

# Feuille de TD n°1

## Fonctions usuelles et dérivation

### Exercice 1

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x.$$

### Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} x \mapsto (3x^2 + 7) \ln x, & \quad x \mapsto \frac{e^x}{x^2 + 1}, & \quad x \mapsto \sqrt{x^4 + 8} \\ x \mapsto \cos(2 - x), & \quad x \mapsto \ln(7 - x^2), & \quad x \mapsto (\sin x + 3)^4. \end{aligned}$$

### Exercice 3

Calculer les limites suivantes. On pourra utiliser la définition de la dérivée.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}.$$

### Exercice 4

Calculer les limites suivantes. Penser à la définition des fonctions puissances.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

### \* Exercice 5

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables telles que leur composée  $u \circ v$  est dérivable. Rappeler  $(u \circ v)'$ . En déduire les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques arcsin, arccos et arctan.

## Intégration

### Exercice 6

Calculer  $\int_0^1 x^3 dx$ ,  $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ,  $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ .

### Exercice 7

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle maximal de définition.

$$x \mapsto \cos(3x - 5), \quad x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 4}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x - 2}.$$

### Exercice 8

Supposons que  $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}$  est connue.

Soient  $A = \int_0^3 (\sqrt{9 - x^2} - 3) dx$  et  $B = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2} + 3} dx$ . Calculer  $A$ ,  $A+B$  puis  $B$ .

**Exercice 9**

Calculer  $\int_0^1 e^{-x} dx$ ,  $\int_0^1 x e^{2x} dx$ ,  $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$ ,  $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 3} dx$ .

**Exercice 10**

Calculer la primitive suivante (on peut essayer de trouver une solution par parties *et* une solution par changement de variables) :  $\int \frac{\log(x)}{x} dx$

**Exercice 11**

Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait pour tout réel  $x$  différent de  $-1$  et  $5$  :  $\frac{1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 5}$ .

En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x - 5} dx$ .

**Exercice 12**

Calculer

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 3} dx, \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} dx, \quad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)^2} dx$$

**Exercice 13**

Trouver les primitives

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx, \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \sin(x) \cos(x) dx$$

On pourra proposer deux raisonnements différents pour la dernière primitive.

**Exercice 14**

Soient  $\lambda, T > 0$ . Calculer  $I(T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt$  et  $E(T) = \int_0^T t \lambda e^{-\lambda t} dt$ . Étudier les limites de  $I(T)$  et  $E(T)$  quand  $T$  tend vers l'infini.

**\* Exercice 15**

Calculer les primitives  $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ ,  $\int \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx$ ,