Master MIMSE - Année 2

Optimisation Stochastique

Gestion des stocks stochastique

Incertitudes dans le modèle

- Le modèle de base : contraintes de satisfaction des demandes

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{h}$$

  avec $\boldsymbol{T}_k^T \boldsymbol{x}$ représentant la quantité de “produit $\boldsymbol{k}$” ou de “produit à la période $\boldsymbol{k}$” pouvant être fournie (par fabrication ou commande) et $\boldsymbol{h}_k$ la demande correspondante.

- La matrice $\boldsymbol{T}$ est parfois appelée “matrice de technologie”.
- Par analogie avec la gestion des stocks, modèles plus ou moins cycliques,
- mais incertitudes sur :
  - le taux de demande,
  - le taux de production : pannes de machine (donc retards dans la production), productivité, défauts des matières premières, produits fabriqués défectueux,
  - les fournisseurs (retards de livraison, indisponibilités, défauts)
- les modèles *parfaitement* cycliques et les raisonnements associés (raisonner par quantités ou par périodes, c’est équivalent) ne sont plus valables.
- Résultat : possibilité d’une *pénurie*.

Conséquences d’une pénurie

- Plusieurs cas se présentent. Une pénurie peut entraîner :
  - la perte d’une vente,
  - la perte d’un client (donc de ventes futures), atteinte à l’image de marque,
  - un retard de livraison : produit pris sur les fabrications/livraisons futures (*back-order*),
  - des coûts pour se fournir ou fabriquer en urgence,
  - le blocage d’un atelier (ligne de production).

Coûts d'une pénurie

- Les coûts peuvent donc être :
  - fixes, indépendamment du nombre d'objets en rupture ou de la durée de la rupture de stocks,
  - proportionnels aux ventes perdues, indépendamment de la durée,
  - proportionnels aux quantités et aux durées : pénalités de retard, "astreintes"...
- Ces coûts sont difficiles à évaluer,
- à moins qu'ils ne résultent d'une négociation "fournisseur/client".

Niveau de service

La qualité de service se mesure également de plusieurs façons (“types”) :

1. le nombre de périodes de pénuries, indépendamment des quantités et des durées,
2. le nombre d’items en rupture, de demandes non remplies, indépendamment de la durée,
3. le retard moyen des demandes insatisfaites.

Types d'inventaire

En pratique, deux types d'état des stocks :

- **Inventaire continu :** stock connu à tout instant
  - lourd à mettre en place pour de grandes quantités et de une grande variété d'articles,
  - parfois imprécis,
  - ou au contraire indûment trop précis.
  - On peut mettre en place des stocks d'alerte pour lancer une commande
  - Pénurie entre la date de la commande et la livraison

- **Inventaire périodique** (toutes les semaines, tous les mois...)
  - Plus léger
  - De toute façon imprécis
  - Risque de pénurie *même avant* la commande, entre deux inventaires.
  - Passer commande *avant* le seuil d'alerte

Quatre techniques pour s’en sortir...

- “Gonfler” les demandes, sous-estimer les capacités de livraison,
- Utiliser des stocks de sécurité : commander alors que le stock restant est plus que suffisant pour couvrir une demande “moyenne” jusqu’à la livraison.
- Utiliser un délai de livraison de sécurité : on prévoit la date où le stock deviendra critique, et on commande plus tôt (si incertitude concerne plutôt les délais).
- Résoudre un problème stochastique (cf. contrainte de hasard)

Modèle du marchand de journaux -1-

- “Modèle à une seule période” :
  - tout est “remis à zéro” à la fin des journées,
  - les sur-stocks ne se transmettent pas à la période suivante,
  - les ruptures ne sont pas comblées par les commandes futures.

- On note :
  - Coûts d’achat (par le marchand de journaux) :c_A,
  - Prix de vente :c_V,
  - Prix de reprise d’invendus :c_I.
  - Demande : D v.a. de fonction de densité $f(x)$ et de moyenne $E[D]$ connues.
  - On cherche à évaluer la quantité Q à commander.

Marchand de journaux -2-
Calcul du bénéfice

- Bénéfice d'une commande de Q journaux :

$$C(Q) = -c_A Q + c_V \min\{Q, D\} + c_I \max\{Q - D, 0\}$$

- Si $Q \leq D$ on peut récrire :

$$C(Q) = -c_A Q + c_V Q = (c_V - c_A)(Q - D) + (c_V - c_A) D$$

- Sinon $Q \geq D$ on peut récrire :

$$\begin{aligned} C(Q) &= -c_A Q + c_V D + c_I (Q - D) \\ &= (c_I - c_A)(D - Q) + (c_V - c_A) D. \end{aligned}$$

- Bref, en notant $c_O = c_A - c_I$ et $c_U = c_V - c_A$ on a :

$$C(Q) = c_O \max\{Q - D, 0\} + c_U \max\{D - Q, 0\} + c_U D.$$

Marchand de journaux -3- Calcul de l'espérance

- On prend l'espérance (loi des grands nombres : sur un grand nombre de jours, le comportement en moyenne tend vers l'espérance).
- Partie constante : $c_U E[D]$ négligée par la suite (n'intervient pas pour l'optimisation).
- Il reste :

$$\begin{aligned} E[C(Q)] &= c_O E[\max\{Q-D,0\}] + c_U E[\max\{D-Q,0\}] \\ &= c_O \int_0^Q (Q-x) f(x)dx + c_U \int_Q^{+\infty} (x-Q) f(x)dx \\ &= c_O Q \int_0^Q f(x)dx - c_O \int_0^Q x f(x)dx \\ &\quad + c_U \int_Q^{+\infty} x f(x)dx - c_U Q \int_Q^{+\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

- En dérivant par rapport à Q :

$$\begin{aligned} dE[C(Q)]/dQ &= c_O \int_0^Q f(x)dx - c_U \int_Q^{+\infty} f(x)dx \\ &= c_O F(Q) - c_U(1-F(Q)) \end{aligned}$$

- Dérivée = 0 d'où $F(Q^*) = c_U/(c_O + c_U)$.
- Pour F inversible, $Q^* = F^{-1}(c_U/(c_O + c_U))$.
- $c_O \Pr[D \leq Q^*] = c_U \Pr[D \geq Q^*]$.

Marchand de journaux -4- Variantes

- **Invendus perdus :** faire $c_I = 0$ donc $c_O = c_A$.
- **Demandes discrètes :**
  - Trouver Q_1 et Q_2 consécutives telles que

    $$F(Q_1) \leq c_U/(c_O + c_U) \leq F(Q_2),$$

  - Prendre la plus haute : $Q^* = Q_2$.
- **Stock initial :** $u > 0$.
  - Il suffit de commander $Q^* - u$.
  - On interprète Q^* comme un niveau “cible”.
  - A la limite $u > 0$ on ne commande rien.
  - Pertinent dans le cas d’items non périssables.
- **Nombre infini de périodes :**
  - Si les invendus se reportent sur les périodes suivantes,
  - et les ruptures sont fournies (avec retard) grâce aux commandes suivantes,
  - sur un nombre infini de périodes, en moyenne, les quantités commandées sont égales aux demandes.
  - On calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} C(n \text{ périodes })$ et on annule la dérivée.
  - On trouve $F(Q^*) = p/(p+h)$ avec p coût des ruptures (par item non disponible) et h coût de stockage.
  - Ventes perdues : $F(Q^*) = (p+S-c)/(p+h+S-c)$ avec S prix de vente et c coût variable.

Système à politique de recommande fixe (s,Q)

- On suppose que la politique de contrôle des stocks est un inventaire continu,
- l'état des stocks est connu à chaque instant.
- la demande est aléatoire, stationnaire
- Politique de recommande fixe (s,Q) :
- On lance une commande si le niveau de stock observé atteint un niveau minimum
- $s =$ niveau-seuil, seuil d'alerte, point de recommande,
- la quantité commandée est fixe, notée Q.
- Pour une demande déterministe fixe, dans le modèle EOQ, il était équivalent de commander à un niveau-seuil qu'avec une périodicité fixe, et pour un délai de livraison fixe, s était fixe.
- Ici, Q et s sont les deux variables de décision (indépendantes).

Notations

- **Demande :**
  - la demande est une variable aléatoire et stationnaire :
  - l'espérance de la demande sur un intervalle de temps de longueur $\boldsymbol{l}$ est constante et proportionnelle à $\boldsymbol{l}$,
  - de taux $\boldsymbol{D}$.
  - La variable aléatoire importante à considérer est $\boldsymbol{X}$ la demande pendant **le délai de livraison** $\boldsymbol{L}$, considéré fixe !
  - $\boldsymbol{X}$ est une v.a. avec :
  - $\boldsymbol{E[X] = \mu_X = DL}$ et $\boldsymbol{\sigma_X^2 = \sigma_D^2 L}$,
  - fonction de densité $\boldsymbol{f(x)}$,
  - fonction de répartition $\boldsymbol{F(x)}$,
  - fonction de perte $\boldsymbol{L(x) = \int_x^{+\infty} (t - x) f(t) dt}$.
- **Coûts :**
  - $\boldsymbol{K}$ coût fixe par commande,
  - $\boldsymbol{h = I.c}$ coût de stockage par item, par an,
  - $\boldsymbol{c}$ coût variable à la commande,
  - $\boldsymbol{p}$ pénalité de rupture de stock.

Analyse de la politique (s,Q)

- **Longueur moyenne d'une période :**
  - Une période (cycle) est la durée entre deux livraisons de quantité Q.
  - Donc en moyenne $T = Q/D$.
- **Stock de sécurité :**
  - Le niveau de stock est au plus bas juste avant une livraison.
  - Ce niveau minimum moyen est appelé "stock de sécurité" ("Safety Stock").

$$SS = E[s - X] = s - DL.$$

- **Niveau de stock moyen :**
  - Ce niveau moyen varie linéairement entre SS et $SS + Q$
  - donc :

$$I^+ = SS + Q/2.$$

- **Pénurie moyenne :**
  - Si pendant un cycle la demande X est supérieure à s, on a une rupture.
  - La rupture moyenne sur un cycle est donc

$$I^- = E[\max\{X - s, 0\}] = \int_s^{+\infty} (x - s) f(x) dx$$

$$I^- = L(s)$$

Politique (s,Q) optimale :

- **Coût moyen par unité de temps :**

$$C(s,Q) = \frac{K}{T} + cD + hI^+ + \frac{p}{T}I^-$$

- En négligeant cD (constant) on récrit :

$$C(s,Q) = K\frac{D}{Q} + h(s - DL + \frac{Q}{2}) + p\frac{D}{Q}I^-(s)$$

- Les dérivées donnent :

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -\frac{KD}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{pD}{Q^2}I^-(s)$$

$$\frac{\partial C}{\partial s} = h + \frac{pD}{Q}\frac{dI^-(s)}{ds}$$

avec $\frac{dI^-(s)}{ds} = -\Pr[X > s]$.

- Fonction convexe sous des conditions simples, donc annuler le gradient.

- On trouve alors :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(K + pI^-(s^*))}{h}}$$

avec s^* vérifiant

$$\Pr[X > s^*] = \frac{hQ^*}{pD}.$$

Remarques sur les conditions optimales

- D'après la formule

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(K + pI^-(s^*))}{h}}$$

on a $pI^- s^*$ qui apparaît comme un coût fixe supplémentaire.

- A part ça, formule EOQ.

- L'autre condition

$$\mathbf{Pr}[X > s^*] = \frac{hQ^*}{pD}$$

peut se récrire

$$\frac{p}{T^*}\mathbf{Pr}[\text{rupture de stock}] = h.$$

- A l'optimum, le bénéfice moyen d'ajouter une unité au stock de sécurité est égal à ce coût.

Calcul de (s^*, Q^*)

- **Solution exacte**
  - Résoudre un système non linéaire à deux inconnues.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(K + pI^-(s^*))}{h}}$$

et s^* vérifiant

$$\Pr[X > s^*] = \frac{hQ^*}{pD}.$$

  - Ne peut se faire si on n'a pas d'écriture analytique pour $L(s)$ et $F(s)$.
  - Même encore si on en a une...
  - Bon courage !

- **Une solution approchée**
  - On ignore la possibilité d'une rupture de stock,
  - on calcule alors $\hat{Q}$ selon l'EOQ

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

  - puis $\hat{s}$ tel que :

$$\Pr[X > \hat{s}] = \frac{h\hat{Q}}{pD}.$$

  - OK si $I^-(\hat{s})$ est bas.

Solution algorithmique

1. On pose $Q_0 = EOQ$
2. Itération i
   (a) Calculer s_i à partir de Q_i :
   $$s_i = F^{-1}(1 - \frac{hQ^*}{pD})$$
   (b) Calculer Q_{i+1} à partir de s_i :
   $$Q_{i+1} = \sqrt{\frac{2D(K + pI^-(s_i))}{h}}$$
   (c) Si $|Q_{i+1} - Q_i| > \epsilon$ reboucler.

- Convergence rapide.

Niveau de service et politique (s,Q)

Niveau de Type 1 :

- Le pourcentage moyen de cycles avec une pénurie est supérieur à $\alpha\%$.
- Loi des grands nombres : sur beaucoup de cycles, le nombre moyen de cycles avec pénurie est égal à la probabilité d'avoir une pénurie sur un cycle.
- $\Pr[X > s^*] \geq 1 - \alpha$
- Imposer un niveau de service de Type 1 de niveau α détermine complètement le s à choisir !
- En effet $F(\hat{s}) = \alpha$,
- On peut prendre alors $\hat{Q} = EOQ$ (solution couramment adoptée)
- La pénalité par rupture est obtenue par

$$p = \frac{\hat{Q}}{D(1-\alpha)}$$

Niveau de service et politique (s,Q)

Niveau de Type 2 :

- La proportion des demandes satisfaites est supérieure à $\beta\%$.
- La proportion des demandes insatisfaites sur un cycle doit être supérieure à $(1-\beta)\%$ (en moyenne).
- $I^{-}(s)/Q=(1-\beta)$.
- Equation faisant intervenir Q et s, donc
- Imposer un niveau de service de Type 2 de niveau β ne suffit plus à déterminer s !
- Comme
$$p=\frac{hQ}{\Pr[X>s]D},$$
- on récrit
$$Q^{*}=\sqrt{\frac{2D(K+\frac{hQ}{\Pr[X>s]D}I^{-}(s^{*}))}{h}}$$
- d'où
$$Q^{*}=\frac{I^{-}(s^{*})}{\Pr[X>s^{*}]}+\sqrt{\frac{2KD}{h}+\left(\frac{I^{-}(s^{*})}{\Pr[X>s^{*}]}\right)^{2}}.$$

Politiques d'inventaire périodique

- Le niveau d'inventaire est connu (mesuré) à des moments fixés dans le temps.
- Utile quand les coûts d'un inventaire continu sont trop élevés,
- ou pour des raisons d'organisation de l'entreprise ou liées à des périodicités de commande, fabrication...
- Périodicité fixe ou un paramètre à optimiser.
- Le niveau moyen de stock est supérieur au cas d'inventaire continu,
- car plus longue période où la rupture peut arriver
- remplacer $\boldsymbol{L}$ par $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{T}$ temps entre deux inventaires).
- quand $\boldsymbol{L} > \boldsymbol{T}$, considérer les commandes en cours :
  "position d'inventaire"= en-stocks - "back-orders" + commandes en cours.

Deux politiques courantes

- **Politique** (s, S, T)
  - On mesure toutes les T unités de temps,
  - si à la fin d'une période le niveau de stock passe en-dessous de s on place une commande
  - pour atteindre un niveau de stock de S (niveau "cible").
  - Commander par quantité fixe peut causer des instabilités dans le système.

- **Politique** (S, T)
  - On commande à la fin de chaque période de temps,
  - jusqu'au niveau cible
  - Simple à implémenter, valable quand les coûts de commande sont faibles par rapport aux coûts d'inventaire.

Politique (S, T) avec ventes perdues

- Un seul produit,
- L est fixe,
- Coût fixe K incluant les coûts d'inventaire,
- Pénalité par article en rupture p
- Taux moyen de demande D,
- X v.a. de la demande pendant $T + L$, avec
  - f.d. : $f(x)$,
  - $E[X] = D(T + L)$,
  - $\sigma_X^2 = \sigma_D^2(T + L)$
- Quantité moyenne à commander $Q = TD$,
- Pénurie moyenne $I^-(S, T) = \int_S^{+\infty}(x - S)f(x)dx$
- Stock de sécurité moyen : $SS = S - E[X] + I^-(S, T)$
- Niveau d'inventaire moyen : $I^+ = SS + \frac{Q}{2}$.

Politique (S, T) optimale

- Coût moyen par unité de temps :

$$C(S,T) = \frac{K}{T} + hS - hD(L + \frac{T}{2}) + (h + \frac{p}{T}) I^-(S,T).$$

- Si T est fixée (imposée par l'environnement),

$$\frac{dC}{dS} = h + (h + \frac{p}{T}) \frac{dI^-}{dS}$$

- d'où à l'optimum

$$\Pr[X > S^*] = \frac{hT}{hT + p}.$$

- Si T n'est pas fixée,
- pas de solution analytique (dérivée en T qui coince...)
- Solution numérique :
  - Prendre un T,
  - Calculer $S^*(T)$,
  - Calculer $\varphi(T) = C(S^*(T), T)$
  - Optimiser la fonction $\varphi(T)$ par des techniques approchées.

- <u>A T fixée</u>
  - Niveau de service de type 1 : $\Pr[X > S] = (1 - \alpha)$.
  - Niveau de type 2 : $I^-(S)/DT = (1 - \beta)$
  - Fixer un niveau de service revient à fixer S donc SS.

Politique périodique (s, S, T)

- On cherche la politique qui minimise le coût total par unité de temps.
- Le calcul du coût moyen est très complexe : utilisation de la théorie des chaînes de Markov pour calculer le coût moyen par cycle entre deux commandes consécutives, diviser par la longueur moyenne d'un cycle.
- Solution optimale rarement utilisée en pratique.
- Solution approchée courante :
  - Calculer une politique optimale (s^*, Q^*) pour un inventaire continu.
  - On pose

$$\hat{s} = s^*, \hat{S} = s^* + Q^* \text{ et } \hat{T} = \frac{Q}{D}.$$

- Il existe aussi des modèles multi-produits (s_i, S_i, T) où par ex. les coûts fixes sont partagés...