

Feuille de TD n°3

Révisions

Exercice 1

1. Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Donner la dérivée de la composée

$$u \circ v : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u \circ v(x) = u(v(x)) \end{cases} .$$

2. Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sin(e^x + 3x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\cos(x)+2}.$$

Pour tout réel x , calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

3. On admet que la fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout réel x ,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Indication : on pourra poser $u = \tan$, $v = \arctan$ et utiliser la question 1.

4. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction arctan.

5. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x^2}$.

Exercice 2

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot e^{x+y} \end{cases} .$

1. Calculer $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Trouver les éventuels points critiques de f .
3. Soit $D = [0, 1] \times [0, 2]$, calculer

$$\int_D f(x, y) \, dx dy.$$

4. Calculer un développement limité à l'ordre 2 de f en $(0, 0)$.