LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI.

SUJET PROPOSÉ PAR LAURENT BESSIÈRES

Présentation :

Informellement, le paradoxe de Banach-Tarski (1924) affirme qu'on peut découper une balle de ping-pong en morceaux et réassembler ces morceaux de manière à obtenir deux balles de poing-pong. Plus précisément, le théorème dit que la sphère unité $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ admet une partition finie

$$S^2 = \bigcup_{i=1,\ldots,n} U_i,$$

telle que

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} g_i(U_i) = A \cup B,$$

où A et B sont disjoints et isométriques à S^2, et les g_i sont des isométries de $\mathbf{R}^3$.

Un énoncé semblable est valable pour les boules fermées de $\mathbf{R}^3$, et plus généralement tous les parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^3$ exhibent de telles propriétés paradoxales. Le "paradoxe" disparaît une fois conçu que les "morceaux" utilisés dans les partitions sont pas mesurables. Les constructions utilisent de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de $\mathbf{R}^3$.

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

Références

- Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge university press.
- Pierre de la Harpe, *Mesures finiment additives et paradoxes*, dans Panoramas et Synthèses 18, 39-61, 2004.
- Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

TER L3 - Mathématiques Fondamentales

Suites récurrentes linéaires - Le théorème de Skolem-Mahler-Lech

Sujet proposé par Renaud Coulangeon

Une suite récurrente linéaire à coefficients constants est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{d-1} u_{n+d-1} \tag{1}$$

où d est un entier fixé et les a_i sont des constantes.

Les suites qui sont solutions de l'équation (1) sont faciles à expliciter, soit en utilisant des outils élémentaires d'algèbre linéaire, soit en utilisant la théorie des séries génératrices. Un exemple typique est fourni par la suite de Fibonacci, mais il existe bien d'autres exemples classiques relevant de la même théorie.

Pour une telle suite récurrente linéaire, on peut se poser la question de décrire son ensemble d'annulation, c'est-à-dire l'ensemble des entiers n tels que $a_n = 0$. À quoi peut ressembler cet ensemble d'annulation ? Pour la suite de Fibonacci

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\ ,\ x_0 = x_1 = 1$$

l'ensemble d'annulation est vide, mais pour la suite

$$z_{n+3} = z_{n+1} + z_n\ ,\ z_0 = 0,\ z_1 = 0\ ,\ z_2 = 1,$$

il est égal à l'ensemble $\{0, 1, 3\}$ et pour la suite

$$y_{n+2} = y_n\ ,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1,$$

il est constitué de tous les entiers pairs.

Question : peut-on obtenir *n'importe quelle* partie de $\mathbb{N}$ comme ensemble d'annulation d'une suite récurrente linéaire ? La réponse est négative, comme le montre le théorème suivant :

Théorème (Skolem (1933)- Mahler (1935)-Lech (1953))**.**
L'ensemble d'annulation d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants et rationnels est réunion d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques de même période.

Le travail proposé consiste, dans un premier temps, à étudier la théorie classique des suites récurrentes linéaires à l'aide des outils classiques de l'algèbre linéaire.

Dans un deuxième temps, on étudiera la démonstration relativement élémentaire du théorème de Skolem - Mahler -Lech proposée en 1986 par Georges Hansel [Hansel(1986)].

Références

[Hansel(1986)] G. Hansel : Une démonstration simple du théorème de Skolem-Mahler-Lech. *Theoret. Comput. Sci.*, 43(1):91–98, 1986.

Proposition de stage L3

Introduction à la synchronisation d'oscillateurs dans des réseaux

Lieu du stage :

Université de Bordeaux
UMR CNRS 5252 IMB
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351 Cours de la Libération
33405 Talence cedex

Direction du stage :

Philippe Thieullen
05 40 00 61 17
philippe.thieullen@u-bordeaux.fr

Projet :

La synchronisation des clignotements des lucioles, la synchronisation des cellules musculaires du coeur, la synchronisation temporelle de l'activité neuronale, sont des phénomènes difficiles à analyser et à modéliser. L'objectif du stage est de d'aborder un aspect du problème de synchronisation des systèmes complexes. On s'intéressera à des systèmes dynamiques formés d'un grand nombres d'oscillateurs chaotiques couplés selon les arrêtes d'un graphe.

Prérequis :

Un cours sur les équations différentielles ordinaires. Un cours d'algèbre linéaire (valeurs propres, ...)

Etapes du stage :

1. Lire dans un premier temps l'article introductif [P-2014] montrant quelques résutats sur le laplacien d'un graphe et les techniques de stabilités de systèmes dynamiques couplés aux proches voisins. Cette partie du stage sera l'occasion de simuler certains types de systèmes complexes.

2. Lire en détail l'article [PERV-2014], comprendre et savoir démontrer les résultats théoriques obtenus ; savoir valider les simulations. L'article mentionne à la fin un couplage de type champ moyen qui ne rentre pas dans leur approche. Faire en sorte d'être capapble d'extrapoler à ce type de couplage certains de leurs résultats (par des preuves mathématiques ou des simulations).

Bibliographie :(*articles ou notes de lecture autour du mémoire)*

[P-2014] Tiago Pereira, 2014, Stability of synchronized motion in complex networks, Preprint on the web.

[PERV-2014] Tiage Pereira, Jaap Eldering, Martin Rasmussen, and Alexei Veneziani, Towards a theory for diffusive coupling functions allowing persisitent synchronization, Nonlinearity, Vol. 27 (2014), 501-525.

Sujets Projets tuteurés
L3 Parcours Mathématiques Fondamentales
(Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr)

1. **Principe de moindre action**
   Vous avez peut-être vu qu'en mécanique classique (newtonienne), la trajectoire d'un point soumis à des forces peut être obtenue en résolvant une équation différentielle (équation du mouvement). Dans certains cas (sans frottement) la trajectoire est en fait "la" courbe qui minimise une certaine grandeur. (Un cas très particulier est le segment de droite, qui minimise la longueur). Le but du TER sera de comprendre ceci, d'en déduire d'autres équations différentielles (équations de Hamilton), et d'aboutir au théorème de Liouville et au théorème du retour de Poincaré, et à quelques applications en physique mais aussi... en arithmétique.
   Bibliographie : *V.I. Arnold : Méthodes mathématiques de la mécanique classique, chapitre 3*
   Prérequis : un goût pour l'analyse, et une curiosité pour la physique (même si aucune connaissance de physique n'est vraiment nécessaire)
   Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

2. **Modélisation probabiliste d'arbres généalogiques ; modèles de coalescence**
   Le modèle de Wright-Fisher permet de décrire de façon simplifiée l'évolution génétique d'une population. Il est à la base du modèle de Kingman qui permet de modéliser l'arbre généalogique d'individus dans une population. En particulier on peut ainsi caractériser le temps d'apparition de l'ancêtre commun à quelques individus.
   But : comprendre ces modèles et les principaux résultats. On peut envisager aussi une simulation informatique du modèle.
   Bibliographie : *http ://culturemath.ens.fr/articles-ens/mallein11/coalescent-de-kingman.html*
   Prérequis : un goût a priori pour les probabilités (même si aucune familiarité avec celles-ci n'est évidemment requise au début) et l'analyse.
   Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

Théorie spectrale des polynômes d'Hermite

Sujet proposé par A. Sebbar

L'une des définitions des polynômes d'Hermite est la suivante:

$$P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Le but du mémoire est:

- Proposer d'autres définitions
- Étudier la théorie spectrale de ces polynômes en introduisant un espace de Hilbert convenable

Référence: N.N Lebedev Special functions and their applications

Contact: Ahmed.Sebbar@math.u-bordeaux.fr