Test n^{o}1– correction

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. On pourra utiliser la définition de la dérivabilité.
Pour tout réel x non nul,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de sin en 0, donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Exercice 2

Donner la dérivée f' et une primitive F des fonctions f suivantes.

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	e^x
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	x^α, $\alpha \neq -1$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sin\left(3x^2 + e^x + 1\right)$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions ainsi dérivables et pour tout réel x,
   $$f'(x) = \cos(3x^2 + e^x + 1) \cdot (6x + e^x).$$
2. $g(x) = 2xe^{x^2+1}$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de composées de fonctions ainsi dérivables et pour tout réel x,
   $$g'(x) = 2e^{x^2+1} + 2xe^{x^2+1} \cdot 2x = (4x^2 + 2)e^{x^2+1}.$$

Exercice 4

Donner la formule d'intégration par parties en précisant les hypothèses.
Soient a, b deux réels et $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5

Pour un réel $x \geqslant 1$ donné, calculer l'intégrale suivante : $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
On peut procéder par parties. Soient u et v deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ telles que $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \ln(t)$, alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$ de telle sorte que u et v sont deux fonctions dérivables à dérivée continue sur $[1, +\infty[$. Alors

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t)^2\right]_1^x - \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(t)^2\right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}.$$

Exercice 6

Soient $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $x_0 \in]a, b[$. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0.
Pour tout réel h (assez petit),

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \varepsilon(h),$$

où $\frac{\varepsilon(h)}{h^2} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\varepsilon(h) = \underset{h \to 0}{o}\left(h^2\right)$.