Feuille de TD n°9

Exercice 65

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre points $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$. Le but de l'exercice est d'étudier l'enveloppe convexe $\mathcal{E}$ de ces points.

1. Soit $f : (x,y,z) \longmapsto ax + by + cz + d$ une forme affine sur $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition sur (a,b,c,d) équivalente à $f(A) \geqslant 0$. Faire de même pour $f(B) \geqslant 0$, $f(C) \geqslant 0$, $f(D) \geqslant 0$.
2. Montrer que la forme affine f est positive sur $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est positive sur $\{A,B,C,D\}$.
3. a) Déterminer quatre formes affines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha(A) = 1, & \alpha(B) = 0, \quad \alpha(C) = 0, \quad \alpha(D) = 0, \\ \beta(A) = 0, & \beta(B) = 1, \quad \beta(C) = 0, \quad \beta(D) = 0, \\ \gamma(A) = 0, & \gamma(B) = 0, \quad \gamma(C) = 1, \quad \gamma(D) = 0, \\ \delta(A) = 0, & \delta(B) = 0, \quad \delta(C) = 0, \quad \delta(D) = 1. \end{cases}$$

   b) Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des formes affines sur $\mathbb{R}^3$ positives sur $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ à coefficients positifs.
4. Déterminer tous les hyperplans d'appui de $\mathcal{E}$ en A. Même question pour B, C et D.

Exercice 66

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine $\mathcal{P}$. On fixe un point $A \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{D}$ et on note $\mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P},\ [AM] \cap \mathcal{D} = \emptyset\}$. Soit Δ une droite passant par A et coupant $\mathcal{D}$ en I.

1. Soit $M \in \mathcal{P}$. Montrer que $M \in \mathcal{P}_A$ si et seulement si la projection de M sur Δ parallèlement à $\mathcal{D}$ appartient à la demi-droite ouverte $]IA)$.
2. Montrer les propriétés suivantes :
   a) si B est un point de $\mathcal{P}_A$, alors $\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_A$,
   b) si $B \notin \mathcal{P}_A \cup \mathcal{D}$, alors $\mathcal{P}$ est la réunion disjointe de $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$,
   c) $\mathcal{P}_A$ est convexe.

   $\mathcal{P}_A$ est le *demi-plan ouvert* défini par $\mathcal{D}$ et contenant A. Le *demi-plan fermé* est $\mathcal{D} \cup \mathcal{P}_A$.

Exercice 67

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{C}$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{C}$ est compacte.

Exercice 68

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et C un convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous $x, y \in C$, $\frac{x+y}{2} \in C$. Montrer que la réciproque est fausse.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et C un convexe dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C = \mathbb{R}^n$.

Exercice 69 théorème de Birkhoff.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices de permutation de dimensions n, c'est-à-dire, l'ensemble des matrices $P_\sigma = \left(\delta_{\sigma(i)j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Une matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite *stochastique* si pour tous indices i, j, on a $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et pour tout indice i, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. Une matrice M est dite *bistochastique* si M et ${}^tM$ sont stochastiques. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des matrices bistochastiques de dimensions n.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}$ est un point extrémal de $\mathcal{B}$.
2. Réciproquement, montrer que tout point extrémal de $\mathcal{B}$ est une matrice de permutation.
3. En déduire que $\mathcal{B}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$.

14 Fonctions convexes

Exercice 70

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, tous $x_1, \dots, x_n \in I$, et tous $\lambda_1, \dots \lambda_n$ positifs de somme égale à 1,
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$
2. Montrer que f est convexe si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
   - pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$ on a $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$,
   - pour tout $x_0 \in I$, la fonction p_{x_0} définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $p_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante.
3. On suppose que f est dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante. Montrer qu'en ce cas,
$$\forall x_0, y_0 \in I,\ x_0 < y_0,\ f'(x_0) \leqslant \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leqslant f'(y_0).$$

Exercice 71

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   a) On suppose que $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer que f est positive.
   b) On suppose que f admet une asymptote en $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe et de l'asymptote.

Exercice 72

Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xf\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$ est convexe.

Exercice 73

Soient $f : \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ affine. On suppose en outre que
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x > 0,\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(1) = g(1). \end{array} \right.$$
Montrer que $f = g$.

Exercice 74 **inégalité arithmético-géométrique et applications.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme égale à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.
2. Si $p, q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et si $u, v > 0$, montrer l'inégalité $uv \leqslant \dfrac{1}{p}u^p + \dfrac{1}{q}v^q$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder : si p, q sont comme précédemment et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$