Master MIMSE - Année 2

Optimisation Stochastique

Contraintes de hasard

Exemple : PL stochastique

- On veut résoudre

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ s.c. & Ax = b \\ & T(\omega)x \geq h \\ & x \in \Re^n. \end{array}$$

- Il est quelquefois impossible de résoudre pour tous les ω : “fat solution”.
- “fat solution” : vérifier les contraintes avec 100% de probabilité.
- On admet une certaine probabilité de ne pas vérifier des contraintes.
- Par exemple, vérifier les contraintes avec une proba de 90%, 95 %, 99 % ...
- “Le risque zéro n’existe pas” mais alors “risque maîtrisé”

Contrainte de hasard - Deux approches

- On remplace $\boldsymbol{Tx} \geq \boldsymbol{h}$ par $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{Tx} \geq \boldsymbol{h}) \geq \boldsymbol{\alpha}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ = 0.9, 0.95, 0.99 ...
- Pour être précis on a $\mathbf{Pr}(\{\boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\omega})\}) \geq \boldsymbol{\alpha}.$
- C'est le modèle des *contraintes de hasard jointes*.

- Si on partage les contraintes de hasard on a le modèle des *contraintes de hasard séparées* :

$$\mathbf{Pr}(\{\boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{T_k}(\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{h_k}(\boldsymbol{\omega})\}) \geq \boldsymbol{\alpha_k} \ \forall \boldsymbol{k}.$$

Analogie avec la gestion des stocks

- En gestion des stocks stochastique, on parle de *niveau de service* lorsqu'on estime ne pas pouvoir répondre toujours à toutes les demandes et qu'on se fixe une probabilité de satisfaction à atteindre.
- Niveau de stock s_t et demande D_t pour la période t.
- Contraintes : $\forall t \; s_t \geq D_t$.
- Niveau de type 1 : On veut que pour α % des périodes, les demandes soient satisfaites.
- $\longrightarrow$ contrainte séparée
- Niveau de type 2 : On veut que globalement, on satisfasse α % des demandes :
- $\longrightarrow$ contrainte jointe.

Exemple : une contrainte linéaire

- On considère la contrainte linéaire suivante :

$$ax + by \geq c.$$

- On suppose que seul c est aléatoire.
- Vérifier la contrainte avec la probabilité α c'est vérifier

$$P(c \leq ax + by) = F(ax + by) \geq \alpha,$$

avec $F(x) = P(c \leq x)$

- Si v.a. discrète, F discontinue, donc F^{-1} mal définie,
- Sinon, en général, F^{-1} n'a pas d'expression analytique utile
- Utiliser des tables de valeurs (ex. loi normale centrée réduite)
- On remplace par $ax + by \geq F^{-1}(\alpha)$.
- Contraintes de hasard séparées devient un PL déterministe !

Exemple avec des demandes discrètes

- On considère le PL suivant, où seules les demandes sont aléatoires :

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ s.c. & 2x + y \geq h_1(\omega) \\ & x + 3y \geq h_2(\omega) \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

- On considère que seules trois réalisations sont possibles (“scénarios”) :
  - $h = (15, 10)$ avec une proba de 0.75
  - $h = (12, 18)$ avec une proba de 0.15
  - $h = (20, 15)$ avec une proba de 0.10

Exemple - $\alpha > 0.9$

- Il faut vérifier les contraintes dans les trois scénarios.
- On a à résoudre :

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ s.c. & 2x + y \geq 15 \\ & 2x + y \geq 12 \\ & 2x + y \geq 20 \\ & x + 3y \geq 10 \\ & x + 3y \geq 18 \\ & x + 3y \geq 15 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

- On simplifie en :

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ s.c. & 2x + y \geq 20 \\ & x + 3y \geq 18 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

- Solution optimale $(8.4; 3.2)$ de coût 11.6.

Exemple - $\alpha \in]0.85; 0.9]$

- Vérifier les contraintes dans le scénario 1 et 2 (éventuellement 3, mais pas obligé $\longrightarrow$ pas dans les contraintes).
- On a un PL à résoudre :

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ s.c. & 2x + y \geq 15 \ \ (*) \\ & 2x + y \geq 12 \\ & x + 3y \geq 10 \\ & x + 3y \geq 18 \ \ (*) \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

- On a pour optimum : $(5.4; 4.2)$ pour un coût de 9.6,
- L'ensemble des solutions contient l'ensemble des solutions précédent.

Exemple - $\alpha \in]0.75; 0.85]$

- Vérifier les contraintes dans le scénario 1, et 2 ou 3.
- On a deux PL à résoudre :

$$\begin{array}{rl} \min & x+y \\ s.c. & 2x+y \geq 15 \quad (*) \\ & 2x+y \geq 12 \\ & x+3y \geq 10 \\ & x+3y \geq 18 \quad (*) \\ & x,y \geq 0. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} \min & x+y \\ s.c. & 2x+y \geq 15 \\ & 2x+y \geq 20 \quad (*) \\ & x+3y \geq 10 \\ & x+3y \geq 15 \quad (*) \\ & x,y \geq 0. \end{array}$$

- On a deux optimums (un pour chaque PL) :
  1. $(5.4; 4.2)$ pour un coût de 9.6,
  2. $(9; 2)$ pour un coût de 11.
- L'espace des solutions n'est pas convexe !!

Exemple - $\alpha \in]0.25; 0.75]$

- Vérifier les contraintes dans le scénario 1 est nécessaire et suffisant.
- On a un PL à résoudre :

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ s.c. & 2x + y \geq 15 \\ & x + 3y \geq 10 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

- On a l'optimum suivant : $(7; 1)$ pour un coût de 8.
- L'espace des solutions est redevenu convexe !!

Non convexité - Convexité

- De façon générale, soit $\mathcal{G}_\alpha$ la famille des ensembles G d'événements tels que $\Pr(G) \geq \alpha$ (ensembles de scénarios dont la proba globale est $\geq \alpha$),
- L'ensemble des x admissibles $\mathcal{B}(\alpha)$ est tel que

$$\mathcal{B}(\alpha) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_\alpha} \bigcap_{\omega \in G} \{x | g(x,\omega) \leq 0\}$$

- Si g est convexe, les $\{x|g(x,\omega)\}$ sont convexes,
- leur intersection est convexe,
- mais l'union peut ne pas être convexe.
- Non convexité : optimums multiples, difficultés calculatoires
- Mais $\mathcal{B}(1)$ est convexe (fortes valeurs de α),
- et sous certaines hypothèses (fortes !)sur g et la distribution des ω, on peut avoir $\mathcal{B}(\alpha)$ convexe pour tout α.

Exemple : une contrainte linéaire - 2

- On reconsidère la contrainte linéaire suivante :

$$ax + by \geq c.$$

- On suppose maintenant a, b, c sont aléatoires.
- Vérifier la contrainte avec la probabilité α c'est vérifier

$$P(c \leq ax+by) = P(c-ax-by \leq 0) = F_Z(0) \geq \alpha,$$

avec $F_Z(x) = P(Z \leq x)$ et $Z = c - ax - by$.

- Il faut donc déterminer (à x, y fixés) la loi de Z.
- Ex. a, b, c de lois normales, indépendantes
- Z de loi normale de moyenne somme des moyennes, de variance $\sigma_c^2 + x^2\sigma_a^2 + y^2\sigma_b^2$,
- Utiliser des tables de valeurs (loi normale centrée réduite) pour déterminer $F^{-1}(\alpha) = z_\alpha$
- On trouve $z_\alpha(\sigma_c^2+x^2\sigma_a^2+y^2\sigma_b^2) = E[c]-E[a]x-E[b]y$
- Contraintes de hasard séparées devient un P Non Linéaire, déterministe.

Conclusion

- Modèle assez naturel : maîtrise du risque
- Des cas assez simples se transforment en modèles déterministes,
- mais calculs parfois importants pour reformuler (loi de sommes...)
- et après calculs parfois ardus (P Non Linéaires)
- non-convexité inhérente à certains modèles
- Optimums locaux possibles.