

OPTIMISATION STOCHASTIQUE

I - Introduction

Rappels d'optimisation

- Optimiser : trouver le (un des) **meilleur(s)** choix, en respectant certaines **contraintes**
- $\min/\max f(x)$
- s.c. (« sous les contraintes »)
- $g_k(x) \geq, \leq, = b_k$
- $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$

Différents types d'optimisation

- Pas de g_k : optimisation sans contraintes
- f, g_k linéaires (= polynômes de degré 1):

Programmation Linéaire

- Sinon, programmation non linéaire

(Optimisation 2)

- + X discret ($\subseteq \mathbf{Z}^n$) : PL Nombres Entiers
(Programmation Entière)

Optimisation déterministe/stochastique

- Jusqu'ici, on suppose que les fonctions et les seconds membres sont parfaitement connus.
- Dans beaucoup de cas réels, on optimise sur des données non connues exactement
- Une part de hasard : « stochastique »

Éléments aléatoires

- Prévoir le futur (forcément...) :
demandes des clients, pannes,
défauts,...
liés à la météo (retards de projets,
mode),...
réactions des concurrents
cours de la Bourse, du marché,...
- Evaluer le présent

Exemple 1 : marchand de journaux

- Un marchand de journaux achète à un fournisseur des journaux qu'il revend à des clients.
- Il ne sait pas le matin combien de journaux seront vendus dans la journée.
- Acheter beaucoup $\Rightarrow$ satisfaire plus sûrement les demandes, trop d'invendus
- Acheter peu $\Rightarrow$ peu d'invendus, manque à gagner (clients non satisfaits)

Exemple 1 : modèle

- a, v, i nombres de journaux achetés, vendus, invendus (éventuellement repris au prix du papier)
- $\text{Max } \mathbf{E}[\text{bénéf}] = \mathbf{E}[(c_v v + c_i i - c_A a)]$
s.c. $a = v + i$ (cohérence des variables)
 $v \leq \underline{D}$ (demande, aléatoire)
 $v, i \geq 0$
- a, v, i aléatoires ?

Exemple 2 : Stock

- Etat du stock à la période t s_t
- Arrivées de commandes à la période t L_t
- Demandes à la période t $\underline{D}_t$
- Coûts de stockage par période h
- Coûts fixes de commande K
- $\text{Min } \mathbf{E} [\sum_t (v \underline{D}_t - Kx_t - h s_t - a L_t)]$
- $s_{t+1} = s_t + L_t - \underline{D}_t \geq 0 \quad \forall t$
- $L_t \leq L_{\max} \quad x_t, x_t \in \{0,1\}$ (Modèle mixte entier)

Exemple 2 (suite)

- Contraintes $s_{t+1} = s_t + L_t - D_t \geq 0 \quad \forall t$
très difficiles à satisfaire (à moins qu'il existe un $D_{\max}$)
- Soit prévoir des pénuries (demandes à satisfaire en période $t+1$), quitte à payer des pénalités
- Soit pouvoir varier les quantités commandées au fur et à mesure =
« recours »

Exemple 3 : processus de production

- Au lieu d'avoir des commandes qui arrivent toutes faites, on a des produits que l'on fabrique
- Nouvelle difficulté : les quantités fabriquées sont incertaines (défauts, pannes de machines, manque ponctuel de personnel...)
- Partie aléatoire dans le membre de *gauche* des contraintes
- Aléas aussi dans les coûts des matières premières ou les prix de revente (négociations...) donc dans la *fonction objectif*

Influence des aléas

- Soit un problème déterministe (P) avec une solution optimale (x^*), de coût $f(x^*)$.
- Rajouter des aléas ($P \Rightarrow P'$) peut :
 - laisser (x^*) optimale pour (P'), de coût modifié $f'(x^*)$
 - modifier la solution optimale, mais conserver ses caractéristiques
 - changer complètement l'optimum

Décision/aléas

- En général les décisions sont à prendre au temps $t=0$,
- Les aléas se réalisent à des $t>0$.
- Solutions *wait-and-see* : optimums si on connaissait les réalisations des v.a.
- Modèle à 2 étapes : décisions seulement à $t=0$;
- Modèle à plusieurs étapes : on prend des décisions à des temps t_k , connaissant les décisions prises à $t < t_k$, et les réalisations des v.a. à $t < t_k$.

Variables aléatoires

- Variables ω pouvant prendre des valeurs sur un espace $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$.
- Support : plus petit espace contenant toutes les valeurs possibles de ω .
- Fonction de densité f.d. : $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^+$
- Proba $P(x < \omega < x + dx) = f(x) dx$
- Proba $P(a < \omega < b) = \int_{a \rightarrow b} f(x) dx$
- Espérance (moyenne): $\mathbf{E}[\omega] = \int_{a \rightarrow b} x f(x) dx$

Distributions usuelles

- Distribution discrète : ensemble fini X de doublets $X=\{(x_i, p_i)\}$ avec $P(\omega=x_i) = p_i$.
- Distribution uniforme discrète : idem, avec $\forall i, p_i = \text{cte} = 1/|X|$.
- Distribution uniforme (continue) sur $[a,b]$
 $\mathcal{U}(a,b)$: support = $[a,b]$, f.d. $f(x)=1/(b-a)$.
- Distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ
 $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$: support = $\mathfrak{R}$, f.d. $f(x) = 1/ \sigma \sqrt{2\pi} \exp(-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2)$ (fonction en cloche)

Idées simplistes

- Vérifier toutes les contraintes quelque soit la valeur des variables aléatoires $\Rightarrow$ **solution tous cas**, ou **pire cas** (« fat solution ») :
 - en général, très coûteuse
 - et même parfois de coût infini (ex. distribution de support non borné : distribution normale)

Solution pire cas

- Exemple : marchand de journaux
- Pas d'inventus repris, il veut satisfaire les demandes.
- Demandes : distribuées uniformément sur un intervalle $[0, b]$, $0 < b < \infty$
- Il doit commander toujours b journaux
- Il dépense $b c_A$ euros par jour
- Il récupère en moyenne $(b/2) c_v$ euros par jour
- Si $c_v / c_A < 2$, il perd de l'argent !!

Solution pire cas

- Coûts bien trop élevés dans certains cas
- Variables aléatoires à support non borné (ex. loi normale) : solutions parfois infinies
- Parfois à peu près justifiée : construction de centrales nucléaires, d'immeubles en zone sismique...
- Plus réaliste : admettre un risque de probabilité très faible : niveau de service en stocks, modèles de la contrainte de hasard (« chance constraint »).

Valeurs moyennes

- Idée : remplacer les variables aléatoires par leurs espérances.
- Résoudre le problème comme un problème déterministe.
- ☺: Modèle facile (déterministe)
- ☹ : Les risques sont bien trop importants : si on identifie “moyenne” et “médiane”, contraintes violées dans la moitié des cas.

Valeurs moyennes avec marges de sécurité

- Idée : On remplace les données aléatoires par des valeurs plus “sûres” que les moyennes.
- Analogie gestion des stocks : niveaux de sécurité.
- Problème déterministe, donc facile.

Valeurs moyennes avec marges de sécurité -2-

- Très empirique, pas forcément un bon modèle de décision.
- Qu'est-ce qu'une valeur “plus sûre” ?
- De combien faut-il prendre une marge de sécurité ?  Modèle de la contrainte de hasard.
- A compléter par une analyse de sensibilité :
 - Comment évolue la solution quand on fait $T \leftarrow T + \delta T$ et $h \leftarrow h + \delta h$?

Exemple du marchand de journaux – idées simplistes

- Prix d'achat C_A , de vente C_V , de reprise des invendus C_I .
- Demande inconnue $\underline{D}$.
- Cas 1 : $\underline{D}$ uniforme sur $[0;100]$.
- Cas 2 : $\underline{D}$ normale $\mathcal{N}(50;29)$.
- $C_A=0.7\text{€}$, $C_V= 1\text{€}$, $C_I=0.1\text{€}$.

Exemple du marchand de journaux – valeur max

- Cas 1 : Pire cas = demande de 100 journaux. Il commande donc $Q=100$.
- Il paye $Q.C_A=70\text{€}$ par jour.
- En moyenne il vend 50 journaux par jour donc 50 invendus, ce qui lui rapporte $E[D].C_V+(Q-E[D]).C_I=55\text{€}$ par jour.
- Il perd 15€ par jour !
- Cas 2 : Pire cas = demande infinie !!

Exemple du marchand de journaux – valeur moyenne

- On remplace $\underline{D}$ par $E[\underline{D}]=50$.
- Donc $Q = 50$.
- Il paye 35€ par jour.
- Cas 1 : En moyenne un jour sur deux il vend tout donc il gagne 50€ par jour
- En moyenne un jour sur deux il ne vend pas tout. Il vend alors en moyenne $E[\underline{D}|\underline{D}<50]=25$ journaux donc gagne 27.5€
- Bilan : $-35 + (50+27.5)/2=3.75\text{€}$

Exemple du marchand de journaux – valeur moyenne

- Cas 2 : Il paye 35€ par jour.
- Un jour sur deux il vend ses 50 journaux donc gagne 50€.
- Un jour sur deux il ne vend pas tout. Il vend en moyenne $E[D|D < 50] = 38.4$ journaux et garde en moyenne $50 - E[D|D < 50] = 11.6$ journaux invendus (dans les tables).
- Gain moyen : 9.78€ par jour.

Exemple du marchand de journaux – marge de sécurité

- Le marchand choisit $Q = E[\underline{D}] + \Delta$. Par exemple $\Delta = 29$ (écart-type).
- Il commande 79 journaux qu'il paye 55.3€.
- Cas 1: 21 % des jours il vend tout donc gagne 79€. 79% des jours il ne vend pas tout. Il vend alors en moyenne $E[\underline{D} | \underline{D} < 79] = 39.5$ journaux, avec 39.5 journaux invendus. Il gagne alors 43.45€.
- Il perd $55.3 - (0.79 * 43.45 + 0.21 * 79) = 4.38\text{€} !!$

Exemple du marchand de journaux – marge de sécurité

- Qu'est-ce qu'une marge de sécurité ici ?
- Satisfaire les demandes ou “minimiser” les risques d'invendus ?
- Les invendus coûtent cher, le mieux serait peut-être de diminuer Q .

Le marchand de journaux – analyse de sensibilité

- Analyse de sensibilité autour de $Q=50$ (cas 1): on paye $0.7(50+d)$ €,
- On vend tout dans $(50-d)\%$ des jours donc on gagne $(50+d)$ €,
- dans $(50+d)\%$ des jours on a en moyenne $(50+d)/2$ journaux vendus et $(50+d)/2$ invendus. Gain $(50+d)/2 + (50+d)/2 * 0.1$ €
- Bilan : $3.75 - 0.0045 d^2 - 0.15 d$

Le marchand de journaux – la solution

- C_O cout par journal invendu = $C_A - C_I$
- C_U cout par demande insatisfaite = $C_V - C_A$
- $G(Q) = C_O \int_{0 \rightarrow Q} (Q - D)f(D)dD + C_U \int_{Q \rightarrow \infty} (D - Q)f(D)dD$
- $G' = C_O F(Q) - C_U (1 - F(Q))$ avec $F(Q) = P[D \leq Q]$
- Trouver Q^* tel que $F(Q^*) = C_U / (C_O + C_U)$
- Cas 1 : $Q^* = 33$, cas 2 : $Q^* = 38$.