Feuille de TD n^{o}6

11 Barycentres et coordonnées barycentriques

Exercice 45

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ le plan affine et $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Étant donné un point M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans $\mathcal{R}$, caractériser par des conditions sur (α, β, γ) les conditions suivantes :

1. $M \in (AC)$,
2. $M \in [AB]$,
3. M est du même côté que A par rapport à (BC).

Exercice 46 équation barycentrique d'une droite.

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et (A, B, C) une base affine de $\mathcal{E}$. Soient alors trois points M, M' et M" de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques respectives (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha", \beta", \gamma")$. Montrer que M, M' et M" sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha" & \beta" & \gamma" \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 47 théorème de Ménélaüs.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit ABC un triangle (non aplati). On considère trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ distincts des sommets A, B, C. Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Exercice 48

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. On considère un triangle non aplati ABC de $\mathcal{E}$ et deux points $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ distincts des sommets A, B, C.

1. Montrer qu'il existe deux uniques réels α et β différents de 0 et 1 tels que
$$A = \mathrm{Bar}\,\{(D, \alpha), (B, 1-\alpha)\} \qquad \text{et} \qquad A = \mathrm{Bar}\,\{(E, \beta), (C, 1-\beta)\}.$$
2. Montrer que (DE) et (BC) sont sécantes si et seulement si $\alpha \neq \beta$, en ce cas, écrire leur point d'intersection comme barycentre de B et C.

Exercice 49 théorème de Ceva.

Soit A, B, C trois points d'un plan affine $\mathcal{E}$ non alignés. Soient D, E, F trois points distincts des sommets placés respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

Exercice 50

On considère un espace affine $\mathcal{E}$, un point $O \in \mathcal{E}$ et deux repères $\mathcal{R} = (O, A_1, \ldots, A_n)$ et $\mathcal{R}' = (O, A'_1, \ldots, A'_n)$ de même origine. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ ayant mêmes coordonnées dans les deux repères.

1. Justifier l'existence d'une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $f(O) = O$ et $f(A_i) = A'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
2. Montrer que $\mathcal{V} = \mathrm{Fix}(f)$ et en déduire que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension $n - \mathrm{rang}\left\{\overrightarrow{A_iA'_i},\, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$.
3. On se place dans le cas où $\dim \mathcal{E} = 2$. On suppose que $A'_1 \neq A_1$, $A'_2 \neq A_2$ et que les droites $(A_1A'_1)$ et $(A_2A'_2)$ sont parallèles. Déterminer $\mathcal{V}$.
4. On se place dans le cas où $\dim \mathcal{E} = 3$. On suppose que A'_1, A'_2 et A'_3 sont les milieux respectifs de $[A_2A_3]$, $[A_1A_3]$ et $[A_1A_2]$. Déterminer $\mathcal{V}$.

Exercice 51

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et les points ABC ne sont pas alignés. Soient G et G' les isobarycentres des triangles ABC et $A'B'C'$, montrer alors que les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles si et seulement si O, G et G' sont alignés.

Indication : on pourra se placer dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

Exercice 52 polygone des milieux.

Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets, on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2 \dots A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} (et $A_{n+1} = A_1$). On définit alors une suite de polygones par récurrence :

- $P_0 = P$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = (P_k)'$.

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Indication : écrire un sommet de P_k comme barycentre des points $A_1, \dots, A_n$.

Exercice 53 isobarycentre de tous les points sauf un.

Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets, on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2 \dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les points de P sauf A_i. On définit alors une suite de polygones par récurrence :

- $P_0 = P$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = (P_k)'$.

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.