Devoir à la maison n°2

Exercice 1 Produit semi-direct

1. Soient H et K deux groupes notés multiplicativement. On note $\mathrm{Aut}(H)$ le groupe des automorphismes de H. Soit
$$\varphi\colon \begin{cases} K & \to \mathrm{Aut}(H) \\ k & \mapsto \varphi_k \end{cases}$$
un morphisme de groupes.
   (a) Montrer que l'ensemble $H \times K$ muni de la loi
   $$(h,k)\cdot(h',k') = (h\varphi_k(h'), kk'),$$
   est un groupe. Le groupe ainsi obtenu est appelé *produit semi-direct* de H par K relativement à φ et est noté $H \rtimes_\varphi K$. Si φ est le morphisme trivial (c'est-à-dire, $\varphi_k = 1_{\mathrm{Aut}(H)} = \mathrm{id}_H$ pour tout $k \in K$), on retrouve le *produit direct* de H et K.
   (b) On suppose que H et K sont abéliens. Montrer que $H \rtimes_\varphi K$ est commutatif si et seulement si φ est le morphisme trivial.
   (c) Soient
   $$H' = H \times \{1\} = \{(h,1) : h \in H\},$$
   $$K' = \{1\} \times K = \{(1,k) : k \in K\}.$$
   Montrer que H', K' sont deux sous-groupes de $G = -H \rtimes_\varphi K$ et que $H' \subset H \rtimes_\varphi K$ est distingué. Remarquer que $H' \cdot K' = G$ et $H' \cap K' = \{(1,1)\}$ et montrer que le groupe quotient G/H' est isomorphe à K.
2. Réciproquement, soient G un groupe et E, F deux sous-groupes de G. On supposer que E est distingué dans G et que $E \cdot F = G$ et $E \cap F = \{1\}$. On définit
$$\psi\colon \begin{cases} F & \to \mathrm{Int}(E) \\ x & \mapsto \psi_x \end{cases}$$
où ψ_x est l'automorphisme intérieur $y \mapsto xyx^{-1}$ de E. Montrer que G et $E \rtimes_\psi F$ sont isomorphes.
3. (a) Soit $n \geq 1$ un entier. Exhiber un isomorphisme entre le groupe diédral D_{2n} et un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
   (b) À l'aide de la question (1.b), contruire un groupe *non commutatif* d'ordre $21 = 3 \times 7$.

Exercice 2 Sous-groupe transitifs de S_4

Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe G de $S_n = S(\{1,2,\cdots,n\})$ est dit *transitif* si son action sur $\{1,2,\cdots,n\}$ est transitive, i.e., pour tous $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$, il existe $g \in G$ tel que $g(i) = j$. Le *commutant* d'un élément γ d'un groupe Γ est le sous-groupe de Γ des éléments qui commutent avec γ.

1. Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de S_n.
2. Déterminer les sous-groupes transitifs de S_3.
3. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par $(1,2,3,4)$ et $(1,3)$.
   (a) Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.
   (b) Déterminer le commutant de chaque élément d'ordre 2 de S_4, et réaliser H de cette manière.
   (c) Soit G un sous-groupe transitif de S_4 d'ordre un diviseur de 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés à la question (a).
   (d) Établir, à conjugaison près, la liste des sous-groupes transitifs de S_4.

Exercice 3 Classification des groupes non-commutatifs d'ordre 8

Le but de cet exercice est de déterminer tous les groupes *non-commutatifs* d'ordre 8 à isomorphisme près. Dans la suite, G est un groupe *fini* et $Z = Z(G)$ le centre de G.

1. Montrer que Z est un sous-groupe distingué de G. Si G est d'ordre 8, quels sont les ordres possibles de Z ?
2. Montrer que si G/Z est un groupe cyclique, alors G est abélien.

3. Soit p un premier, et supposer le cardinal de G est une puissance de p. Montrer que $Z(G) \neq \{1\}$. (**Indication :** on pourra consider l'action de G sur lui-même par conjugaison, puis utiliser l'équation aux classes pour trouver une formule du type suivant :
$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|H_i|}$$
où les $H_i \subsetneq G$ sont certains sous-groupes de G)
4. On suppose désormais que G est non-commutatif d'ordre $8 = 2^3$.
   (a) Montrer que $Z(G) \subset G$ est un sous-groupe d'ordre 2, et que $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 4.
   (c) Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre 4 est distingué dans G. Soit $H \subset G$ un sous-groupe cyclique et d'ordre 4 de G.

   Cas 1 : Il existe dans $G - H$ un élément d'ordre 2. Montrer alors que $G =< H, x >$. Montrer que l'automorphisme $H \to H$, $g \mapsto xgx^{-1}$ est égal à $g \mapsto g^{-1}$. En déduire que G est isomorphe au groupe diédral D_8.

   Cas 2 : Tout élément de $G - H$ est d'ordre 4. Montrer alors que G n'a qu'un seul élément d'ordre 2, et qu'il engendre $Z(G)$. On le note par -1. Soit i un générateur de H, et soit $j \in G - H$. On pose $k = ij$. Montrer que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On note alors $-i$ pour i^3, $-j$ pour j^3, et $-k$ pour k^3. Écrire la table de Cayley de G.

   Note : ce groupe est appelé le groupe des quaternions et noté par $\mathbb{H}_8$ (Confer DM $n^\circ 1$ Exercice 2 pour une définition de $\mathbb{H}_8$ en termes de matrices).

Exercice 4 Formule de Burnside et coloriages de polyèdres

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $x \in X$, on note par O_x son orbite par l'action de G et par G_x son stabilisateur.
   (a) Soit $x \in X$ et $y \in O_x$. Trouver $z \in G$ tel que
   $$G_y = z^{-1} G_x z.$$
   (b) Montrer que pour tout $x \in X$,
   $$|G| = \sum_{y \in O_x} |G_y|.$$
   (c) En déduire
   $$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$$
   où $\Omega = \{O_x, x \in X\}$ est l'ensemble des orbites dans X par l'action de G.
   (d) En décomposant de deux façons l'ensemble $F = \{(g, x) \in G \times X / g \cdot x = x\}$, déduire de la question précédente la **formule de Burnside** :
   $$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|,$$
   où $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$.

2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où k couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre T est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et on le suppose centré en 0.

   On pourra identifier deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation R de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, i.e. $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.
   (a) Soit X l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de X ?
   (b) Montrer que l'ensemble des rotations préservant T, muni de la loi de composition, est un groupe.

   On note G ce groupe. On admet qu'il est fini et que les éléments de G sont au nombre de 12 :
   - l'identité $Id_{\mathbb{R}^3}$.
   - 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π.
   - 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.

   (c) Le groupe G agit naturellement sur X, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite O_x dans X par l'action de G. Exprimer le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de k.