Feuille de TD n°2

Groupes

Exercice 1
Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Exercice 2
On considère la relation binaire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ définie par

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star, \qquad ((a,b) \sim (c,d)) \iff (ad = bc)\,.$$

Notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ par cette relation d'équivalence $\sim$, et pour $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$, on désigne par $[a,b] \in \mathcal{Q}$ sa classe d'équivalence. On définit ensuite la loi interne $\oplus$ sur l'ensemble quotient $\mathcal{Q}$ de la manière suivante

$$\oplus \colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}, \qquad \big([a,b],[a',b']\big) \mapsto [ab' + a'b, bb'].$$

1. Montrer que cette loi interne est bien définie.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}$, muni de cette loi interne, est un groupe.
3. Est-ce que le groupe $(\mathcal{Q}, \oplus)$ est commutatif ?

Exercice 3
On munit l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de la loi interne $\otimes$ définie par la formule

$$x \otimes y = xy + x + y.$$

Montrer que $(I, \otimes)$ est un groupe.

Exercice 4
1. Montrer que S_n n'est pas commutatif si $n \geqslant 3$. Rappeler le cardinal de ce groupe S_n.
2. Donner la table de Cayley de S_2 et de S_3.

Exercice 5
Soit $G = \{e, f\}$ un ensemble fini à deux éléments. Décrire tous les structures de groupe possibles sur cet ensemble, puis donner les tables de Cayley correspondantes. On verra plus tard que ces structures de groupe sur G sont *isomorphes* à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sous-groupes

Exercice 6
1. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. Dans les deux cas suivants, vérifier que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et exprimer a en fonction de x et y :

$$H = \big\{ux + vy,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\big\} \text{ et } H = x\mathbb{Z} \cap y\mathbb{Z}.$$

Exercice 7
Soient p un premier, et $N \geqslant 1$ un entier. Calculer le cardinal du groupe $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$, et du groupe $\left(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}\right)^*$.

Exercice 8

On rappelle que l'ensemble $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni du produit des matrices, est un groupe.

1. Notons $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $\mathbf{GL}(n, \mathbb{Z}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de matrices de déterminant $\in \{\pm 1\}$. Montrer que $\mathbf{GL}(n, \mathbb{Z}) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe.
2. Supposons $n \geqslant 2$. On considère le sous-ensemble de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ formé par des matrices inversibles de *trace nulle*. Est-ce un sous-groupe de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?
3. Supposons $n = 2$. Montrer que le sous-ensemble suivant nous donne un *sous-groupe commutatif* de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$:
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 9

Soient G un groupe et H une partie finie non vide de G stable par la loi de groupe. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Qu'en est-il si H est infini ?

Exercice 10

1. Soit R_0 l'ensemble des rotations du plan réel de centre 0. Montrer que $(R_0, \circ)$ est un groupe abélien.
2. Soit $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.