Master MIMSE - Année 2

Optimisation Stochastique

Programmation linéaire stochastique -

Modèle à recours

Programmation Linéaire stochastique

- On considère le PL suivant, dont les données sont aléatoires.

$$\begin{array}{rl} \min & c(\omega)^T x \\ s.c. & A(\omega)x \leq b(\omega) \\ & x \in \Re^n \end{array}$$

- Les effets des perturbations stochastiques sont :
  - $c(\omega)$: modification de la pente de la fonction de coût,
  - $b(\omega)$: déplacement parallèle d'une contrainte,
  - $A(\omega)$: rotation d'une contrainte.

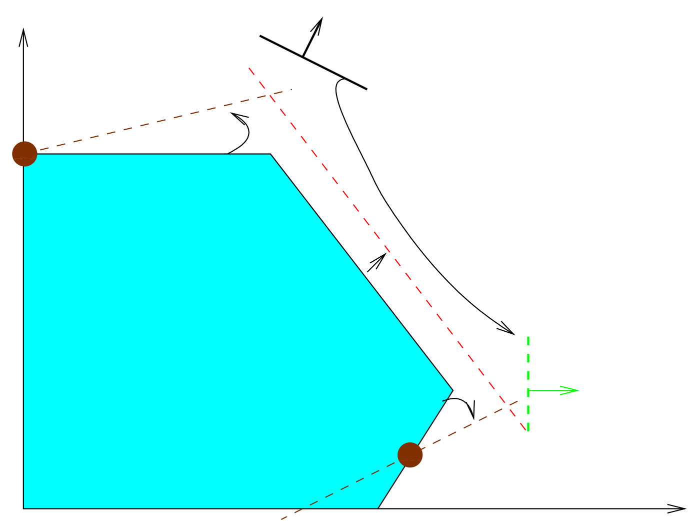

Figure 1: Un PL stochastique

- Le point optimal $(x^*, J(x^*))$ peut varier :
  - le point reste le même, avec $c^T x^*$ qui varie,
  - $J(x^*)$ reste le même mais x^* varie,
  - $J(x^*)$ varie.

Modèles anticipatifs

- Solutions *here-and-now.*
- On se fixe des valeurs de $\boldsymbol{\omega}$ dès le départ, et on optimise le programme déterministe en $\boldsymbol{x}$.
- ex. valeurs moyennes :
- Linéarité de l'espérance : on peut remplacer

$$\begin{array}{rl} \min & \mathrm{E}_\omega[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega})^T \boldsymbol{x}] \\ s.c. & \mathrm{E}_\omega[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}] \leq \mathrm{E}_\omega[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\omega})] \\ & \boldsymbol{x} \in \Re^n \end{array}$$

par

$$\begin{array}{rl} \min & \overline{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega})}^T \boldsymbol{x} \\ s.c. & \overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\omega})}\boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\omega})} \\ & \boldsymbol{x} \in \Re^n \end{array}$$

- PL déterministe en $\boldsymbol{x}$!
- Solution en général mauvaise.
- Autres solutions *a priori* :
  - pire cas : solution très chère,
  - marge de sécurité : meilleure que la valeur moyenne, mais arbitraire,
  - contrainte de hasard, niveau de service : difficile à calculer.

Modèle adaptatif

- Solutions *wait-and-see.*
- Si on connaissait ω, quelle solution aurait été optimale ?
- A partir d'un problème de départ :

$$\begin{array}{rl} \min_x & \mathrm{E}[f_0(x,\omega)] \\ s.c. & \mathrm{E}[f_i(x,\omega)] \geq 0 \\ & x \in \Re^n \end{array}$$

  qui peut modéliser beaucoup de cas (contraintes linéaires, contraintes probabilistes,...)

- On peut observer $(\hat{\omega})$ qui donne une information (éventuellement incomplète),
- on a :

$$\begin{array}{rl} \min_x & \mathrm{E}[f_0(x,\omega)|\hat{\omega}] \\ s.c. & \mathrm{E}[f_i(x,\omega)|\hat{\omega}] \geq 0 \\ & x \in \Re^n \end{array}$$

- "Problème de la distribution" :
- un $\hat{\omega} \longrightarrow$ une (des ?) solution(s) optimale(s) $x^*(\omega)$,
- Connaissant la distribution de ω, quelle est celle de $\mathrm{E}[f_0(x^*(\omega),\omega)]$?
- Difficile à caractériser.

Modèle présent/futur

- Combinaison des modèles anticipatif et adaptatif,
- plus des aspects dynamiques
- On ne connaît pas la réalisation de ω
- au moment de choisir x.
- Deux moments différents :
  - Présent : choisir x,
  - Futur : réalisation de ω.
- On peut aussi avoir des décisions dans le futur.
- Modèle multi (n) étapes :
  - Présent : $k = 0$, décision de x_0,
  - Futur : étape k, décision de x_k,

connaissant $\left\{ \begin{array}{ll} & \omega_1, \ldots, \omega_k \\ \text{et} & x_1, \ldots, x_{k-1} \end{array} \right.$

Modèles de recours à deux étapes

- Deux étapes différentes :
  - Présent : on décide de $\boldsymbol{x}$,
  - Futur : on mesure $\boldsymbol{\omega}$,
    et on décide de $\boldsymbol{y(x,\omega)}$.
- Interprétations :
  - $\boldsymbol{y}$ “recours” pour s’adapter aux réalisations de $\boldsymbol{\omega}$
  - $\boldsymbol{x}$ décision “à haut niveau”, planification à long terme,
  - $\boldsymbol{y}$ décision “à bas niveau”, correction, ajustement à cours terme, dans l’urgence, erreur...

Ex. Localisation d'entrepôts

- On veut construire des entrepôts pour desservir des magasins.
- Minimiser les coûts de construction,
- et de desserte des magasins,
- sous des contraintes de demandes à satisfaire
- et de capacités.
- A $t = 0$, estimation *a priori* des demandes (étape 1),
- A $t > 0$, réalisations connues (étape 2).
- Etape 1 : Utiliser les estimations pour résoudre le problème du choix des emplacements pour les dépôts,
- Etape 2 : Connaissant les vraies demandes, affecter les demandes aux entrepôts
- Et si on a mal estimé les demandes, au point qu'un entrepôt est "saturé" avec les demandes réelles ?

Ex. Réseaux

- **Tournées de véhicules**
  - Demandes de clients (ramassage scolaire, ramassage d'ordures, livraisons...)
  - Un certain nombre de véhicules pouvant les satisfaire,
  - Etape 1 : Affecter les clients à des véhicules (en tenant compte de la gégraphie)
  - Etape 2 : Organisation pratique de la tournée (en tenant compte des aléas de circulation, des retours au dépôt...)
- **Télécom, énergie**
  - Construire/modifier/racheter un réseau liant les abonnés pour satisfaire leurs demandes de communication, d'énergie.
  - Etape 1 : Design et dimensionnement du réseau,
  - Etape 2 : Routage des demandes en temps réel.

Ex. Gestion de stocks

- Un réseau de librairies doit commander des quantités d'exemplaires du dernier *Harry Potter* pour approvisionner ses magasins en satisfaisant la demande magasin par magasin.
- Etape 1 : Choisir pour chaque librairie i, le nombre Q_i d'exemplaires à commander, en se basant sur une demande estimée,
- $Q_i + y_i - D(\omega)_i = marge_i$
- Etape 2 : Si risque d'une rupture prochaine dans un magasin i, "*recours*"
  - $y_i > 0$
  - re-commander (coûts fixes, risques de rupture, ventes perdues ou en attente...)
  - se faire livrer quelques exemplaires depuis un magasin j proche de i (avec un certain coût),
- **ou** Etape 2 : Il reste des invendus.
  - $y < 0$
  - Les redistribuer dans les magasins où la demande est la plus forte,
  - les solder (coût d'une vente à perte)

Commentaires

- Exemples localisation, réseaux : essentiellement en deux étapes, des décisions différentes à prendre à des moments différents,
- Exemple de la gestion des stocks : les deux étapes : approvisionner un magasin, la deuxième étant une correction de l’erreur commise dans la première.
- Ces différences apparaissent dans la manière de traiter ces problèmes.

Comment aborder ce problème ?

- Deux problèmes indépendants.
  - Optimisation *hiérarchique* :
  - Dans la première étape on néglige une partie (ou la totalité) de ω donc de y, et des contraintes qui le font intervenir.

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) + g(y) \\ s.c. & a_1(x) \leq b_1 \\ & a_2(x) + a_3(y) \leq b_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} \min & f(x) \\ s.c. & a_1(x) \leq b_1 \\ & \hat{a}_2(x) \leq \hat{b}_2 \end{array}$$

  - Dans la deuxième étape, on résout le problème en y à x fixé.

$$\begin{array}{rl} \min & g(y) \\ s.c. & a_2(x^*) + a_3(y) \leq b_2 \end{array}$$

- Prendre en compte le coût du recours (coût des corrections, coûts de l'erreur...) dans l'estimation de x
- Interdépendance présent/futur,
- résolue en prenant l'espérance des coûts du recours.

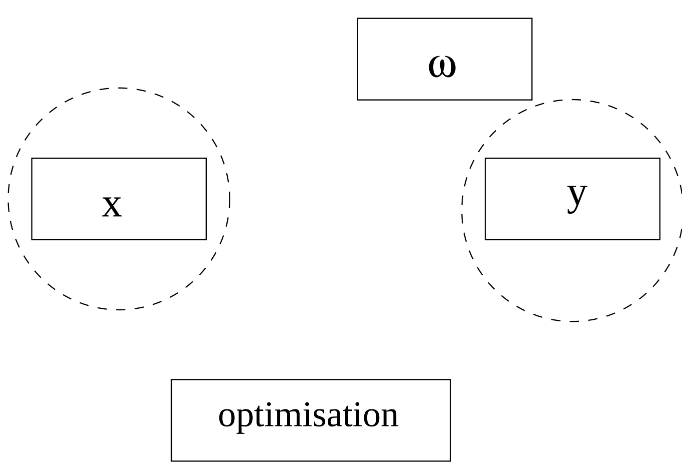

Figure 2: Modèle de recours à deux étapes

Modèle de recours à deux étapes

- Contraintes :
  - Déterministes, uniquement sur $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{Ax = b}$
  - Stochastiques : $\boldsymbol{T(\omega)x = h(\omega)}$
  - Quasi-impossibles à satisfaire *a priori* donc *recours* $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega)}$$

- Ces recours ont un coût $\boldsymbol{q(\omega)y}$
- A prendre, l'espérance.
- Donc

$$\begin{array}{rl} \mathbf{min} & \boldsymbol{cx} + \mathbf{E}[\boldsymbol{q(\omega)y}] \\ \boldsymbol{s.c.} & \boldsymbol{Ax = b} \\ & \boldsymbol{T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega)} \\ & \boldsymbol{x \in X, y \geq 0} \end{array}$$

2 étapes

- Problème maître :

$$\begin{array}{rl} \min & cx + Q(x) \\ s.c. & Ax = b \\ & x \in X \end{array}$$

avec $Q(x) = \mathbf{E}_\omega[q(\omega)y(\omega, x)]$

- solution du sous-problème :

$$\begin{array}{rl} \min & q(\omega)y \\ s.c. & W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(à x et ω fixés !)

- Résolution explicite :

1. Résoudre le sous-problème à x et ω fixés : une expression de $Q(x)$
2. Résoudre le problème maître.

Différents types de recours

- **Recours fixe**

$$W(\omega) = W$$

- **Recours simple**

$$W = [I, -I]$$

c'est-à-dire

$$h_i(\omega) - T_i(\omega)x = y_i^+ - y_i^-$$

"en plus", "en moins", avec

$$qy = \sum_i q_i^+ y_i^+ + q_i^- y_i^-$$

cf. marchand de journaux.

- **Recours complet**

$$posW = \{Wy \; : \; y \geq 0\} = \Re^{m_2}$$

- **Recours relativement complet**

$$h(\omega) - T(\omega)x \in posW \; \forall x \text{ t.q. } Ax = b$$

Contraintes de faisabilité

- On veut

$$\forall \omega, \; Q(x, \omega) < +\infty$$

- c'est-à-dire que $\forall \omega$ ("$\forall$" = avec probabilité 1),
- le sous-problème soit faisable.
- Si recours complet ou relativement complet,
- sous-problème faisable
- Soit $K_2 = \{x \; : \; h(\omega) - T(\omega)x \in posW$ p.s. $\}$.
- L'ensemble primal faisable est

$$\{x \; : \; Ax = b\} \cap K_2$$

- "Contraintes induites de faisabilité"
- A vérifier aux points extrèmes du support d'ω.

Propriétés

- $Q(.,\omega)$ linéaire par morceaux
- K_2 fermé convexe, ensemble faisable fermé convexe,
- si de plus $Q(.,\omega)$ convexe pour tout ω, problème convexe,
- sous des hypothèses de différentiabilité de $Q(.,\omega)$ p.s., on a la différentiabilité de $Q(x)$.

Cas des scénarios discrets

- Si on a une distribution discrète de $\boldsymbol{\omega}$:
- des *scénarios*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_i} \text{ avec } \boldsymbol{p_i},$$

- le problème peut s'écrire :

$$\begin{array}{lllllll}
\min & c^T x & +p_1 q_1^T y_1 & + \dots & +p_K q_K^T y_K & & \\
s.c. & Ax & & & & = b \\
 & T_1 x & +W y_1 & & & = h_1 \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & T_K x & & & +W y_K & = h_K
\end{array}$$

- Un seul PL (de grande taille), mais déterministe,
- A résoudre par une technique de décomposition duale