H)\right)$ lorsque $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$.

**Exercice 11**
1. Soit $R_0$ l'ensemble des rotations du plan réel de centre 0. Montrer que $(R_0, \circ)$ est un groupe abélien.
2. Soit $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.
3. Montrer que les groupes $(R_0, \circ)$ et $\left(\mathbb{S}^1, \times\right)$ sont isomorphes.

**Exercice 12**
Soit $G$ le produit direct de $\left(\mathbb{R}_+^\star, \times\right)$ et de $(\{-1, 1\}, \times)$. Montrer que $G$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^\star, \times)$.

**Exercice 13**
Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $x, y$ des éléments de $G$.
1. On suppose que $xy$ est d'ordre fini. Que peut-on dire de $yx$ ?
2. Donner un exemple où $x$ et $y$ sont d'ordre fini, mais pas $xy$.

**Exercice 14**
Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et $K, H$ deux sous-groupes de $G$ de cardinaux premiers entre eux. Que peut-on dire de $K \cap H$ ?

**Exercice 15**
1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2$ est l'élément neutre de $G$. Montrer que $G$ est abélien.
2. Soit $p$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre $p$ est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre inférieur à 5 est abélien.

**Exercice 16**
Soient $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe d'indice 2 dans $G$. Montrer que $H$ est distingué dans $G$.

**Exercice 17**
Soient $G$ un groupe et $N$ un sous-groupe distingué de $G$.
1. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $HN$ est un sous-groupe de $G$.
2. On suppose désormais que $G$ est fini, que les ordres de $N$ et $G/N$ sont premiers entre eux et que $H$ a même ordre que $G/N$. Montrer que $G = HN$.
3. Soit $f$ un endomorphisme de $G$. Montrer que $f(N) \subseteq N$.