Liste d'exercices n^o 6

Exercice 1

Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que pour tout $x \in E$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que l'une au moins des deux formes est nulle.

Exercice 2

Soient ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définies pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ par
$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$
$\phi_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$
Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$ et trouver la base antéduale.

Exercice 3

On considère E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes. Pour $a \in \mathbf{C}$ on définit une application $\Phi_a(P) = P(a)$ pour $P \in E$.

1. Montrer que la famille $(\Phi_a)_{a \in \mathbf{C}}$ définit une famille de formes linéaires sur E.

2. Soient $(a_0, ...a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ distincts deux à deux. Montrer que $(\Phi_{a_0}, ...\Phi_{a_n})$ est une base de E^*. Déterminer sa base antéduale.

3. Montrer qu'il existe des constantes $(\lambda_0, ...\lambda_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ telles que pour tout $P \in E$:

$$\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \lambda_0 P(a_0) + ... + \lambda_n P(a_n).$$

Donner la valeur explicite de ces constantes.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ finie. Supposons qu'il existe dans $\mathcal{L}(E)$ une base $\mathcal{B} = (u_1, ...u_N)$ où $N = n^2$ stable par composition (i.e. telle que pour tout $(i, j), u_i \circ u_j \in \mathcal{B}$). On considère alors $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{L}(E)$ que l'on note $(f_1, ..., f_N)$ et enfin on définit $f = \sum_{i=1}^N f_i$.

1. Montrer que $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), f(u \circ v) = f(u).f(v)$.

2. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, montrer que $f(u) = 0$.

3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de rang 1, montrer que $f(u) = 0$.

4. Montrer que $f(Id_E) = 0$. Conclure.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel *de dimension finie* n et soit E^* le dual de E. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on pose

$$F^\circ = \{\phi \in E^*; \phi(x) = 0 \ \forall x \in F\}.$$

1. Prouver que F° est un sous-espace vectoriel de E^*.

2. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Prouver que :

2-a. si $F \subset G$, alors $G^\circ \subset F^\circ$,

2-b. $(F + G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

3-a. Montrer que l'application $\theta_F : E^* \to F^*$ définie par $\theta_F(\phi) = \phi_{|F}$ est linéaire et surjective.

3-b. En déduire que

$$\dim F + \dim F^\circ = \dim E.$$

Exercice 6

Soit $E = \mathbf{R}^2$ que l'on munit d'une base (e_1, e_2). On écrit donc tout élément x de E sous la forme $x = x_1e_1 + x_2e_2$. Soit B l'application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 - x_2y_1.$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la forme quadratique associée.
3. Déterminer la matrice associée à B dans la base (e_1, e_2).

Exercice 7

On considère $E = \mathbf{R}^2$ et $q : E \to \mathbf{R}$ telle que

$$q : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - 2x_1x_2.$$

1. Montrer que c'est une forme quadratique. Déterminer la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Déterminer le noyau et le rang de q.

2. Déterminer l'ensemble des éléments isotropes de q. Montrer que ce n'est pas un sous espace vectoriel de E.

Exercice 8

Soit q l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 \qquad (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3).$$

1-a. Montrer que q est une forme quadratique.
1-b. Déterminer la forme bilinéaire associée à q, notée f.
1-c. Déterminer le rang et le noyau de f.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note V_λ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, -1)$ et $v_\lambda = (0, 1, \lambda)$. Déterminer suivant les valeurs de λ l'orthogonal $V_\lambda^\perp$ de V_λ pour f. Interpréter les résultats obtenus.

3. Soient l_1, l_2, l_3 les formes linéaires de $\mathbf{R}^3$, définies par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2, \quad l_3(x_1, x_2, x_3) = -x_3.$$

3-a. Montrer que (l_1, l_2, l_3) est une base du dual de $\mathbf{R}^3$,

3-b. Déterminer les composantes dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ de la base duale de (l_1, l_2, l_3), notée $\mathcal{C}$.

3-c. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$, notée C. Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $C =^t PBP$ (où B désigne la matrice de f dans $\mathcal{B}$).