DM n°2

À RENDRE POUR LA SEMAINE DU 12 AVRIL 2010

Exercice 1 théorème de Pappus

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E. On appelle homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^\star$ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & t_{k\overrightarrow{OM}}(O) \end{array}\right.$. Les homothéties linéaires sont les applications $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}\right.$ pour un certain réel λ non nul. Étant donné un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de E, on notera $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{E}$.

1. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}$.
   a) Montrer f est une homothétie de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est une homothétie linéaire de E.
   b) Soient f et g deux homothéties de même centre $O \in \mathcal{E}$. Montrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on précisera le centre et dont on donnera le rapport en fonction des rapports de f et g. En déduire que $f \circ g = g \circ f$.
   c) Soit f une homothétie de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$. Montrer que f envoie $\mathcal{D}$ sur une droite parallèle à $\mathcal{D}$.
   d) Soient A, B et C trois points distincts alignés. Montrer qu'il existe une unique homothétie de centre A envoyant B sur C.
2. Dans cette question, on suppose que $\dim \mathcal{E} = 2$, on considère deux droites non parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}$. On note O leur point d'intersection. Soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{D}$ différents de O et A', B', C' trois points distincts de $\mathcal{D}'$ différents de O. On note f l'homothétie de centre O qui envoie A sur B, et g l'homothétie de centre O qui envoie B sur C.
   a) Montrer que si les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles, alors $A' = f(B')$. De même, montrer que si (BC') et $(B'C)$ sont parallèles, alors $g(C') = B'$.
   b) En déduire que si (AB') et $(A'B)$, (BC') et $(B'C)$ sont parallèles, alors (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Exercice 2

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel et A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$. Dans tout l'exercice, on considère des réels α, β, γ tels que $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Étant donné un tel triplet (α, β, γ) et un point $M \in \mathcal{P}$, on note $f_{\alpha,\beta,\gamma}(M)$ le barycentre du système de points pondérés (A, α), (B, β) et (M, γ).

1. Montrer que si $\alpha + \beta = 0$, alors $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ est une translation. Préciser le vecteur de translation en fonction de α, γ, A et B.
2. On suppose que $\alpha + \beta \neq 0$. Montrer que $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. On se restreint dans cette question au cas où $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\beta = 1$. Par ailleurs, on suppose qu'il existe un point $M \in \mathcal{P}$ tel que $AMBf_{\alpha,\beta,\gamma}(M)$ est un parallélogramme (non aplati). Déterminer les valeurs de α et γ.

Exercice 3

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On définit les points $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.
2. Soient A' et C' les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Vérifier que A' et C' sont des points de $\mathcal{P}$.
3. Montrer qu'il existe un point B' de $\mathcal{E}$ tel que les droites $(A'B)$ et (AB') ainsi que les droites (BC') et $(B'C)$ soient parallèles. On précisera les coordonnées de B'.
4. Montrer alors que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.